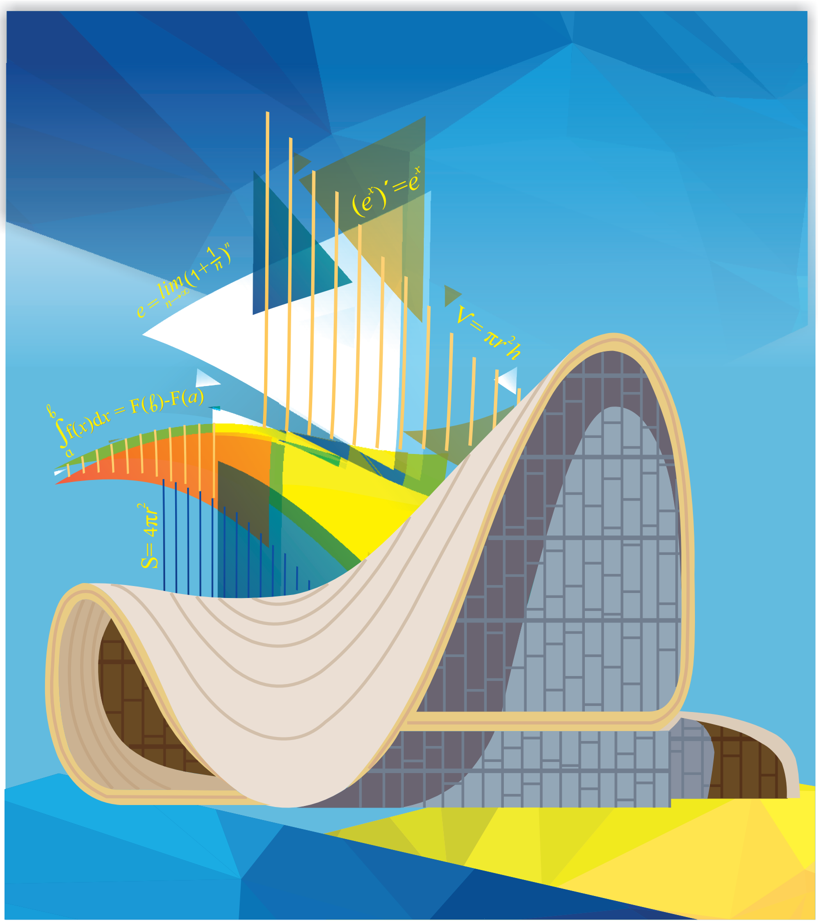
МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

11



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi ***Üzeyir Hacıbəylinin,***
sözləri ***Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Абдуррахим Гулиев

МАТЕМАТИКА 11

Методическое пособие
учебника по предмету Математика для
11 класса общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием,
просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!

Radius
Баку-2018

Оглавление

XI класс
В конце XI класса учащийся:
- решает уравнение *n* - ой степени, применяет теорему Безу;
- применяет свойство сходящейся последовательности, находит предел функций, применяет основные свойства непрерывной функции;
- находит производные некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил нахождения производной, применяет геометрический и физический смысл производной;
- применяет вычисление дифференциала при исследовании функций;
- находит первообразную функцию для некоторых функций, вычисляет интеграл функции при помощи таблицы интегралов элементарных функций и правил интегрирования;
- применяет формулу Ньютона - Лейбница, вычисляет площадь криволинейной трапеции и объемы тел, полученных вращением;
- решает системы тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений;
- в пространстве находит скалярное произведение двух векторов, применяет координатный метод при решении различных задач, разлагает вектор, заданный в пространстве по трем некомпланарным векторам;
- решает задания на нахождение уравнения плоскости и сферы;
- применяет параллельный перенос и преобразования подобия при решении задач;
- решает задачи на нахождение площади боковой и полной поверхностей и объема цилиндра, конуса и усеченного конуса, находит площадь поверхности и объем шара и его частей;
- находит площадь криволинейной трапеции и других плоских фигур при помощи определенного интеграла, сравнивает результаты измерений и вычислений и находит погрешность;
- вычисляет дисперсию и среднеквадратичное отклонение при измерении, применяет закон нормального распределения при вычислении вероятности событий.
Основные стандарты и подстандарты содержательных линий.

1.Числа и вычисления

Учащийся:

1.1. Знает числа и различные формы представления чисел и устанавливает отношения между ними.

1.1.1. Знает, что многочлен *n*-ой степени имеет *n* корней и на основе этого решает уравнения.
1.1.2. Применяет теорему Безу при делении многочлена на двучлен.
1.1.3. Знает и применяет свойство единственности корня *n*-ой степени.

1.2. Применяет математические действия, математические процедуры и определяет связь между ними.

1.2.1. Знает определение числовой последовательности и ее предела.
1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.
1.2.3. Знает понятие непрерывной функции и применяет основные свойства непрерывных функций.

2. Алгебра и функции

Учащийся:

2.1.Применяет алгебраические преобразования в различных проблемных ситуациях.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.
2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.
2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной.

2.2. Знает понятие функции, строит математические модели жизненных проблем и и решает их при помощи функций.

2.2.1. Находит стационарные точки, при помощи производной и определяет являются ли они точками экстремума.
2.2.2. Применяет дифференциальное исчисление при исследовании функций и построении их графиков.
2.2.3. Знает понятие первообразной функции и находит первообразную некоторых функций.
2.2.4. Знает понятие неопределенного интеграла, вычисляет интеграл функции при помощи таблицы интегралов элементарных функций и правил интегрирования.
2.2.5. Знает определение определенного интеграла и применяет формулу Ньютона-Лейбница.
2.2.6. При помощи определенного интеграла находит площадь криволинейной трапеции.
2.2.7. При помощи определенного интеграла находит объемы тел вращения.
2.2.8. Использует свойство четности (нечетности) и периодичности функции для вычисления определенных интегралов.

2.3. Решает уравнения и неравенства.

2.3. Решает уравнения и неравенства.
2.3.1. Решает систему тригонометрических уравнений.
2.3.2. Решает систему показательных и логарифмических уравнений.

3. Геометрия

Учащийся:

3.1. Исследует свойства фигур при помощи геометрических изображений, пространственного мышления, логических умозаключений и координатного метода.

3.1.1. Знает понятие Декартовой системы координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами.
3.1.2. Применяет различные координатные методы при решении задач в пространстве.
3.1.3. Знает уравнение плоскости и сферы и применяет их при решении задач.
3.1.4. Разлагает вектор, заданный в пространстве на три некомпланарных вектора.
3.1.5. Распознает фигуры, полученные вращением.

3.2. Применяет геометрические преобразования в пространстве, вычисляет площади поверхности и объем пространственных фигур.

3.2.1. Решает задачи, применяя параллельный перенос.
3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве.
3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объема цилиндра.
3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объема конуса и усеченного конуса.
3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара.
3.2.6. Находит площади поверхностей и объем частей шара (сегмента и сектора).

4. Измерения

Учащийся:

4.1. При помощи измерений и вычислений выполняет точные и приближенные вычисления.

4.1.1. Используя определенный интеграл находит площадь криволинейной трапеции и других фигур вращения.
4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.

5. Статистика и вероятность

Учащийся:

5.1. Собирает, систематизирует, обрабатывает и представляет статистические данные.

5.1.1.Вычисляет дисперсию и среднеквадратичное отклонение.
5.2. Понимает и применяет основные понятия теории вероятности.
5.2.1. Применяет закон нормального распределения при вычислении вероятности событий.

Введение
Структура учебника

Учебник состоит из 10 разделов.

Первый раздел под названием “Многочлены” охватывает следующие стандарты и подстандарты.

1.1. Знает числа и различные формы представления чисел, и устанавливает отношения между ними.

1.1.1. Знает, что многочлен *n-ой* степени имеет n корней и на основе этого решает уравнения.

1.1.2. Применяет теорему Безу при делении многочлена на двучлен.

1.1.3. Знает и применяет свойство единственности корня *n-ой* степени.

В этом разделе предусматривается формирование умений и применение их при решение уравнений *n-ой* степени при помощи разложения многочлена на множители в различных реальных ситуациях.Ранее уже выполнялись упражнения на разложение многочлена на множители при помощи вынесения общего множителя за скобки и формул биномиального разложения. В уроках данного раздела последовательно формируется умение деления многочлена на многочлен (в основном на двучлен).

1. Выражение компонентов деления делимого, делителя, частного и остатка.

Учащиеся должны уметь при делении представить многочлен в виде: $\dfrac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{r}{B(x)}$

2. Правило синтетического деления многочлена (схема Горнера) на двучлен $x - m$. Правило синтетического деления позволяет учащимся выполнять деление быстро, используя только коэффициенты.

3. Теорема об остатке. Учащиеся должны понимать, что при делении любого многочлена $P(x)$ на двучлен вида $x - m$ остаток будет равен $P(m)$, используя теорему об остатке. Данная теорема помогает определить является ли данный двучлен множителем многочлена, а также установить верно ли выполнено деление.

4. Теорема о разложении на множители позволяет найти множители, на основе теоремы об остатке.

5. Теорема о рациональных корнях. По условию теоремы возможно методом перебора найти рациональные корни многочлена n степени (если они существуют).

6. Основная теорема алгебры - теорема о количестве корней многочлена. Она дает возможность понять, что нахождение корней любым из методов, возможно только при их существовании.

Второй раздел под названием “Система координат в пространстве и векторы” охватывает следующие стандарты и подстандарты.

3.1.1. Знает понятие Декартовой системы координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами.

3.1.2. Применяет различные координатные методы при решении задач в пространстве.

3.1.4. Разлагает вектор, заданный в пространстве на три некомпланарных вектора.

3.1.3. Знает уравнение плоскости и сферы, решает связанные с ними задачи.
3.2.1. Применяет параллельный перенос при решении задач.
3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве при решении задач.

На первых уроках этого раздела формируются навыки изображения трехмерной системы координат и точки в этой системе. Следующие уроки предназначены для выработки умения решать различные задачи по координатам в пространстве. На этих уроках учащиеся должны научиться находить расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка или координаты точки, делящей отрезок в определенном отношении, координаты центра тяжести треугольника и применять эти правила при решении различных задач. В этом разделе также изучаются векторы в пространстве и их свойства. Раздел также охватывает уроки, вырабатывающие умение записывать векторы через базисные векторы, нахождение единичного вектора и скалярного произведения двух векторов. Новый подход, направленный на практическое применение, представлен на уроках, связанных с нахождением скалярного произведения двух векторов. Таким образом учащиеся понимают, что используя скалярное произведение векторов можно найти угол между векторами, что имеет большое практическое значение.

В учебнике, прикладными заданиями, широко представлены уравнения прямой и плоскости. Стремительное развитие технологий делает необходимым более детального изучения векторов. Например, векторы широко используются в компьютерном программном обеспечении. Мы можем располагать необходимую информацию и рисунки в любой точке экрана компьютера. А это связано с определением координат точки при помощи вектора. Поэтому, вместо абстрактного понятия “радиус -вектор”, определяющего положение любой точки в пространстве, которое мы использовали до сегодняшнего дня, вводится широко используемое понятие “вектор - позиции”. Эти понятия дают возможность осознать практическую важность проблем.

Третий раздел “Предел” охватывает следующие стандарты и подстандарты.
1.2.1. Знает определение числовой последовательности и ее предела.
1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.
1.2.3. Знает понятие непрерывной функции и применяет основные свойства непрерывности функции.

Новый подход на основе международного опыта дан при определении предела. В отличии от прошлой литературы, где давалось формальное понятие предела, здесь предел исследуется на конкретных реальных примерах. Одновременно дано и классическое определение предела (на языке “δ - ε”).

Также показаны три правила (первые два из которых очень важны и наглядны и ближе к эмпирическому методу) определения предела - графический, табличные и аналитический. Учащиеся могут приблизительно определить предел по графику, при помощи таблицы, могут найти предел (если он существует), вычислив значения при приближении как справа так и слева к заданному значению.

Это создает предпосылки для лучшего понимания "Существования предела" при дальнейшем изучении. Свойства пределов и замечательные пределы дают возможность находить пределы аналитическими способами.

Для определения непрерывности функции, являющегося достаточно сложной темой, даны многочисленные задания, для поэтапного изучения, закрепления и классификации. Следующие уроки посвящены изучению замечательных пределов, содержащих тригонометрические функции. Новым является подход для изучения бесконечных пределов и пределов в бесконечности.

Также в разделе представлены тема числовой последовательности, ее монотонности и ограниченности.

Четвертый раздел "Фигуры вращения. Цилиндр. Конус. Шар" охватывает следующие стандарты и подстандарты.

3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве.

3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объема цилиндра.

3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объема конуса и усеченного конуса.

3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара.

3.2.6. Находит площади поверхностей и объем частей шара (сегмента и сектора).

Новый подход в этом разделе состоит в том, что учащиеся находят площади поверхностей фигур опытным путем, поэтому представлено много практических занятий, на которых учащиеся получают развертки, разрезая готовые фигуры и моделируют фигуры из картона или бумаги. На этих занятиях широко используются задания, где надо вычислить площади поверхностей как конуса, так и цилиндра и шара. Выполняя данные задания, учащиеся реально понимают, что на самом деле представляет площадь поверхности, и, может связать это с геометрическими понятиями, которые потом помогают применять формулы при решении задач.

Пятый раздел "Производная функции" охватывает следующие стандарты и подстандарты.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.

2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной.

До сих пор значение понятия производной ограничивалось тем, что отражало понятие мгновенной скорости. Мы попытались показать практическую значимость производной, выразив математическим языком предела все самые маленькие изменения в природе, происходящие за очень маленький промежуток времени.

Для достижения успеха надо правильно определить план действий. Поэтому для производной были введены широко распространенные и имеющие важные значения финансовые задачи и финансовые термины - маржинальные затраты на производство, маржинальная прибыль и маржинальный доход.Учащиеся также понимают, что статистические данные, которые они определяли для решения задач до сих пор, требуют нахождения динамических данных, т.е. умения находить мгновенную скорость изменения одной величины при изменении другой. Очень важно уметь определять мгновенную скорость изменения температуры, дохода, площади, численности населения, количества произведенной продукции, структуры органов в медицине, выведения лекарственных препаратов из организма и т.д. Одним словом, в жизни многое изменчиво и эти изменения определяются при помощи дифференцирования. В этом разделе даны методы дифференцирования различных функций и много заданий прикладного характера.

Шестой раздел под названием "Объем фигур вращения" охватывает следующие стандарты и подстандарты.

3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и **объема** цилиндра.

3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и **объема** конуса и усеченного конуса.

3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и **объема** шара.

3.2.6. Находит площади поверхностей и **объем** частей шара (сегмента и сектора).

Мы попытались доказать формулы для нахождения объемов фигур вращения как эмпирически, так и аналитически. Например, при нахождении объема шара было дано пошаговое объяснение, данное Архимедом, таким образом, что учащиеся наблюдают соответствие между объемами шара и описанного цилиндра. Геометрическое доказательство объема шара представлено с этой точки зрения. Также, эмпирически представлены объемы цилиндра и конуса как объем жидкости в сосудах, имеющих соответствующую форму. Учащиеся, выполняя самостоятельно опыты, надолго запоминают данные геометрические понятия и могут дать правильную оценку их практической важности.

Далее фигуры вращения рассматриваются с точки зрения фигур, полученных вращением вокруг одной из осей. Объем такой фигуры можно вычислить, для заданных границ, при помощи определенного интеграла.

Седьмой раздел "Применение производной к исследованию функций" охватывает следующие стандарты и подстандарты.

2.2.1. Находит стационарные точки, при помощи производной и определяет являются ли они точками экстремума.

2.2.2. Применяет дифференциальное исчисление при исследовании функций и построении их графиков.

Материалы раздела построения графиков функции по аналитической формуле и исследования его свойств больше представлены на конкретных примерах, а не на теоретических материалах. В этом разделе представлены ситуационные задачи на оптимизацию, для решения которых широко применяется производная. Задачи на оптимизацию, это задачи в которых согласно ситуации необходимо найти максимальное или минимальное значение.

Это например такие задачи, где при конструировании требуется найти как можно получить больше продукта при малых затратах, когда доход является самым высоким или затраты на аренду самыми низкими, задачи на определение оптимальной площади, при наименьших затратах, покрытие максимальной площади, или как изменить одно из двух измерений, чтобы площадь была максимальной и т.д. В учебнике дан план по которому учащиеся могут проводить последовательно исследование заданий на оптимизации. Вот эта последовательность.

1. Внимательно прочитайте условие. Изобразите рисунок.
2. Создайте список соответствующих переменных и постоянных, что будет меняться, а что останется неизменным и какие единицы будете использовать. Обозначьте на рисунке единицы измерения (если они заданы).
3. Выберите соответственно параметр x и искомую величину выразите функцией $f(x)$. Найдите экстремумы данной функции.
4. Объясните полученный результат на примере реальной ситуации.

Восьмой раздел под названием "Интеграл" охватывает следующие стандарты и подстандарты.

2.2.3. Знает понятие первообразной функции и находит первообразную некоторых функций.

2.2.4. Знает понятие неопределенного интеграла, вычисляет интеграл функции при помощи таблицы интегралов элементарных функций и правил интегрирования.

2.2.5. Знает определение определенного интеграла и применяет формулу Ньютона-Лейбница.

2.2.6. При помощи определенного интеграла находит площадь криволинейной трапеции.

2.2.7. При помощи определенного интеграла находит объемы тел вращения.

2.2.8. Использует свойство четности (нечетности) и периодичности функции для вычисления определенных интегралов.

Учащиеся понимают, что при помощи дифференциала можно найти значение функции в точке, мгновенное изменение и то, что интеграл является действием, обратным для дифференцирования, т.е. дает возможность найти изменение на данном промежутке, суммируя все значения для данного мгновенного значения. Используя опыт мировых учебников для вычисления интеграла был применен новый подход. Таким образом мы отказались от концепции интеграла как площади криволинейной трапеции, которая использовалась до настоящего времени и применили концепцию площади, ограниченной функциональной кривой на заданном отрезке. Таким образом, учащиеся понимают, что площадь моделирует ситуацию, соответствующую значению функции, другими словами что значение этой функции выражается различными единицами измерения - манатами, градусам, килограммами и т.д. Понятие криволинейной трапеции ассоциировалось с тем, что изменение является статичным и может быть выражено только единицами площади. Большое место отводится прикладным заданиям. И тут представлены задачи, аналогичные ситуационным задачам на дифференцирование. Например, если в задаче на производную использовалась данные о мгновенной скорости, увеличения количества бактерий, то в интегрировании представлены задачи, где необходимо найти количество увеличения бактерий на заданном промежутке. Это взаимное соответствие учащиеся в наглядном виде повторяют на каждом из двух уроков.

Десятый раздел называется "Статистика и вероятность" и охватывает следующие стандарты и подстандарты.

5.1.1. Вычисляет дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

5.2. Понимает и применяет основные понятия теории вероятности.

5.2.1. Применяет закон нормального распределения при вычислении вероятности событий.

Для обработки статистических данных определяются правила нахождения в общем виде и на примерах таких статистических показателей как дисперсия и стандартное (среднее квадратичное) отклонение. Для оценки статистических данных используют график нормального распределения как в обобщенном виде, так и на примерах. Также при выполнении заданий для представления данных используется диаграмма “ящик с усами”. Она позволяет ясно увидеть в каком интервале данные сконцентрированы (ящик), и, какие данные расположены справа и слева от интервала концентрации (“усы”) и диапазон изменения.

На уроках, посвященных вычислению вероятности, представлен обзорный план заданий, изученных ранее, где для вычисления вероятности используют пространство элементарных событий и виды событий.

Десятый раздел под названием “Уравнения, неравенства, системы уравнений” охватывает следующие стандарты и подстандарты.

2.3.1. Решает систему тригонометрических уравнений.

2.3.2. Решает систему показательных и логарифмических уравнений.

Рекомендации для работы с учащихся с низким уровнем обучаемости:

1. Приучать принимать участие в обсуждениях при исследованиях и практических занятиях;
2. С первых уроков, при объяснении математического понятия, обращать внимание на непосредственное применение формул и определений для прикладных заданий, задавать обучающие задания соответствующего уровня на дом;
3. Поощрять выполнение заданий при помощи простых и кратких объяснений;
4. Добиваться, чтобы при выполнении геометрических заданий чертежи были выполнены при помощи линейки и циркуля, или при помощи вырезания и склеивания;
5. После объяснения теорем и правил записывать их в тетрадь своими словами и приводить примеры.

Рекомендации для работы учащихся с хорошим уровнем обучаемости:

1. Добиваться выполнения всех прикладных заданий из учебника;
2. В методическом пособии для учителя представлено доказательство некоторых теорем предусмотренных в учебнике, а также альтернативные доказательства доказанных теорем. Одаренным учащимся рекомендуется выполнить эти доказательства самостоятельно. Данные работы собираются в портфолио учащегося.
3. Выполнять проектные работы прикладного характера в более развернутой форме.

Важные линки:

1. http://www.algebra-class.com
2. www.classzone.com
3. http://www.shodor.org/interactivate/activities
4. http://www.mathwarehouse.com
5. http://www.netplaces.com
6. http://www.purplemath.com
7. https://www.khanacademy.org

Таблица планирования по разделу 1

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
1.1. Знает числа и различные формы представления чисел и устанавливает отношения между ними. 1.1.1. Знает, что многочлен *n-ой* степени имеет n корней и на основе этого решает уравнения. 1.1.2. Применяет теорему Безу при делении многочлена на двучлен. 1.1.3. Знает свойство единственности корня *n-ой* степени и применяет его.	1-4	Деление многочлена на многочлен. Теорема об остатке	4	7-12
	5	Теорема о разложении многочлена на множители	1	13-14
	6-7	Нахождение рациональных корней	2	15-17
	8-9	Основная теорема алгебры	2	18-21
	10-12	Функция - многочлен. Рациональная функция	3	22-28
	13	Обобщающие задания	1	29
	14	Задания для суммативного оценивания по разделу 1	1	
		Всего	14	

Урок 1- 4. Деление многочлена на многочлен. Теорема об остатке. 4 часа. Учеб. стр. 7-12

Содержательный стандарт.

1.1.2. Применяет теорему Безу при делении многочлена на двучлен.

Навыки учащегося:

• выполняет деление многочлена на многочлен столбиком;

• записывает делимое, делитель, частное и остаток;

• записывает равенство выражающее деление многочлена на многочлен и применяет его для проверки решения $\frac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

• выполняет деление многочлена на двучлен методом синтетического деления и записывает результат в виде $\frac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \frac{r}{x-m}$

• при решении заданий применяет теорему об остатке.

Внимание учащихся акцентируется на том, что деление многочлена на многочлен, в частном случае на двучлен, выполняется аналогично правилу деления целых чисел столбиком. Нужно отметить, что при делении целых чисел их надо разделить на разряды, записывать в частном одну цифру на каждом шаге деления и не забывать записывать в частном нуль, при отсутствии единицы в разряде. Как эти правила применяются при делении многочленов на многочлен? Объяснение деления столбиком дается непосредственно на примере в учебнике.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.1. 1) Выполните деление многочлена на многочлен столбиком.

Решение: с) Сначала многочлен - делимое запишем по порядку убывания степеней, а затем выполним деление столбиком.

$$
\begin{array}{l|l}
-x^3+2x^2+4x+5 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{-x^3-2x^2} & -x^2+4x-4 \\
\qquad 4x^2+4x & \\
\qquad -\ \underline{4x^2+8x} & \\
\qquad\qquad -4x+5 & \\
\qquad\qquad -\ \underline{-4x-8} & \\
\qquad\qquad\qquad 13 &
\end{array}
$$

При делении многочлена $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 5$ на многочлен $B(x) = x + 2$ в частном получается $Q(x) = -x^2 + 4x - 4$, в остатке $R(x) = 13$.

При помощи равенства $P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, проверим правильно ли выполнено деление.

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) = (x + 2)\cdot(-x^2 + 4x - 4) + 13=$$

$$= -x^3 + 4x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 8 + 13 = -x^3 + 2x^2 + 4x + 5 = P(x)$$

У.4. Выполните деление.

b) $(x^4 + 2x^2 + 4):(x^2 - 2)$

Решение: запишем многочлен - делимое и многочлен - делитель в порядке убывания степеней, введем в запись отсутствующие члены с коэффициентом равным 0 и выполним деление столбиком.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 2x^2 + 0\cdot x + 4 & x^2 + 0\cdot x - 2 \\ \cline{2-2}
-\;x^4 + 0\cdot x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + 4 \\ \cline{1-1}
4x^2 + 0\cdot x + 4 & \\
-\;4x^2 + 0\cdot x - 8 & \\ \cline{1-1}
12 &
\end{array}$$

Таким образом, $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 4}{x^2 - 2} = x^2 + 4 + \dfrac{12}{x^2 - 2}$

У.5. Зная, что $x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot Q(x)$, найдите $Q(2)$.

Решение: из условия следует, что многочлен $x^3 - x^2 - 5x + 6$ делится на двучлен $x - 2$ без остатка. Выполнив деление найдем многочлен - частное.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\;x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + x - 3 \\ \cline{1-1}
x^2 - 5x \qquad & \\
-\;x^2 - 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
-3x + 6 & \\
-\;-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Значит, $Q(x) = x^2 + x - 3$. Тогда получим, что $Q(2) = 2^2 + 2 - 3 = 3$.

При делении многочленов выполняется много заданий, где надо делить на двучлен, таким образом отмечается важность метода синтетического деления.

Пример. $(2x^4 + 3x^3 - x - 5) : (x + 2)$

1. Коэффициенты многочлена - делимого записываются в порядке убывания степеней. Отсутствующие члены вводятся с коэффициентом равным 0.
2. В делителе, двучлене вида $x - m$, вместо постоянной m записывается соответствующее число.

$$x + 2 = \qquad 2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 5$$

$$= x - (-2) \qquad \text{коэффициенты делимого}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
-2 & 2 & 3 & 0 & -1 & -5 \\
\times & & -4 & 2 & -4 & 10 \\
\hline
 & 2 & -1 & 2 & -5 & 5
\end{array}$$

коэффициенты частного остаток

$$2x^3 - x^2 + 2x - 5$$

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x - 5}{x + 2} = 2x^3 - x^2 + 2x - 5 + \frac{5}{x + 2}$$

Особое внимание уделяется умению правильно выполнять математические записи и словесно выражать математические процедуры. Например, при выполнении деления многочлена на многочлен, учащийся должен уметь словесно выражать мысль о том, каким моментам надо уделять особое внимание и как использовать важные правила. На этом уроке нужно выделить следующие важные моменты.

Деление столбиком является более обобщенным способом.

Синтетическое деление на двучлен вида $x–m$ является альтернативным способом. Результат деления записывается в виде $\frac{P(x)}{x - m} = Q(x) + \frac{r}{x - m}$

Правильность выполнено деление можно проверить при помощи формулы $P(x) = Q(x)\ B(x) + r$.

Теорема об остатке (теорема Безу) исследуется коллективным обсуждением в классе.

Теорема	Пример
Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - m$ равен значению многочлена $P(x)$ в точке $x = m$: $r = P(m)$	$(x^3 - 4x^2 + 5x + 1):(x - 3)$ $\begin{array}{c\|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ & & 3 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{7} \end{array}$ $P(3) = 7$

Из теоремы об остатке можно сделать вывод, что значение многочлена и остатка равны при заданном значении r. Для этого нужно выполнить задание следующего типа. Например, a) вычислите значение P(2) многочлена $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, используя метод синтетического деления и теорему об остатке.

1. При применении теоремы об остатке в данном примере надо словами записать: “ По теореме об остатке, значение остатка при делении многочлена на двучлен $x - 2$ и значение P(2) функции $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ равны.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 5 & 3 \\ & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 5 \end{array}$$

2. Найдем остаток при помощи синтетического деления.

3. Значит P(2) = 5, проверим: $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 3 = 8 - 16 + 10 + 3 = 5$

Разъясним простую запись теоремы об остатке.

При делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - m$ используется следующее равенство: $P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$; если $x = m$ тогда,

$$P(m) = (m - m) \cdot Q(m) + r = 0 \cdot Q(m) + r = r$$

b) Найдем действительное число a, если известно, что при делении многочлена $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax - 7$ на двучлен $(x + 1)$ остаток равен 5.

$(-1)^4 - 2(-1)^3 + a(-1) - 7 = 5$; $1 + 2 - a - 7 = 5$; $a = -9$

Многочлен будет иметь вид $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x - 7$

Решение некоторых заданий из учебника:

У.10. Многочлен $P(x)$ разделите на двучлен $x - m$ методом синтетического деления и сравните полученный остаток со значением многочлена $P(m)$.

c) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$; $m = -2$

Решение: разделим многочлен $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$ на двучлен $(x + 2)$ при помощи синтетического деления. Здесь, принимая во внимание, что $m = -2$ запишем следующее $x + 2 = x - (-2)$.

$$4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$$

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 4 & 5 & -6 & -4 \\ * & \downarrow & -8 & 6 & 0 \\ \hline & 4 & -3 & 0 & -4 \end{array}$$

$4x^2 - 3x + 0$ остаток

В остатке получим $r = -4$. Теперь вычислим значение $P(-2)$:

$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 4 = -32 + 20 + 12 - 4 = -4$.

Как видно $r = P(-2)$.

У.11. По теореме об остатке найдите: 1) остаток от деления на двучлен $x - 4$ многочлена: а) $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$

Решение: если $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ многочлен -делимое, а $B(x) = x - 4$ - многочлен делитель, то в рассматриваемом случае при $m = 4$ можно найти остаток по формуле $r = P(m)$:

$$r = P(4) = 4^3 + 3\cdot4^2 - 5\cdot4 + 2 = 64 + 48 - 20 + 2 = 94.$$

У.16. **а)** При каком значении c остаток при делении многочлена $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ на двучлен $x - 2$ равен остатку при делении этого же многочлена на двучлен $x + 1$?

По условию $r_1 = r_2$, тогда

$$P(2) = P(-1). \text{ Отсюда:}$$

$$-2\cdot2^3 + c\cdot2^2 - 5\cdot2 + 2 = -2\cdot(-1)^3 + c\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) + 2$$

$$-16 + 4c - 10 + 2 = 2 + c + 5 + 2$$

$$3c = 33$$

$$c = 11$$

При $c = 11$ остатки при делении будут равными.

У.18. Многочлен $P(x)$ делится на $(x - 1)$ без остатка, а при делении на $(x + 2)$ дает остаток 3. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x^2 + x - 2)$.

Решение: по условию $P(1) = 0$, $P(-2) = 3$. Тогда, в общем виде, остаток от деления $P(x)$ на многочлен $(x^2 + x - 2)$ должен иметь вид многочлена первой степени:

$R(x) = ax + b$.

Значит,

$P(x) = (x^2 + x - 2)\cdot Q(x) + ax + b$ или $P(x) = (x + 2)\cdot(x - 1)\cdot Q(x) + ax + b$.

Отсюда, зная, что $P(1) = a + b$, $P(-2) = -2a + b$ можно записать систему:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ -2a + b = 3 \end{cases}$$

Из данной системы получим $a = -1$, $b = 1$. Значит, остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x^2 + x - 2)$ равен $R(x) = -x + 1$.

Рабочий лист №1

Имя_________ Фамилия___________ Дата______

1) Выполните деление, применяя деление в столбик.

$(3x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$

$(3 - 4x - 2x^2) : (x + 1)$

$(x^3 + 8) : (x + 2)$

2) Выполните деление при помощи метода синтетического деления.

$(x^2 - 5) : (x - 5)$

$(4x^2 - 5x + 3) : (x + 3)$

$(4x^3 + 2x - 3) : (x - 2)$

3) По схеме синтетического деления найдите коэффициенты *a, b, c.*

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & -4 & 0 & 7 & -1 \\ & & 6 & 4 & b & 30 \\ \hline & 3 & a & 4 & 15 & c \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 5 & 6 \\ & & a & c \\ \hline & 1 & b & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 3 & a & -2 & 3 & c \\ & & b & 21 & 72 \\ \hline & 3 & 7 & 24 & 68 \end{array}$$

4) При помощи теоремы об остатке и синтетического деления, найдите $P(a)$.

$P(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6;\quad a = -2$	$P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x;\quad a = -2$
$P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9;\quad a = 1$	$P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x;\quad a = -1$
$P(x) = 6x^3 - x^2 + 4x + 3;\quad a = 3$	$P(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + 5;\quad a = 1/2$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 9;\quad a = -1$	$P(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45;\quad a = 3$

Рабочий лист №2

Имя_________ Фамилия___________ Дата______

1) При делении многочлена $P(x) = bx^3 + ax^2 + 3x$ на $x + 1$ в остатке получается –10, при делении на $x – 2$ в остатке получается 26. Найдите числа a и b.

2) Остаток при делении многочлена $P(x) = x^3 – 2x^2 + a$ на $x – 3$ в три раза больше остатка при делении этого же многочлена на $x + 3$.
a) Найдите a .
b) Найдите остаток от деления данного многочлена $P(x)$ на $x + 2$.

3) Проверьте является ли заданный двучлен множителем многочлена.

a) $x + 2$, $P(x) = 4x^2 – 2x + 5$

b) $3x – 6$, $P(x) = 3x^4 – 6x^3 + 6x^2 + 3x – 30$

Урок 5. Теорема о разложении многочлена на множители.

Учеб. стр. 13-14.

Содержательный стандарт

1.1.2. Применяет теорему Безу при делении многочлена на двучлен.

1.1.3. Знает и применяет свойство единственности корня n-ой степени.

Навыки учащегося:

• определяет является ли заданный двучлен множителем многочлена, при помощи теоремы об остатке;

• объясняет теорему о разложении на множители на примерах.

Сначала вспомним способы разложения многочлена на множители. Обсуждение проводится на примерах.

1. Разложите многочлен $16x^4 - 81$ на множители.

$16x^4 - 81 = (4x^2)^2 - 9^2 = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9).$

2. Способ группировки и вынесения общего множителя за скобки.

$x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = x^2(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 7)$

Для этих методов, мы применяли формулы сокращенного умножения. Также вспомним, правило разложения трехчлена на множители. Теперь посмотрим как можно разложить на множители многочлен высших степеней, используя теорему об остатке и разложении на множители.

Если при делении многочлена на многочлен остаток равен нулю, то многочлен - делитель является множителем многочлена - делимого.

$$\frac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \frac{r}{x-m} \qquad \frac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \frac{0}{x-m}, \ P(x) = (x-m)Q(x)$$

Теорема о разложении на множители	
Теорема	**Пример**
Теорема. Если число m является корнем многочлена $P(x)$, то двучлен $x - m$ является множителем многочлена $P(x)$. Верно и обратное утверждение, т.е. если двучлен $x - m$ является множителем многочлена $P(x)$, то $P(m) = 0$.	Так как, $P(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + 1 = 0$, то двучлен $x + 1$ является множителем многочлена $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

Учащийся, используя теорему об остатке, проверяет является ли заданный двучлен множителем многочлена. Остальные множители он находит при помощи синтетического деления.

Пример 1. Зная, что $f(-3) = 0$, разложите на множители многочлен $f(x) = 2x^3 + 11x^2 + 18x + 9$.

Решение: так как $f(-3) = 0$, то двучлен $x - (-3) = x + 3$ является одним из множителей многочлена $f(x)$, другой множитель найдем при помощи синтетического деления.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^3 & 11x^2 & 18x & 9 \\
-3 & 2 & 11 & 18 & 9 \\
 & & -6 & -15 & -9 \\
\hline
 & 2 & 5 & 3 & 0
\end{array}
$$

$2x^3 + 11x^2 + 18x + 9 = (x + 3)(2x^2 + 5x + 3)$

$2x^2 + 5x + 3 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = -3/2$

$2x^3 + 11x^2 + 18x + 9 = 2(x + 3)(x + 1)(x + 3/2)$

Учащийся одновременно применяя и, метод деления и, теорему об остатке, определяет является ли двучлен множителем многочлена. Например, в примере ниже он сразу применяет теорему.

? Решение некоторых упражнения из учебника:

У.3. Зная, что $f(a) = 0$, разложите многочлен на множители.

1) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 12x + 80$; $a = 10$

Решение:При $f(10) = 0$ многочлен $f(x)$ делится на двучлен $(x - 10)$ без остатка: $x^3 - 12x^2 + 12x + 80$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
10 & 1 & -12 & 12 & 80 \\
 & & 10 & -20 & -80 \\
\hline
 & 1 & -2 & -8 & 0 \\
 & x^2 - & 2x & - 8 & r = 0
\end{array}
$$

Значит, можно записать $x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = (x - 10)(x^2 - 2x - 8)$. Отсюда, разлагая квадратный трехчлен на множители получим:

$$x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = (x - 10)(x - 4)(x + 2)$$

У.7. Используя теорему о разложении на множители покажите, что двучлен $x + 1$ является множителем многочлена $P(x) = x^{25} + 1$, и не является множителем многочлена $Q(x) = x^{25} - 1$.

Решение: по теореме об остатке $P(-1) = 0$.

Проверим: $P(-1) = (-1)^{25} + 1 = -1 + 1 = 0$, значит $x + 1$ является множителем $P(x)$. $Q(-1) = (-1)^{25} - 1 = -1 - 1 = -2$, значит

$x + 1$ не является множителем многочлена $Q(x)$.

Урок 6 - 7. Нахождение рациональных корней. 2часа. Учеб. стр. 15 - 17.

Содержательный стандарт. 1.1.3. Знает и применяет свойство единственности корня n -ой степени.

Навыки учащегося:

- определяет является ли заданный двучлен множителем многочлена.
- находит другие множители многочлена при помощи синтетического деления.

Вместе с учащимися изучается текст, взятый из исторических источников о том, как Тарталья выдвинул следующее обвинение Кардано: “Ты украл мою формулу”. Эта информация может стать мотивацией для учащихся при нахождении корней кубического уравнения. Можно задать учащимся самостоятельно, при помощи интернет источников, найти информацию о методе Кардано.

Исторический спор - кто же впервые решил кубическое уравнение: Кардано или Тарталья? На самом деле спор разгорелся между тремя итальянскими учеными. Живший в нищете и голоде, математик Тарталья заявил, что нашел формулу для решения кубического уравнения. Узнав эту новость, другой итальянский математик Кардано, поспешил к Тарталья и предложил открыть ему формулу, пообещав опубликовать ее. Тарталья не согласился. Продолжая настаивать на своем Кардано, наконец, получил формулу (в некоторых источниках имеется информация, что Кардано узнал секрет формулы из поэмы, которую написал Тарталья). А через некоторое время Кардано опубликовал эту формулу под своим именем. Разгневанный таким поворотом событий Тарталья начал выступать против Кардано. Кардано же использовал в борьбе против Тарталья своего очень одаренного студента Феррари, который уже тогда мог решать уравнения четвертой степени. И только через много лет после этого спора, благодаря работам норвежского математика Нильса Абеля и французского математика Эвариста Галуа стало известно, что в общем случае формула для корней уравнения 5-й и более степеней не существует.

Теорема о нахождении рациональных корней исследуется сразу на примерах. На этом уроке изучается теорема о нахождении рациональных корней. Какие числа могут являться корнями многочлена? Исследуется теорема о нахождении рациональных корней уравнения. С учащимися проводится беседа о том, какими числами могут являться корнями. Пусть, имеется следующее разложение. Что можно сказать о корнях данного многочлена?

$$P(x) = \underbrace{(x+3)}\underbrace{(2x-1)}\underbrace{(x+\sqrt{2})}\underbrace{(x-\sqrt{2})}\underbrace{(x-4+5i)}\underbrace{(x-4-5i)}$$

Корни: -3, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $4-5i$, $4+5i$,

рациональный корень

иррациональный корень

комплексные корни

действительные корни

Не действительные корни

Корнями многочлена могут являться рациональные, иррациональные и комплексные числа. У многочлена может быть два и более повторяющихся (кратных) корня.

Теорема о нахождении рациональных корней. Если $\frac{p}{q}$ простое (несократимое) рациональное число при $n > 0$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + +a_0$, то число p является целым делителем a_0, а q целым делителем a_n.

Доказательство теоремы не предусмотрено в курсе школьной программы. Хотя оно очень простое. Так как число $\frac{p}{q}$ является нулем P(x), то справедливо следующее:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Умножим каждую часть уравнения на q^n

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0,$$

отсюда получим

$$a_np^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_0q^{n-1}).$$

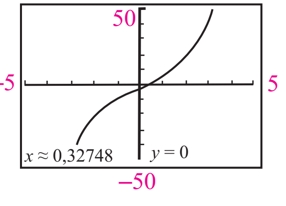
Каждая из двух частей равенства является целым числом, значит число q является делителем члена a_np^n. Так как p/q является простым рациональным числом, то их общим множителем могут являться только ±1, т.е. числа p и q являются взаимно простыми числами, значит числа p^n и q также являются взаимно простыми числами, тогда число p является делителем a_n. По аналогичному правилу, решим равенство относительно члена a_0q^n, вынося множитель p за скобку:

$$a_0q^n = p(-a_np^{n-1} - \ldots - a_1q^{n-1}).$$

Из последнего равенства получим, что число p является множителем числа a_0q^n. Т.е. так как числа p и q являются взаимно простыми, то число p является делителем числа a_0.

Здесь необходимо обратить внимание на следующее. Говоря о теореме о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами надо понимать, что у него обязательно будут рациональные корни. Подытожив, можно сказать, что рациональные корни (если они существуют), надо искать среди чисел p/q где p и q являются делителями коэфциентов a_0 и a_n соответственно. Именно поэтому эта теорема называется теоремой о нахождении рациональных корней. Понятно, что у каждого числа может быть много множителей и это приводит к тому, что поиск нужно производить среди множества чисел, что довольно трудоемко. При помощи графкалькулятора можно построить график соответствующей функции и приблизительно определить какое рациональное число будет корнем, поэтому на современном этапе обучения от учащихся требуется умение работать с графкалькулятором.

Зная один рациональный корень многочлена, можно при помощи метода синтетического деления, найти другие множители, после чего можно найти остальные рациональные, иррациональные и комплексно - сопряженные корни. Возможно, что многочлен не имеет рационального корня, но может иметь иррациональные или комплексные корни. В этом случае корни можно найти по графику при помощи аппроксимации.



Например, многочлен P(x) = $x^3 + 6x - 2$ не имеет рационального корня, однако по графику видно, что существует иррациональный корень, приближенное значение которое $x \approx 0{,}32748$ и еще два мнимых корня.

Рекомендуется привести примеры многочленов, которые имеют рациональные, иррациональные и комплексные корни.
Например, многочлен $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 2$ может быть примером для рациональных и иррациональных корней.

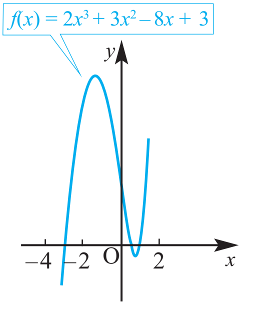
? Решение некоторых заданий из учебника:

У.12. Для многочлена $P(x)$ известно, что коэффициент при старшем члене $a = 2$ и $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$. Запишите многочлен в виде произведения множителей.

Решение: так как известно, что для многочлена третьей степени $P(x)$ старший коэффициент $a = 2$ и $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$, то у многочлена $P(x)$ есть множители $(x + 2)$, $(x - 1)$ и $(x - 2)$. Так как коэффициент при x^3 равен 2, то разложение $P(x)$ на множители имеет вид:

$$P(x) = 2\cdot(x + 2)(x - 1)(x - 2).$$

У.13. На рисунке изображен график функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.
По графику определите нули многочлена. Найдите корни многочлена по правилу нахождения рациональных корней и при помощи метода синтетического деления найдите остальные корни. Сравните результат с графиком.



Решение: если многочлен $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ имеет рациональные корни, то они находятся среди чисел: $\pm 1; \pm 3; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{3}{2}$. По графику можно приблизительно установить, что это $x = -3$. Он является корнем многочлена. При помощи синтетического деления проверим, что остаток при делении многочлена на двучлен $x + 3$ равен 0:

–3	2	3	–8	3
	↓	–6	9	–3
	2	–3	1	0

Значит, $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x + 3)(2x^2 - 3x + 1)$. Другие корни многочлена можно найти решив уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$: 1 и $\dfrac{1}{2}$. По графику можно убедиться, что корни многочлена найдены правильно.

Оценивание. Выполняются задания из учебника. Оценивание проводится методом наблюдения. Так как нахождение корней многочлена достаточно трудоемкая работа, то ее можно организовать в группах. Учащиеся должны уметь, после нахождения одного рационального корня (выбрав среди возможных рациональных корней), применить метод синтетического деления, и найти другие множители и корни, разложив полученные множители при помощи уже известных методов. Только после того, как учащиеся разложат многочлен на все линейные множители, они могут быть уверены, что нашли все корни уравнения.

Урок 8-9. Основная теорема алгебры. 2 часа. Учеб. стр 18-21.

Содержательный стандарт. 1.1.1. Знает, что многочлен n-ой степени имеет n корней и на основе этого решает уравнения.
1.1.3. Знает и применяет свойство единственности корня n-ой степени.

Навыки учащегося
• представляет основную теорему алгебры на примерах;
• выражает многочлен в виде произведения всех линейных множителей ;
• показывает на примерах существование n множителей и n корней для многочлена n-ой степени;
• находит рациональные, иррациональные и комплексные корни многочлена n-ой степени.

На прошлом уроке было рассмотрено, что для нахождения корней многочлена важно уметь полностью представить многочлен в виде линейных множителей. Основная теорема алгебры дает возможность представить многочлен в виде произведения линейных множителей. Основную теорему алгебры впервые доказал немецкий ученый Карл Гаусс (1777-1855).

Теорема. Любой многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень на множестве комплексных чисел.

Из теоремы, представленной в учебнике следует, что многочлен n степени можно представить в виде произведения n линейных множителей:

$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots (x - c_n)$

Теорема объясняется на примерах.

1. Многочлен первой степени $P(x) = x - 3$ имеет один корень. Найдем корни уравнения, заданного многочлена: $x - 3 = 0$; $x = 3$

2. Многочлен второй степени $P(x) = x^2 + 3x + 4$ имеет два множителя и два корня.

$x^2 + 3x + 4 = 0$, $(x + 1)(x + 3) = 0$; $x = -1$ и $x = -3$

3. Многочлен третьей степени имеет три множителя и три корня.

$P(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4) = x(x + 2i)(x - 2i)$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2i$ и $x_3 = -2i$

4. Многочлен четвертой степени имеет четыре множителя и четыре корня.

$P(x) = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x + i)(x - i)$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -i$ və $x_4 = i$

Внимание учащихся концентрируется на то, что основная теорема алгебры помогает определять наличие корней, но не дает возможность находить их.

Корни уравнения можно найти только после того, как при помощи метода синтетического деления найдены все множители. А для этого необходимо выбрать из списка возможных рациональных корней хотя бы один корень (найти первый корень - это очень важный момент). После нахождения всех линейных множителей, можно записать все корни. Если коэффициент при старшем члена не равен 1, то это список рациональных корней увеличивается. Поэтому, больше рассматриваются многочлены у которых $a_n = 1$.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.18. Решите уравнение. е) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$

Решение: если данное уравнение имеет корни, то они расположены среди чисел $\pm1, \pm2, \pm4$.

Проверим, является ли число $x = 1$ корнем данного уравнения.

$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 =$

$= (x - 1)(x^3 - x^2 + 4x - 4)$

	x^4	$-2x^3$	$+5x^2$	$-8x$	$+4$
1	1	–2	5	–8	4
	↓	1	–1	4	–4
	1	–1	4	–4	0

заданное уравнение можно записать в виде $(x - 1)(x^3 - x^2 + 4x - 4) = 0$ или $(x - 1)^2(x^2 + 4) = 0$. Отсюда $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$.

Надо обратить внимание учащихся на то,что многочлен n-ой степени может иметь как максимум n корней.

У.24. Прибыль, которую получает фирма по пошиву спортивных рубашек, можно смоделировать функцией $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$ (здесь P - прибыль (в млн. ман.), x - количество рубашек (млн. штук). В отчете показано, что за 4 млн. пошитых рубашек была получена прибыль в размере 4 млн. манат. Какое количество рубашек надо пошить, чтобы их количество стало меньше, а прибыль осталась бы такой же?

Решение: по условию надо найти корень уравнения $-x^3 + 4x^2 + x = 4$ отличный от 4. Запишем это уравнение в виде $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$. Разделим многочлен $x^3 - 4x^2 - x + 4$ по правилу синтетического деления на $(x - 4)$.

4	1	–4	–1	4
	↓	4	0	–4
	1	0	–1	0

Так как $x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x - 4)\cdot(x^2 - 1) = (x - 4)\cdot(x - 1)(x + 1)$, то корни отличные от 4 равны –1 и 1. Корень $x = -1$ не удовлетворяет реальной ситуации. Значит, фирма от пошива 1 млн. спортивных рубашек получит прибыль 4 млн. манат.

Оценивание. Чтобы проверить как учащиеся поняли основную теорему алгебры им предлагают записать в виде произведения множителей многочлен, соответствующий заданным корням. Например, записать и найти степень многочлена, с корнями равными 2, –3, и 3-х кратным корнем (–1). Учащиеся должны записать следующий многочлен $P(x) = (x - 2)(x+3)(x+1)^3$ и объяснить, что этот многочлен имеет 5 множителей и степень 1+1+3=5.

Рабочий лист № 3

Имя__________ Фамилия____________ Дата_______

1) Проверьте является ли данное число корнем уравнения.

$f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4, \quad x = 1$

$f(x) = x^4 - x^2 - 3x - 3, \quad x = -1$

$f(x) = x^4 - x^2 - 3x + 3, \quad x = 2$

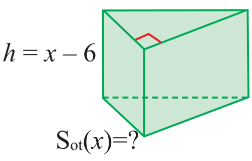
$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3, \quad x = -i$

2) Найдите все корни уравнения.

a) $f(x) = x^3 + 72 - 5x^2 - 18x$
b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$
c) $f(x) = x^3 - 8x^2 - 23x + 30$
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

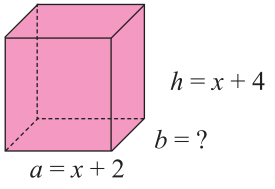
3) По данным рисунка запишите выражение для нахождения других размеров призм.

$V(x) = 2x^3 - 17x^2 + 27x + 18$



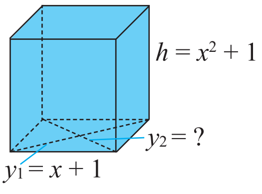
прямая призма

$V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$



прямоугольный параллелепипед

$V(x) = x^4 - 1$



прямая призма, в основании которой лежит ромб

Рабочий лист № 4

Имя__________ Фамилия____________ Дата______

1) Найдите многочлен P(x) наименьшей степени, если старший коэффициент равен 1, а корнями являются следующие числа. Укажите степень полученного многочлена.

3; 0; –2

1; –1; 2; –2; 3

–1; –1; 3 и 4

3; $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$

1; 1; i; $-i$

2) Установите соответствие между графиком и функцией. Разложите многочлены на множители, зная, что график пересекает ось x в точках, которые являются целыми числами.

a. $P(x) = x^2 + 5x + 4$

b. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

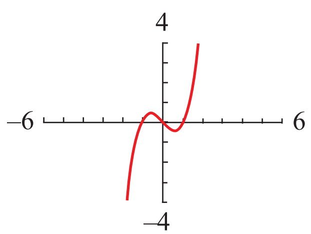
c. $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$

d. $P(x) = x^3 - x$

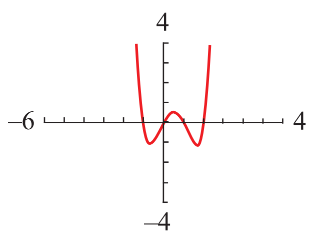
e. $P(x) = x^5 - 5x^2 + 4$

f. $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

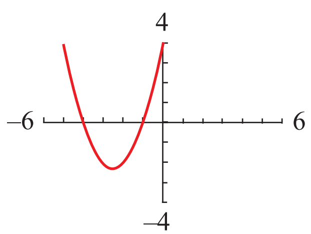
A.



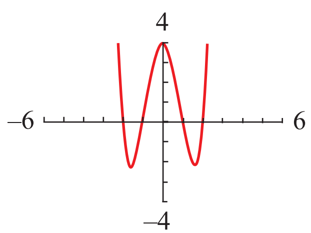
B.



C.



D.



Рабочий лист № 5

Имя_________ Фамилия___________ Дата ______

Заполните таблицу.

Многочлены	Корни	Сумма корней	Произведение корней
$f(x)= x^2 - 5x + 6$			
$f(x) = x^3 - 7x + 6$			
$f(x)= x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$			
$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x$			

а) После заполнения таблицы, обобщите и запишите свое мнение о связи между коэффициентами и суммой корней уравнения.

б) После заполнения таблицы, обобщите и запишите свое мнение о связи между коэффициентами и произведением корней уравнения.

3) Покажите, что сумма комплексного числа с сопряженным ему числом является действительным числом.

4) Покажите, что произведение комплексного числа с сопряженным ему числом является действительным числом.

Урок 10-13. Функция - многочлен. Рациональные функции. Обобщающие задания. 4 часа.Учеб. стр. 22-29.

Содержательный стандарт. 1.1.1. Знает, что многочлен n-ой степени имеет n корней и на основе этого решает уравнения.

Навыки учащегося:

• на примерах объясняет, что понимает влияние знака коэффициента при старшем члене и степени многочлена на четность (нечетность) и график функции;

• находит корни многочлена и понимает, что они являются точками пересечения с осью x;

• определяет промежутки, где функция-многочлен имеет положительные и отрицательные значения;

• строит график функции - многочлен;

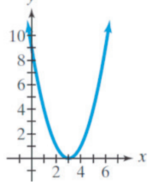
• строит график простых рациональных функций при помощи асимптот.

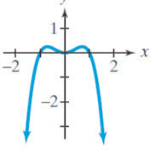
Обсуждаются уже известные ранее функции: линейные (первой степени), квадратичные (второй степени) и кубические (третьей степени). После чего, внимание уделяется изучению функций высших степеней.

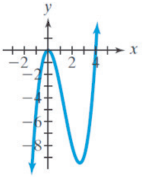
Повторяется понятие многочлена. Желательно особо отметить следующее: наивысшую степень, коэффициент при наивысшей степени, стандартную форму записи и нули многочлена. Только старший член - своим знаком и четной или нечетной степенью, характеризует функцию - многочлен.

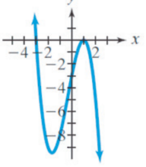
Демонстрируется ряд функций - многочленов и их графики.

$f(x) = (x - 3)^2$ $\quad f(x) = -x^4 + x^2$ $\quad f(x) = x^3 - 4x^2$ $\quad f(x) = -x^3 - x^2 + 5x - 3$









По графику исследуется как степень влияет на четность или нечетность функции, а знак при старшем коэффициенте (положительный или отрицательный) на значение функции. Проводится обобщение.

1. По графику определяются направление ветвей функции

Старший коэффициент a_n	n четное	n нечетное
a_n положительный	вверх и вверх	вниз и вверх
a_n отрицательный	вниз и вниз	вверх и вниз

2. Для степени $n>1$ многочлен имеет как максимум $n-1$ "точек поворота" (точек где возрастание переходит в убывание и наоборот). Для многочлена нечетной степени четное количество, для многочлена четной степени - нечетное количество.

Исследуется последовательность построения графика, строится график заданной в примере функции.

• График функции - многочлен можно построить по точкам пересечения с осью x, знаку коэффициента при члене наивысшей степени, и степени многочлена.

• Точки пересечения с осью x можно найти вычислив корни.

• Если многочлен задан в виде произведения множителей, то его корни найти очень легко, если многочлен задан в стандартном виде, то его надо разложить на множители:

- группируя или при помощи формул сокращенного умножения;
- применяя теоремы об остатке и рациональных корнях многочлена.

Объяснение 7-го упражнения. Если функция имеет вид $y=(x-r)^{k}$, то как это влияет на график функции?

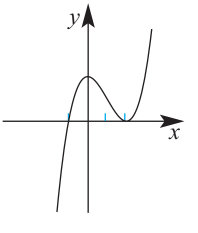
Если функция-многочлен имеет вид $y=(x-r)^k$, то:

1. при четном значении k график функции касается оси x в точке r и поворачивается.

2. при нечетном значении k график пересекает ось x .

Если график функции касается оси x в точке, то это значит, что многочлен имеет кратный корень четной степени.

Например, графику на рисунке соответствует многочлен $f(x)=(x+1)(x-2)^2$. При $x=2$ график функции касается оси x, то кратный корень сходится в данной точке. Их количество как минимум равно 2, но может быть и 4, и 6, и т.д.



Оценивание. Формативно оценивается умение определять степень заданного многочлена, знак коэффициента члена при высшей степени, в каком направлении направлены два конца графика при стремлении x к $-\infty$ и $+\infty$.

Второй и третий час отводится на выполнение заданий на построение графиков рациональных функций при помощи асимптот.

Четвертый час отведен для решения обобщающих заданий по разделу.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.3. (стр. 28) Найдите асимптоты заданной рациональной функции.

Решение:

b) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

При $x = \pm 1$ числитель дроби отличен от 0, а знаменатель равен 0. Значит, прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются вертикальными асимптотами. Так как степень числителя меньше степени знаменателя, то функция имеет горизонтальную асимптоту. При $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2-1} = 0$ получим, что прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой.

у) $y = \dfrac{2x^2+x+2}{x+1}$

При $x = -1$ числитель дроби отличен от 0, а знаменатель равен 0. Значит, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой. Так как степень числителя на 1 больше степени знаменателя, то функция имеет наклонную асимптоту. Разделим столбиком многочлен $2x^2+x+2$ на двучлен $x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\;2x^2+2x & 2x-1 \\ \cline{1-1}
-x+2 & \\
-\;-x-1 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Значит, $\dfrac{2x^2+x+2}{x+1} = 2x-1+\dfrac{3}{x+1}$. При больших по абсолютному значению

значений аргумента дробь $\dfrac{3}{x+1}$ бесконечно уменьшается и график функции стремится к прямой $y = 2x-1$. Т.е. прямая $y = 2x-1$ является наклонной асимптотой функции.

Рабочий лист № 6

Имя__________ **Фамилия**____________ **Дата**______

Запишите как изменяются значения функции при возрастании аргумента по абсолютному значению.

a) $f(x)=-x^2-6x-7$

b) $f(x)=x^3-2x^2+1$

c) $f(x)=x^2+2$

d) $f(x)=-x^4+3x^3-2-5x$

f) $f(x)=-x^5+4x^5-x+1$

e) $f(x)=x^3-2x^2-3$

Рабочий лист № 7

Имя__________ Фамилия____________ Дата_______

Постройте графики функций.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$

Критерии суммативного оценивания по разделу 1

№	Критерии	Заметки об учащихся
1.	Выполняет деление многочлена на многочлен при помощи деления столбиком.	
2.	Записывает делимое, делитель частное и остаток.	
3.	Выполняет деление многочлена на двучлен при помощи метода синтетического деления.	
4.	Применяет в заданиях теорему об остатке.	
5.	Используя теорему об остатке устанавливает является ли двучлен множителем многочлена.	
6.	Представляет основную теорему алгебры на примерах.	
7.	Выражает многочлен в виде произведения линейных множителей.	
8.	Находит рациональные, иррациональные и комплексные корни многочлена *n-ой* степени.	
9.	Строит график функции - многочлен.	
10	Строит графики простых рациональных функций при помощи асимптот.	

Урок 14. Задания для суммативного оценивания по разделу 1.

1) Какой вид должен иметь делитель при синтетическом делении? Запишите пример для синтетического деления.

2) В каком случае остаток наибольший?

a) $(x^2 - x - 3) : (x - 2)$ b) $(x^2 + x - 3) : (x - 2)$

c) $(x^2 + x + 3) : (x - 2)$ b) $(x^2 - x + 3) : (x - 2)$

3) Найдите число n , если многочлен $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - n$ делится на двучлен $x - 1$ без остатка.

3) Для следующих многочленов найдите рациональные корни (если они существуют).

a) $f(x) = 6x^2 - 8x + 2$ b) $f(x) = 0{,}3x^2 + 2x + 4{,}5$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$

4) Запишите список рациональных корней (нулей) многочлена $f(x) = x^3 + 14x^2 + 41x - 56$ используя теорему о рациональных корнях.

5) Какой из следующих двучленов является множителем многочлена $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 9x + 18$?

a) $x - 1$ b) $x + 2$ c) $x + 3$ y) $x - 6$

6) Разложите многочлен на линейные множители.

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

7) Найдите числа a, b, c

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & 3 & -2 & 3 & c \\
 & & a & 21 & 72 \\
\hline
 & 3 & 7 & b & 68
\end{array}$$

8) Какой остаток получится при делении многочлена $2x^2 + 6x + 3$ на двучлен $x + 2$?

a) 11 b) 3 c) 0 y) -1

9) Какое из следующих выражений эквивалентно $(x^2 + 3x - 25):(x - 4)$?

a) $x + 28$ b) $x + 7 + \dfrac{3}{x - 4}$ c) $x + 4 + \dfrac{1}{x - 7}$ d) $x + 7$

10) Какое из следующих множеств значений нужна проверить для определения возможных рациональных корней многочлена
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$?

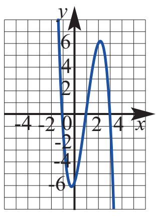
a) $\pm1, \pm2, \pm4, \pm12$ b) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$

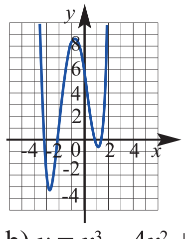
c) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8$ d) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

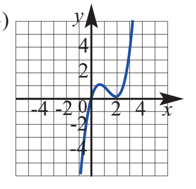
11) Постройте графики функций.

a) $y = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ b) $g(x) = x^4 - 16x^2$ c) $y = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

12) Установите соответствие между графиком и функцией.

1) 

2) 

3) 

a) $y = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ b) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ c) $y = -2x^3 + 6x^2 + 2x - 6$

13) Сколько точек поворота имеет функция - многочлен третьей степени, имеющая три действительных корня?

a) 1 b) 2 c) 3 c) 4

14) Что истинно, а что ложно?

a) Многочлен четной степени всегда пересекает ось x четное количество раз.

b) Любая функция-многочлен нечетной степени как минимум один раз пересекает ось x.

b) Любая функция-многочлен четной степени как минимум один раз пересекает ось x.

15) Какое высказывание справедливо для многочлена
$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x - 9$?

a) остаток при делении $P(x)$ на $x + 1$равен 6.

b) двучлен $x - 1$ является множителем $P(x)$.

c) $P(3) = 36$

y) $P(x) = (x + 3)(3x^2 - 5x + 17) + 42$

Таблица планирования по разделу 2

Основной стандарт и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во час	Стр. учеб.
3.1.1. Знает понятие Декартовой системе координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами. 3.1.2. Применяет различные координатные методы при решении задач в пространстве. 3.1.3. Знает уравнение плоскости и сферы и применяет их при решении задач. 3.1.4. Разлагает вектор, заданный в пространстве на три некомпланарных вектора 3.2.1. Решает задачи, применяя параллельный перенос. 3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве при решении задач. 4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.	15-18	Прямоугольная система координат в пространстве	4	31-38
	19-21	Векторы в пространстве	3	39-45
	22-24	Скалярное произведение двух векторов. Угол между двумя векторами	3	46-50
	25	Общее уравнение прямой	1	51-52
	26-28	Уравнение плоскости Взаимное расположение плоскостей	3	53-58
	29-30	Уравнение сферы	2	59-60
	31	Преобразования на плоскости и в пространстве.	1	61-63
	32-33	Обобщающие задания. Задания для суммативного оценивания по разделу	2	64-65
	Всего		19	

Пример урока

Урок 15. Прямоугольная система координат в пространстве. 1 час. Учеб. стр. 31 - 34

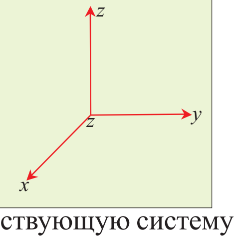
Содержательный стандарт

3.1.1. Знает понятие Декартовой системе координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами.

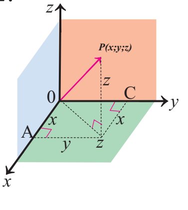
Навыки учащегося:

- представляет графически трехмерную систему координат;
- представляет плоскости, образующие систему координат в пространстве и координаты точек, расположенных на этих плоскостях;
- строит заданные точки в трехмерной системе координат;
- определяет координаты точек заданных в графическом виде.

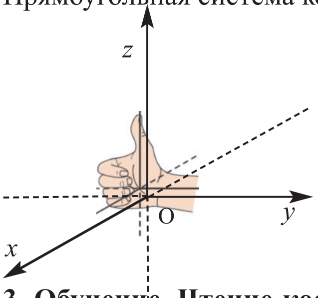
1. Манипулятивное занятие. Обучение. Представление понятия. Трехмерная система координат задается на примере задания учебника о перемещении мяча. Проводится обсуждение одномерной, двухмерной и трехмерной систем координат. До настоящего времени мы использовали числовую ось, которая изображается при помощи одной прямой и координата точки, расположенной на прямой задавалась одним числом. Прямоугольная система координат на плоскости задается двумя перпендикулярными прямыми, которые называются осями координат *x* и *y*, и координаты точки в данной системе задаются двумя числами. Но мы живем в трехмерной системе координат и все предметы, которые нас окружают являются трехмерными. Значит мы должны уметь, читать координаты точек и располагать точек с заданными координатами в трехмерной пространственной системе координат. Пространственная система координат образуется тремя перпендикулярными прямыми, выходящими из одной точки и образующими три числовые оси. В соответствии с данным определением учащиеся должны изобразить соответствующую систему координат в тетради. **5-7 мин.**

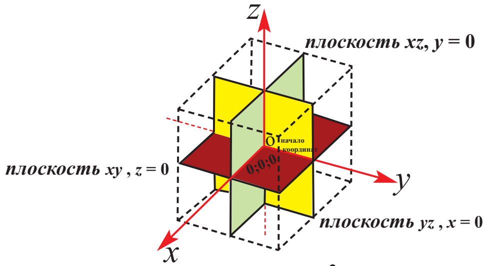


2. Обучение. Оси в системе координат R_3. Координатные плоскости (обсуждение). Учащиеся распределяют координатные плоскости в соответствии с парами которыми они образованы. Оси *x* и *y* образуют координатную плоскость *x*O*y* или *xy*, оси *y* и *z* образуют координатную плоскость *y*O*z* или *yz, оси x* и *z* - координатную плоскость *x*O*z* или *xz*. После чего, учащиеся представляют трехмерную систему координат на реальных ситуациях. Например, длину, ширину и высоту одного из углов классной комнаты можно представить координатными осями, которые разбивают соответствующие стены на плоскости *x*O*y*, *y*O*z*, *x*O*z*. Координатную плоскость можно рассматривать с различной перспективы. Очень удобно представить это на модели куба, как изображено на рисунке. Если мы встанем прямо перед кубом, то задняя грань будет являться плоскостью *zy,* перпендикулярная грань слева плоскостью *zx*, нижняя грань (основание) - плоскостью *xy* . **5-7 мин.**



Прямоугольная система координат называется системой правой руки.

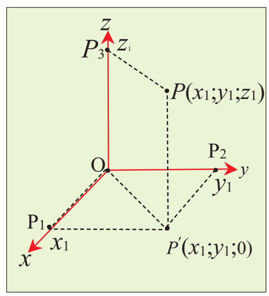




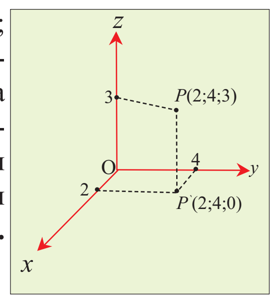
3. Обучение. Чтение координаты точки в системе R³ и расположение точки в заданной координате (индивидуальная работа, обсуждение). Координата точки в пространстве определяется аналогично правилу определения координаты точки на плоскости. Только, если пара координат (x; y) на плоскости показывает расстояние до осей Оx и Оy, то в системе координат в пространстве положение точки задается тройкой координат (x; y; z), которые выражают расстояние от точки до координатных плоскостей yz, xz и xy, соответственно. Упорядоченная тройка (x_0; y_0; z_0) соответсвует точке Р и наоборот: Р$\longleftrightarrow$(x_0; y_0; z_0)

После чего проводится занятие, где учащиеся должны отмечать точки в пространственной системе координат. Учащимися за определенное время, самостоятельно, предлагается выполнить это задание и проводится контроль за выполнением. Выполнение данного задания удобно проводить на изометрической бумаге, которую рекомендуется раздать учащимся заранее.

Учащийся представляет заданную точку Р(x; y; z) в пространственной системе координат.



От точки Р проводится перпендикуляр на плоскость xy, который обозначается через Р\`. От точки Р\` проводится перпендикуляр, пересекающий ось Ox и отрезок ОP_1 соответствует абсциссе точки Р, координате x, от точки Р\` проводится перпендикуляр, пересекающий ось Оy и отрезок ОP_2 соответствует ординате точки Р , т.е. координате y, от точки Р проводится перпендикуляр, который пересекает ось Оz и отрезок ОP_3 соответствует аппликате точки Р, т.е. координате z. Координаты x, y, z определены на множестве действительных чисел.



После чего проводится объяснение для точки Р(2; 4; 3) (вновь возвращаемся к примеру мяча). Сначала отмечаем координаты мяча, соответствующей точке Р на полу (2; 4; 0), после чего проводим перпендикуляр параллельный плоскости zy (расстояние на которое мяч подброшен вверх) и проведем перпендикулярную оси Оz секущую. Получим координату z точки Р. **7-10 мин.**

4. Обучение. Октанты в системе R^3 . Рекомендуется обратить внимание на следующие моменты. Эти моменты являются ключевыми при получении знаний о пространственной системе координат.

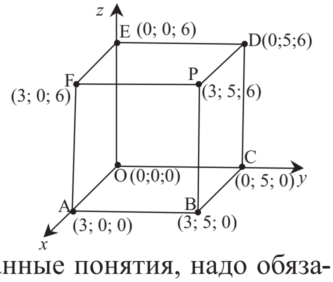
1. Координатные оси на плоскости разбивают ее на четыре четверти, в пространственной системе координатные плоскости делят пространство на 8 октантов: O*xyz*, O*x'yz*, O*x'y'z*, O*xy'z*, O*xy'z'*, O*x'yz'*, O*x'y'z' и* O*xy'z'*.

2. Если точка P расположена в первом октанте, т.е. если P(*a*; *b*; *c*), то точки (–*a*; *b*; *c*), (–*a*; –*b*; *c*), (*a*; –*b*; *c*), (*a*; *b*; –*c*), (–*a*; *b*; –*c*), (–*a*; –*b*; –*c*) и (*a*; –*b*; –*c*) расположены в остальных октантах.

5. Обучение. R^3 Координаты точек, расположенных в координатных плоскостях системы R^3 .

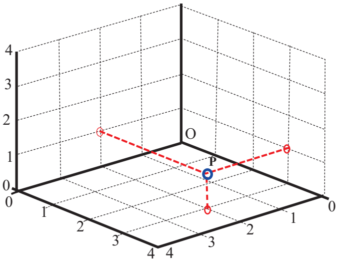
Точки, расположенные на плоскости *xy* имеют координаты (*a*; *b*; 0), расположенные на плоскости *yz* равны (0; *b*; *c*) и расположенные на плоскости *zx* равны (*a*; 0; *c*). Точки, расположенные на осях имеют координаты (*a*;0;0), (0;*b*;0), (0;0;*c*). Точка, являющаяся началом координат имеет координаты (0;0;0).

Таким образом, точку с координатами P (3;5;6), можно изобразить как вершину P параллелепипеда с другими вершинами, координаты которых показаны на рисунке.



Для того, чтобы хорошо понять и применять данные понятия, надо обязательно выполнять их письменно при помощи линейки и карандаша.

Рекомендуется изобразить пространственную систему координат в различных перспективах. При этом можно наглядно увидеть, что абсолютное значение координат точки равно расстоянию от данной точки до координатных плоскостей. Это можно реально оживить (симулировать) на примере классной комнаты и изобразить как показано на рисунке. На рисунке изображена точка P(2;3;1).

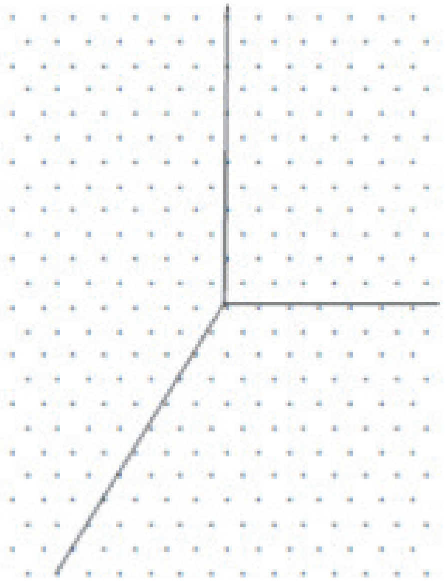


Оценивание. Особое внимание при оценивании надо обратить на умение оживлять пространственную систему координат в реальной ситуации, определять координатные плоскости и октанты, находить координаты точки и отмечать точку по координатам. Для формирования и закрепления данных навыков нужно выполнять соответствующие задания.

Рабочий лист №1

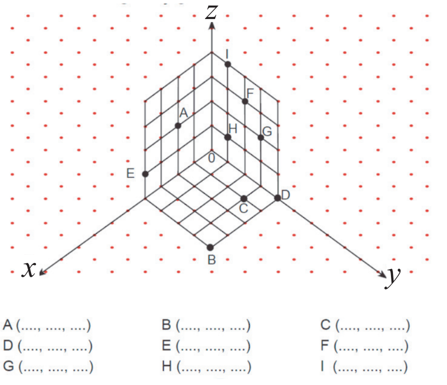
Имя______ Фамилия______ Дата______

1) Отметьте точки в пространственной системе координат.



a) $(-3; -4; 1)$; b) $(-1; 1; 1)$;
d) $(2; -1; -2)$; e) $(-3; -3; -3)$.

2) Запишите координаты точек, отмеченных в пространственной системе координат.



3) Сначала определите какому октанту принадлежит точка, в соответствии с знаком. Затем изобразите пространственную систему координат и отметьте данные точки.

a) $(2; 6; 8)$ b) $(-1; 2; 3)$ d) $(-3; 1; -2)$ e) $(-6; -1; -2)$

Урок 16-18. Прямоугольная система координат в пространстве. 3 часа. Учеб. стр. 34-37

Содержательный стандарт

3.1.2. Применяет метод координат в пространстве при решении различных задач.

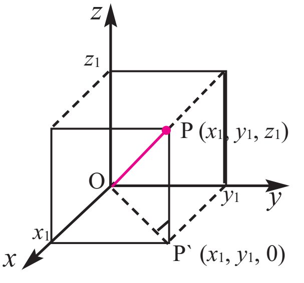
Навыки учащегося

- находит расстояние между двумя точками заданными координатами;
- находит координаты точки,делящий отрезок в заданном отношении;
- находит координату центра тяжести треугольника;
- решает различные задачи, связанные с нахождением координат.

На этих уроках рассматриваются очень простые геометрически, но имеющие большое практическое значение формулы нахождения координат и их применение при решении различных задач.

Сначала можно доказать формулу нахождения расстояния между двумя точками, а затем, используя полученное найти формулу расстояния от начала координат до заданной точки. Можно подойти к этой проблеме с другой стороны. Сначала найти расстояние от начала координат до заданной точки, а затем вывести формулу расстояния между двумя точками.

1. Расстояние от начала координат. Основное внимание учащихся направляется на понимание и изображение того, что точка в пространстве и проекции перпендикуляров от этой точки до координатных плоскостей, являются вершинами прямоугольного параллелепипеда. Доказательство учащиеся выполняют самостоятельно.



Пусть, в пространстве задана точка P(x_1;y_1;z_1). И надо найти расстояние от этой точки до начала координат. Треугольник OPP\` прямоугольный

$$OP^2 = OP'^2 + PP'^2$$

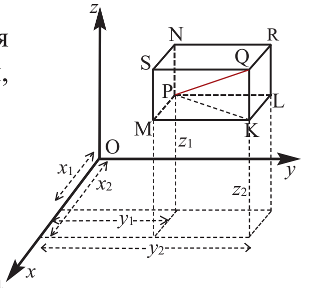
$$OP'^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad P'P^2 = z_1^2,$$

$$OP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Учащимся предлагается отметить в пространстве произвольную точку P и найти расстояние от этой точки до начала координат. Рекомендуется внимательно наблюдать за выполнением заданий подобного открытого типа и проводить соответствующее оценивание.

2. Расстояние между двумя точками в пространстве. Найдем выражение для нахождения расстояния между двумя точками P(x_1;y_1;z_1) и Q(x_2;y_2;z_2). Для этого найдем длину диагонали соответветствующего прямоугольного параллелепипеда с заданными сторонами.

Формула нахождения расстояния между двумя точками доказывается в соответствии с рисунком, представленном в учебнике.



Учитывая, что $MP = |x_2 - x_1|$,

$PL = |y_2 - y_1|$, $KQ = |z_2 - z_1|$ являются ребрами параллелепипеда, получим, что диагональ равна

$PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$

$$PQ^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении

Координаты точки R, которая делит отрезок концами которого являются точки P (x_1; y_1; z_1) и Q (x_2; y_2; z_2) в отношении PR : PQ = $m : n$ находят по формуле

$$R\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n};\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n};\ \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

Координаты середины отрезка. Координаты точки M, которая является серединой отрезка с концами в точках P (x_1; y_1; z_1) и Q (x_2; y_2; z_2) находят по формуле $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Координаты центра тяжести треугольника

Координаты центра тяжести P (точки пересечения медиан) треугольника с вершинами в точках M (x_1, y_1, z_1), N (x_2; y_2; z_2) и L (x_3; y_3; z_3) находят

по формуле $P\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$

Каждая формула объясняется на соответствующих примерах.

Наблюдая, можно провести оценивание того, как учащиеся принимают участие в обсуждениях и на каком уровне выполняют работу в тетрадях. Можно использовать рабочие листы, представленные в методическом пособии или выборочно дать обучающие задания для оценки.

? Решение некоторых упражнения из учебника:

У.17. Найдите длину медианы BM треугольника с вершинами в точках A (17; –2; –1), B (1; –2; 11), C (1; 16; –1).

Решение:
Сначала найдем координаты M середины стороны AC.

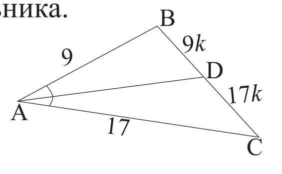
$$x_m = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{17+1}{2} = 9$$

$$y_m = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+16}{2} = 7$$

$$z_m = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-1+(-1)}{2} = -1$$

Вычислим расстояние между точками B(1; –2; 11) и M (9; 7; –1).
$|BM| = \sqrt{(9-1)^2 + (7-(-2))^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{8^2+9^2+12^2} = 17$

У.23. Точки A (9; 6; 0), B (15; 9; 6), C (21; –3; – 8) являются вершинами треугольника. Биссектриса ∠ BAC пересекает сторону BC в точке У. Найдите координаты точки У.
Решение: найдем длины сторон AB и AC треугольника.



$$AB = \sqrt{(15-9)^2 + (9-6)^2 + (6-0)^2} = 9$$

$$AC = \sqrt{(21-9)^2 + (-3-6)^2 + (-8-0)^2} = 17$$

По свойству биссектрисы точка D делит сторону BC так, что BD : DC = 9 : 17. Из формулы нахождения координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении, получим:

$$x_D = \frac{9\cdot 21 + 17\cdot 15}{9+17} = 17\frac{1}{13}$$

$$y_D = \frac{9\cdot(-3) + 17\cdot 9}{9+17} = 4\frac{11}{13}$$

$$z_D = \frac{9\cdot(-8) + 17\cdot 6}{9+17} = 1\frac{2}{13}$$

Таким образом имеем, D $\left(17\frac{1}{13};\ 4\frac{11}{13};\ 1\frac{2}{13}\right)$

Рабочий лист №2

Имя______ Фамилия______ Дата______

1) Покажите, что данные точки коллинеарны.

a) $P_1(1; 2; 9)$, $P_2(-2; -2; 11)$, $P_3(7; 10; 5)$;

b) $Q_1(2; 3; 2)$, $Q_2(1; 4; 4)$, $Q_3(5; 0; -4)$.

2) Точка $(-1; -4; 8)$ является серединой отрезка с концами в точках $P_1(x_1; y_1; z_1)$ и $P_2(2; 3; 6)$. Найдите координаты точки P_1.

3) Точка P_3 является серединой отрезка с концами в точках $P_1(-3; 4; 1)$ и $P_2(-5; 8; 3)$. Найдите координаты середины отрезков, соединяющих следующие точки.

a) P_1 и P_3

b) P_3 и P_2

Урок 19-20. Векторы в пространстве. 2 часа. Учеб. стр. 39-45

Содержательный стандарт

3.1.2. Применяет метод координат в пространстве при решении различных задач.

3.1.4. Разлагает вектор, заданный в пространстве на три некомпланарных вектора.

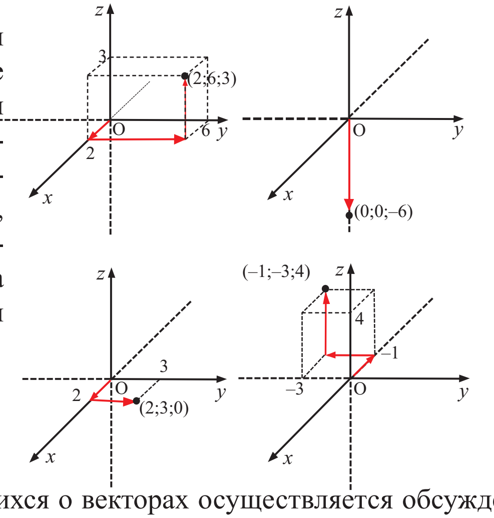
Навыки учащегося

- знает и изображает позиционный вектор в пространстве;
- определяет каждую точку пространства через позиционный вектор;
- зная начальную и конечную точку вектора определяет равный ему позиционный вектор;
- находит длину вектора, заданного компонентами;
- выполняет сложение и вычитание векторов, заданных компонентами;
- умножает вектор, заданный компонентами на действительное число;
- определяет равенство двух векторов в пространстве.

Мотивация. Учащимся дается задание, где они должны в пространственной системе координат отметить заданные точки, двигаясь от координатных осей и плоскостей. Например,

определим место расположения и отметим точки A(2; 6; 3), B(0; 0; –6), C(2; 3; 0) и D(–1; –3; 4) в пространственной системе координат.

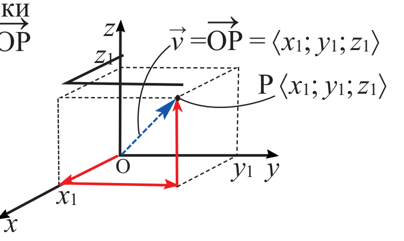
На каждом шаге построения точки A отмечаются соответствующие векторы и наконец определяется месторасположения точки A. Точка A расположена в первом октанте. Аналогично определяется что, точка B расположена на отрицательной части оси z, точка C - на плоскости xy, точка D - в третьем октанте.



Проверка знаний и умений учащихся о векторах осуществляется обсуждением. Вектор - это направленный отрезок, который характеризует векторные величины такие как перемещение, скорость, ускорение, сила, вес и т.д. Геометрически абсолютное значение вектора равно значению величины, а направление вектора показывает направление величины.

Векторы в пространстве обладают теми же свойствами, что и векторы на плоскости. В пространстве вектор также определяется начальной и конечной точкой. Если начало вектора совпадает с началом координат, то такой вектор называется позиционным вектором. Позиционный вектор $\overrightarrow{OP}$ определяет положение точки P в пространстве. Каждая точка в пространстве, определяется через один позиционный вектор. Т.е. между координатами точки и компонентами позиционного вектора имеется однозначное соответствие.

Если $(x_1; y_1; z_1)$ являются координатами точки P в пространстве, то компоненты вектора $\overrightarrow{OP}$ записываются как $\overrightarrow{OP}\langle x_1; y_1; z_1\rangle$.



Учащиеся должны понимать, что позиционный вектор является альтернативным способом задания точки в пространстве. Т.е. точка в пространстве может быть задана или тремя координатами или позиционным вектором.

Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число в пространстве выполняется точно также как и на плоскости. Выполняются задания, где надо найти длину вектора, компоненты вектора, заданными начальной и конечной точкой, для заданного вектора находит соответствующий позиционный вектор. Для формативного оценивания, удобнее использовать следующие задания.

Пример. Даны точки A(–2;3;5) и B(1;0;–4).

a) запишите вектор $\overrightarrow{AB}$ компонентами.

b) запишите вектор $\overrightarrow{BA}$ компонентами .

c) запишите вектор$\overrightarrow{AB}$.компонентами

d) определите компоненты вектора $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

e) вычислите $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{BA}|$.

f) вычислите $|3\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle = \langle 1-(-2), 0-3, -4,-5\rangle = \langle 3,-3,-9\rangle$

b) так вектора $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ противоположные вектора, то $\overrightarrow{BA}=\langle -3; 3; 9\rangle$

c) $3\overrightarrow{AB}= 3\cdot\langle 3; -3; -9\rangle = \langle 9; -9; -27\rangle$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\langle -2+1; 3+0; 5-4\rangle= \langle -1; 3; 1\rangle$.

e) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{9+9+81} = 3\sqrt{11}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{9+9+81} = 3\sqrt{11}$

f) $|3\overrightarrow{AB}| = 3\cdot|AB|=3\cdot 3\sqrt{11}=9\sqrt{11}$

Ясно, что, $|3\overrightarrow{AB}| =3|\overrightarrow{AB}|$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| =|\langle -1; 3, 1\rangle| =\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| =\sqrt{11} \neq |\overrightarrow{OA}| +|\overrightarrow{OB}| =$

$= \sqrt{4+9+25} + \sqrt{1+0+16} = \sqrt{38} + \sqrt{17}.$

Урок 21. Векторы в пространстве. Единичный вектор. 1 час. Учеб. стр. 43 - 45.

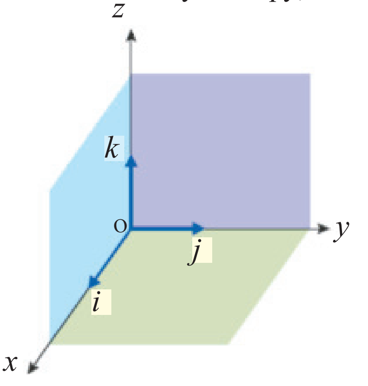
Содержательный стандарт

3.1.1. Знает понятие Декартовой системы координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами.

3.1.4. Разлагает вектор, заданный в пространстве на три некомпланарных вектора.

Навыки учащегося

- выражает вектор в пространстве через орт векторы;
- выражает компонентами вектор, заданный орт векторами и наоборот;
- определяет единичный вектор соответствующий заданному вектору;
- решает задачи с единичными векторами.

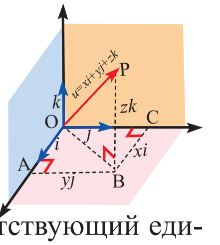


Надо объяснить определение единичного вектора и его графическое представление. Учащиеся понимают, что на плоскости вектор можно разложить через два орт вектора, в соответствии с координатами x и y, в пространстве - на три орт вектора. Это орт вектора $\vec{i} = \langle 1,0,0\rangle$, $\vec{j} = \langle 0,1,0\rangle$ и $\vec{k} = \langle 0,0,1\rangle$, которые направлены вдоль положительных направлений осей Оx, Оy, Оz. Абсолютное значение этих векторов равно единице

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

После чего можно объяснить аналитическую запись и графическое представление позиционного вектора через орт векторы.

$$\vec{u}(x;y;z) = \langle x;0;0\rangle + \langle 0;y;0\rangle + \langle 0;0;z\rangle =$$
$$= x\langle 1;0;0\rangle + y\langle 0;1;0\rangle + z\langle 0;0;1\rangle = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$



Например, разложение вектора $\langle 3;–3;9\rangle$ по орт векторам имеет вид: $\langle 3; –3; 9\rangle = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$

Для вектора в любом направлении можно найти соответствующий единичный вектор. Например, произвольный вектор $\vec{u}$ можно выразить через единичный вектор $\vec{v}$ следующим образом $\vec{v} = \dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$.

Деиствительно, $\quad |\vec{v}| = |k\vec{u}| = k|\vec{u}| = \dfrac{1}{|\vec{u}|}|\vec{u}| = 1.$

Найдем единичный вектор сонаправленный с вектором $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

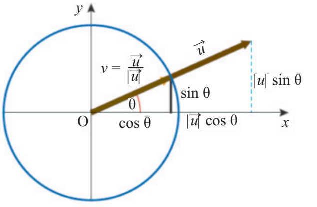
Найдем длину, абсолютное значение вектора $|\vec{u}|$.

Так как $|\vec{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, то единичный вектор будет $\dfrac{\vec{i}}{3} - \dfrac{2\vec{j}}{3} + \dfrac{2\vec{k}}{3}$

Запишем единичный вектор компонентами $\quad \vec{v} = \langle \dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\rangle$

Дополнительная информация. Одно из важных свойств единичного вектора то, что с его помощью можно определить направление вектора.

Под направлением вектора мы понимаем угол между положительным направлением оси x и вектором.



На рисунке угол θ, угол образованный вектором с осью x. Вектор $\vec{u}$ имеет одинаковое направление с единичным вектором $\vec{v} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} \qquad \vec{u} = |\vec{u}|\,\vec{v} = |\vec{u}|(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

Тогда вектор длиной 2 единицы, образующий с положительным направлением оси x угол 60º имеет вид: $\vec{u} = 2(\cos 60°\,\vec{i} + \sin 60°\,\vec{j}) = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$

И наоборот, если будет задан вектор $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$, то можно найти, что с осью x образуется угол 60°, т.е. найти направление.

Урок 22-24. Скалярное произведение векторов. Обобщающие задания 3 часа Учеб. стр. 46-50

Содержательный стандарт

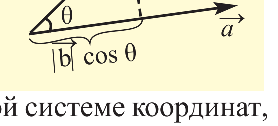
3.1.1. Знает понятие Декартовой системе координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами.

Навыки учащегося:

- находит скалярное произведение двух векторов по формуле;
- находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами
- находит угол между двумя векторами, по скалярному произведению;
- применяет правило нахождения скалярного произведения двух векторов при решении различных задач.

До настоящего времени мы знали, что при сложении, вычитании, умножении вектора на число получаются векторные величины. Однако произведение двух векторов может быть скалярным числом. Например, работа - это произведение векторных величин перемещения и силы, а работа при этом является скалярной величиной.

Скалярное произведение двух векторов сначала исследуется для векторов в пространстве. Если заданы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то их скалярное произведение равно произведению их модулей на косинус угла между ними



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$

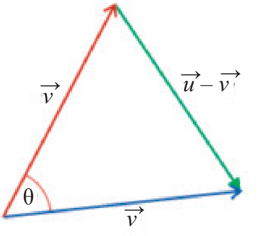
Отметим, что угол θ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и он принимает значения из промежутка $0 \le \theta \le \pi$

Если вектора $\vec{a}\langle a_1; a_2\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1; b_2\rangle$ заданы в Декартовой системе координат, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих компонент.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\langle a_1; a_2; a_3\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1; b_2; b_3\rangle$ в трехмерной системе координат находят аналогично скалярному произведению двух векторов на плоскости: $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

Затем уже, в зависимости от уровня класса можно представить доказательство равенства $\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Ниже представлено доказательство скалярного произведения через координаты.

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$$



По теореме косинусов:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\,|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Из данного равенства и отношений выше получаем:

$$2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)+(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-$$

$$-[(u_1+v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2] = 2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3).$$

Таким образом,

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \text{ или } \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

При восрастании значений угла между векторамы значение скалярного произвидения убывается.

При θ = 0 скалярное произведение принимает наибольшее значение и в этом случае вектора имеют одинаковое направление
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Если θ = π/2, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
При θ =π скалярное произведение имеет наименьшее значение и векторы направлены в противоположные стороны.
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\pi = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Скалярное произведение имеет большое практическое применение.
Например, при помощи отношения

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

очень легко можно найти угол между двумя ненулевыми векторами.

При вычислении скалярного произведения рекомендуется выполнять упражнения в которых векторы заданы как компонентами, так и орт векторами. Упражнения в учебнике в основном для двухмерной системы координат. Однако, в зависимости от уровня класса, можно с отдельными учащимися выполнить следующие упражнения.

Найдите угол между векторами: $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{v} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$

Из формулы скалярного произведения имеем: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-3-12+4}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{-11}{21}$

$$\cos\theta = \frac{-11}{21}, \quad \theta \approx 2{,}12 \text{ радиан}$$

Зная угол между двумя векторами можно сделать следующие выводы:

Вывод 1. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos 90^\circ = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0 = 0$$

Вывод 2. Если скалярное произведение двух векторов имеет вид $\vec{u}\cdot\vec{v} = \pm|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$, то векторы коллинеарны.

Например, определите перпендикулярны или нет векторы

$\vec{u} = 7\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{m} = \vec{i} + \vec{k}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 7(-3) + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 = 0$ - векторы перпендикулярны

$\vec{u}\cdot\vec{m} = 7\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1 = 9$ - векторы не перпендикулярны

$\vec{v}\cdot\vec{m} = -3\cdot 1 + 5\cdot 0 + 3\cdot 1 = 0$ - векторы перпендикулярны

Объяснения связанные с некоторыми заданиями в учебнике:

Доказать равенства $\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ и $\vec{u}+\vec{v} \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$:

a) Так, как $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$, то $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\cos\theta|$ и так как $|\cos\theta| \le 1$, то получим $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}|\,|\vec{v}|$. Отсюда видно, что $\vec{u}\cdot\vec{v} < |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

b) $$\left.\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + |\vec{v}|^2\end{aligned}\right\} \Leftarrow \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u}$$

Однако, так как $\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}\cdot\vec{v}|$, то

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + |\vec{v}|^2 \le |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$$

Отсюда получаем, что $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (извлекая квадратные корни)

? Решение некоторых упражнения из учебника:

У. 8. В направлении вектора $\vec{a}\,\langle 3;\,4\rangle$ приложена сила (F) 20 Н.
a) Запишите единичный вектор сонаправленный с вектором $\vec{a}$
b) Запишите силу $\vec{F}$ компонентами.
c) Найдите работу, совершаемую силой $\vec{F}$ при перемещении из точки (0;0) в точку (6; 8).

Решение:
a) Единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|a|}=\frac{\langle 3;\,4\rangle}{\sqrt{32+42}}=\frac{\langle 3;\,4\rangle}{5}=\left\langle\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\rangle.$$

b) $\vec{F}=20\cdot\left\langle\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\rangle=\langle 12\,;\,16\rangle$. c) Вектор перемещения
$\vec{d}=\langle 6-8;\,8-0\rangle=\langle 6;\,8\rangle$, то работа равна
$A=\vec{F}\cdot\vec{d}=12\cdot 6+16\cdot 8=72+128=200$ (Джоуль)

У.12. 2) При каком значении k угол между векторами $\vec{u}\langle 0;\,1;\,1\rangle$ и $\vec{v}\langle k;\,2;\,1\rangle$ равен 45°?
Решение: по условию

$$\cos 45^\circ=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

Отсюда $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{0\cdot k+1\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{k^2+2^2+1^2}}$, $\quad\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+5}}$

$k^2=4$. Получим $k=\pm 2$.

У. 16. а) Найдите углы треугольника с вершинами в точках A(5; 1), B(4; 7) и C(–7; –1).
Решение: найдем угол между векторами $\vec{AB}=\langle -1;6\rangle$ и $\vec{AC}=\langle -12;-2\rangle$.

$$\cos\angle A=\frac{(-1)\cdot(-12)+6\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+6^2}\cdot\sqrt{(-12)^2+(-2)^2}}=0,\quad \angle A=90^\circ$$

Теперь найдем угол между векторами $\vec{BA}=\langle 1;-6\rangle$ и $\vec{BC}=\langle -11;-8\rangle$.

$$\cos\angle B=\frac{1\cdot(-11)+(-6)\cdot(-8)}{\sqrt{1^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-11)^2+(-8)^2}}=\frac{37}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{185}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}447$$

$\angle B\approx 64^\circ$. Тогда $\angle C=180^\circ-(\angle A-\angle B)\approx 26^\circ$

Рабочий лист №3

Имя______ Фамилия______ Дата______

1) Покажите, что треугольник с вершинами в точках A(–1; 3; 0), B(1; 2; –2) и C(1; 5; 1) является прямоугольным и найдите его площадь.

2) Даны вектора $\vec{u} = \langle 3;5;0 \rangle$ и $\vec{v} \langle -5; 3; 0 \rangle$.
Найдите угол между векторами
a) $\vec{u}$ и $\vec{v}$ b) $\vec{u}$ и $\vec{u} + \vec{v}$ c) $\vec{v}$ и $\vec{u} + \vec{v}$

Урок 25. Общее уравнение прямой. 1 час. Учеб. стр. 51-52

Содержательный стандарт.

3.1.1. Знает понятие Декартовой системе координат в пространстве, понятие вектора и находит скалярное произведение двух векторов, заданных координатами.

Навыки учащегося:

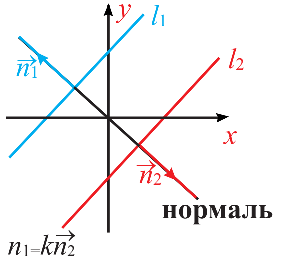
- находит скалярное произведение двух векторов по формуле;
- находит скалярное произведение векторов, заданных координатами;
- находит расстояние от заданной точки до прямой.

Объясняется как общее уравнение прямой можно получить, при помощи вектора, направленного вдоль прямой и нормали к прямой. Если данные векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Из данного отношения получается общее уравнение прямой $ax + by + c = 0$. Учащиеся могут проверить это на соответствующих примерах. Также исследуются частные случаи расположения прямых на плоскости.

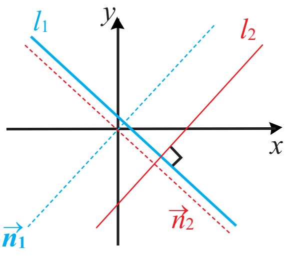
Если прямым l_1 и l_2 соответствуют нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, то справедливы следующие утверждения.

1. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их нормали коллинеарны. Т.е., $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
2. Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда скалярное произведение между их нормалями равно нулю. Т.е. $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ и $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Две параллельные прямые



Две перпендикулярные прямые



Угол между двумя прямыми можно найти при помощи угла между их нормалями. А угол между нормалями можно найти из отношения:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \quad \text{или} \quad \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Пример урока

Урок 26-28. Уравнение плоскости. 3 часа. Учеб. стр. 53-58

Содержательный стандарт.

3.1.2. Применяет метод координат в пространстве при решении различных задач.
3.1.3. Знает уравнение плоскости и сферы и применяет их при решении задач.
4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.

Навыки учащегося:

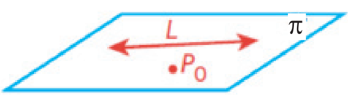
- выполняет задания определяющее плоскость в виде уравнения $ax + by + cz = d$ в Декартовой системе координат;
- решает различные задачи на уравнение плоскости.

Мы уже изучили уравнения прямой и еще до этого знали, что геометрически прямая задается двумя точками.
Что вы знаете о плоскости? Как геометрически задается плоскость в пространстве?
Следующие обсуждения посвящены этим вопросам.

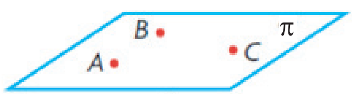
1. Плоскость может быть задана прямой и точкой:

- тремя неколлинеарными точками
- прямой и точкой, не принадлежащей прямой
- двумя пересекающимися прямыми
- двумя параллельными прямыми
- одной точкой и нормальным вектором

Учащиеся на доске и в тетради должны выполнить геометрические иллюстрации.

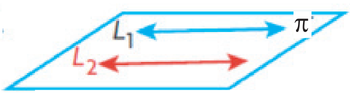


прямой и точкой не принадлежащей прямой

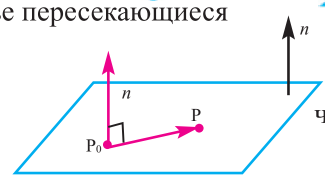


через три неколлинеарные точки

через две пересекающиеся прямые

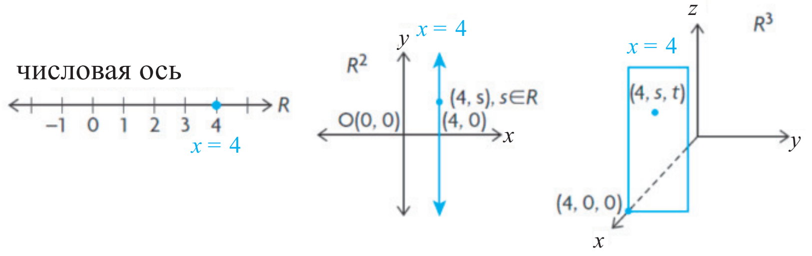


через две параллельные, не совпадающие прямые

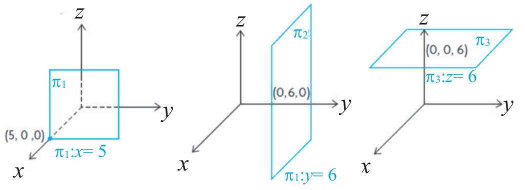


через точку и нормальный вектор

Как в пространстве геометрически изображаются плоскости? Например, изобразим уравнение $x = 4$ в одномерной, двухмерной и трехмерной системе координат. Чем различаются полученные изображения?



А, каким будет изображение уравнений $y = a$, $z = a$?



Учащиеся должны понимать, что плоскость $x = a$ параллельна плоскости yz, $y = a$ параллельна плоскости xz, $z = a$ параллельна плоскости xy. И они пересекаются с осями координат в соответствующих точках $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$.

Надо обсудить исследовательские задания из учебника, а затем изобразить решения в тетради.

Полученные результаты учащиеся должны обобщить следующим образом.

Плоскость	Обобщающее изображение
$x = a$	плоскость $x = a$ параллельна координатной плоскости yz, пересекает ось x в $(a;\ 0;\ 0)$ плоскость $x = 0$ есть плоскость yz.
$y = a$	плоскость $y=a$ параллельна координатной плоскости xz, пересекает ось y в $(0;\ a;\ 0)$, плоскость $y = 0$ есть плоскость xz.
$z = a$	плоскость $z = a$ параллельна координатной плоскости xz, пересекает ось z *в* $(0;\ 0;\ a)$, плоскость $z = 0$ есть плоскость xy

А как изображается в системе R^3 множество, заданное уравнением $ax + by = 0$? Например, как изображается в пространстве множесть точек, заданное уравнением $2x – y = 0$? Учащиеся должны понимать, что изображением является плоскость, которая пересекает плоскость xy вдоль прямой $2x – y = 0$.

2-ой час. Скалярное уравнение плоскости в пространстве имеет вид $ax + by + cz + d = 0$ и $\vec{n} = \langle a;\ b;\ c\rangle$ является ее нормалью. Нормаль плоскости, перпендикулярна любому вектору на плоскости.

Надо обсудить с учащимся, вывод, что скалярное уравнение плоскости выводится точкой и нормалью, проведенной в данной точке.
Вывод формулы можно провести на примере.
Пример. Запишите уравнение плоскости, если точка A(1;2;3) принадлежит данной плоскости и вектор нормали равен $\vec{n}\langle -1;3;4\rangle$.

Мы можем сделать это двумя способами.

1-ый способ. Возьмем произвольную точку P(x; y; z), отличной от A, на плоскости и запишем компонентами вектор с началом в точке A и концом в точке P: $\overrightarrow{AP} = \langle x-1;\ y-2;\ z-3\rangle$. Так как нормальный вектор равен $\vec{n}\langle -1;\ 3;\ 4\rangle$, то $\vec{n}\cdot\ \overrightarrow{AP} = 0$.

$$\langle -1;\ 3;\ 4\rangle\cdot\langle x-1;\ y-2;\ z-3\rangle = 0$$
$$-1(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0$$
$$-x + 1 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0$$

$-x + 3y + 4z - 17 = 0$ умножим обе части уравнения на -1, тогда

$$x - 3y - 4z + 17 = 0\ .$$

2-ой способ. Известно, что уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, а ее нормаль $\vec{n} = \langle a;\ b;\ c\rangle$. Значит, зная нормаль $\vec{n}\langle -1;\ 3;\ 4\rangle$ можно подставить $a,\ b,\ c$.
$(-1)x + 3y + 4z + d = 0$; $-x + 3y + 4z + d = 0$. Запишем координаты точки A (1; 2; 3) в уравнение и найдем переменную $У$.

$$-x + 3y + 4z + d = 0\ , \qquad -1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + d = 0;\ d = -17$$
$$-x + 3y + 4z - 17 = 0 \text{ или } x - 3y - 4z + 17 = 0$$

На 3-ем часе рассматривается взаимное расположение плоскостей.
У.10. При каком значении k плоскости, заданные уравнениями $4x + ky - 2z + 1 = 0$ и $2x + 4y - z + 4 = 0$: a) параллельны; b) перпендикулярны.
Решение: нормальные векторы плоскостей соответственно равны:

$$\vec{n}_1 = \langle 4;\ k;\ -2\rangle \text{ и } \vec{n}_2 = \langle 2;\ 4;\ -1\rangle.$$

a) Если плоскости параллельны, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$.

Тогда $\dfrac{4}{2} = \dfrac{k}{4} = \dfrac{-2}{-1}$. Отсюда находим, что при $k = 8$ плоскости параллельны.

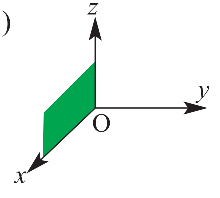
b) Если $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, то плоскости перпендикулярны и $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$. Тогда $4\cdot 2 + k\cdot 4 + (-2)\cdot(-1) = 0$, $k = -2{,}5$ и плоскости перпендикулярны.

Рабочий лист №4

Имя______ Фамилия______ Дата______

Установите соответствие между графиком и уравнением.

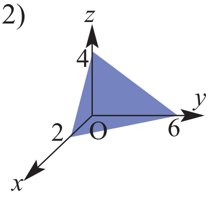
1)



a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1$

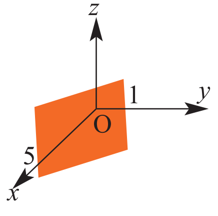
b) $z - 5 = 0$

2)



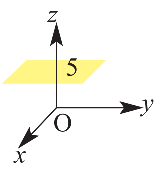
c) *плоскость* Oxz

3)



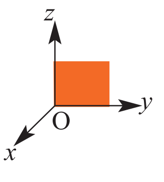
d) *плоскость* Oyz

4)



e) $x+5y-5=0$

5)



f) *плоскость* Oxy

Урок 29-30. Уравнение сферы. 2 часа. Учеб. стр. 59-60

Содержательный стандарт.

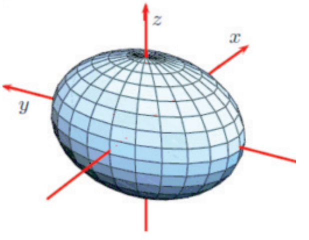
3.1.2. Применяет метод координат в пространстве при решении различных задач.

3.1.3. Знает уравнение плоскости и сферы и применяет их при решении задач.

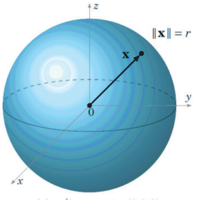
Навыки учащегося:

- представляет уравнение сферы;
- решает задания на уравнение сферы.

До настоящего времени говоря о поверхности мы имели в виде плоскую поверхность. Например, в двухмерной системе координат, множество решений уравнения $ax + by + cz + d = 0$ задает плоскую поверхность. Однако, в пространстве могут быть заданы другие поверхности, отличные от плоскости. Например, системе координат R^3 множество точек пространства, удаленных от точки, которая называется центром на расстояние, которое называется радиусом, образует сферу.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$



Сфера радиусом r и центром в начале координат.

Учащиеся раскрывают скобки и записывают уравнение сферы в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Выполняются задания из учебника

У.6. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 10z + 54 = 0$, а также найдите расстояние от точки A(8; 0; 7) до сферы.

Решение: запишем уравнение сферы в виде

$(x + 1)^2 - 1 + (y - 8)^2 - 64 + (z + 5)^2 - 25 + 54 = 0$

$(x + 1)^2 + (y - 8)^2 + (z + 5)^2 = 36$

Значит, центр сферы находится в точке M(–1; 8; –5), а радиус равен 6. Тогда $AM = \sqrt{(-1 - 8)^2 + (8 - 0)^2 + (-5 - 7)^2} = \sqrt{9^2 + 8^2 + 12^2} = 17$ и зная, что R = 6 можно найти расстояние от точки A до сферы: 17 – 6 = 11.

Урок 31-32. Преобразование пространства и плоскости. Обобщающие задания. 2 часа. Учеб. стр. 61-65

Содержательный стандарт.

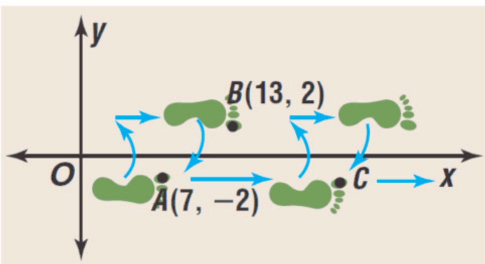
3.2.1. Решает задачи, применяя параллельный перенос.

3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве при решении задач.

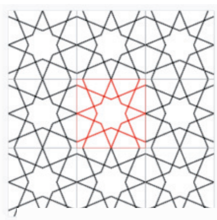
Навыки учащегося:

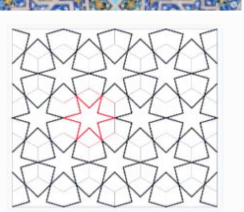
- изображает параллельный перенос и поворот в пространстве;
- определяет по изображению вид движения (параллельный перенос и поворот).

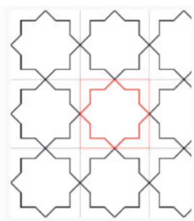
В повседневной жизни мы часто можем наблюдать такие движении как параллельный перенос и поворот. Это можно наблюдать в конструкции и в дизайне зданий. Например, следы от ног на снегу являющиеся примером параллельного переноса, или украшение тротуаров различными формами камня. И опять мы можем эти изменения изобразить в виде плоскости на листе бумаги. Наиболее ярким примером применения параллельного переноса, поворота, отображения и гомотетичных преобразований, является искусство ислама. Во всем мире известны деревянные резные фигурки, резьба по камню, фарфоровые плиты, потолки, настенные росписи, надгробные плиты и мавзолеи, украшенные исламскими орнаментами.

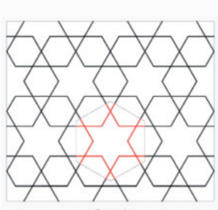


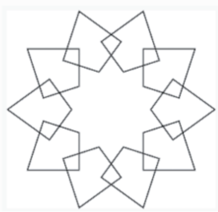
Все это основано на геометрических свойствах фигур, когда некоторая площадь заполняется без пустот, паркетированием,фигурами различной формы, при помощи различных видов движения. На рисунках шаг за шагом показано создание композиции из элементов.











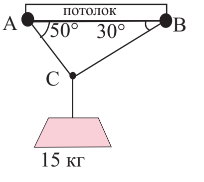
? Решение некоторых заданий из учебника:

У. 5 (стр. 63) В какую точку преобразовывается точка A(0; –3; 2) при гомотетии с центром в точке P(1; 2; 3) и коэффициентом гомотетии $k = 3$.

Решение: пусть точка A преобразуется в точку $A'(x;y;z)$. Тогда по определению имеем
$PA' = k \cdot PA$ или $\langle x-1; y-2; z-3\rangle = 3 \cdot \langle -1; -5; -1\rangle = \langle -3; -15; -3\rangle$.
Отсюда получим $x-1=-3$, $y-2=-15$, $z-3=-3$.
Тогда найдем $x=-2$, $y=-13$, $z=0$.
Таким образом, при заданной гомотетии точка A(0; –3; 2) преобразуется в точку A′(–2; –13; 0).

У. 9 (стр. 65). Найдите силу натяжения кабеля под действием тяжести.

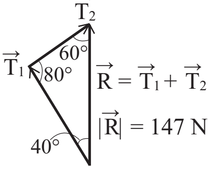
Решение:
найдем силу тяжести действующий на груз:
$P = mg = 15 \cdot 9{,}8 = 147$ N
Обозначим через T_1 и T_2 модули сил натяжений в кабелях.

а) 

Применяя теорему синусов получим:

$$\frac{T_2}{\sin 40°} = \frac{147}{\sin 80°}, \quad T_2 \ \frac{147\cdot\sin 40°}{\sin 80°} \approx 95{,}96 \text{ N}$$

$$\frac{T_1}{\sin 60°} = \frac{147}{\sin 80°}, \quad T_2 \ \frac{147\cdot\sin 60°}{\sin 80°} \approx 129{,}27 \text{ N}$$



У. 12. При каком значение m данные точки коллинеарны:
b) A(3; –1; 0), B (m; 2; 3), C (7; 3; 4)?
Решение: запишем компонентами векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle m-3; 2-(-1); 3-0\rangle = \langle m-3; 3; 3\rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 7-3; 3-(-1); 4-0\rangle = \langle 4; 4; 4\rangle$$

Если заданные точки коллинеарны, то и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ буду коллинеарными. Отсюда имеем:

$$\frac{m-3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \qquad m = 6$$

Критерии для суммативного оценивания по разделу 2.

№	Критерии	Заметки об учащемся
1.	Строит заданную точку в трехмерной системе координат.	
2.	Определяет координаты точки, заданной в трехмерной системе координат.	
3.	Находит расстояние между двумя точками заданных координатами.	
4.	Решает различные задачи на нахождение координат.	
5.	Определяет точку в пространстве при помощи позиционного вектора.	
6.	Находит длину вектора, заданного компонентами.	
7.	Выполняет сложение и вычитание векторов в пространстве.	
8.	Выражает вектор через орт векторов.	
9.	Находит скалярное произведение векторов по формуле.	
10	Из скалярного произведения двух векторов находит угол между векторами.	
11.	По уравнениям прямых определяет их взаимное расположение (пересекаются, перпендикулярны, параллельны, скрещиваются).	
12.	По данным условиям записывает уравнение плоскости.	
13.	Решает задачи на взаимное расположение плоскостей.	
14.	Решает задачи на уравнение сферы.	
15.	Определяет и представляет графически параллельный перенос в пространстве.	

Урок 33. Задания для суммативного оценивания по разделу 2

1) Найдите угол между диагоналями параллелограмма с вершинами в точках (0; 0), (3; 0), (5; 3) и (2; 3).

2) Найдите длину медианы BM треугольника с вершинами в точках A(14;−5;−4), B(–2;−5;8) и C(–2;13;–4).

3) Найдите угол между положительным направлением оси x и вектором с концами в точках P(3; 4) и Q(5; 7).

4) 1) запишите компонеттами; 2) выразите через орт вектора; 3) найдите длину вектора $\overrightarrow{MN}$.

a) $M\langle 3;\ 1;\ 4\rangle$, $N\langle 5;-2;-7\rangle$ b) $M\langle 3;\ 1;\ 4\rangle$, $N\langle 5;-2;-7\rangle$

5) Зная, что $\vec{f}=\langle -1\ ;\ -2\ ;\ -5\ \rangle$ и $\vec{g}=\langle\ 2\ ;\ 3\ ;-1\ \rangle$
запишите координаты вектора $\vec{a}$

a) $\vec{a}=\vec{f}+3\vec{g}$ b) $\vec{a}=2\,\vec{g}-3\vec{f}$

6) Найдите длину вектора.

a) $\vec{a}\,\langle 2;-3;2\rangle$ b) $\vec{u}\,\langle 2;-4;1\rangle$ c) $\vec{m}\,\langle 3;\text{-}1;-2\rangle$

7) Чтобы тело находилось в равновесии сумма всех трех (векторных)сил должна равняться нулю.На тело действуют две силы $\langle 3;-2;4\rangle$ и $\langle 4;\ 2;1\rangle$. Найдите силу, которая удержит тело в состоянии равновесия.

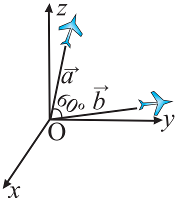
8) Даны точки A (2;3;4) и B (–1;6;3). Найдите координаты серешины отрезка AB.

9) Найдите угол между векторами $\vec{a}\langle 2;\ 3\rangle$ и $\vec{b}\,\langle -1;6\rangle$.

10) При каком значении m векторы $\vec{a}\,\langle -1{,}3\rangle$ и $\vec{b}\,\langle -1{,}m\rangle$ перпендикулярны?

11) Зная, что A(5; 3), B (2; 4), C(0; 0) и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, найдите координаты точки D .

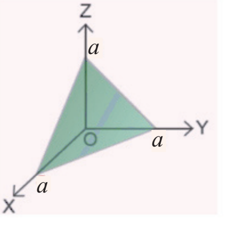
12) Найдите расстояние между самолетами на рисунке, если $|\vec{a}|$ = 6 км, $|\vec{b}|$ = 8 км.



13) Запишите уравнение сферы, центр которой находится в точке (1; –2; 3) и проходящей через точку (4; 2; 1).

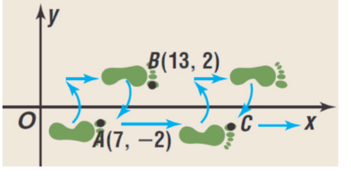
14) Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.

15) Запишите уравнение плоскости, отсекаемой на координатных осях отрезки равной длины.



16) Изображение следов на координатной плоскости является результатом отображения и параллельного переноса при движении.

Найдите координаты точки C, если при данном движении точка A (7; –2) переходит в точку B (13; 2).



17) Напишите координаты точек, являющихся концами отрезка на рисунке при повороте относительно начала координат на 90° по часовой стрелке.

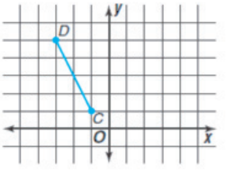


Таблица планирования по разделу 3

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во час	Учеб. стр.
1.2.1. Знает определение числовой последовательности и ее предела. 1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы. 1.2.3. Знает понятие непрерывной функции и применяет основные свойства непрерывности функции.	34-35	Предел функции в точке. Нахождение предела функции по таблице значений функции и по графику	2	67-71
	36	Существование предела	1	72-73
	37-39	Свойства пределов	3	74-79
	40-41	Непрерывность функции	2	80-85
	42	Замечательные пределы, содержащие тригонометрические функции.	1	86-87
	43-44	Безконечные пределы и предел в безконечности. Вертикальная и горизонтальная асимптоты.	2	88-92
	45-46	Предел числовой последовательности	2	93-98
	47	Обобщающие задания	1	99
	48	Задания для суммативного оценивания по разделу	1	
	Всего		15	

Пример урока

Урок 34-35. Предел функции в точке. Нахождение предела функции по таблице значений функции и графику. 2 часа. Учеб.стр. 67-71.

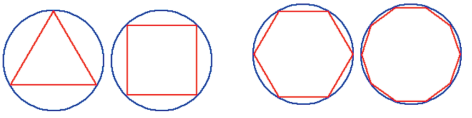
Содержательный стандарт.
1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.
Навыки учащегося:

- дает объяснение понятия предела на реальных ситуациях;
- определяет предел по числовым значениям таблицы;
- приблизительно определяет предел по заданному графику;
- различает значения предела в зависимости от заданного условия.

1. Представление понятия. Примеры реальных ситуаций (обсуждение).
Мы ежедневно используем понятие предела. Во многих случаях это связано с каким -либо измерением. Например, когда заканчивается плата за телефон, электрическую энергию или газ мы используем выражение “лимит закончился”. Однако понятие предела в математике отличается от бытового.

Геометрический подход к понятию предела.

Периметр правильногог многоугольника, вписанного в окружность при возрастании количества сторон стремится к длине окружности.

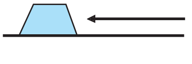


До настоящего времени мы используя статистические данные, находили значение функции для заданных значений переменных. Сейчас в разделе математического анализа или kalkulus мы изучим новое понятие. Основополагающим понятием математического анализа является предел. Какие возможности дает предел при математических вычислениях. Рассмотрим это коротко по рисункам. Более подробно мы изучим все это на следующих уроках.

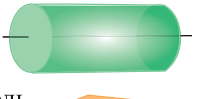
Вычисляется без предела

Площадь прямоугольника

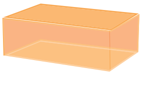
Работу, совершаемую под действием постоянной силы



Площадь поверхности цилиндра



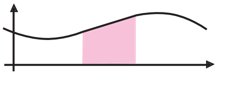
Объем прямоугольного параллелепипеда



Сумма конечных членов последовательности $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_n$

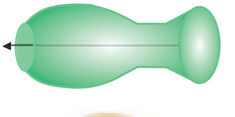
Вычисляется при помощи предела

Площадь, под кривой



Работу, совершаемую под действием переменной силы

Площадь фигуры, полученной вращением плоской фигуры



Объем фигуры, полученной вращением плоскей части ограниченной кривой

Сумма бесконечных членов последовательности $a_1 + a_2 + \ldots = S$

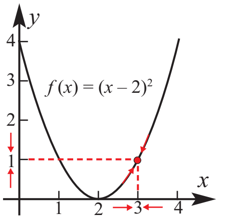
2. Обучение. Нахождение предела по таблице значений и по графику. Объяснить понятие предела можно на примере исследовательского задания из учебника или по следующим функциям.

Пусть, требуется исследовать значения квадратичной функции $f(x) = x^2 - 4x + 4$ при стремлении значений x к 3. Запишем функцию в виде полного квадрата $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Графиком функции является парабола с вершиной в точке (2;0). Составим таблицу для значений x приближающихся к 3 слева и справа. Из таблицы видно, что при приближении значений x к 3, значения функции приближаются к 1.

x слева стремится к 3 → ← x справа стремится к 3

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	0,810	0,980	0,998	?	1,002	1,020	1,21

$f(x)$ стремится к 1 → ← $f(x)$ стремится к 1



Тоже самое возможно увидеть по графику.

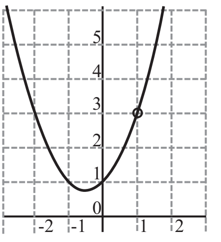
При стремлении x к 3 предел функции $f(x) = x^2 - 4x + 4$ равен 1.

Математически это умозаключение записывается так

$$\lim_{x\to 3} (x^2 - 4x + 4) = 1$$

3. Обучение. Значение функции и значение предела.
До настоящего времени мы вычисляли значение функции $f(x)$ при $x = a$. Предел помогает решать задачи, о том к какому значению стремится функция f, *при значениях x* близких к a. До учащихся надо довести мысль, что выражение "x стремится к a" *в понятии предела имеют ввиду , что x очень-очень (сколько угодно) близко приближаются к числу a*, однако никогда не будет равно ему.

Функция $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ не определена в точке $x = 1$.



$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$

Т.е. аргумент не может принимать значение $x = 1$. Однако предел не равен определенному значению x. Он отвечает на вопрос к какому значению сходятся значения функции при стремлении x к одному числу. Поэтому, несмотря на то, что функция не определена в $x = 1$ предел данной функции при $x \to 1$ существует и равен 3. Это записывается так: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

Выполняются задания из учебника. Вычисления проводятся при помощи калькулятора. Рекомендуется при выполнении заданий изображать в тетради схематично график. Наблюдая можно выполнить формативное оценивание.

Урок 36. Существование предела. Учеб.стр. 72 - 73

Содержательный стандарт.

1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.

Навыки учащегося:

■ может объяснить понятие одностороннего предела по графику, в соответствии с таблицей значений ;

■ определяет существует или нет предел функции в точке при помощи значений правого и левого пределов.

Для значений предела при стремлении x к какому-либо значению можно сделать следующие выводы:

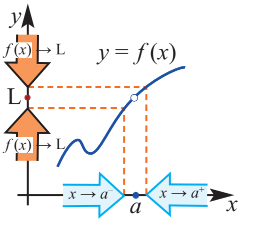
1. предела не существует;
2. предел существует и является каким-либо числом;
3. предел существует и равен k $+\infty$, или $-\infty$.

В каком случае мы говорим, что предел существует, а в каком нет?

Если значения функции $f(x)$ при стремлении x к числу a слева, стремятся к каким-либо значениям L_1, то это записывается так:

При $x \to a^-$ $f(x) \to L_1$ или $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$

Если значения функции $f(x)$ при стремлении x к числу a справа, стремятся к каким-либо значениям L_2 ,то это записывается так:



При $x \to a^+$ $f(x) \to L_2$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L_2$

Каждая из записей выше определяет односторонний предел $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L_1$ левый предел, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L_2$ правый предел.

Если левый и правый пределы равны одному числу L, т.е.

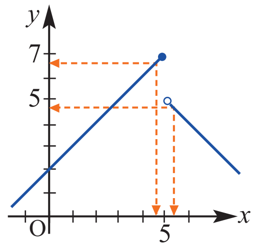
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L$ и $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$, число L при $x \to a$ называется пределом функции $f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Исследуем существует или нет

предел функции $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le 5 \\ -x + 10 & x > 5 \end{cases}$ при $x \to 5$ Для этого составим таблицу значений и построим график функции.

$x \to 5^-$	4,9	4,99	4,999
$f(x)$	6,90000	6,99000	6,99900

$x \to 5^+$	5,1	5,01	5,001
$f(x)$	4,90000	4,99000	4,99900

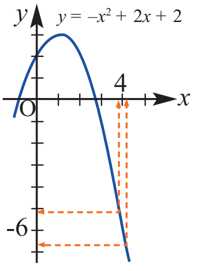


Как из графика, так и из таблицы видно, что при стремлении x слева к 5, т.е. оставаясь меньше 5 и стремясь к 5 предел функции равен

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 7$$

а при стремлении x справа к 5, т.е. оставаясь больше 5 и стремясь к 5, предел функции равен

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 5$$



Так как $\lim\limits_{x\to 5} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, предел $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ не существует

Рассмотрим существование предела на другом примере .

Исследуем существует ли предел функции $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ при стремлении x к 4.

Составим таблицу значений, соответствующих данному условию и построим график.

$x \to 4^-$	3,9	3,99	3,999
$f(x)$	–5,41000	–5,94010	–5,99400

$x \to 4^+$	4,1	4,01	4,001
$f(x)$	–6,61000	–6,06010	–6,00600

Каждый из двух источников показывает нам, что левый и правый пределы равны.

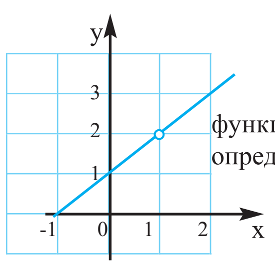
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 6, \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 6, \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 6$$

Значит, при $x \to 4$ предел функции равен 6.

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 6$$

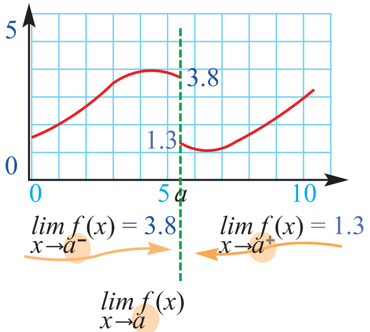
Можно обобщить, в соответствии с графиками представленными ниже.

В точке $x = 1$ функция не определена, но имеет предел.

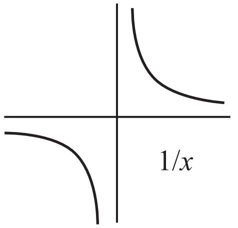


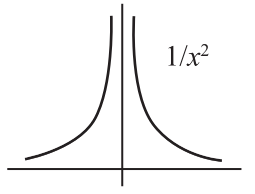
функция не определена

В точке a функция не имеет предела



Ранее было сказано о трех результатах значения предела. Два из них, когда предела не существует или пределом является число, мы уже рассмотрели. Теперь рассмотрим случай, когда предел равен плюс или минус бесконечности.





Рассмотрим график функции $1/x$, при $x \to 0$ предела не существует.

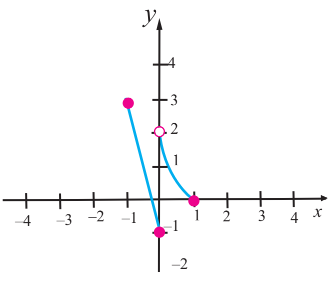
Так как $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = -\infty$ и предела нет. Теперь рассмотрим $\dfrac{1}{x^2}$.

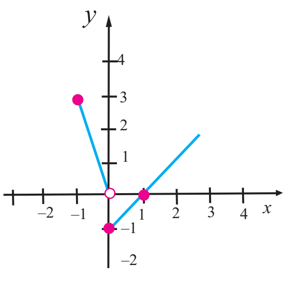
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, т.е. правый и левый пределы

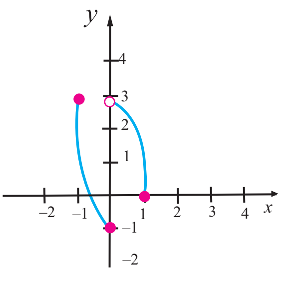
+ бесконечность. Значит, при стремлении значений x и справа и слева к нулю значения функции стремятся к + бесконечности.

Выполняются задания из учебника. Задание 6 выполняется всем классом и проводится обсуждение. В задании требуется построить график удовлетворяющий условию предела. Учащиеся высказывают свое мнение. Например, отмечая заданные точки на координатной плоскости они должны осознать в какой точке предела не существует. При этом условии правый и левый предел должны иметь разные значения.

а)При $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.







Учащиеся могут изображать различные кусочно - заданные функции и выполнять задания подобного типа. Такие задания целесообразнее могут быть предложены для групповой работы. Каждый член группы предлагает свой вариант. Для каждого графика записывается и представляется уравнение.

Оценивание. При формативном оценивании надо дать оценку тому, на сколько активно учащийся участвует в обсуждениях, может ли он определить существование предела и изображать соответствующие графики.

Урок 30-32. Свойство пределов. 3 часа. Учеб.стр. 74 - 79

Содержательный стандарт.

1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.

Навыки учащегося:

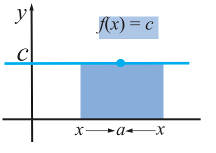
- показывает свойства пределов на примерах;
- применяет свойства пределов;
- применяет различные методы для вычисления пределов;
- решает задачи реальной жизненной ситуации применяя пределы.

1-ый час. Можно рассмотреть свойства пределов на примерах вместе со всем классом. Коллективную работу можно организовать следующим образом. Учитель может устно звучивать свойство, а ученик записывать его на доске математически и привести примеры. Другие учащиеся могут в это время записать свойство в тетрадь как словами, так и математически.

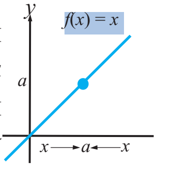
Предел постоянной и тождественной функции являются двумя фундаментальными пределами.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$ Предел постоянной равен постоянной.

Пример. $\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$, $\lim\limits_{x\to 3} 7 = 7$



Учащиеся понимают, что для постоянной функции при любых значениях x функция принимает одно и тоже значений y и объясняют это при помощи графика. Они должны ответить на вопрос “Изменится ли значении предела, если вместо приближения к 3 взять приближение к числу 4 или 5? “



Предел тождественной функции. Для тождественной функции $f(x) = x$ или $y = x$ исследуется свойство $\lim\limits_{x\to a} x = a$ Представляются примеры. У тождественной функции значения аргумента и функции равны. Значит, к какому числу стремится x у же числу стремится y.

Пример. $\lim\limits_{x\to -5} x = -5$

После чего, рассматриваются следующие свойства пределов и их применение, вместе со свойствами, изученными выше.

Большое значение имеет свойство суммы, разности, произведения и частного пределов, так как они помогают вычислять пределы алгебраически.

Предел суммы, разности, произведения и частного.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{M}$, то:

1. Предел суммы: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{L} + \mathrm{M}$

2. Предел разности: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{L} - \mathrm{M}$

3. Предел произведения: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{L} \cdot \mathrm{M}$

4. Предел частного: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}, \mathrm{M} \neq 0$

5. Предел степени: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = \mathrm{L}^n$,

В частном случае, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

Вынесение постоянной за знак предела. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Это свойство охватывает свойства пределов для постоянной и тождественной функций.

$$\lim_{x\to 3} 6x = 6\lim_{x\to a} x = 6\,a$$

2-ой час. Рассматриваются некоторые свойства вычисления пределов, такие как - непосредственное поставление значения, разложения на множители, освобождение от радикала. Для этого учащимся дается время, по окончании которого они могут представить примеры, объясняя их у доски. Особое внимание надо уделить умению правильно применять свойства пределов для их вычисления. Это умение особо отмечено в задании 7.
В задании 8 учащийся сокращает рациональную функцию и, использует полученную функцию для определения в указанных значениях.
3-ий час. Выполняются задания на вычисления пределов.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.8. Зная, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}=100$ вычислите пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{100}-1)^2}{(x-1)^2}$

На каждом шаге вычисления запишите соответствующее свойство пределов.

Решение:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=100\cdot\dfrac{1}{1+1}=50$

знаменатель раскладывается на множители

применяется свойство произведения пределов

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{50}-1)(x^{50}+1)}{(x-1)(x^{50}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^{50}+1}=$

числитель и знаменатель умножается на одно и тоже выражение

упрощается

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^{50}+1}=100\cdot\dfrac{1}{2}=50$

применяется свойство произведения пределов

У.10. Вычислите.

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}$

Решение: при $x\to -2$ предел знаменателя равен 0 и применить свойства пределов невозможно. Поэтому сначала, числитель и знаменатель дроби надо разложить на множители и сократить, а уже затем применять свойства пределов.

$$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-5}{x+3}=\frac{-2-5}{-2+3}=-7$$

У.11. 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Сначала выполним замену $\sqrt[3]{1+x}=t$ и упростим. В этом случае учитывая

$1+x=t^3,\quad x=t^3-1$ и подставив замену получим:

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\frac{t-1}{t^3-1}=\frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+0})^2+\sqrt[3]{1+0}+1}=\dfrac{1}{3}$.

Рабочий лист N 1

Имя_________ **Фамилия**________________ **Дата**___________

Вычислите, применяя свойства пределов.

1. $\lim\limits_{x\to 6}(5x-4)$

2. $\lim\limits_{x\to 7}(4x-3)$

3. $\lim\limits_{x\to -2}7x^2$

4. $\lim\limits_{x\to -3}5x^2$

5. $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-3x-4)$

6. $\lim\limits_{x\to 6}(x^2-4x-7)$

7. $\lim\limits_{x\to 2}(5x-8)^3$

8. $\lim\limits_{x\to 4}(6x-21)^3$

9. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x+5)^2$

10. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x-1)^2$

11. $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{x^2+9}$

12. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{5x^2+4}$

13. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{x+1}$

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x}{x-4}$

Вычислите, применяя свойства пределов и способы вычисления пределов.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-12}{x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^4-2x^3+x-2}$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^4+x^3+2x+2}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x-1}}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}[(x+1)^2(3x-1)^3]$

14. $\lim\limits_{x\to -1}[(x+2)^3(3x+2)]$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

16. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

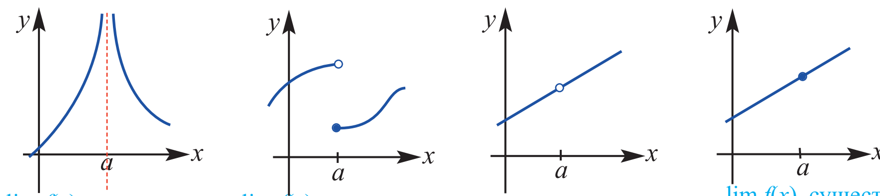
Урок. 40-41. Непрерывность функции. 2 часа. Учеб.стр. 80-85

Содержательный стандарт.
1.2.3. Знает понятие непрерывной функции и применяет основные свойства непрерывности функции.

Навыки учащегося:
- представляет на примерах условие, при котором функция терпит разрыв;
- объясняет условие непрерывности функции в точке;
- объясняет непрерывность функции на интервале;
- объясняет непрерывность функции на отрезке;
- выполняет упражнения на непрерывность функции.

На предыдущих уроках мы отметили, что для значения предела не важно, определена или нет функция в точке.

Однако, при условии, что $x \to a$ нахождения значений функци - многочлен, тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и некоторых рациональных функций, можно сразу подставить число a. При этом, фактически, вычисляя значение функции сразу находим значение предела. Это возможно только потому, что функции непрерывны. Сейчас мы изучим, факт, что значение функции $f(a)$ для значений переменной x стремящихся к a является основным показателем непрерывности функции. В классе исследуются графики, имеющие разрыв в точке c из учебника, отражающие различные ситуации. Ниже представлены другие примеры, отражающие данные ситуации.



$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует; *f(a) не определена*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует; *f(a) не определена*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует; *f(a) не определена*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует; *f(a) определена, но* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

Учащиеся должны уметь представлять данные ситуации устно, письменно и графически.

Значить, чтобы функция была непрерывна в точке должно выполняться 3 условия:

Если функция удовлетворяет условиям:

1. $f(a)$ определена; 2. существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

то она непрерывна в точке a. Если одно из условий не выполняется, то функция терпит разрыв в точке a. Например, $f(x)=[x]$ функция целой части x в каждой точке $n\in Z$ разрывная, так как для любого $n\in Z$,

то $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n-1$, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n$.

2-ой час. Объясняется непрерывность функции на интервале и не отрезке.

Функция непрерывная в каждой точке интервала $(a;b)$ называется непрерывной на данном интервале.

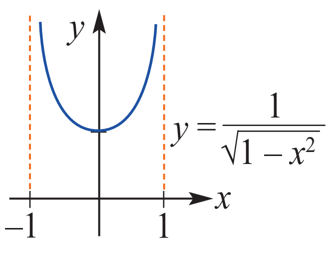
Непрерывность функции на отрезке. Определение. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, то функция называется непрерывной на отрезке $[a;b]$.

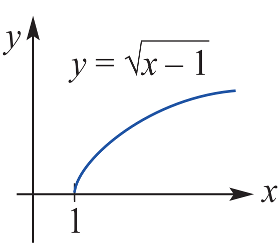
Из определения видно, что если говорить о пределе функции на отрезке, то речь идет о существовании пределов слева и справа.

По определению, если $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, то функция f непрерывна в точке a справа, а если $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, функция f непрерывна в точке a слева

Непрерывность функции на интервале не говорит о том, что функция непрерывна на отрезке. Рассмотрим интервалы для каждой ситуации $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; \infty)$, $(b; +\infty)$, $(-\infty; b)$. Например, для того, чтобы функция была непрерывна на промежутке $[1; 5)$, она должна быть непрерывна справа в 1 точке и на интервала $(1; 5)$.

Рассмотрим следующие ситуации для функций, представленных ниже.





Несмотря на то, что 1-ая функция $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, непрерывна на интервале $(-1; 1)$, на отрезке $[-1; 1]$ она не непрерывна. Так как не определена, ни при $x = -1$, ни при $x = 1$.

2-ая функция $y = \sqrt{x-1}$ непрерывна на промежутке $[1; +\infty)$.

Так как, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-1} = \lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-1} = \sqrt{a-1} = f(a)$

При значении $a = 1$ правый предел существует и равен значению функции в данной точке.

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = f(1)$$

Значит функция в любой точке, удовлетворяющей условию $a \geq 1$ непрерывна.

Выполняются задания, в которых используется непрерывность функции в точке, на интервале, на отрезке, а также применяется теорема о промежуточных значениях функции.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.5. Найдите точки разрыва функции. Найдите предел функции (если он существует) в данных точках.

Решение: 3) Функция $p(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$ не определена в точке $x = -2$.

По определению, так как $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x > -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} 1 & x > -2 \\ -1 & x < -2 \end{cases}$

Значит, $\lim\limits_{x\to -2^+} p(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} p(x) = -1$. Так как правый и левый пределы

различны, то при $x \to 2$ предела функции не существует.

У.11. 1) При помощи теоремы о промежуточных значениях, найдите в какой точке функция принимает определенное значение.

a) $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0; 5]$, $f(c) = 11$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0; 3]$, $f(c) = 0$

Решение: a) Функция $f(x) = x^2 + x - 1$ непрерывна на всей числовой оси, в том числе на отрезке $[0; 5]$ и на концах отрезка $[0; 5]$ принимает значения разных знаков: $f(0) = -1 < 0$,

$$f(5) = 25 + 5 - 1 = 29 > 0.$$

По следствию из теоремы Коши существует такая точка $c \in (0;5)$, что $f(c) = 11$.

Рабочий лист N 2

Имя__________ Фамилия__________________ Дата___________

1) Определите является ли непрерывной функция в заданных точках.

$f(x) = 2x + 5$, $x = 1$

$f(x) = 3x + 4$, $x = 1$

$f(x) = x^2 - 3x + 7$, $x = 4$

$f(x) = x^2 - 5x + 7$, $x = 4$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$, $x = 3$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{x - 5}$, $x = 6$

$f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$, $x = 5$

$f(x) = \dfrac{x + 7}{x - 7}$, $x = 7$

$f(x) = \dfrac{x - 5}{x + 5}$, $x = 5$

$f(x) = \dfrac{x - 7}{x + 7}$, $x = 7$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 - 5x}$, $x = 0$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 + 6x}$, $x = 0$

2) Исследуйте функцию на непрерывность.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6}, & x \neq 6 \\ 13, & x = 6 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 5, & x \leq 0 \\ x^2 + x - 5, & x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \leq 0 \\ x^2 + x - 4, & x > 0 \end{cases}$$

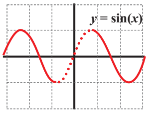
Урок 35. Замечательные пределы, содержащие тригонометрические функции. 1 часа. Учеб.стр. 71-72
Содержательный стандарт.
1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.

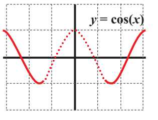
Навыки учащегося:

- вычисляет предел тригонометрических функций;
- знает и применяет замечательные пределы, для тригонометрических функций.

Предел тригонометрической функции рекомендуется изучать на графиках. На графике наглядно можно увидеть предельное значение. Например, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$





На самом деле, так как функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны, то значение предела в точке равно значению функции в точке $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a,\quad \lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

При помощи учащихся можно на доске вычислить пределы тригонометрических функций. Например,

a. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(0) = 0$

b. $\lim\limits_{x\to \pi} (x \cos x) = (\lim\limits_{x\to \pi} x)(\lim\limits_{x\to \pi} \cos x) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = \lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^2 = 0^2 = 0$

Объяснение и доказательство замечательных пределов надо провести коллективно.

1. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$ **2.** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0}$

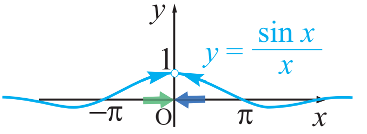
Рассматриваются примеры, где находят применение этих пределов. Рассмотрим следующие примеры.

Надо обратить внимание учащихся на то, что нельзя сразу подставить значение $x = 0$ в предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$ потому, что получим неопределенность типа 0/0. Поэтому возникает необходимость изменить выражение, выполнив эквивалентные математические преобразования, используя свойства пределов. Выразим предел, эквивалентной записью:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 4\cdot 1 = 4$$

замечательный предел

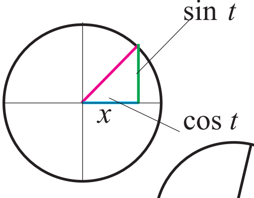
Доказательство первого замечательного предела можно выполнить геометрически.

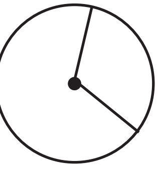


1. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Более талантливые учащиеся могут выполнить это самостоятельно. Сначала, приблизительно, установим предел по графику, построенному при помощи графкалькулятора. По графику видно, что при стремлении x как слева так и справа к нулю, значение функции стремится к 1. Рекомендуется проверить данный факт составив таблицу значений. Возможно, что данные вычисления будут утомительны, но для альтернативных доказательств математических фактов данный путь вырабатывает исследовательские навык.

Площадь сектора

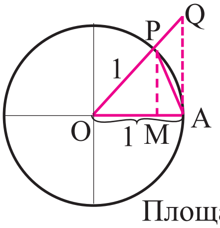




Площадь сектора, радиуса r с центральным углом x радиан равна $S = \frac{r^2x}{2}$.

Пусть, окружность с центром в точке O является единичной окружностью.

Здесь $y = \sin t$, $x = \cos t$



Рассмотрим предел: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Пусть площадь треугольника AOP равна S_1, площадь кругового сектора AOP равна S_2, а площадь треугольника AOQ равна S_3. Понятно, что $S_1 < S_2 < S_3$

Площадь треугольника AOP $S_1 = \frac{1}{2}$ OA $\cdot$ MP $= \frac{1}{2}\sin x$

Площадь сектора AOP $S_2 = \frac{1}{2} \cdot x$

Площадь треугольника AOQ $S_3 = \frac{1}{2}$ OA $\cdot$ AQ $= \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

Так как $S_1 < S_2 < S_3$, то $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ можно записать как $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

или равносильное неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

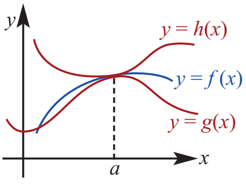
Здесь перейдя к пределу при $x \to 0^+$, $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$ и учитывая, что предел постоянной равен самой постоянной получим, что каждая сторона равна 1. Значит, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$. Так как функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и $f(x) = \cos x$ являются четными, то неравенство верно и на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

После того, как мы получили следующее неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

для дальнейшего доказательства правильнее рассказать о **теореме сжатия** для пределов.

Теорема. Если функции f, g, h удовлетворяют условию $g(x) \le f(x) \le h(x)$, а также $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \mathrm{L}$ и $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = \mathrm{L}$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}.$$



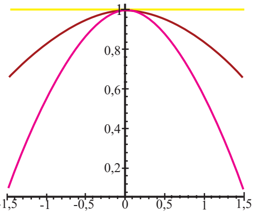
Как видно, функция $f(x)$ сжата между функциями $y = h(x)$ и $y = g(x)$.

Приняв, что функция $\mathrm{g}(x) = \frac{\sin x}{x}$ сжата между функциями $h(x) = 1$ и $\mathrm{g}(x) = \cos x$ и что

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

по теореме сжатия получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



? Решение некоторых заданий из учебника:

Ниже представлено решение задания 3.

У.3. c) Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

Учащиеся устанавливают, что если сразу подставить значение получим неопределенность вида 0/0. Поэтому надо разложить знаменатель на множители.

$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+3} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Оценивание. Под наблюдением надо держать первоначальные знания о свойствах тригонометрических функций, свойствах пределов, умение применять эти свойства и уровень понимания при объяснении и доказательстве

Урок 36-37. Бесконечные пределы и предел в бесконечности. Вертикальная и горизонтальная асимптоты 2 часа. Учеб.стр. 88-92

Содержательный стандарт.

1.2.2. Знает понятие предела функции, свойства пределов и замечательные пределы и при помощи них вычисляет пределы.

Навыки учащегося:

Бесконечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

■ графически представляет и математически записывает, что при приближении значений x к числу a значение функции увеличивается или уменьшается до бесконечности ;

■ устанавливает связь между пределом функции и вертикальной асимптотой и находит асимптоту по пределу;

Пределы в бесконечности $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$

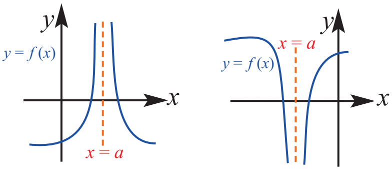
■ представляет на графике понимание математической записи предела в бесконечности;

■ устанавливает связь между пределом функции и горизонтальной асимптотой и находит вертикальную асимптоту по пределу;

■ применяет теорему о пределе рациональной функции.

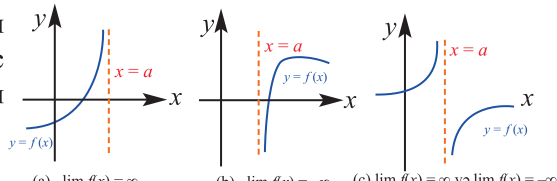
Сначала объясняется понятие бесконечного предела. Это понятие можно четко представить на графике. Например, на графиках ниже можно увидеть, что при стремлении x к какому числу a значение функции возрастает или убывает до бесконечности. Знак бесконечности не выражает значение какого - либо числа, а обозначает какие - то большие значения.

Надо обратить внимание учащихся на принятые записи L/±∞→0; ±∞/L→∞ L≠ 0; L/0→∞; L≠ 0.



(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

По графику видно, что функция бесконечно стремится к плюс бесконечности при стремлении x справа и слева к числу a.



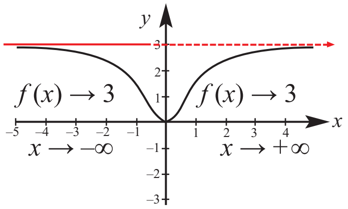
(a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ və $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Вообще, выражение предела бесконечностью имеет 6 случаев. Каждый из них говорит о том, что функция имеет вертикальную асимптоту.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Как найти асимптоту алгебраическими методами учащимся известно из предыдущих уроков.

По графику функции $y = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$ видно, что при уменьшении или увеличении до бесконечности значений x значение функции приближается к 3. При этом функция этому значению не равна



$$y = \frac{3x^2}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$$

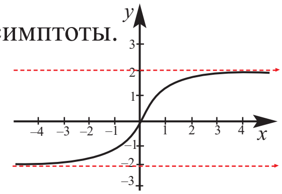
Сказанное выше показывает, что при условии $x \to \pm\infty$ предел функции существует и он равен 3.

Существование предела в бесконечности в общем виде записывается так:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$$

Эта запись показывает, что предел есть и он равен L.

Функция может иметь более одной горизонтальной асимптоты.



Например, функция $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2 \text{ или } \lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$$

Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ или $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ означает найти горизонтальную асимптоту

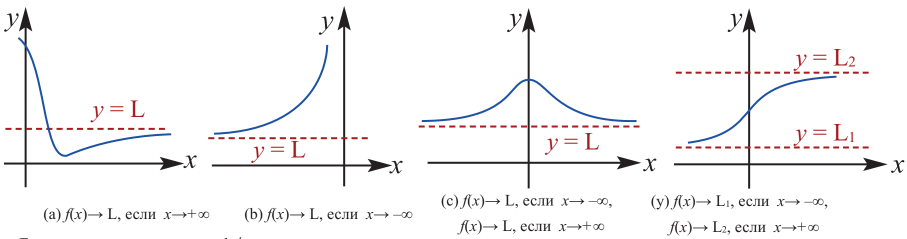
Существуют следующие случаи существования пределов:

1. Один из пределов существует, другой нет.
2. Оба предела существуют и равны одному и тому же числу.
3. Оба предела существуют, но имеют различные значения.
4. Ни один из пределов не существует.

Если один из пределов $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ или $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ существует, то число L является горизонтальной асимптотой.

Покажем эти ситуации графически.

$f(x) \to \mathrm{L}$, если $x \to -\infty$ и $f(x) \to \mathrm{L}$, если $x \to \infty$



(a) $f(x) \to \mathrm{L}$, если $x \to +\infty$ (b) $f(x) \to \mathrm{L}$, если $x \to -\infty$ (c) $f(x) \to \mathrm{L}$, если $x \to -\infty$, $f(x) \to \mathrm{L}$, если $x \to +\infty$ (y) $f(x) \to \mathrm{L}_1$, если $x \to -\infty$, $f(x) \to \mathrm{L}_2$, если $x \to +\infty$

Функция в виде $1/x$ не определена и изменяется на промежутке $-\infty$ и $+\infty$.

В общем виде это можно записать как $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$ и $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$. $(n \in \mathrm{N})$

Теорема о пределе рациональной функция очень важна для рациональных функций высших степеней. По этой теорем можно сформировать мнение о том как себя ведет функция в бесконечности и создать ее модель. При бесконечно больших значениях изменение определяется при помощи асимптот. При возрастании значений x многочлена $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_0$ до бесконечности его график приближается к графику функции $y = a_nx^n$

$\lim\limits_{x\to\infty} a_nx^n = \lim\limits_{x\to\infty} [a_nx^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_0]$, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{a_nx^n} = 1$

Это равенство определяет предел в бесконечности.

Для того, чтобы найти модель рациональной функции в бесконечности, надо найти модели рациональных функций в числителе и знаменателе, упростить и найти модель.

Рассмотрим следующие примеры.

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^4 - x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 7} \qquad g(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - x + 1}{4x^3 + x^2 - 5x + 4}$$

Запишем модель изменения функции $f(x)$ в виде $\frac{x^5}{3x^2} = \frac{x^3}{3}$. При увеличении значений x до бесконечности функция $f(x)$ будет изменяться как $y = x^3/3$.

Модель изменения функции $g(x)$ имеет вид $\frac{3x^3}{4x^3} = \frac{3}{4}$. Т.е. при бесконечно больших значений x график функции $g(x)$ приближается к прямой $y = \frac{3}{4}$ и она является горизонтальной асимптотой функции $g(x)$, в то время как у функции $f(x)$ горизонтальной асимптоты нет.

Понятия бесконечного предела и предела в бесконечности тесно связаны с понятиями горизонтальной и вертикальной асимптоты функции многочлена и рациональной функции. Нахождение асимптот при помощи предела (или алгебраически) очень важно при построении графика. Это понятие достаточно абстрактно и может взывать у учащихся большие трудности, преодолеть которые помогут использование графиков.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.5. Вычислите предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & x > 1 \\ \dfrac{4x}{2x-5} & x \le 1 \end{cases}$

Решение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{2x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{2x} = 2$.

Оценивание. Наблюдая можно оценить как учащиеся распознают ситуации, в которых при стремлении x к какому-то определенному числу, значение функции стремится к бесконечности, определяют горизонтальные асимптоты, в том числе как изменяется значении функции при стремлении x к $\pm\infty$, умеют находить горизонтальные асимптоты. Особое внимание надо уделить умению применять и представлять предел рациональной функции.

Урок 45-47. Предел числовой последовательности. Обобщающие задания. 3 часа. Учеб.стр. 93-99

Содержательный стандарт.

1.2.1. Знает определение числовой последовательности и ее предела.

Навыки учащегося:

- применяет определение предела к числовой последовательности;
- применяет свойства числовой последовательности.

Предел числовой последовательности можно рассматривать как частный случай предела функции в бесконечности. Рассмотрим сумму:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Как видно, каждое следующее число которое добавляется к сумме меньше предыдущего. Продолжая, можно увидеть, что после определенного шага, добавляемое число становится настолько маленьким, что уже не влияет на сумму. Выразим члены суммы следующим образом:

$$S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$

$$S_3=\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$S_4=\frac{15}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},$$

....

Существует ли предел последовательности сумм? Конечно, теперь без труда сумму можно записать в виде:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

Применяя свойства пределов можно найти предел данной последовательности S_n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1-0=1.$$

Периодические десятичные дроби являются примером предела конечной числовой последовательности:

$$0{,}3333(3)=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots=\frac{1}{3}\quad \text{или}$$

$$3{,}1459\ldots=3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=\pi$$

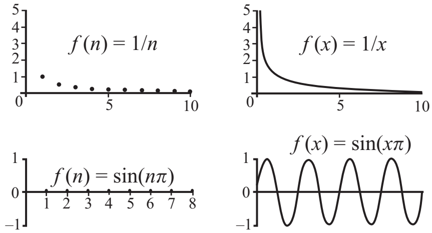
Мы уже знаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Если здесь заменить x на n, то получим $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$, а это говорит о том, что следующая последовательность стремится к нулю.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\ldots.$$

Более наглядно предел последовательности может быть показан на примере $f(n) = \sin \pi n$.

При $n \in \mathrm{N}$, для последовательности $\sin 1\pi,\ \sin 2\pi,\ \sin 3\pi, \ldots, \sin \pi n, \ldots$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$.

Для сравнения можно представить графики последовательности и соответствующей функции.



В качестве дополнительной информации учащиеся можно дать информацию о том, что последовательности можно, в зависимости от того существует или нет предел, разделить на две группы - сходящиеся и расходящиеся. Например, последовательность $1/n$ является сходящейся, а последовательности $(-1)^n$; $\sin\frac{\pi n}{2}$; n^2 являются расходящимися последовательностями.

(1) $2; 2; 2, \ldots ,$	сходящаяся предел 2
(2) $2\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{4}; \ldots ,$	сходящаяся предел 2
(3) $1; 2; 1; 2, \ldots ,$	расходящаяся
(4) $2; 4; 6; 8; \ldots ,$	расходящаяся

На 2-ом уроке объясняется существование предела монотонной и ограниченной последовательности на примере периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность. Ярким примером как частного случая предела в бесконечности, так и монотонной и ограниченной последовательности является второй замечательный предел:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}.$$

Выполняются решение заданий, связанных с ним.

На 3-ем уроке выполняются обобщающие задания.

Решение некоторых заданий из учебника:

У. 6 (стр. 98) Вычислите пределы.

Решение:

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2$

f) $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{t+1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to0}\left(1-\frac{t}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to0}\left(\left(1-\frac{t}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{-t}}\right)^{\frac{-1}{2t+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

У. 1 (стр. 99)

Вычислите предел (если он существует).

11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)\cdot(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+1)} = \lim\limits_{x\to3}\frac{x-2-1}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{1}{\sqrt{3-2}+1} = \frac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{|0-2|}{0-2} = -1$

У. 7 (стр. 99)

Найдите левый и правый предел функции $f(x) = \frac{x+|x|}{x}$ в точке $x = 0$

Решение: так как $f(x) = \frac{x+|x|}{x} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$, то получим

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$. В точке $x = 0$ данная функция не имеет предела.

Критерии для суммативного оценивания по разделу 3

№	Критерии	Заметки об учащихся
1.	Определяет предел по графику или по таблице.	
2.	Устанавливает существование предела.	
3.	Применяет свойства и вычисляет пределы различные способами.	
4.	Устанавливает непрерывность функции в точке.	
5.	Устанавливает непрерывность функции на отрезке.	
5.	Знает и применяет замечательные пределы, содержащие тригонометрические функции.	
7.	Решает задания на нахождении предела бесконечности.	
8.	Решает задания на нахождении бесконечного предела.	
9.	Применяет теорему о пределе рациональной функции.	
10	Решает задания на нахождение пределе числовой последовательности.	

Урок 48. Задания для суммативного оценивания по разделу 3.

1) Постройте график функции и проверьте существует или нет предел при $x \le 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x \ge 2 \end{cases}$ b) $g(x) = |x - 2|$

2) Зная, что $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -3$, найдите

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2 \cdot f(x) - 3 \cdot g(x))$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) + 2}{1 - g(x)}$

3) Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

4) Найдите точку разрыва функции и найдите (если он существует) левый и правый предел в данной точке.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$

5) Найдите горизонтальную и вертикальную асимптоту функции.

$f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^2}$

6) Найдите предел последовательности при $n \to \infty$.

a) $2; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}; \ldots, 2 \cdot (\dfrac{1}{8})^n, \ldots$

b) 0,52; 0,5252; 0,525252; ...

7) Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x}$

8) Найдите предел последовательности $a_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ при $n \to \infty$.

9) Какая из следующих функций имеет нули на отрезке $[-2; 2]$? Обоснуйте.

a) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = x^3 + x + 2$

10) Зная, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1} = 10$ найдите следующие пределы.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{20} - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$

Таблица планирования по разделу 4

Стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб. стр.
3.1.5. Распознает фигуры, полученные вращением. 3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве. 3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема цилиндра. 3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема конуса и усеченного конуса. 3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара. 3.2.6. Находит площади поверхности и объем частей шара (сегмента и сектора). 4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.	49	Фигуры вращения. Цилиндр	1	101-103
	50-51	Площадь поверхности цилиндра	2	104-107
	52-54	Конус. Площадь поверхности конуса	3	108-114
	55-57	Сечения цилиндра и конуса плоскостью. Площадь поверхности усеченного конуса.	3	115-119
	58-60	Площадь поверхности шара и его частей	3	120-125
	61	Площадь поверхности комбинированных фигур	1	126-127
	62-63	Площадь поверхности подобных фигур. Обобщающие задания	2	128-130
	64	Задания для суммативного оценивания по разделу	1	
	Всего		16	

Урок 49. Фигуры вращения. Цилиндр. 1 час Учеб. стр. 101-103
Содержательный стандарт.

3.1.5. Распознает фигуры, полученные вращением.

3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объема цилиндра.

■ понимает, пространственные фигуры получены вращением плоской поверхности вокруг выбранной оси;

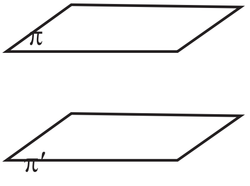
■ представляет цилиндр как фигуру вращения в виде рисунка;

■ переставляет цилиндр с помощью геометрических элементов.

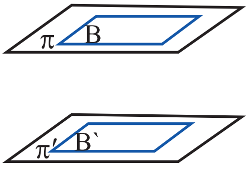
Учащиеся на компьютере или на графике изображают различные фигуры вращения. Они должны понять, что фигуры вращения получаются вращением плоских фигур. Например, можно показать, что конус получается в результате вращения треугольника вокруг одной из сторон, цилиндр - вращением прямоугольника вокруг одной из сторон, шар - вращением полукруга вокруг диаметра, а также различные пространственные фигуры, полученные при вращении криволинейной трапеции.

Учащиеся обсуждают общее определение трапеции и еще раз пошагово объясняют его.

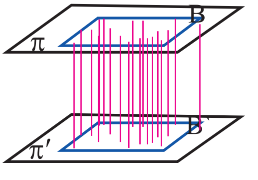
1. Проведем параллельные плоскости π и π′.



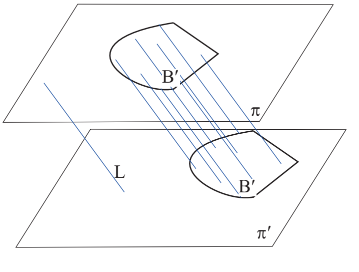
2. На параллельных плоскостях, при помощи параллельного переноса изобразим два совпадающих друг с другом многоугольника B и B′.



3. Соединим соответствующие точки многоугольников отрезками.

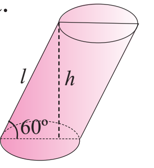


Они должны понимать, что отрезки и многоугольники, расположенные на параллельных плоскостях образуют фигуру, которая является призмой. Призмы различаются в зависимости от многоугольников, расположенных на параллельных плоскостях. Теперь мы изучим обобщенное множество пространственных фигур, в которое входят и призмы. Основания этих фигур также расположены на параллельных плоскостях. Плоские фигуры, которые совмещаются при параллельном переносе, и отрезки, соединяющие соответствующие точки этих фигур, образуют фигуру, которая называются цилиндром или цилиндрической фигурой. Основаниями цилиндрической фигуры может являться любая замкнутая фигура, в том числе и многоугольник. Можно сказать, что, призма - есть цилиндр в основании которого лежит многоугольник. Цилиндр задается радиусом, высотой и образующей.



Решение некоторых заданий из учебника:

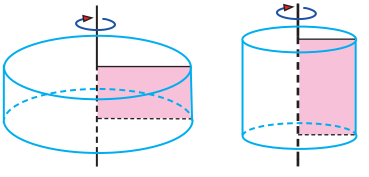
У.1. Образующая наклонного цилиндра длиной 12 см составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту цилиндра.



Решение: в наклонном цилиндре образующая (l), угол наклона (α) образующей и высота (h) связаны соотношением $h = l \sin\alpha$. В рассматриваемом случае

$$h = 12 \sin 60^{\circ} = 12\frac{\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

У.2. Найдите высоту и диаметр основания цилиндра, полученного вращением прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см, вокруг одной из сторон (рассмотрите два случая).



Решение: здесь возможны два случая.
I случай: если вращать прямоугольник вокруг меньшей стороны, то h_1=3 см; d_1=8 см.
II случай: если вращать прямоугольник вокруг большей стороны, то h_2=4 см; d_2=6 см.

Урок 50-51. Площадь поверхности цилиндра. 2 часа. Учеб. стр. 104-107

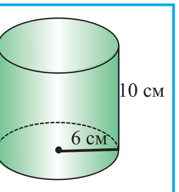
Содержательный стандарт.
3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема цилиндра.

Навыки учащегося:
- представляет формулу боковой и полной поверхности цилиндра на примерах по рисунку и словами;
- решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей цилиндра.

Учащимся рекомендуется определение и раскрытое объяснение формул записать в виде таблицы.

Полная поверхность цилиндра равна сумме площадей оснований и боковой поверхности.

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

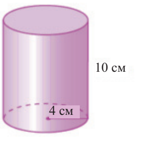


Пример: площадь полной поверхности цилиндра с основанием 6 см и высотой 10 см будет: $S = 2\pi \cdot 6\,(10 + 6) \approx 603$ см^2

Учащиеся должны уметь показать боковую и полную поверхность цилиндра на реальных примерах. Представляется задача реальной жизненной ситуации, где требуется найти площадь боковой и полной поверхности цилиндра: расход материала при изготовлении коробки, расход краски при малярных работах, расход материала для изготовления больших котлов и.т.д. Также площадь боковой и полной поверхностей необходимо бывает вычислить при изготовлении деталей для машин цилиндрической формы. Например, скорость работы, совершаемой бульдозером при укладке асфальта можно подсчитать, зная площадь боковой поверхности барабана бульдозера. Цилиндр можно сделать свернув лист бумаги. Тогда наглядно видно, что разверткой цилиндра является прямоугольник. Можно показать, что при покраске цилиндрическим роликом остается поверхность прямоугольной формы.

? Решение некоторых заданий из учебника:

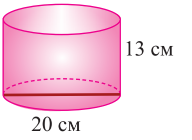
У.1. Найдите площадь полной поверхности цилиндров на рисунке.



Решение: а) $r = 4$ см, $h = 10$ см

$S_{п.п.} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h) = 2\pi \cdot 4 \cdot (4+10) = 112\pi$ (см^2)

У.2. Необходимо покрасить как внутреннюю, так и внешнюю поверхности посуды в форме цилиндра без крышки. Найдите общую площадь, которую надо покрасить.



Решение: площадь, которую нужно покрасить равна сумме площадей внутренней и внешней поверхности цилиндра без крышки.

а) $d = 20$ см, $h = 13$ см

Площадь основания: $S_{осн.} = \pi r^2 = 100\pi$ (см^2)

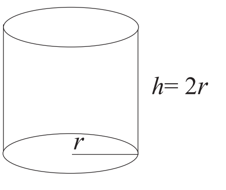
Площадь боковой поверхности: $S_{бок.} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 13 = 260\pi$ (см^2)

Общая площадь: $S = 2 \cdot (100\pi + 260\pi) = 720\pi$ (см^2)

У.7. Найдите отношение площади боковой поверхности к площади полной поверхности цилиндра, высота которого равна диаметру основания.

Решение: $S_{бок.} = 2\pi rh$, $S_{п.п.} = 2\pi r(r+h)$. В формулах учтем $h = 2r$, тогда искомое отношение будет равно:

$$\frac{S_{бок.}}{S_{п.п.}} = \frac{2\pi rh}{2\pi r(r+h)} = \frac{h}{(r+h)} = \frac{2r}{(r+2r)} = \frac{2}{3}$$



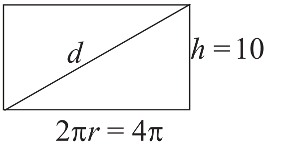
У.12. Машина асфальтоукладчик состоит из двух цилиндрических частей для утрамбовки асфальта. Высота большего цилиндра 1,25 м, а диаметр 1,5 м. Какую площадь поверхности выравнивает эта часть за один оборот?

Решение: за один полный оборот выравнивается площадь, равная площади боковой поверхности цилиндра

$S_{бок.} = 2\pi rh = \pi dh = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}25 \approx 5{,}89$ (м^2) - площадь.

У.13. Для того, чтобы развернуть подарочную коробку, которая имеет форму цилиндра, на нее нанесена пунктирная разметка. К одному концу пунктирной линии прикреплена цветная веревка, которая намотана на цилиндр (в один слой) и закреплена в другом конце пунктирной линии. Найдите длину веревки, если диаметр основания цилиндра равен 4 см, а высота 10 см.

Решение: длина веревки равна длине диагонали развертки цилиндра.

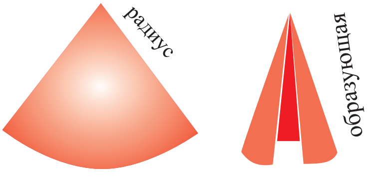


$d = \sqrt{10^2 + 16\pi^2} = \sqrt{100 + 157{,}9} = \sqrt{257{,}91} \approx 16$ (см)

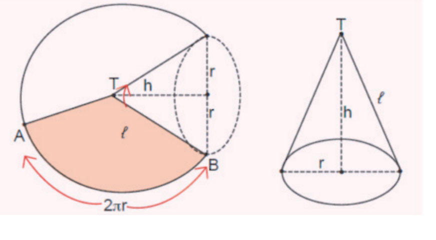
Урок 52-54. Конус. Площадь поверхности конуса. 3 часа.
Учеб. стр. 108-114

Содержательный стандарт.
3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема конуса и усеченного конуса.

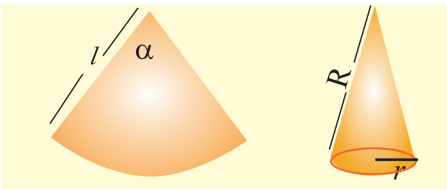
Навыки учащегося:
- создает различные конусы;
- представляет зависимость между радиусом и образующей;
- вычисляет боковую и полную поверхность конуса;



Учащиеся понимают, что конус это фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов и изображают это. А также, что конус можно создать свернув круговой сектор. Эта работа выполняется всем классом и имеет важное значение, так как является заданием для развития манипулятивных навыков. Когда учащиеся изображают круги различного радиуса, и вырезают из них круговые секторы для разных дуг, то это развивает не только их математическое мышление, но и формирует дизайнерские навыки.



Учащиеся должны понимать, что длина дуги сектора равна длине окружности основания, а радиус окружности равен образующей конуса. Можно показать, что различные конусы получаются только из-за того, что радиусы кругов, из которых вырезается круговой сектор и длина дуги сектора различны. После чего это представляется в математической форме.



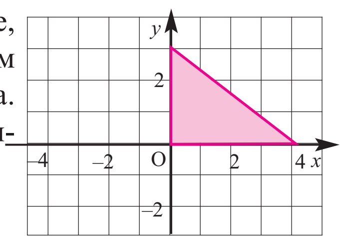
$$\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi R,$$

$$r = \frac{\alpha}{360}R$$

$$\frac{x}{360}\cdot 2\pi R = 2\pi l$$

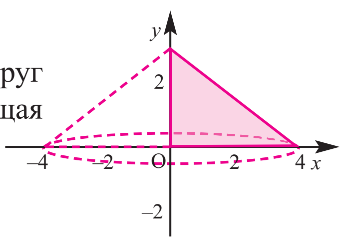
В учебнике для развития данных навыков представлены практические задания и небольшие проектные работы. Данную работу должен выполнить каждый учащийся, не зависимо от уровня восприятия. Однако с точки зрения социальной активности учащихся эту работу можно выполнять в группах.

У.11. Треугольник, изображенный на рисунке, вращается вокруг следующих осей и в каждом случае получается пространственная фигура. Изобразите полученную фигуру и найдите полную поверхность в π единицах.

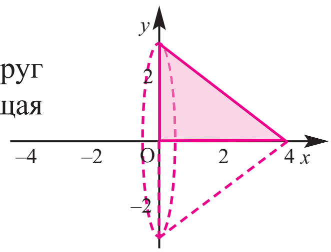


a) вокруг оси y b) вокруг оси x
c) вокруг прямой $x = 4$
d) вокруг прямой $y = 3$

Решение:
a) для конуса, полученного при вращении вокруг оси y радиус будет $r = 4$, высота $h = 3$, образующая l=5. Тогда $S_{\text{п.п.}} = \pi r^2 + \pi rl = \pi\cdot 4^2 + \pi\cdot 4\cdot 5 = 36\pi$

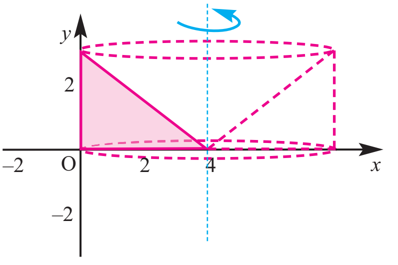


b) для конуса, полученного при вращении вокруг оси x радиус будет $r = 3$, высота $h = 4$, образующая l=5. Тогда $S_{\text{п.п.}} = \pi\cdot 3^2 + \pi\cdot 3\cdot 5 = 24\pi$



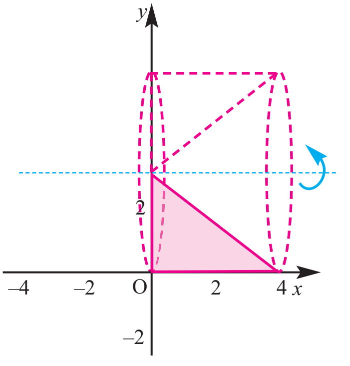
c) Фигура, полученная при вращении относительно прямой $x = 4$ (цилиндр с конусом). Площадь поверхности данной фигуры состоит из площади круга и площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса.

$S_{п.п.} = \pi\cdot4^2 + 2\pi\cdot4\cdot3 + \pi\cdot4\cdot5 = 60\pi$



d) Площадь полной поверхности фигуры, полученной при вращении относительно прямой $y = 3$ состоит из площади круга и площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса.

$S_{п.п.} = \pi\cdot3^2 + 2\pi\cdot3\cdot4 + \pi\cdot3\cdot5 = 48\pi$

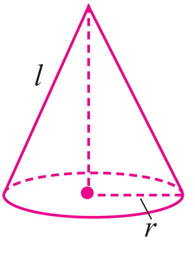


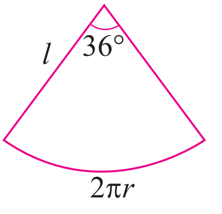
У.12. Боковая поверхность конуса имеет площадь 10 см^2. Развертка конуса образует сектор с центральным углом 36°. Найдите полную поверхность конуса.

Решение:

Так как $2\pi r = \dfrac{36}{360}\cdot 2\pi l$, то

$r = \dfrac{1}{10}\cdot l.$





По условию $S_{бок.} = \pi r l = 10$

Отсюда $\pi\cdot\dfrac{1}{10}\cdot l\cdot l = 10$

Получим, $l = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$. Тогда $r = \dfrac{1}{\pi}$

Площадь полной поверхности конуса равна

$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.} = 10 + \pi\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 11 см^2.$

Урок 55-57. Сечения цилиндра и конуса плоскостью. Площадь поверхности усеченного конуса. 3 часа. Учеб. стр. 115-119

Содержательный стандарт

3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема цилиндра.

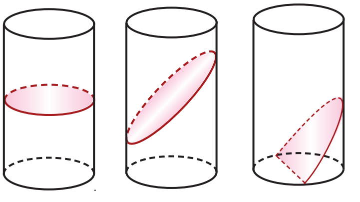
3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема конуса и усеченного конуса.

3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара.

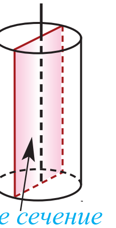
Навыки учащегося:

- представляет на рисунке сечения различной формы фигур ;
- решает задачи на сечение плоскостью;
- вычисляет площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса.
- вычисляет боковую и полную поверхностью усеченного конуса.

Выполняются задания из учебника.

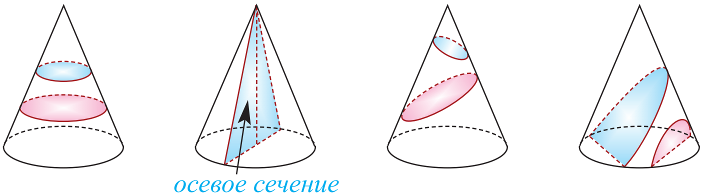


Сечения цилиндра плоскостью. Сечения плоскостью параллельные основанию являются кругами, а не параллельные основанию являются эллипсами. Сечение, проходящее через ось цилиндра называется осевым сечением. Сечение является прямоугольником со сторонами h и $2r$.



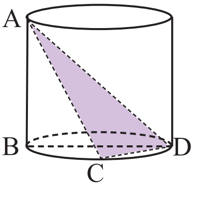
осевое сечение

Сечение конуса плоскостью. Сечение плоскостью параллельное основанию является кругом, осевое счение-треугольником.



осевое сечение

У.5. Высота цилиндра AB, диаметр BD. Зная, что AB = 4 см, BD = 6 см и CD = 4 см, найдите площадь треугольника ACD.



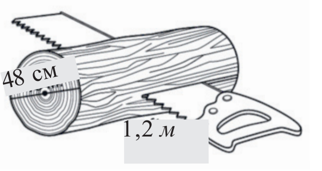
Решение: соединим точки B и C. Так как в полученном ΔBCD угол C = 90° (вписанный угол опирается на диаметр) $BC \perp CD$. Так как катет BC является проекцией AC, то по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp CD$.

Из Δ BCD: $BC^2 = BD^2 - CD^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

Из Δ BCD: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 20 = 36$ и $AC = 6$

Таким образом, $S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ см^2

У.7. Полено имеет форму цилиндра. Диаметр цилиндра равен 48 см, а длина 1,2 м. Полено разрезали пополам, как показано на рисунке. Найдите площадь полной поверхности одной части.

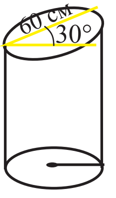


Решение: $S_{п.п.} = \frac{1}{2} S_{бок.} + 2\frac{S_{осн.}}{2} + 2rh = \frac{1}{2}\,2\pi rh + \pi r^2 + 2rh =$

$= \pi \cdot 0{,}24 \cdot 1{,}2 + \pi \cdot 0{,}24^2 + 0{,}48 \cdot 1{,}2 = 0{,}3456\pi + 0{,}576 = 1{,}66$ (м^2)

У.8. Пень для колки дров спили как показано на рисунке из сломанного дерева. Найдите площадь основания пня, для колки дров.

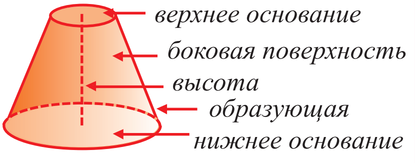
Решение:

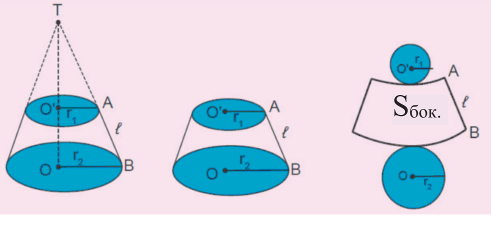


Если радиус основания R, то $2R = 60\cos 30°$, $R = 15\sqrt{3}$. Тогда

$S_{осн.} = \pi \cdot R^2 = 675\pi$ см^2

На 2 - 3 уроке вводится понятие усеченного конуса, объясняется получение формул для нахождения площади боковой и полной поверхностей.





Формула для нахождения площади боковой поверхности усеченного конуса, как разности площадей боковых поверхностей большого конуса и маленького конуса, отсеченного плоскостью, параллельной основанию, выносится на общеклассное обсуждение, после чего выводится сама формула.

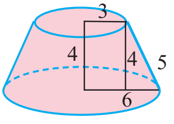
$$S_{бок.} = \pi (r_1 l + r_2 l) = \pi l (r_1 + r_2).$$

Площадь полной поверхности усеченного конуса равна сумме площадей боковой поверхности и площадей нижнего и верхнего оснований:

$$S_{п.п.} = \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 + r_2) l + \pi (r_1^2 + r_2^2).$$

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.1. (стр.118) b) Высота усеченного конуса 4 см, радиусы основания 3 см и 6 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса.



Решение:

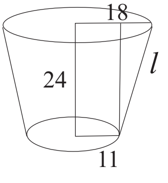
$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \sqrt{(6-3)^2 + 4^2} = 5$ см

$S_{бок} = 2\pi l(r_1+r_2) = \pi \cdot 5(3+6) = 45\pi$ (см^2)

$S_{п.п} = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi l(r_1+r_2) = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi$ (см^2)

У.5. (стр.119) Ведро, без крышки, имеет форму усеченного конуса. Радиус нижнего основания 22 см, радиус верхнего основания 36 см. Высота ведра 24 см. Сколько манат, приблизительно, составляют затраты на изготовление одного ведра, если цена 1 м^2 материала равна 5 манат?

Решение:



$l = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$ (см)

$S = \pi \cdot 25 \cdot (18 + 11) + \pi \cdot 11^2 = 725\pi + 121\pi = 846\pi \approx$

$\approx 2657{,}8$ см$^2 = 0{,}2658$ м^2

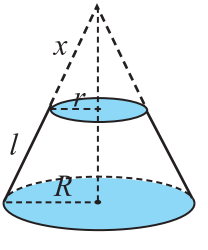
$P = 0{,}2658 \cdot 5 \approx 1{,}33$ манат

У.8. (стр.119) Боковая поверхность усеченного конуса равна S, а радиусы оснований R и r. Найдите площадь боковой поверхности полного конуса.

Решение: из подобия треугольников на рисунке можно написать:

$$\frac{x}{x+l} = \frac{r}{R}, \qquad x(R - r) = rl, \qquad x = \frac{rl}{R-r},$$

По условию: $\pi l(R+r) = S$. Тогда $l = \dfrac{S}{\pi(R+r)}$.



Площадь боковой поверхности целого конуса равна:

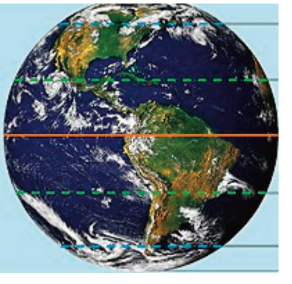
$$S_{yan} = \pi(l+x) \cdot R = \pi\left(\frac{S}{\pi(R+r)} + \frac{rl}{R-r}\right) \cdot R =$$

$$= \left(\frac{S}{R+r} + \pi \cdot \frac{rl}{R-r} \cdot \frac{S}{\pi(R+r)}\right) \cdot R = \frac{S}{R+r} \cdot \left(1 + \frac{r}{R-r}\right) = \frac{SR^2}{R^2-r^2}$$

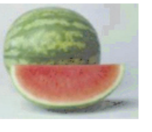
Урок 58-60. Площадь поверхности шара и его частей. 3 часа.
Учеб. стр. 120-125

Содержательный стандарт.
3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара.
3.2.6. Находит площади поверхности и объем частей шара (сегмента и сектора).

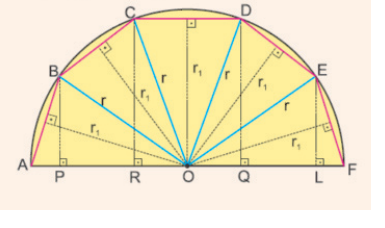
Навыки учащегося:
- представляет определение сферы, заданное в геометрическом виде словами;
- объясняет части шара словами;
- находит площадь поверхности шара;
- находит площадь поверхности полушара.



Удобно изучать шар и его части на примере земного шара. Обсуждаются знания полученные на уроках географии. По разности температур поверхность земного шара делится на разные климатические группы. Нам уже известно, что приблизительно радиус земного шара равен 6400 км. А как мы можем найти площадь поверхности Земли? Ответ на этот вопрос мы получим на уроках, где изучим площадь как можно найти площадь поверхности шара. При помощи рисунка можно дать объяснение геометрическому определению поверхности шара.



Объясняется как можно вывести формулу для вычисления площади поверхности шара. Для этого используют площади трапеции и поверхности усеченного конуса. Вспоминаются формулы для нахождения площади данных фигур. Площадь боковой поверхности усеченного конуса находится по формуле: $S_{бок.} = 2\pi rl$, тогда $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$



Формула площади поверхности шара может быть доказана, при помощи следующего рисунка. Рассмотрим, половину правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса r. Обозначим через r_1 апофему данного многоугольника. Тогда площадь фигуры, полученной при вращении полукруга вокруг диаметра AF приблизительно равна площади поверхности шара.

$$S = 2\pi r_1 AP + 2\pi r_1 PR + 2\pi r_1 RO + 2\pi r_1 OQ + 2\pi r_1 QL + 2\pi r_1 LF =$$
$$= 2\pi r_1 (\underbrace{AP + PR + RO + OQ + QL + LF}_{2r})$$
$$S = 2\pi r_1 2r$$

При увеличении количества сторон многоугольника, вписанного в окружность $r_1 \to r$, его площадь приближается к площади полукруга, а площадь фигуры, полученной вращением к площади шара. Итак для площади поверхности шара получается формула $S_{шар} = 4\pi r^2$.

Объясняются формулы для нахождения площади шарового слоя и шарового сегмента. Они выводятся как определенная часть диаметра шара пересеченная на высоте h.

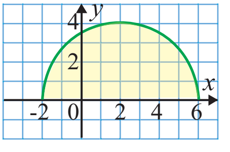
Рекомендуется представить работы заданий из учебника на нахождение отношения поверхностей шара и цилиндра, площади поверхности шара по Архимеду и другие подобные задания, в виде проектов. Эти работы учащихся собираются в портфолио.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.4. Полукруг на рисунке повернулся на один оборот вокруг оси x.

a) Какая пространственная фигура получилась?

b) По данным рисунка найдите площадь поверхности полученной фигуры.



Решение:

a) При вращении получится шар. Из рисунка видно, что радиус шара 4 см, тогда площадь поверхности шара $S = 4\pi r^2 = 4\pi 4^2 = 64\pi$ (см^2)

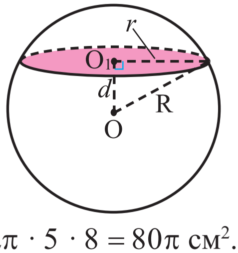
У.9. Шар рассечен плоскостью, отстоящей от центра на расстоянии 3 см. Найдите площадь сферической поверхности шара и каждого из двух полученных сегментов, если длина окружности сечения равна 8π см.

Решение: по условию сечение плоскостью расположено на расстоянии $d = 3$ см от центра. Длина окружности сечения равна $C_{окр.} = 2\pi r = 8\pi$ см.

Тогда $r = 4$ см. По теореме Пифагора

$R^2 = d^2 + r^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Тогда поверхность

$S_{шар} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi$ см^2.

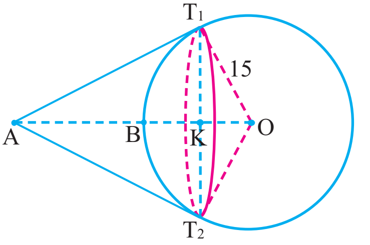


Площади сферических поверхностей полученных сегментов соответстввенно равны:

$S_1 = 2\pi R \cdot H_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 20\pi$ см^2, $S_2 = 2\pi R \cdot H_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$ см^2.

У. 12. Радиус шара 15 см. Найдите площадь видимой поверхности шара от точки, которая находится на расстоянии 25 см от центра шара.

Решение:



Из ΔAT_1O имеем $OT_1 = 15$, $AO = 25$

Тогда $AT_1 = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$.

$\Delta AT_1O \sim \Delta T_1KO$,

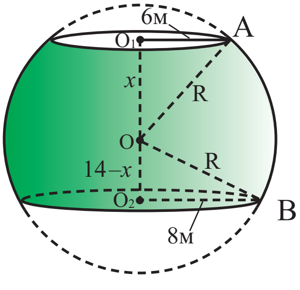
$$\frac{AT_1}{T_1K} = \frac{T_1O}{KO} = \frac{AO}{T_1O}, \quad \frac{15}{KO} = \frac{25}{15}, \quad KO = 9$$

Тогда $BK = BO - KO = 15 - 9 = 6$

Т.е. сферическая поверхность соответствует сегменту шара, высотой 6 см. Тогда,

$$S_{\text{сегмента}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi \text{ см}^2$$

У. 17. Найдите площадь шарового пояса.



Решение: пусть радиус шара равен R.

Из ΔOO_1B и ΔOO_2A по теореме Пифагора получим

$x^2 + 6^2 = R^2$

$(14 - x)^2 + 8^2 = R^2$

Отсюда, $x^2 + 6^2 = (14 - x)^2 + 8^2$

$x^2 + 36 = 196 - 28x + x^2 + 64$

$28x = 224$

$x = 8$

Тогда радиус шара $R^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $R = 10$.

Площадь шарового пояса будет:

$$S = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 14 = 280\pi \text{ м}^2.$$

Урок 61. Площади поверхностей комплексных фигур. 1 час.
Учеб. стр. 126-127

Содержательный стандарт.

3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема цилиндра.

3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема конуса и усеченного конуса.

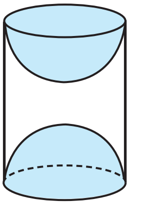
3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара.

Навыки учащегося:

- разделяет комплексные фигуры на пространственные фигуры;
- вычисляет площадь поверхности комплексной фигуры, как площади поверхностей фигур из которых она состоит.

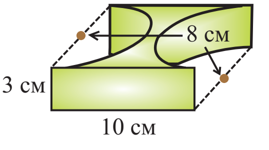
Говоря о комплексных или сложных фигурах, мы имеем ввиду конструкции, состоящие из различные пространственных фигур. В окружающем мире мы чаще встречаемся с комплексными фигурами.
Учащиеся должны понимать, что площадь поверхности комплексной фигуры состоит из суммы площадей поверхностей пространственных фигур и плоских поверхностей из которых она состоит и внимательно вычислять данные площади.

Решение некоторых заданий из учебника:



У.2. Сувенир на рисунке состоит из деревянного цилиндра высотой 10 см и радиусом основания 4 см. С обеих сторон цилиндра сделаны выемки в форме полушара. Найдите площадь полной поверхности сувенира.
Решение: площадь поверхности заданной фигуры равна сумме площадей боковой поверхности и площадей боковых поверхностей двух полушаров или поверхности шара, радиус которого равен радиусу цилиндра. Зная, что высота цилиндра 10 см, а радиус 4 см получим
$S_{п.п.} = S_{цил.} + 2S_{полушара} = 2\pi rh + S_k = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 4\pi \cdot 4^2 = 144\pi$ см^2

У.9. Найдите площадь поверхности фигур.

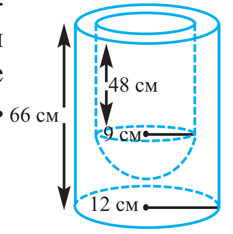


с) **Решение:** в задаче из учебника размеры боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда 3×10×8 см из которого с каждой стороны сделана выемка в виде в виде полуцилиндров с диаметром 8 см.

Чтобы найти площадь фигуры надо из площади поверхности паралеллепипеда ($S_{параллелепипеда} = 2(3 \cdot 10 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 10) = 268$) отнять площади двух кругов, являющихся, которые являются двумя нижними и верхними полукругами ($2S_{круг} = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4^2 = 32\pi$), а также площадь двух противоположных граней размерами 3 x 8 ($S_{граней} = 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$) и , наконец прибавляем площади боковых поверхностей двух полуцилиндров ($S_{бок.\ пов.\ полуцилиндра} = 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi$). Таким образом получаем,
$S_{фигуры} = S_{пар-д} - 2S_{круг} - S_{граней} + S_{полуцил} = 268 - 32\pi - 48 - 24\pi = 220 - 8\pi$ (см^2)
Рекомнедуется, чтобы при нахождении учащимися требуемой площади применяли различные подходы. Площадь рассматриваемой фигуры можно также вычислить следующим образом:

$$S_{п.п.} = 2 \cdot 3 \cdot 10 + 2 \cdot (8 \cdot 10 - \pi \cdot 4^2) + 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 60 + 160 - 32\pi + 24\pi =$$
$$= 220 - 8\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

У.10. Посуда из пластика состоит из двух частей - внешней, в форме цилиндра, высотой 66 см и радиусом основания 12 см, и внутренней, полой части, в форме цилиндра, радиусом 9 см, высотой 48 см, нижняя часть которой представляет собой сферу.



a) Найдите площадь внутренней поверхности.
b) Найдите площадь внешней поверхности.

Решение:

a) Площадь внутренней поверхности состоит из площадей боковой поверхности цилиндра и поверхности полушара.

$S_{внут.} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\cdot 9\cdot 48 + 2\pi\cdot 9^2 = 18\pi(48+9) = 1026\pi$ (см^2)

b) $S_{внеш.} = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi(R^2 - r^2) = 2\pi\cdot 12\cdot 66 + \pi\cdot 12^2 + \pi\cdot(12^2 - 9^2) = 1791\pi$ (см^2)

Урок 62-63. Площади поверхностей подобных фигур. Обобщающие задания. 2 часа. Учеб. стр. 128-130

Содержательный стандарт.

3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве

Навыки учащегося:

- знает равенство соответствующих линейных размеров подобных фигур.
- понимает, что площади подобных фигур относятся квадратом коэффициента подобия.
- находит другой размер, зная коэффициент подобия и заданный размер подобных фигур.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.4. Площади поверхностей двух подобных цилиндров равны 48π и 108π. Высота меньшего цилиндра равна радиусу большего цилиндра. Найдите радиусы и высоты цилиндров.

Решение: обозначим радиусы и высоты цилиндров через r, R и h, H. По условию h = R и $2\pi rh = 48\pi$; $2\pi RH = 108\pi$,

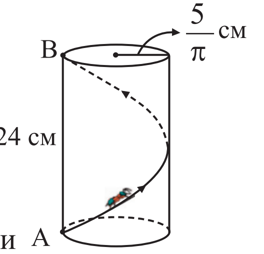
отсюда $rh = 24$, $RH = 54$. Из подобия следует, что

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} = \frac{H}{h}, \qquad \frac{r\cancel{h}}{\cancel{R}H} = \frac{24}{54}, \qquad \frac{r}{H} = \frac{4}{9} = k, \qquad r = 4k, \quad H = 9k$$

так как $rh = 24$, то

$24k^2 = 24$; $k = 1$, значит $r = 4$, $h = 6$, $R = 6$, $H = 9$.

У.7. Муравей движется по поверхности цилиндра, радиус основания которого равен $\frac{5}{\pi}$ см, а высота 24 см. Он прошел винтажный путь от точки A, расположенной на окружности основания цилиндра, до точки B, на другом основании. Найдите длину пути, пройденного муравьем.



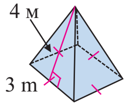
Решение: изобразив развертку боковой поверхности цилиндра увидим, что муравей двигался вдоль диагонали развертки: $d = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ см

Таблица критериев суммативного оценивания по разделу 4

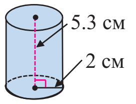
№	Критерии	Замечания об учащихся
1.	Представляет цилиндр в виде фигуры вращение на модели и в виде рисунка.	
2.	Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей цилиндра.	
3.	Представляет конус в виде фигуры вращение на модели и в виде рисунка.	
4.	Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей конуса.	
5.	Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей усеченного конуса.	
6.	По рисунку объясняет словами части шара.	
7.	Находит площадь поверхности шара.	
8.	Находит площадь поверхности комплексных фигур.	
9.	Находит другой размер, зная коэффициент подобия и заданный размер подобных фигур.	

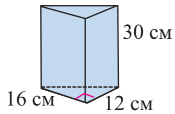
Урок 64. Задания для суммативного оценивания по разделу 4.

1) Найдите площадь поверхности фигур.



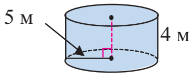
правильная четырехугольная пирамида

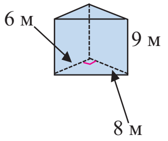


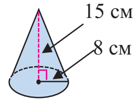


правильная треугольная пирамида

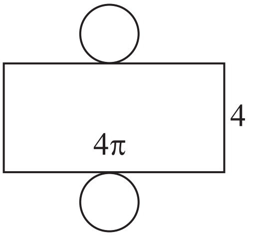
2) Найдите площадь поверхности фигур.



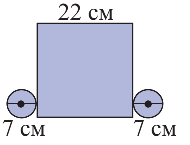




3) По развертке найдите площадь полной поверхности цилиндра.



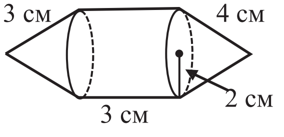
4) По данным на развертке, найдите площадь полной поверхности цилиндра.



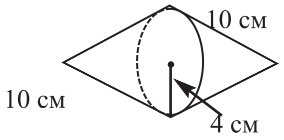
5) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, зная, что сумма площадей основания равна 32π см^2,а высота 60 см.

6) Найдите площадь боковой поверхности конуса, зная, что длина окружности основания равна 62,8 см, а образующая 15 см.

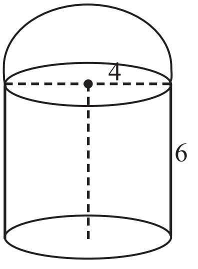
7) Найдите площадь фигуры на рисунке.



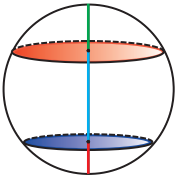
8) Найдите площадь поверхности фигуры на рисунке.



9) Найдите площадь поверхности фигуры на рисунке



10) Шар радиусом 17 см рассечен параллельными плоскостями на растоянии 8 см и 15 см от центра в разных сторонах. Найдите площадь шарового пояса и площади сферических частей полученных сегментов.



11) Цилиндрическая часть помещения для хранения для сена имеет высоту 12 м и диаметр 8 м. Образующая части в форме конуса равна 4,5 м. Сколько банок краски понадобится для покраски площади помещения, если на 10 кв.м расходуется 1,5 л краски, которая продается в банках по 8 л?

12) Шар пересечен плоскостью на расстоянии 8 см от центра. Зная, что площадь полученного сечения равна 12π, найдите площадь поверхности большего сегмента шара.

13) Каждый слой торта имеет форму цилиндра. Диаметр нижнего слоя 64 см, среднего 48 см, а верхнего 20 см. Высота каждого слоя равна 15 см. Найдите площадь поверхности торта, которую надо украсить.

14) Радиус конуса равен 6 см, а образующая 10 см. На расстоянии 2 см от вершины конус пересечен плоскостью, параллельной основанию. Найдите площадь боковой поверхности маленького конуса и усеченного конуса.

Таблица планирования по 5 разделу

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб. стр.
2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной. 2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной. 2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной.	65-66	Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения	2	132-136
	67-68	Производная функции	2	137-142
	69-70	Правила дифференцирования	2	143-147
	71-72	Производная произведения. Производная частного	2	148-151
	73-74	Производная сложной функции	2	152-155
	75	Решение задач при помощи производной	1	156-157
	76	Производная второго порядка	1	158-160
	77-79	Производная показательной и логарифмической функции	3	161-166
	80-81	Производная тригонометрических функций	2	167-170
	82-83	Обобщающие задания. Задания для суммативного оценивания	1	171
	84	Задания для полугодового суммативного оценивания	1	
		Всего	20	

Урок 65-66. Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения 2 часа. Учеб. стр. 132-136

Содержательный стандарт.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

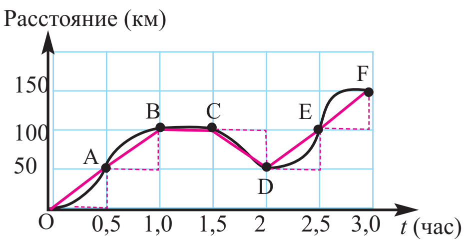
2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной.

Навыки учащегося:

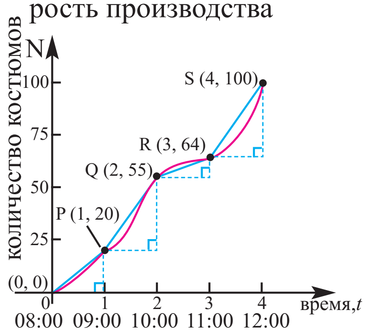
- представляет среднее и мгновенное изменение величины на примерах;
- устанавливает геометрическое соответствие между мгновенной и средней скоростью и касательной и секущей;
- решает задачи реальной жизненной ситуации используя мгновенное и среднее изменение .

Рассмотрим две ситуации. Пусть, автомобиль за два часа проехал 110 км. Значит средняя скорость автомобиля 55 км/час. Теперь рассмотрим следующее. Вы сидите в автомобиле и наблюдаете за скоростью. В этот момент скорость изменилась с 45 км/час до 110 км/час. Различается ли информация о скорости в каждой из данных ситуаций. В первом случае речь идет о средней скорости, а во втором случае о изменении скорости 55 км/час, мгновенной скорости.

1) Пройденный путь



2) Пошив костюмов, скорость производства



Различные ситуации, показывающие скорость изменения могут быть представлены как графически. так и численно. Целесообразно показать различные реальные ситуации. Изменения присущи всем аспектам жизни. В каждом случае единицы скорости должны соответствовать ситуации. Например, на первом графике выше скорость измеряется в км в час, а на другом графике скорость выражена количеством костюмов.

а) По графику найдем среднюю скорость за данный промежуток времени.

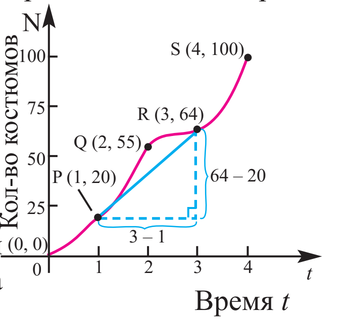
a) [0; 0,5]   b) [0,5; 1]   b) [1; 1,5]   b) [1; 2]

a) $\dfrac{50-0}{0,5-0} = 100$ км/ч   b) $\dfrac{100-50}{1-0,5} = 100$ км/ч

c) $\dfrac{100-100}{1,5-1} = 0$ км/ч   b) $\dfrac{50-100}{2-1} = -50$ км/ч

Информацию о скорости изменения пошива костюмов можно записать так.

С 9 до 11 утра можно найти скорость количества производимого товара.

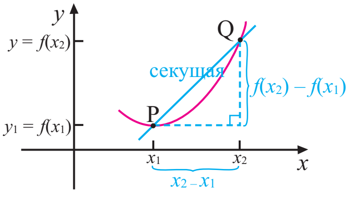


$$\frac{64-20}{10-8}=\frac{34}{2}=17$$ (костюмы) количество пошитых костюмов с 9 до 11.

Здесь 17, угловой коэффициент отрезка, соединяющий точки P и R.

Значит, средняя скорость определяется как угловой коэффициент отрезка, соединяющий две точки на кривой.

Для функции $f(x)$ скорость изменения функции соответствующая изменению аргумента x_2-x_1 имеет вид $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Здесь, учитывая, что $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, можно записать среднюю скорость так $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, здесь $x_2\neq x_1$.

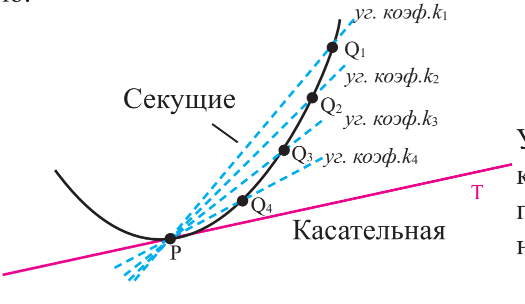


Нахождение средней скорости по таблице значений и графику проводится коллективно на примерах.

Учащиеся находит среднее изменение по графикам различных функций.

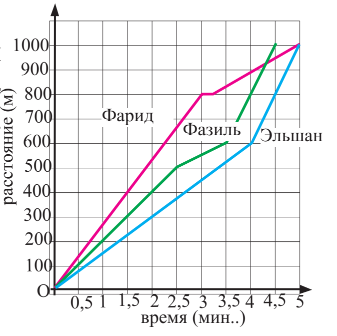
Таким образом, средняя скорость, определенная как $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ геометрически является угловым коэффициентом секущей, а мгновенная скорость $\lim\limits_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ значение углового коэффициента касательной.

На примерах в учебнике как аналитически, так и графически показано, что при уменьшении изменении приращения средняя скорость превращается в мгновенную.



Угловой коэффициент касательной в точке P показывает мгновенную скорость k.

Устанавливается, что для линейных функций, т.е. для функций графиком которых является прямая линия, скорость изменения остается постоянной, независимо от двух выбранных значений x. Для нелинейных функций наблюдается изменение значений функции, т.е. в зависимости от того, на каком участке выбраны значений x_1 и x_2, получаются различные значения. Это различие можно увидеть при решении заданий 1 и 2. Задание 3 рекомендуется для домашней работы. Его результаты могут являться материалом для формативного оценивания и помещены в портфолио. Учащиеся должны, по данным графика, уметь определять следующую информацию.



Фарид, Фазиль и Эльшан:

- промежуток, где их скорость была постоянной. С какой скоростью двигался каждый из них?

- кто и на каком участке увеличил скорость и с какой скоростью бежал, в каком промежутке скорость была наибольшей и кто бежал с этой скоростью?

Учащиеся наблюдают, что при возрастании углового коэффициента, т.е. при увеличении крутизны скорость возрастает. Например, до 3 минуты, быстрее всех бежал Фарид, так как прямая, соответствующая ее движению круче, tgα больше, но к концу движения он немного останавливался и изменение равно нулю. К финишу он пришел одновременно с Эльшаном, со скоростью меньшей скорости в первые 3 минуты. .

Победитель соревнований Фазиль. Учащиеся должны подобным образом при помощи вычислений и по графику представить в каком промежутке скорость движения возрастала или уменьшалась. Например, в первые 2,5 минуты Фазиль двигался со средней скоростью 500:2,5 = 200 м/мин. Начиная с 3,5 минуты его скорость растет и к финишу он приходит первым. По графику можно сказать, что самая большая средняя скорость принадлежит Фазилю. Графики движения Эльшана с 4 минуты и Фазиля с 3,5 минуты параллельны. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны, значить в течении 1 минуты их скорости равны.

В задании 5 можно наблюдать, что доход (тыс. ман.) от рекламы первоначально увеличивается. Следующие вложения уменьшают доход и он стабилизируясь, остается постоянным. Эта ситуация показывает, что реклама продукта, не фактор, что количество покупателей будет расти неограниченно, а до достижения определенных объемов продаж.

Здесь нужно уделить внимание одному важному моменту. Мгновенная скорость не является показателем только скорости движения и не измеряется только в м/с. В зависимости от реальной ситуации она может быть выражена как площадь/время, манат/время или как в задании 6 кол-во товара/тыс. манат. Изменение одной величины от другой выраженное мгновенной или средней скоростью в зависимости от реальной ситуации выражается как отношением соответствующих единиц, а также величиной физических единиц. Эти единицы также являются единицами измерения производной.

Урок 67-68. Производная функции. 2 часа. Учеб. стр.. 137-142
Содержательный стандарт.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.

2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной

Навыки учащегося:

- объясняет аналитическую запись производной геометрически;
- объясняет понятие производной на реальных примерах;
- вычисляет производную при помощи предела, находит значение производной в заданной точке;
- определяет существование производной.

1-ый час. Обсуждение проводится вокруг умения вычислять производную при помощи предела $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Выполняются задания, где производная находится при помощи предела, заданного аналитически и вычисляется значение производной в заданной точке x, находится угловой коэффициент касательной в заданной точке и записывается уравнение касательной. Учащиеся должны понимать производную как новую функцию. Например, при нахождении производной $y = x^2$ при помощи предела получается новая функция $2x$, т.е. производная квадратичной функции является линейной функцией. Можно найти значение функции и значение проводной при одних и тех же значениях x. Значение функции выражает статичные данные, а значение производной динамичные данные.

На 1- ом уроке в основном задания выполняются на примерах. Производную простой функции можно найти при помощи предела. Учащиеся понимают, что нахождение производной есть дифференцирование.

При вычислении производной при помощи предела возникает необходимость разложения многочлена на множители, что можно сделать при помощи биномиального разложения. Поэтому, для диагностического оценивания первоначальных знаний можно выполнить следующие задания.

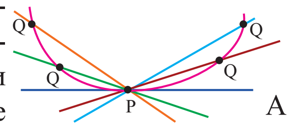
1) Используя треугольник Паскаля, запишите разложение бинома.

a) $(a+b)^2$ **b)** $(a+b)^3$ **c)** $(a-b)^3$ **d)** $(a+b)^4$ **e)** $(a-b)^5$ **f)** $(a+b)^5$

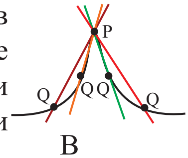
Заполните таблицу, используя первую строку.

Разность степеней	**Разложение на множители**
a) $a^n - b^n$	$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$
b) $a^2 - b^2$	
c)	$(a-b)(a^2 + ab + b^2)$
d) $a^4 - b^4$	
e) $a^5 - b^5$	
f) $(x+h)^n - x^n$	

2-ой час. Исследуется случаи для которых производная функции не существует. Производная не существует в точках, где функция не определена, в том числе в тех точках для которых невозможно провести касательную. Примеры представлены в учебнике. Выполняются задания из учебника.



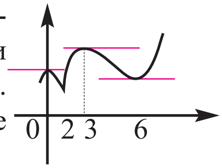
Удобнее показать дифференцируема ли функция или нет на графиках A и B, как показано на рисунке. По графику A видно, что при приближении точки Q к точке P с обеих сторон секущие в конце концов совпадают с касательной в точке P. Значит функция в этой точке непрерывна и дифференцируема. Функция B также непрерывна, но при приближении точки Q к точке P справа и слева секущие всегда образует углы, с различными угловыми коэффициентами.



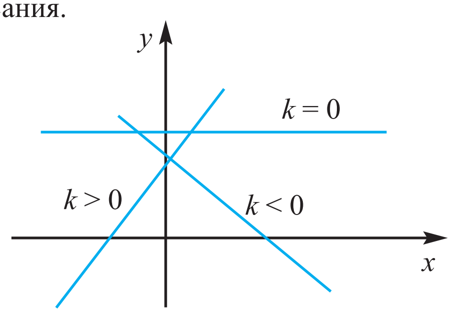
Выполняются задания из учебника. Изобразите функцию, определенную на промежутке (–∞; +∞), имеющую горизонтальные касательные в точках

$x = 0$, $x = 3$, $x = 6$, которая не имеет производную в точке $x = 2$.

Из объяснений и выполнения заданий, учащиеся интуитивно понимают, что в вершинных точках (максимума и минимума) касательная является горизонтальной линией. Примером может служить следующий график. Это задание открытого типа. Графики могут быть различными.

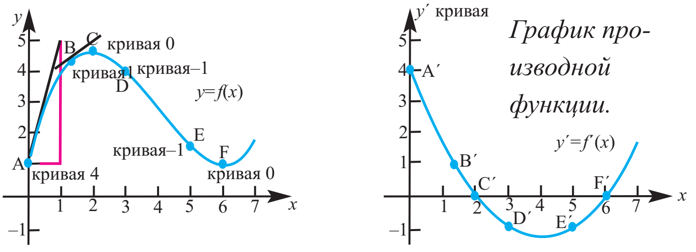


Также рекомендуется, для развития математического мышления, использовать навыки построения графика производной по графику функции и наоборот, построение графика функции по графику производной. Это также помогает более глубоко понять производную функции. Для этого требуется умение находить угловой коэффициент в заданной точке, что в свою очередь, требует умения определять как знак k в уравнении линейной функции $y = kx + b$ влияет на расположение функции на координатной плоскости, а его значение на крутизну графика. Эти навыки можно проверить при помощи вопросов и ответов. Находя производную простых функций аналитически можно задать эти функции и изображать их графики. Однако, для построения графика производной нужно использовать значение углового коэффициента касательной в точках касания.



Также, если на координатной плоскости дано в определенном масштабе очное изображение графика, учащиеся должны уметь находить угловой коэффициент из прямоугольного треугольника, образованного точками Δx для Δy из отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Для примера разберем это на следующем графике.

Например, для функции $y = f(x)$ на рисунке график производной можно получить разместив на координатной плоскости координаты x и y точек A, B, C, D, E, F, значения которых являются угловыми коэффициентами касательных в заданных точках.



Здесь учащиеся должны понимать, что до точки C, значения углового коэффициента положительны, т.е. расположены выше оси x, в точке C угловой коэффициент равен нулю, точка находится на оси x, начиная с точки C угловой коэффициент отрицателен, ниже оси x и наконец в точке F угловой коэффициент равен нулю и все угловые коэффициенты после этой точки вновь положительны, значения производной функции находятся выше оси x. При помощи таких рассуждений можно построить для графика любой функции график ее производной. Учащиеся должны понимать, что значения всех угловых коэффициентов касательных к графику функции равны значениям производных в заданных точках.

Можно рассмотреть еще один пример.

Функция	Точки, соответствующие угловому коэффициенту.	Функция производной

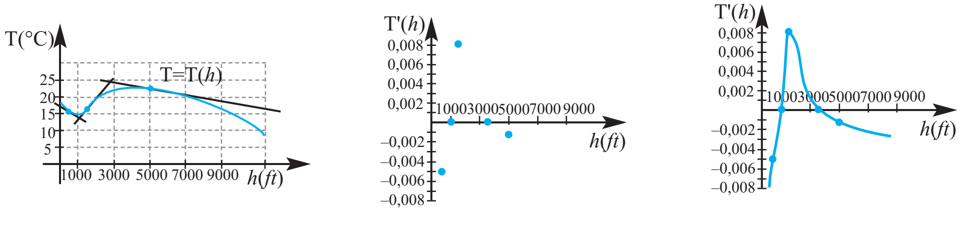


График производной функции имеет большое практическое значение. При помощи него можно показать динамику изменения величины (температуры, дохода, производства продукта и т.д.) в реальных ситуациях.

Целесообразно такого типа задания использовать в качестве домашнего задания или при работе с классом математического уклона.

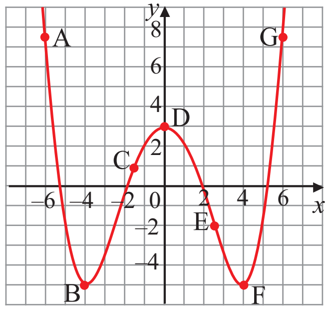
Оценивание. Проводится формативное оценивание умений учащихся определять производную, находить значение производной в точке, связывать это значение с угловым коэффициентом касательной в данной точке и определять существование производной в заданных точках.

Рабочий лист N1

Имя_______ Фамилия_________ **Дата__________**

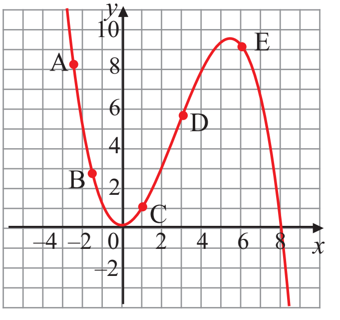
1) Сравните мгновенную скорость функции в заданных точках. Запишите свои умозаключения.

a)



I) B, D и F II) A и G
III) C и G IV) A и E

b)



I) B и C II) A, B и E
III) C и D IV) A и C

2) Найдите среднее значение изменения скорости между заданными точками.

a) (–2;–1) и (2;3) b) (3;–5) и (–2;–1) c) (1; 2) и (–1;–2)

3) Упростите и вычислите значение при $a = -2$, $h = 0{,}01$.

a) $\dfrac{2(a+h)^2 - 2a^2}{h}$

b) $\dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

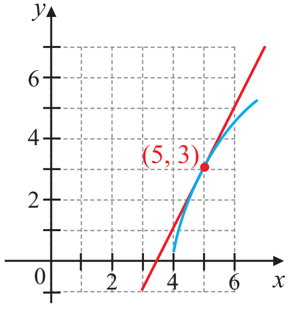
c) $\dfrac{(a+h)^4 - a^4}{h}$

Рабочий лист N2

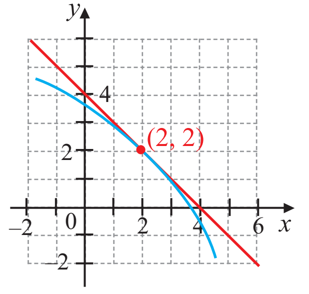
Имя_______ Фамилия_________ Дата__________

1) Определите, приблизительно угловой коэффициент касательной.

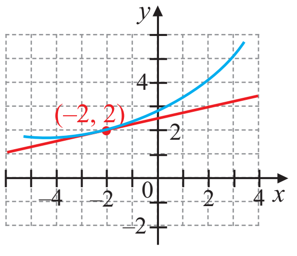
5.



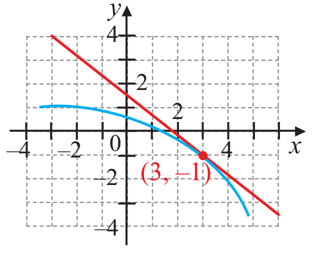
6.



7.



8.



2) a) Запишите уравнение секущей к графику функции в точках с указанными абсциссами.

b) Запишите уравнение касательной к точках с указанными абсциссами.

$f(x) = x^2 + 2x;\quad x = 3,\quad x = 5$

$f(x) = 6 - x^2;\quad x = -1,\quad x = 3$

$f(x) = 5/x;\quad x = 2,\quad x = 5$

$f(x) = -3/(x+1);\quad x = 1,\quad x = 5$

$f(x) = 4\sqrt{x};\quad x = 9,\quad x = 16$

$f(x) = \sqrt{x};\quad x = 25,\quad x = 36$

Урок 69-70. Правила дифференцирования. 2 часа. Учеб. стр. 143-147

Содержательный стандарт.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

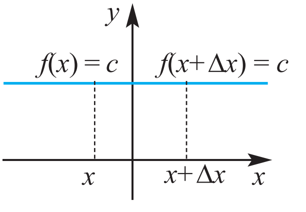
2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.

Навыки учащегося:

■ применяет правила дифференцирования функции $f(x) = c, f(x) = x^n$, $g(x) = c \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) \pm g(x)$

■ решает задачи реальных жизненных ситуаций применяя правила дифференцирования функции $f(x) = c, f(x) = x^n$, $g(x) = c \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) \pm g(x)$.

1-ый час. Рассматриваются правила дифференцирования постоянной и степенной функций, а также правила дифференцирования сумму и разности. Объяснить что производная постоянной равна нулю учащийся может по графику. По графику видно, что изменение равно нулю.



Надо отметить, что правила для производной функции доказываются при помощи определения производной. Вывод формул может быть задан в качестве долгосрочного домашнего задания. Учащиеся подготавливают задания на специальных листах или в тетради. Эти работы могут быть помещены в портфолио.

Рекомендации для выполнения некоторых прикладных заданий. Обсуждая исследуется умение записывать уравнение касательной, идентифицируя точки соответствующие одинаковым угловым коэффициентами. Решение данного задания учащиеся записывают в тетради. Также они должны понимать, что прямые, которые имеют одинаковы угловой коэффициент параллельны, в частном случае совпадают.

Уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$ записывается в следующей последовательности. Например, запишем уравнение касательной функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$.

1. Найдем значение функции в точке $x_0 = -2$.

$$y_0 = f(-2) = 4$$

2. Найдем производную функции: $f'(x) = 2x$

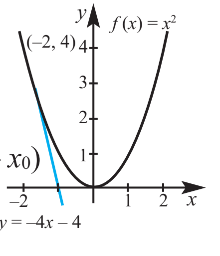
3. Найдем значение производной в заданной точке.

$$k = f'(-2) = 2x = -4$$

4. Запишем формулу уравнения касательной $y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - 4 = -4(x + 2)$; $y = -4x - 4$

5. Представляем график.



Решение некоторых заданий из учебника:

У. 16. a) Для функций $f(x) = 3x^2$ и $g(x) = x^3$ найдите такие значения x, при которых угловые коэффициенты касательных к графикам каждой из двух функций равны.

b)Запишите уравнения касательных в точках, найденных в пункте *a*.

Решение: a) Учащиеся знают, что угловой коэффициент равен производной функции, значит если угловые коэффициенты в точках равны, то равны и производные в данных точках.

a) $f'(x) = (3x^2)' = 6x$ $\qquad\qquad$ $g'(x) = (x^3)' = 3x^2$

$6x = 3x^2$; $6x - 3x^2 = 0$; $3x(2 - x) = 0$;

$x_1 = 0$ и $x_2 = 2$

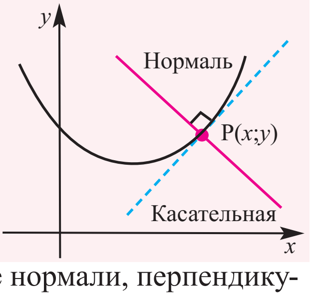
b) запишем уравнение касательной к графику каждой функции в данных точках.

1. Для $x = 0$ при $k_1 = f'(0) = 6 \cdot 0 = 0$, $k_2 = g'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ в точке с абсциссой $x = 0$ уравнение касательной к графику каждой из функций имеет вид $y = 0$.

2. Для $x = 2$ при $k_1 = f'(2) = 6 \cdot (2) = 12$, $k_2 = g'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ в точке с абсциссой $x = 2$ уравнение касательной к графику функции $f(x)$имеет вид: $y - 12 = 12 \cdot (x - 2)$ или $y = 12x - 12$;
уравнение касательной к графику функции $g(x)$ имеет вид:
$y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$ və ya $y = 12x - 16$.

У 22. a) Определите угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = 2$ к графику функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

b)Запишите уравнение нормали функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.



Решение: учащиеся должны записать уравнение нормали, перпендикулярной касательной. Для угловых коэффициентов k_1 и k_2 перпендикулярных прямых должно выполняться $k_1 \cdot k_2 = -1$.

В точке касания $x_0 = 2$, $y_0 = f(2) = -8 + 12 - 4 + 5 = 5$ и угловой коэффициент равен $k_{кас.} = f'(2)$. При $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$ угловой коэффициент $k_{кас.} = f'(2) = -12 + 12 - 2 = -2$

Значит $k_{норм} = \frac{1}{2}$. Надо записать уравнение прямой с угловым коэффициентом $\frac{1}{2}$ и проходящей через точку (2; 5). Таким образом, уравнение нормали имеет вид $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 5$ или $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Рабочий лист N3

Имя _______ Фамилия_________ Дата__________

Найдите такое значение k, для которого заданная прямая является касательной.
Пример. $y = kx^2$; $y = -2x + 3$

Должно выполняться следующее $kx^2 = -2x + 3$. Однако, для нахождения k-нам необходимо еще одно уравнение.
Угловой коэффициент касательной равен –2.
Значит, известно значение производной функции в (–2) $y' = 2kx; -2 = 2kx$.
В равенство $kx^2 = -2x + 3$ подставим $-1/k = x$, получим:

$$k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 = -2\frac{1}{k} + 3$$

$$\frac{1}{k} = -\frac{2}{k} + 3,\ \frac{3}{k} = 3,\ k = 1$$

Таким образом, при $k = 1$ заданная прямая является касательной.

Функция:	Касательная:
$f(x) = x^2 - kx$	$y = 5x - 4$
$f(x) = k - x^2$	$y = -6x + 1$
$f(x) = \frac{k}{x}$	$y = -\frac{3}{4}x + 1$
$f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$
$f(x) = kx^3$	$y = x + 1$
$f(x) = kx^4$	$y = 4x - 1$

Урок 71-72. Производная произведения. Производная частного. 3 часа. Учеб. стр. 148-151

Содержательный стандарт.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.

2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной.

Навыки учащегося:

- знает и применяет правило произведения $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\, g(x)+f(x)\, g'(x)$;
- знает и применяет правило частного $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$;
- решает задачи реальной жизненной ситуации применяя правила дифференцирования произведения и частного.

1-ый час. Правило дифференцирования произведения выводится по определению производной. Рекомендуется записывать это правило при помощи записи Ньютона-Лейбница.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Выполняются обучающие задания. На данном уроке также находят касательную функции заданной в виде произведения и частного. Рассмотрим следующие примеры. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = (x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1)$ в точке $x = 2$.

Нет необходимости упрощать $y' = (2x)(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 1)(2x - 2)$. Можно непосредственно подставить значение $x = 2$ и найти угловой коэффициент в данной точке вычислить при помощи достаточно простых вычислений: $k = 2\cdot 2(2\cdot 2–2\cdot 2+1)+(2\cdot 2–1)(2\cdot 2–2) = 10$. Найдем значение функции в точке $x = 2$.: $y_0 = f(2) = 3 \cdot 1 = 3$

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad y - 3 = 10(x - 2); \quad y = 10x - 17$$

Для того, чтобы насколько хорошо учащиеся поняли правило дифференцирования произведения, можно задать следующие рефлексивные вопросы:

- зачем в доказательство был введен член $- f(x)g(x) + f(x)g(x)$ – который “создавал нуль” ? Что это нам дало?
- на каком этапе произведение разлагалось на множители?
- в чем суть записи в виде различных пределов?

2-ой час. Правило дифференцирования частного также вытекает из определения производной. Доказательство проводится письменно поэтапно, с полным объяснением для чего проделана данная работа.

Надо обратить внимание на то, как находится производная рациональной функции, в знаменателе которой находится постоянный множитель.

	Заданная функция:	Эквивалентная запись:	Дифференциал:	Упрощение:
a.	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{6}$	$y = \dfrac{1}{6}(x^2 + 3x)$	$y' = \dfrac{1}{6}(2x + 3)$	$y' = \dfrac{2x + 3}{6}$
b.	$y = \dfrac{5x^4}{8}$	$y = \dfrac{5}{8}x^4$	$y' = \dfrac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \dfrac{5}{2}x^3$
c.	$y = \dfrac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$	$y = -\dfrac{3}{7}(3 - 2x)$	$y' = -\dfrac{3}{7}(-2)$	$y' = \dfrac{6}{7}$
d.	$y = \dfrac{9}{5x^2}$	$y = \dfrac{9}{5}x^{-2}$	$y' = \dfrac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\dfrac{18}{5x^3}$

При дифференцировании частного надо привести рациональное выражение к удобному виду, т.е. постараться, чтобы числитель и знаменатель были в виде многочленов.. Например, надо объяснение примеров проводить на примерах типа: чтобы найти производную функции $\dfrac{5 - 1/x}{x + 5}$ надо умножить числитель и знаменатель рационального выражения на x и записать функцию в виде $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x^2 + 5x}$.

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]$$
$$= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2}$$
$$= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}$$
$$= -kx^{-k-1}$$
$$= nx^{n-1}$$

Найти правило дифференцирования степени с отрицательным целым показателем используя правило отношения можно предложить в качестве самостоятельной работы, работы в парах и группах. Если в функции $f(x) = x^n$ число n является целым отрицательным числом, то для $n = -k$ существует положительное число k .

Правило нахождения дифференцирования частного можно получить различными способами.

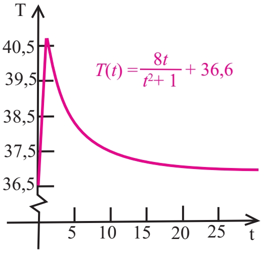
1. При помощи определения производной, как показано в учебнике;
2. Приводя к произведению;
3. Используя правило дифференцирования сложной функции. 3-е правило будет рассмотрено на следующих уроках.

Учащиеся могут разбиться на группы и вывести это из 2 способа.

Пусть, функция $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые функции.

1. Обе части равенства выше умножим на g(x).
2. Найдите производную каждой части равенства, применяя правило произведения.
3. Найдите множитель $q'(x)g(x)$.
4. Выполните замену $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
5. Приведите правую часть к общему множителю.
6. Найдите $q'(x)$.

? Решение некоторых заданий из учебника:



У.6. Зависимость температуры больного от времени можно смоделировать следующей функцией:

$$T(t) = \frac{8t}{t^2+1} + 36{,}6$$

Найдите мгновенную скорость изменения при $t = 2$.

Решение:

Скорость изменения температуры:

$$T'(t) = \left(\frac{11t}{t^2-1} + 36{,}6\right)' = \frac{8\cdot(t^2+1) - 8t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-8t^2+8}{(t^2+1)^2}.$$

В момент $t = 2$ скорость будет равна

$$T'(2) = \frac{-8\cdot 4+8}{(4+1)^2} = -\frac{24}{25}.$$

У.7. Функция показывающая зависимость скорости сборки детали нового работника от количества дней, затраченных на его обучение выражается формулой $N(t) = \dfrac{100t^2}{3t^2+10}$

a) Задайте функцию, скорости сборки деталей в любой день.

b) Найдите значения $N'(2)$ и $N'(10)$ и объясните данную ситуацию.

Решение:

Скорость сборки детали:

a) $N'(t) = \left(\dfrac{100t^2}{3t^2+10}\right)' = \dfrac{200t\cdot(3t^2+10) - 6t\cdot 100t^2}{(3t^2+10)^2} = \dfrac{600t^3+2000t-600t^3}{(3t^2+10)^2} = \dfrac{2000\cdot t}{(3t+10)^2}$

b) $N'(2) = \dfrac{4000}{(12+10)^2} = -\dfrac{4000}{48400} = \dfrac{10}{121}$

$$N'(10) = \frac{20000}{310^2} = \frac{20000}{96100} = \frac{200}{961}$$

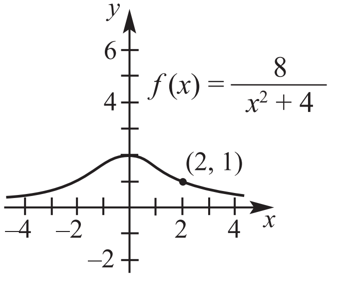
Поскольку $N'(2) > N'(10)$, то скорость сборки детали уменьшается.

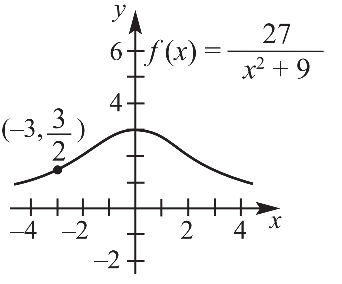
Оценивание. Проводится формативное оценивание умения доказательства правил дифференцирования, умения применять эти правила при решении заданий. Рекомендуется в качестве домашнего задания записать пошаговое доказательство на отдельных листах.

Рабочий лист N4

Имя_______ Фамилия_________ **Дата__________**

Запишите уравнение касательной в заданных на графиках точках.





По следующим данным найдите требуемое:

$f(x) = (x^3 - 2) \cdot (2x^2 + 1), \; f'(1) = ?$

$g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 1}, \; g'(-1) = ?$

Определите какая из данных функций имеет горизонтальную касательную.

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 7}$

Урок 73-74. Производная сложной функции. 2 часа.
Учеб. стр. 152-155

Содержательный стандарт.
2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.
2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.
2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной

Навыки учащегося:
- применяет правила дифференцирования $h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
- решает задачи реальной жизненной ситуации при помощи правил дифференцирования произведения и частного.

Обучающий блок в учебнике изучается коллективно. Понятие дифференциала и правила дифференцирования сложной функции можно объяснить на реальных физических событиях. При подъеме и спуске на гору на автомобиле в ушах слышно биение.Это внешнее воздействие на изменение внутреннего давления при резком изменении давления извне. В этом событии происходит изменении трех величин (время, высота, давление) - высота зависит от времени, давление - от высоты. Причина увеличения звона в ушах при подъеме повышение давления, т.е. изменение давления $\frac{dp}{dt}$. А если это изменение будет большим, то это может привести к травме барабанной перепонки.

Изменение давления невозможно зарегистрировать сразу. Однако метеорологи оценивают давление как изменение высоты $\frac{dp}{du}$ на один метр относительно уровня моря –0,012 (грамм/см^2) имеет отрицательный знак, так как чем выше высота, тем меньше давление). Если за каждую секунду происходит спуск на 3 м, то

$\frac{du}{dt}=-3$. Теперь мы можем найти изменение давления в каждую секунду.

$$\frac{dp}{du}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}=(-0{,}012)(-3)=0{,}036$$

Мы рассмотрели изменение сложной функции - давление является функций от высоты, а высота - функцией от времени. В этом случае при мгновенном изменении давления (скоростном) перепонка, являющаяся контролером системы слуха не справляется с данной функцией и в ушах возникает звон.

Из правила дифференцирования сложной функции вновь можно получить правило дифференцирования произведения. Это целесообразно задать в качестве самостоятельной работы.

Запись $q'(x)=f(x)(-1)[g(x)]^{-2}\,g'(x)+f'(x)[g(x)]^{-1}$ представляет альтернативную запись правила дифференцирования произведения.

Запись $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ можно записать как $q(x)=f(x)\cdot g^{-1}(x)$ и получить применяя правило дифференцирования произведения.

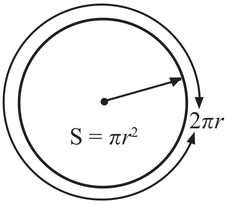
? Решение некоторых заданий из учебника:

У.7. Вычислите производную функции $f(x) = x^2(5-4x)^3$ в точке $x = 1$.
Решение: здесь мы применим формулу произведения для производной и правило дифференцирования сложной функции.
$f'(x) = (x^2)'(5-4x)^3 + x^2((5-4x)^3)' = 2x(5-4x)^3 + x^2 \cdot 3(5-4x)^2 \cdot (-4) =$
$= 2x(5-4x)^2(5-4x-6x) = 2x(5-4x)^2(5-10x)$

Тогда получим $f'(1) = -10$.

У.15. Распространение утечки нефти. Нефтяное пятно, круговой фомы, возникшее при утечки на нефтяной скважине, недалеко от берега распространяется в зависимости от радиуса как $r(t) = t^2$. $S(r) = \pi r^2$ выражает площадь круга, радиуса r.
a) Запишите функцию $S[r(t)]$ и объясните соответствующую ситуацию.
b) Найдите функцию $S'(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.
c) Найдите и объясните значение $S'(100)$.

Решение: сначала объясним производную функции зависимости площади от радиуса. Площадь круга $S = \pi r^2$. Производная данной функции $S'(r) = 2\pi r$. π постоянное число. Если мы вместо r подставим $r_0 = 5$ дм и найдем значение производной при каком-либо значении, например при $r_0 = 5$ см, то $S'(5) = 10\pi$. Это говорит о том, что при увеличении радиуса на 1 дм, площадь увеличивается на 10π дм^2. Обратите внимание на единицы измерения. Площадь измеряется в дм^2, единица измерения функции производной дм, так как производная площади выражает длину окружности. Учащиеся должны при решении прикладных задач, объяснять значение функции производной в заданной точке,в соответствии с реальной ситуацией.



a) $S[r(t)] = \pi \cdot r^2(t) = \pi(t^2)^2 = \pi t^4$. Площадь распространения нефти находится в зависимости от времени в 4 степени, т.е. распространение увеличивается в 4 раза быстрее.

b) $S'(t) = (\pi t^4)' = 4\pi t^3$. Скорость распространения загрязнения увеличивается прямо пропорционально кубу времени.
c) $S'(100) = 4\pi \cdot 100^3 = 4\pi \cdot 10^6$ кв. ед. площади. Т.е. в 100 - ую секунду скорость распространения загрязнения была $4\pi \cdot 10^6$ кв. ед.

Рабочий лист N5

Имя_______ Фамилия_________ **Дата__________**

Найдите производную функции применяя правило дифференцирования для сложной функции.

$$f(x) = (x^2 - 6x + 1)^3$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3)^5}{[1 + (x^2 + 3)]^8}$$

$$f(x) = ((x^2 + 2)^3 + 1)^2$$

$$f(x) = \sqrt{x^5 + 5x^2}$$

$$f(x) = (x - 2x^2)^3$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^3 + 5x)^4}$$

$$f(x) = \frac{3}{[(x + 2)^2 + 4]^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1}[(2x + 1)^3 + 5]$$

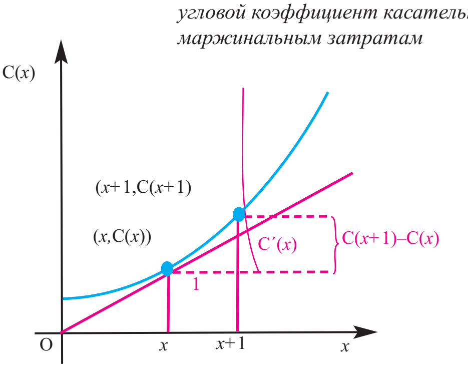
$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

Урок 75. Решение задач при помощи производной. 1 час
Учеб. стр. 156-157

Содержательный стандарт.
2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.
2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной

Навыки учащегося:
- применяет правила дифференцирования ;
- решает задачи реальной жизненной ситуации применяя правило дифференцирования произведения, отношения.

Обозначим затраты на производство x единиц продукции через $C(x)$, Тогда затраты на производство $x + 1$ единицы продукции будет $C(x + 1)$. Разность $C(x + 1) – C(x)$ выражает затраты на производство $(x+1)$ единицы Эта разность показывает прирост затрат и называется маржинальными затратами на производство. Маржинальные затраты на производство также могут быть выражены значением углового коэффициента касательной в точке $(x;\ C(x))$, другими словами ее можно найти вычислив значение производной функции в точке x. Т.е. значение производной $C'(x)$ для функции $C(x)$ выражает затраты на производство $x + 1$ единицы и используется для приблизительной оценки. Например, пусть затраты на печать книг в количестве 200 штук 500 манат, тогда затраты на печать 201 книг могут составлять 501 манат. Здесь $C(501) – C(500) = 1$манат, значит затраты на печать 201-й книги приблизительно равны 1 манату. Эту сумму называют маржинальными затратами и она справедлива для 201 книги.



Выражая затраты на производство (или услуги), прибыль и скорость изменения прибыли при помощи производной определяем такие эффективные экономические показатели как маржинальные затраты на производство, маржинальная прибыль и маржинальный доход.

Маржинальные затраты на производство $C'(x) = \dfrac{dC}{dx}$ мгновенное изменение затрат на производство продукции. Другими словами, маржинальные затраты - это затраты на производство (услугу) одной дополнительной единицы продукции.

Маржинальная прибыль $R'(x)$ или $\dfrac{dR}{dx}$ - мгновенное изменение прибыли в зависимости от количества проданной продукции (обслуживания). Другими словами маржинальная прибыль это прибыль полученная от продажи одной дополнительной единицы продукции.
Маржинальный доход. $P'(x)$ или $\dfrac{dP}{dx}$ изменение (скорость) дохода полученного от продажи товара (услуги) в зависимости от количества товара (услуги). Другими словами, доход полученный от продажи одной дополнительно произведенной единицы продукции .

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.17 Маржинальные затраты на производство. Пусть затраты на производство стиральных машин в количестве x единиц моделируются функцией $C(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$

a) Какова средняя цена $(C(x)/x)$ стиральной машины при производстве 100 штук?

b) Чему равна маржинальная цена (себестоимость) одной стиральной машины при производстве 100 штук?

c) Покажите, что маржинальная себестоимость (цена) при производстве 100 стиральных машин приблизительно равна цене 101-й стиральной машины.

Решение:

a) Средняя цена стиральной машины при $x = 100$:

$$\frac{C(100)}{100} = \frac{2000 + 100\cdot100 \cdot 0{,}1 \cdot 100^2}{100} = 110 \text{ манат}$$

b) При $C'(x) = 100 - 0{,}2\,x$ получим
$C'(100) = 100 - 0{,}2\cdot100 = 80$ манат.
Маржинальной себестоимостью (ценой) считается себестоимость одной следующей стиральной машины после 100 произведенных.

c) Найдя разность $C(101) - C(100)$ можно найти себестоимость 101 стиральной машины

$C(101) - C(100) = 100\,(101 - 100) - 0{,}1\,(101^2 - 100^2) = 100 - 20{,}1 = 79{,}9$

Как видно найденная в пункте b) функция при производстве 100 стиральных машин приблизительно равна маржинальной себестоимости 101 стиральной машины.

У.19. Маржинальная прибыль. Прибыль, полученная фирмой за неделю от производства и продажи x единиц станков, выражается функцией $P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3x^2 + 600x - 800$.
В настоящий момент фирма за неделю продает 9 станков.
b) Если продажа снизится до 8 станков в неделю, как уменьшится еженедельная прибыль?
c) Найдите маржинальную прибыль за 9 станков.
d) Используя результаты пунктов a и c определите, приблизительно, прибыль от продажи 10 станков.

Решение:

$P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3\,x^2 + 600x - 800$

a) Вычислим недельную прибыль при $x = 9$:

$P(9) = -0{,}004\cdot9^3 - 0{,}3\cdot9^2 + 600\cdot9 - 800 = 4572{,}784$ манат

b) Если снизить продажу до 8 станков в неделю, прибыль за неделю станет $P(8) = -0{,}004\cdot8^3 - 0{,}3\cdot8^2 + 600\cdot8 - 800 = 3978{,}752$ манат.
Значит, при снижении продажи с 9 до 8 станков за неделю, недельная прибыль уменьшится на $4572{,}784 - 3978{,}752 = 594{,}032$ манат.

c) Вычислим маржинальную прибыль от продажи 9 станков.

$P'(x) = -0{,}012\,x^2 - 0{,}6\,x + 600$

$P'(9) = -0{,}012\cdot 81 - 5{,}4 + 600 = 593{,}6$ манат

d) Зная, что $P'(9) \approx P(10) - P(9)$ и используя результаты, полученные в пунктах a и c, можно приблизительно найти прибыль от продажи 10 станков: $P(10) \approx 4572{,}784 + 593{,}6 = 5166{,}384$ ман.

Урок 76. Производная второго порядка. 1 час
Учеб. стр. 158-160

Содержательный стандарт.

2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

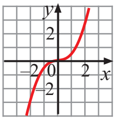
2.1.3. Применяет геометрический и физический смысл производной

Навыки учащегося:

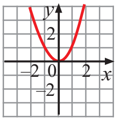
- понимает, что производная функции зависимости пройденного пути от времени является скоростью;
- понимает, что производная функции зависимости скорости от времени является ускорением;
- понимает, что производная второго порядка функции зависимости пройденного пути от времени является ускорением;
- представляет по графику и по аналитической записи производных связь физических величин пройденного пути, скорости и ускорения.

Как применять дифференциал, который Исаак Ньютон назвал “fluksion”, к правила движения, он описал в своей книге “правила fluksion”. На этом уроке мы изучим как применяется производная при прямолинейном движении. До настоящего момента мы получали производную функции и рассматривали ее как новую функцию. А можно ли из функции производной вновь получить производную? Будет ли функция, полученная от производной второй раз новой функцией?

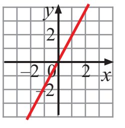
1. Запишите функцию $y = \frac{1}{3}x^3$ и постройте ее график.



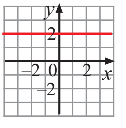
2. Запишите производную функции $y = \frac{1}{3}x^3$ и постройте ее график.



3. Запишите производную функции, полученной на втором этапе и постройте ее график.



4. Запишите производную функции, полученной на третьем этапе и постройте ее график.



Таким образом, мы получили три функции производные от $y = \frac{1}{3}x^3$, причем каждый раз новые функции. Мы ограничимся только нахождением производной второго порядка, которую будем применять для решения заданий.
Перемещение, скорость и ускорение это физические величины, дифференциал которой от одной из них дает возможность найти другую величину.

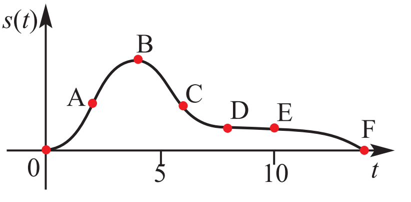
Перемещение тела показывает изменение первоначального положения точки за определенное время в определенном направлении при движении.
Скорость показывает как перемещение тела зависит от времени.

Ускорение показывает как скорость зависит от времени.
Рекомендуется задать следующую таблицу, отражающую физический и аналитический смысл данных понятий.

	Перемещение	Скорость	Ускорение
Определение	Расстояние, пройденное телом из начальной точки за время t.	Зависимость перемещения (s) от времени (t)	Зависимость скорости (v) от времени (t)
Зависимость	$s(t)$	$s'(t) = v(t)$	$v'(t) = a(t)$ $s''(t) = a(t)$
Единицы измерения	м	м/сек	м/сек^2

В учебнике рассматриваются примеры графиков производной первого порядка, а также какая связь существует между графиками производных первого и второго порядка. Исследуется, как при изменении оригинальной функции ведет себя функция производной. Учащиеся понимают, какая часть графика производной функции расположена выше оси x (положительна) или ниже оси x (отрицательна) в соответствии со знаком углового коэффициента касательной и то, что при нулевом угловом коэффициенте (касательная параллельна оси x) вершинные точки являются точками пересечения с осью x.

График на рисунке отображает движение мотоциклиста.В каком интервале угловой коэффициент положителен, а в каком отрицателен? Объясните по графику как увеличивается или уменьшается скорость и ускорение.



Интервал	Угловой коэффициент	Скорость	Ускорение
от O до A	угловой коэффициент положительный, возрастает	+	+
от A до B	угловой коэффициент положительный, убывает	+	–
от B до C	угловой коэффициент отрицательный, убывает	–	–
от C до D	угловой коэффициент отрицательный, возрастает	–	+
от D до E	угловой коэффициент равен нулю, горизонтальная прямая	0	0
от E до F	угловой коэффициент отрицательный, убывает	–	–

Учащиеся должны понять физический смысл производной первого и второго порядков, аналитически записывать когда скорость и ускорение положительна, когда отрицательна и когда равна нулю и уметь объяснить это физически. Например, запись $v(t)>0$ означает, что объект движется в положительном направлении, а при $v(t)<0$ в отрицательном направлении, $a(t)>0$ показывает, что скорость возрастает, $a(t)<0$ - скорость убывает. $v(t)\cdot a(t)>0$ скорость возрастает, $v(t)\cdot a(t)<0$ скорость убывает.

У.8 Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 4t$ (s - перемещение в метрах, t - время в сек.). Найдите значение силы F, действующей на тело.

Решение: найдя производную 2-го порядка функции $s(t) = t^2 - 4t$ найдем ускорение: $s'(t) = 2t - 4$, $s''(t) = 2$

Значит, тело движется с ускорением $a = 2$ *м*/сек^2.

Найдем силу, действующую на тело по формуле II закона Ньютона

$F = ma$.

В рассматриваемом случае сила равна $F = 3\cdot 2 = 6$ N.

Урок 77-79. Производная показательной и логарифмической функций. 3 часа Учеб. стр. 161-166

Содержательный стандарт. 2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

Навыки учащегося:

- применяет правило дифференцирования показательной функции;
- применяет правила дифференцирования для функций,содержащих показательную и логарифмические функции;
- решает задачи реальной жизненной ситуации находя производную логарифмической и показательной функций.

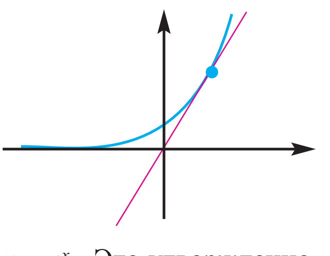
На этом уроке мы изучим зависимость скорости изменения экспоненциальных функций вида $y = a^x$, $y = e^x$ от x. при этом мы увидим как часто число e используется для моделирования изменения реальных жизненных ситуаций.

Сначала вспомним, как при помощи предела найти число e. Для этого произведем следующие вычисления.

При помощи калькулятора вычислим значение выражения $(1 + \frac{1}{n})^n$ при значениях $n = 1$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$. Вычисления показывают, что при увеличении значений n значение выражения увеличивается и будет находится между 2,71 и 2,72 Это число обозначают за $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Числа e и π называются трансцендентными числами.Трансцендентными называются числа, которые не могут являться корнями алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

После чего рассматриваются оценка производной экспоненциальной функции. Как по вашему, будет ли производная экспоненциальной функции являться функцией, зависящей от экспоненциальной переменной? Можно ли это приблизительно определить при помощи графика? Например, изобразим график функции $y = 2^x$ и расстроим угловые коэффициенты касательных, перемещая линейку вдоль графика. Как видно, угловой коэффициент при соответствующем изменении значений функции всегда будет положителен.

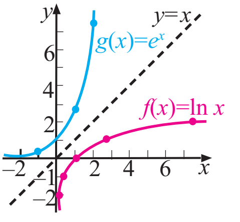


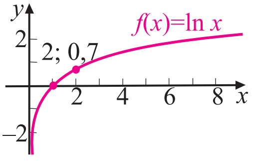
Значит, производная функции $y = 2^x$ изменяя пропорционально точки оригинальной функции, остается экспоненциальной: $y' = (2^x)' = 2^x \ln 2$

Производной функции $y = e^x$ является функция $y = e^x$. Это утверждение доказывается аналитически. Учащимся предлагается построить в одной системе координат графики самих функций $y = 1{,}5^x$, $y = 2{,}5^x$, $y = 3^x$, $y = 3{,}5^x$ и графики их производных. В каких случаях график производной находится над графиком заданной функции, а в каких под графиком заданной функции? Представляются мнения по данному вопросу.

Выполняются задания прикладного характера. Можно задать учащимся собрать более обширную информацию о ситуационных задачах в учебнике. Например, прирост населения, увеличение количества бактерий - для решения задач такого типа применяется производную. Можно оформить это в виде небольшого проекта или презентации.

2-й час. Он отведен для доказательства правил дифференцирования логарифмической функции. Отмечается, что логарифмическая функция, является обратной для показательной функции. Поэтому нужно вспомнить свойства обратных функций и изобразить график. Функции $y = \ln x$ и $y = e^x$ также являются взаимно обратными функциями. Их свойства представлены в таблице ниже.





$y = e^x$	$y = \ln x$
Область определения: $x \in R$	Область определения: $x \in (0;+\infty)$
Множество значений: $y \in (0;+\infty)$	Множество значений:: $y \in R$
Возрастает на всей области определения.	Возрастает на всей области определения
точка пересечения с осью y : (0;1)	точки пересечения с осью y нет
точки пересечения с осью x нет.	точка пересечения с осью x: (1;0)
Горизонтальная асимптота у = 0 (ось x)	Вертикальная асимптота $x = 0$ (ось y).
Максимумов и минимумов нет.	Максимумов и минимумов нет.

3-й час. Этот час отводится для прикладных заданий. Особое внимание при выполнении прикладных заданий следует уделять тому, чтобы учащиеся могли описывать ситуацию, для значения производной в точке.Например, в задании 7 на размножение бактерий. $N'(t)$ при $t = 12$ выражает не количество бактерий через 12 часов, а увеличение количества.

Также внимание надо уделить умению правильно дифференцировать функции, содержащие показательные и логарифмические функции.

Оценивание. Проводится формативное оценивание умения находить производные показательных и логарифмических функций и применять к ним правила дифференцирования. Оценивается умение применять калькулятор для нахождения значений показательных и логарифмических функций, и умение объяснить значение производной для конкретной реальной ситуации.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.3. (стр. 162) b) запишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{-2x}$ в точке (0;1).

Решение :

b) $y = e^{-2x}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

Уравнение касательной:

$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0)$

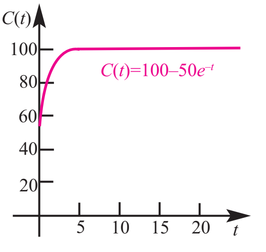
$y'(x) = (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$;

$y'(0) = -2$; $y(0) = 1$

$y - 1 = -2\cdot(x - 0) = -2x$

$y = -2x + 1$.

У.9. стр.163. **Бизнес.** Затраты на производство изделия А (млн. манат) на заводе по изготовлению полимерных изделий можно смоделировать функцией $C(t) = 100 - 50e^{-t}$.



Найдите следующее:

a) Маржинальные затраты на производство.

b) Значение $C'(0)$.

c) Значение $C'(4)$ (с точностью до сотых)

d) $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} C'(t)$. Объясните на примере реальной ситуации колебание стоимости продукта при стремлении к нулю.

Решение :

$C(t) = 100 - 50\cdot e^{-t}$

a) Маржинальная стоимость

$C'(t) = 50\cdot e^{-t}$

b) $C'(0) = 50$

c) $C'(4) = 50\cdot e^{-4} \approx 0{,}92$

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(100 - 50\cdot e^{-t}) = 100 - 50\cdot\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 100 - 50\cdot 0 = 100$

$\lim\limits_{t\to+\infty} C'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 50\cdot e^{-t} = 0$

Производство стабилизируется, изменения в затратах на производство нет.

Урок 80-82. Производная тригонометрических функций. Обобщающие задания. 3 часа Учеб. стр. 167-170

Содержательный стандарт. 2.1.1. Знает понятие производной функции и свойства дифференцируемых функций, знаком с основными правилами вычисления производной.

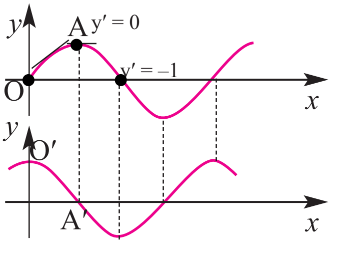
2.1.2. Находит производную некоторых функций при помощи таблицы производных элементарных функций и правил вычисления производной.

Навыки учащегося:

- находит аналитически, при помощи определения производной производную функций $y = \sin x$, $y = \cos x$;
- определяет графически производную, при помощи изменение знака углового коэффициента функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.

В реальной жизни мы часто встречаемся с периодическими событиями. Периодическое вращение земли вокруг своей оси, вращение планет солнечной системы вокруг Солнца, смена дня и ночи, смена времен года, волны, возникающие при приливах и отливах, стук человеческого сердца, дыхание и т.д. Поэтому многие физические процессы могут быть смоделированы при помощи синусоиды. Этим же свойством обладают ряд электрических, электронных и оптических событий. Каждое периодическое событие было доказано для комбинации тригонометрических функций синуса и косинуса. Периодические события, имеют большое практическое значение для двух зависимых друг от друга величин. Для этого надо уметь дифференцировать тригонометрические функции.

Если до настоящего времени, учащиеся могут сравнить графики оригинальной функции с графиком производной функции, то им будет легко осознать, что для функции $y = \sin x$ графиком производной является график функции $y = \cos x$. Например, знак углового коэффициента функции $y = \sin x$ на части OA. В точке A касательная параллельна оси x, значит, угловой коэффициент равен нулю и график производной в данной точке должен пересекать ось x. Такого типа визуальный анализ помогает приблизительно установить, что графиком производной функции $y = \sin x$ является график функции $y = \cos x$.



После чего, при помощи определения производной учащиеся могут убедится в этом аналитически.

Аналогично, можно определить какой функцией будет производная для функции $y = \cos x$.

Особо следует обратить на умение учащихся определять угловой коэффициент касательной в заданной точке и применять правила дифференцирования тригонометрических функций. Правила дифференцирования еще раз расстраиваются на конкретных примерах.

Применение правил дифференцирования сложной функции:

Для нахождения производной функции $y = \sin^3 3x$ ее надо представить в виде $y = (\sin 3x)^3$ и применить правило дифференцирования сложной функции, содержащей степень

$$y = (\sin 3x)^3 = 3\sin^2 3x\,(\sin 3x)' = 3\sin^2 3x\,(\cos 3x)\,(3x)' = 9\sin^2 3x \cos 3x$$

1-ый раз сложная функция

2-ой раз сложная функция

Записать уравнение касательной в заданной точке, можно аналогично правилу записи для других функций.

1. Находим производную функции $f'(x)$.
2. Находим значение функции (y_0) в заданной точке (x_0) и значение производной (k).
3. Полученные значения подставляем в уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Запишите уравнение касательной к функции $y = 3\sin 2x$ в точке $\dfrac{\pi}{4}$.

Решение:

1. Найдем производную функции: $y' = (3\sin 2x)' = 6\cos 2x$
2. Найдем значение углового коэффициента в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$:

$$y = 6\cos 2x = 6\cos 2\frac{\pi}{4} = 6\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Значит в данной точке касательная параллельна оси x.

3. Найдем значение функции : $y = 3\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sin\dfrac{\pi}{2} = 3$
4. Так как $k = 0$, то уравнение касательной $y - y_0 = k(x - x_0)$ для заданной функции равно $y = 3$.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.16. (стр.170). Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2\cos x \sin 2x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение: найдем производную дзаданной функции:

$$y' = (2\cos x \sin 2x)' = (2\cos x)'\sin 2x + 2\cos x(\sin 2x)' =$$
$$= -2\sin x \sin 2x + 4\cos x \cos 2x$$

В точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ угловой коэффициент касательной к графику равен значению производной в заданной точке.

$$k = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2}\sin\pi + 4\cos\frac{\pi}{2}\cos\pi = 0.$$

$k = 0$ показывает, что в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ касательной к графику функции $y = 2\cos x \sin 2x$ является горизонтальная прямая параллельная оси x.

Рабочий лист N 6

Имя_______ Фамилия_________ Дата__________

Найдите производную функции и упростите ответ, при помощи тригонометрических отношений.

$y = \cos^2 x - \sin^2 x$

$y = \sin^2 x - \cos 2x$

$y = \mathrm{tg}x - x$

$y = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5}$

$y = \ln(\sin^2 x)$

$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$

$y = 3\sin x - 2\sin^3 x$

$y = \mathrm{ctg}x + x$

$y = \dfrac{\sec^7 x}{7} - \dfrac{\sec^5 x}{5}$

$y = \dfrac{1}{2}\ln(\cos^2 x)$

Рабочий лист N 7

Имя_______ Фамилия_________ Дата__________

Запишите уравнение касательной к графикам следующих функций в заданных точках.

Функции:	Точки:
$y = \mathrm{tg}x$	$(-\frac{\pi}{4}; -1)$
$y = \sec x$	$(\frac{\pi}{3}; 2)$
$y = \sin 4x$	$(\pi; 0)$
$y = \mathrm{cosec}^2 4x$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$
$y = \mathrm{ctg}x$	$(\frac{3\pi}{4}; -1)$
$y = \sin x\cos x$	$(\frac{3\pi}{2}; 0)$

Таблица критериев оценивания по разделу 5

№	Критерии	Заметки об учащихся
1.	Определяет производную функции при помощи предела.	
2.	Вычисляет значение производной в заданной точке.	
3.	Связывает угловой коэффициент касательной с производной функции в данной точке и записывает уравнение касательной.	
4.	Решает задачи реальной жизненной ситуации применяя правила дифференцирования функций $(x) = c$, $f(x) = x^n$, $g'(x) = c \cdot f'(x)$, $h(x) = f(x) \pm g(x)$.	
5.	Применяет правила дифференцирования произведения, частного, сложной функции	
5.	Знает правила нахождения производной второго порядка и объясняет ее физический смысл.	
7.	Применяет производную для решения простых экономических задач.	
8.	Знает и применяет правила дифференцирования показательной и логарифмической функций.	
9.	Применяет дифференцирование показательной и лограрифмической функции для решения задач реальных жизненных ситуаций.	
10	Применяет правила дифференцирования тригонометрических функций.	

Урок 83. Задания для суммативного оценивания по разделу 5

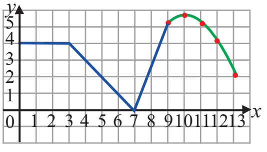
1) Найдите производную функции.

$g(x) = \sqrt{x} + (x-3)^3$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{(4x+5)^2}$ $\qquad$ $f(x) = -5x(2x-3)^4$

2) Найдите $\dfrac{dy}{du}, \dfrac{du}{dx}$ и $\dfrac{dy}{dx}$ для следующих функций.

$y = \dfrac{u+1}{u-1}, \quad u = 1 + \sqrt{x}$

3) Для функции, заданной графиком, найдите значения производной в следующих точках.



a) $f'(2)$ b) $f'(3)$ c) $f'(5)$
d) $f'(10)$ e) $f'(12)$ f) $f'(7)$

4) Запишите уравнение касательной функции $f(x) = 3x^2 - 7x + 8$ в точке с абсциссой $x = 2$.

5) a) Вычислите следующие пределы.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{tg}(x+h) - \text{tg}x}{h}$ $\qquad$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + h\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{h}$

b) Какой из данных пределов выражает производную?

6) Что из следующего является производной функции $y = 5^x$?

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5^x \cdot \ln 5$ b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ c) $\dfrac{dy}{dx} = 5e^x$ d) $\dfrac{dy}{dx} = 5(5^x)$

7) Для функции $y = xe^x$, найдите производные первого и второго порядка.

8) Найдите производную функции.

$f(x) = (2x+5)(3x-4)$ $\qquad$ $g(x) = 4x^2(x^3 + 5x)$

9) Функция $C(x) = 950 + 15\sqrt{x}$, является математической моделью затрат в манатах на пошив полупальто текстильной фирмы в количестве x единиц. Как изменятся затраты на производство, если фирма пошьют 400 пальто?

10) Найдите производную функции

$f(x) = \cos 7x^3$ $\qquad$ $f(x) = (\cos 5x)^4$ $\qquad$ $f(x) = \cos^3 7x$

11) В какой точке касательная к графику функции $y = x^5 - 4x^2$ параллельна оси x?

12) Прирост населения в городе задается функцией
$P(t) = 100{,}000 + 2000t^2 \ \ t$.

a) Найдите скорость прироста населения $\frac{dp}{dt}$
b) Количество жителей через 10 лет.
c) Скорость прироста за 10-ый год.
d) Запишите реальную ситуацию для пункта с.

13) Найдите производную функции $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ сначала при помощи правила дифференцирования частного.а затем правила дифференцирования степени.

14) Для функции $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$ найдите производную второго порядка и $f''(1)$

15) Тело движется по закону $s(t) = 2t^2 + 5t$. Здесь t в секундах, s путь в см. Найдите a) $v(t)$; b) $a(t)$. c) скорость и ускорение при $t = 10$.

16) Общую прибыль полученную от продажи новой продукции в количестве x штук можно смоделировать функцией $R(x) = 50x - 0{,}5x^2$, затраты на производство - функцией $C(x) = 4x + 10$.
a) Функция дохода от прибыли $P(x)$ находится как разность между прибылью и затратами. Запишите эту функцию .
b) Найдите значения $R(30)$, $C(30)$, $P(30)$.
c) Найдите значения $R'(30)$, $C'(30)$, $P'(30)$.

Задания для суммативного оценивания за первое полугодие

Урок 84.

1) Постройте график функции и исследуйте ее на непрерывность.

a) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 1 \\ x + 2, & 1 \le x \le 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$

2) Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

3) Обоснуйте, что функция $f(x) = x^3 + x + 1$ имеет нули на отрезке $[-1; 0]$

4) Найдите длину медианы BM треугольника с вершинами в точках A (0; 2; 6), B (6; –7; –2), C (6; –8; –14).

5) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(2; 2; 1)$ и $\vec{b}(0; 2; -2)$

6) Даны точки A (–5; 2; 3), B (2; 4; 1), M (0; y; z). Зная, что вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BM}$ коллинеарны, найдите числа y и z.

7) При каком значении n при делении многочлена $x^3 + 2x^2 - 3x + n$ на $(x + 1)$ остаток будет равен 4?

8) $x_1 = 3$ является одним из корней уравнения $ax^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$. Решите это уравнение.

9) Разделите многочлен $x^3 - 3x + 2$ на двучлен $x - 2$.

10) При каком значении m вектора $\vec{a}\langle 2; -1; 3 \rangle$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + m\cdot\vec{j} - \vec{k}$ перпендикулярны?

11) Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(3; 2)$ и параллельной вектору $\vec{m}\langle 2; 1 \rangle$.

12) Найдите площадь полной поверхности цилиндра с радиусом 4 см и площадью осевого сечения 40 см^2.

13) Точка A (2; 1; –1) лежит в плоскости с нормалью $\vec{n}\langle 3; -1; 4\rangle$. Запишите уравнение плоскости.

14) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 1$ в точке A (–1; 1).

15) Вычислите мгновенную скорость частицы в момент $t = 2$ сек., движущейся прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 5t^2 + 6t$.

16) Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x}$ в точке $x = -1$

17) Зная, что $f(x) = \ln(2x - 5)$ решите неравенство $f'(x) > 1$.

18) Запишите координаты точки касания касательной к графику функции $f(x) = 3x^3 - \frac{x^2}{2}$ параллельной оси абсцисс.

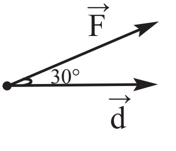
19) Дана функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.
a) Решите уравнение $f'(x) = 0$.
b) Решите неравенство $f'(x) < 0$.

20) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$. Найдите $f'(4)$.

21) Найдите площадь полной поверхности конуса с радиусом 8 см, если отношение высоты к образующей равно 3:5.

22) В шаре, на расстоянии 3 см от центра, проведена плоскость. Площадь полученного сечения равна 16π см². Найдите площадь сферической поверхности шара и полученного сегмента.

23) $|\vec{F}| = 4$ $|\vec{d}| = 3$. Найдите скалярное произведение $\vec{F}\cdot\vec{d}$.



24) Какая из следующих точек расположена на плоскости, заданной уравнением $2x + 3y + z - 4 = 0$?
a) (–1; 2; 0) b) (2; 0; –1) c) (0; 2; –2)

Таблица планирования по разделу 6

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб. стр.
3.2.2. Применяет преобразования подобия в пространстве. 3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема цилиндра. 3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и объема конуса и усеченного конуса. 3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и объема шара. 3.2.6. Находит площади поверхности и объем частей шара (сегмента и сектора).	85-87	Объем цилиндра	3	173-176
	88-90	Объем конуса и усеченного конуса	3	177-180
	91-94	Объем шара и его частей	4	181-185
	95-96	Объемы подобных фигур	2	186-188
	97-98	Обобщающие задания	2	189-190
	99	Задания для суммативного оценивания	1	
	Всего		15	

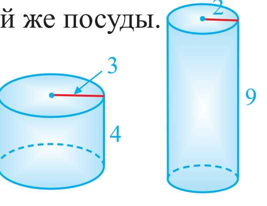
Пример урока

Урок 85-87. Объем цилиндра. 2 часа. Учеб. стр.173-176
Содержательный стандарт.
3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и **объема** цилиндра.
Навыки учащегося:

- представляет понимание понятия объем в реальных ситуациях на моделях или опытным путем;
- объясняет формулу объема цилиндра словами и представляет аналитическую запись;
- решает различные задачи, на нахождение объема цилиндра.

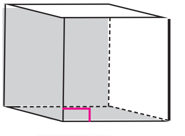
Объем цилиндра. Коллективное обсуждение (5 минут).

1-ый час. Объем это часть пространства, которую занимают фигуры. Говоря об объеме имеют виду пространственные фигуры. Что вы думаете о том, объем какого цилиндра на рисунке ниже больше? Как можно ответить на этот вопрос не проводя математических вычислений? Учащиеся могут понимать объем, как объем занимаемый жидкостью. Определить какой из цилиндров имеет больший объем можно наполнив его водой при помощи одной и той же посуды.

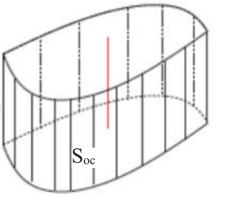


Постановка проблемы, основанной на первоначальных знаниях. (5 минут)

Конечно объем каждой фигуры можно найти при помощи геометрических формул. Мы уже знаем как найти объем призмы, которая является одним из видов цилиндра. Объем прямой призмы равен произведению площади основания и высоты. **Объем = площадь основания · высота.**

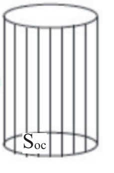


До сведения учащихся доводится, что если основанием цилиндра является замкнутая кривая, то ее объем также находится как произведение площади основания на высоту.



Объем = площадь основания · высота.

Объем прямого кругового цилиндра также находится как произведение площади основания и высоты. Учащиеся вспоминают свойства прямого кругового цилиндра. Образующая цилиндра должна быть перпендикулярна плоскости основания, т.е. образовывать с плоскостью основания угол 90^0.



Объем = площадь основания · высота.

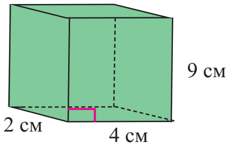
Какой фигурой является основание цилиндра и как найти ее площадь?

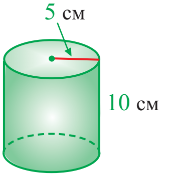
Учащийся, которому задан вопрос отвечает на него, остальные учащиеся выражают свое мнение по поводу справедливости его ответа.

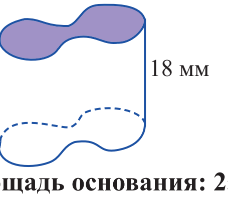
Проверка изученного. (7-10 минут)

1. Непосредственное применение формулы. Работа с заданиями 1-2 учебника.

Правила и формулы для вычисления объемов которые были изучены применяются на примерах. Все учащиеся учатся применять формулу записывая ее в тетради словами и при помощи математических символов, на представленныых примерах..

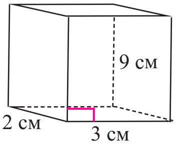






Площадь основания: 25 мм²

Учащиеся с низким уровнем обученности могут работать у доски. При этом он выполняет задание при помощи следующих наводящих вопросов.



Как называется данная фигура? Прямоугольный параллелепипед.

Как можно найти площадь основания? $S_{осн.} = 2 \cdot 3$ см^2

Чему равна высота? 9 см

Как вычислить объем? $V = S_{осн.} \cdot h = 6 \cdot 9 = 54$ см^3

Какие из данных величин являются единицами площади, а какие - единицами объема? Если мы захотим выразить 54 см^3 в м^3, то какие преобразования мы должны выполнить?

1 м^3 = $100 \cdot 100 \cdot 100$ см^3, значит 54 см^{3}надо разделить на 1 000 000. Если вы разделите на 100, то получите неверный результат(**5-7 минут).**

2. Зная формулу объема, решаются задачи, где надо найти другие измерения. Учебник N3. Эти задания предназначены для самостоятельного решения **(5-7 минут)**.

3. Выполняются задания на ситуацию (Учебник No 4-5) и задания, охватывающие ранее полученные знания (No 6). Эти задания могут выполняться коллективно, с обсуждениями.

Однако выполнение заданий 4,5,6 и 7 более целесообразно организовать в виде групповой работы. Эти задания охватывают умение первого применения. Группы выполняют работу, распределив задания между участниками. Каждая группа оценивается на предмет правильности решения. На работу в группах отводится **15 минут.**

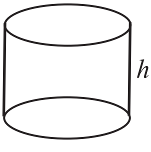
Оценивание. Формативное оценивание проводится за участие в обсуждениях, умение представлять свое мнение, решать задания, за активную работу в группах.

2- ой час. Этот час отводится для выполнения прикладных заданий.

Для нахождения объемов сложных фигур учащиеся должны уметь определять из каких фигур состоит эта сложная фигура. Одним из решающих моментов при решении задач такого типа являются умение определить увеличивается или уменьшается объем данной конструкции в данной ситуации. В соответствии с ситуацией объемы будут либо складываться, либо вычитаться. Для этого учащимся задаются наводящие вопросы. Верно ли, что при нахождение площади поверхности таких фигур можно применить тактику, которую мы применяем при нахождении объемов, т.е. найти в отдельности площади каждой фигуры, а затем сложить или вычесть? Этот подход неприемлем для поверхностей, из-за строения конструкции.

? Решение некоторых заданий из учебника.

У.5. Найдите объем цилиндра, высота которого равна 5 см, а площадь полной поверхности равна 72 π см^2.



Решение: $h = 5$

$S_{п.п.} = 72\pi$

$2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 5 = 72\pi$

$R^2 + 5R - 36 = 0$ $\qquad R = 4$

$V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi$ см^3

У.8. Найдите объем цилиндра, если площадь боковой поверхности равна S, а длина окружности в основании равна C.

Решение: $2\pi R h = S$, $\qquad 2\pi R = C$, $\qquad h = \dfrac{S}{C}$, $\qquad R = \dfrac{C}{2\pi}$

$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \dfrac{C^2}{4\pi^2} \cdot \dfrac{S}{C} = \dfrac{SC}{4\pi}$

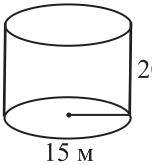
У.14. В сосуд, имеющий форму цилиндра, радиус основания которого равен 15 см, а высота 20 см, налит сок. Продается сок в стакане, радиус основания которого равен 3 см, а высота 6 см. Сколько денег выручат от продажи полного сосуда, если цена одного стакана сока равна 3 маната?

Решение: Объем

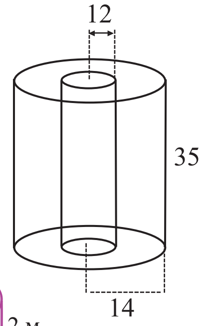
$V = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 \approx 14137{,}2$ см^3

$V_{стакан} \approx \pi \cdot 3^2 \cdot 6 \approx 54 \cdot \pi \approx 169{,}65$см^3

$h = \dfrac{V}{V_{стакана}} \approx 83$ стакана сока, P ≈ 250 манат



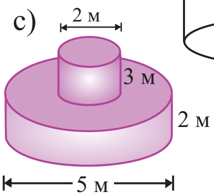
У.15. Найдите массу трубы длиной 35 см, изготовленной из материала, плотность которого равна 0,6 г/см^3, если внутренний диаметр равен 24 см, внешний диаметр равен 28 см.



Решение: $V = \pi\,(14^2 - 12^2) \cdot 35 = \pi \cdot 52 \cdot 32 \approx 5717{,}7$ см^3

$m = v \cdot \rho = 3431$ q = 3 кг 431 г

У.18. Найдите объем сложных фигур на рисунках.

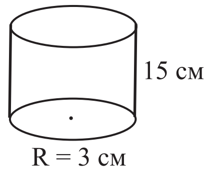


Решение: c) $V = V_1 + V_2 =$

$= \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 2 + \pi \cdot 1^2 \cdot 3 =$

$= 12{,}5\,\pi + 3\pi = 15{,}5\,\pi$ м^3

У.24. Цилиндрический поршень водяного насоса диаметром 60 мм, совершает движение на расстоянии 150 мм. За 1 минуту поршень совершает движение 40 раз. Найдите объем жидкости, которую перекачивает насос за 1 час работы.



Решение: сначала найдем объем цилиндра $V_1 = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\,\pi$ см^3

Если за 1 минуту движение совершается 40 раз

$V = 40 \cdot V_1 = 40 \cdot 135\,\pi = 5400\,\pi$ см^3

Объем жидкости, которую перекачивает насос за 1 час равен:

$V = 60 \cdot 5400 \cdot 3{,}14 \approx 1017876$ см$^3 \approx 1{,}02$ м^3

Урок 88 - 90. Объем конуса. Объем усеченного конуса. 3 часа. Учеб. стр. 177 - 180

Содержательный стандарт.

3.2.4. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхности и **объема** конуса и усеченного конуса.

Навыки учащегося:

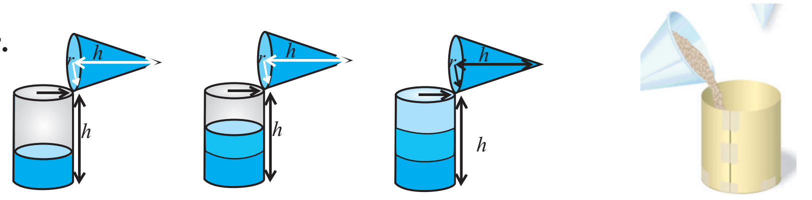
- представляет объем конуса эмпирическим методом и на моделях;
- объясняет формулу нахождения объема конуса словами и представляет аналитическую запись
- решает различные задачи вычисляя объем конуса.

Анимационные примеры:

https://www.youtube.com/watch?v=0ZACAU4SGyM&feature=youtube

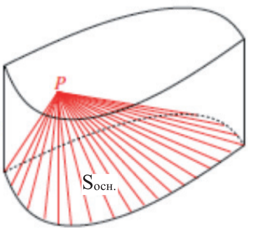
Изготовьте из картона модели цилиндра и конуса с одинаковыми радиусами оснований и высотами. Наполните цилиндр песком (рисом и т.д.) при помощи модели в форме конуса. За сколько раз модель в виде конуса заполнит цилиндрическую модель? Верно ли, что тремя моделями конуса можно заполнить модель цилиндра?

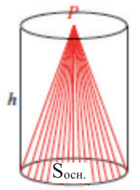
Опыт.



Учащиеся отвечают на данный вопрос после выполнения опыта. Проведение этого опыта позволяет эффективно и на долгое время запомнить формулы объема.

К конусу можно подойти из общего определения цилиндра. Пусть точка P лежит на одной из параллельных плоскостей, основании. Если эту точку соединить с каждой точкой основания отрезками, то получим фигуру, которая называется конусом (или фигурой в виде конуса).

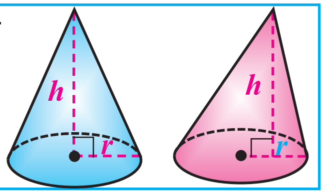




Надо стараться сформировать у каждого ученика умение представлять объем конуса эмпирически, на моделях или в виде следующих формул. Также очень важно эти опыты просмотреть по указанным выше линкам в Youtube.

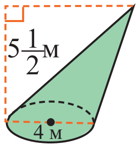
Объем конуса равен одной третьей произведения площади основания и высоты.

$V = \frac{1}{3}\ S_{осн.}h$, $\qquad S_{осн.} = \pi r^2 \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Можно спросить чем отличается прямой конус от наклонного конуса? Учащиеся должны уметь моделировать реальные объекты, линии которых перпендикулярны плоскости основания. Моделировать должны не отдельные учащиеся и учитель, а каждый учащийся.

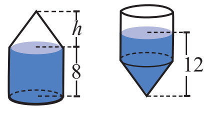
а)



2-ой час. Объем усеченного конуса. Вывод формулы для нахождения объема усеченного конуса проводится коллективно. Особое внимание уделяется преобразованию единиц объема $м^3$, $см^3$, $мм^3$ в единицы объема жидкостей тонны, литры и миллилитры.

Решение некоторых заданий из учебника.

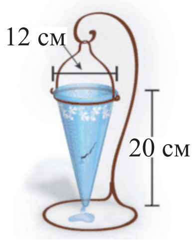
У.12. Цилиндрическая часть сосуда имеет длину 8 см. К ней прикреплена часть в виде конуса высотой h, как показано на рисунке. Если сосуд перевернуть, то уровень жидкости составит 12 см. Найдите высоту конуса h.



Решение: по условию $V = \pi r^2 \cdot 8 = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 (12 - h)$. Отсюда

$8 = \frac{1}{3}h + 12 - h$ или $h = 6$ см.

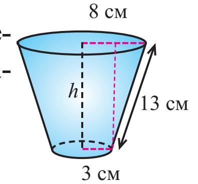
У.13. За минуту из сосуда, в форме конуса, по каплям, вытекает 4 см^3 воды. За какое время полный сосуд опустошится на 80%? Зная, что 1 см^3 = 0,001 *л,* выразите объем сосуда в литрах.



Решение: по данным $r = 6$ см, $h = 20$ см.
Тогда объем посуды равен
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 20 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 36 \cdot 20 = \pi \cdot 240 \approx 754$ см³ ≈ 0,75 л.

80% сосуда опустошится за приблизительно $754 \cdot 0{,}8 : 4 \approx 151$ минут.

У.19. Найдите площадь полной поверхности и объем усеченного конуса, образующая которого равна 13 см, а радиусы оснований 8 см и 3 см.

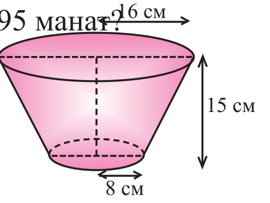


$S_{п.п.} = \pi\, l\,(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 =$
$= \pi \cdot B \cdot (8 + 3) + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 3^2 = \pi\,(143 + 64 + 9) = 216\,\pi$ см².
Чтобы найти объем усеченного конуса, сначала найдем высоту.
Так как $r = 3$ см $R = 8$ см, $l = 13$ см, то
$h = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{13^2 - (8 - 3)^2} = 12$ см. Тогда объем усеченного конуса равен:

$V = \frac{\pi}{3}\, h \cdot (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{3} \cdot 12 \cdot (8^2 + 3^2 + 8 \cdot 3) = 4\pi \cdot (64 + 1 + 24) = 388\pi$ см³.

У.20.

Емкость для молока выполнена в виде усеченного конуса без крышки высотой 15 см и радиусами оснований 8 см и 16 см. Сколько денег выручат от продажи полной емкости, если 1 литр молока стоит 1,35 манат? Сколько денег потратят на изготовление данной емкости, если цена 100 см² материала, из которого сделана емкость, равна 0,95 манат?



Решение: R = 16

$r = 8\quad h = 15\quad l=\sqrt{(R-r)^2+h^2} = \sqrt{8^2+15}=17$

$V = \frac{\pi}{3} \cdot 15 \cdot (16^2 + 8^2 + 16 \cdot 8) = 5\pi(256 + 64 + 128) =$

≈ 7037 см³ = 7,037 *л*.

Деньги, полученные от продажи молока P = 7,037 · 1,35 ≈ 9,5 манат.

$S = \pi l(R + r) + \pi r^2 = \pi \cdot 17 \cdot (16 + 8) + \pi \cdot 8^2 = 472\pi \approx 1482{,}83$ см³

Тогда на изготовление емкости потратят P ≈ 14,09 манат.

Урок 91-94. Объем шара и его частей. 3 часа. Учеб. стр. 181-185

Содержательный стандарт.

3.2.5. Решает задачи на нахождение поверхности и **объема** шара.

3.2.6. Находит площади поверхности и **объем** частей шара (сегмента и сектора).

Навыки учащегося:

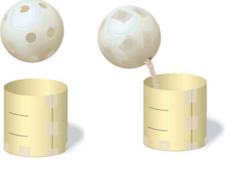
- представляет объем конуса эмпирически и при помощи моделей;
- объясняет формулу объема конуса словами и представляет в аналитическом виде;
- решает различные задачи на вычисление объема конуса.

https://www.youtube.com/watch?v=aLyQddyY8ik

https://www.youtube.com/watch?v=h4j8l3p22e8

Опыт.

1. Возьмите какой-либо мяч и приблизительно определите его диаметр.
2. Изобразите развертку цилиндра, радиус основания и высота которого равны диаметру мяча.
3. Сверните развертку и получите полый цилиндр. Разделите цилиндр по высоте на 3 равные части и сделайте соответствующие отметки.
4. Оберните мяч фольгой или плотной тканью. Полученный мешок сферической формы заполните песком.
5. Пересыпьте песок из мешка в изготовленный вами цилиндр. Какая часть цилиндра заполнится песком?



Модель

Если сферу разделить сферу в виде сетки из горизонталей и вертикалей, то можно представить, что она состоит из бесконечно малых пирамид, основанием которых являются “прямоугольные” кусочки сферы, а вершины находятся в центре сферы.

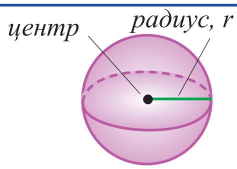
Примеры анимации.

https://www.youtube.com/watch?v=aLyQddyY8ik
https://www.youtube.com/watch?v=h4j8l3p22e8

Формула объема сферы, также как и формулы объема цилиндра и конуса выводится опытным путем, при помощи моделей и анимаций из интернета. Формула объема сферы представляется словами и в виде формулы как показано ниже.

Объем сферы равен $\frac{4}{3}$ произведения куба радиуса и π .

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

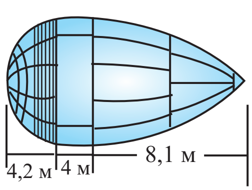


Решение некоторых заданий из учебника:

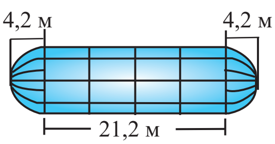
Для обеспечения топливом космических кораблей используются шаттлы. Они доставляют необходимые грузы на корабли, которые вращаются по ораби Шаттлы, в отличии от других космических кораблей, обладают возможностью возвращаться на орбиту несколько раз.У них есть цистерны с жидким кислородом и жидким водородом.

Цистерна для жидкого кислорода имеет форму соединенных полусферы, цилиндра и конуса. Цистерна для жидкого водорода - цилиндр, на конце которого расположены полусферы. Найдите объемы цистерн по рисунку.

Цистерна для жидкого кислорода



Цистерна для жидкого водорода



Решение: цистерна для жидкого кислорода состоит из полушара радиусом 4,2 м, цилиндра высотой 4 м и конуса высотой 8,1 м. Объем цистерны:

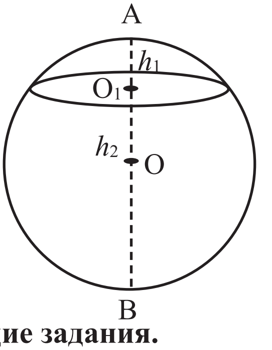
$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 4{,}2^3 + \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 8{,}1 = 167{,}85\,\pi \approx 526{,}5\ (м^3)$$

цистерна для жидкого водорода состоит из двух полушаров радиусом 4,2 м и цилиндра высотой 21,2 м. Объем цистерны:

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 4{,}2^3 + \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 21{,}2 = 98{,}784\,\pi + 373{,}968\,\pi =$$
$$= 472{,}752\,\pi \approx 1485{,}2\ (м^3)$$

У.10. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на 2 части: 3 см и 9 см. На какие части при этом делится объем шара?
Решение: по условию $O_1A = 3$ дм, $O_1B = 9$ м.
Значит, диаметр окружности $d = 3 + 9 = 12$ см.
При $d = 2r$ имеем $r = 12 : 2 = 6$ см. В соответствии с формулой нахождения сегмента шара радиуса R и высотой H.

$$V_{сегм.} = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$$



Тогда:

$$V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot \left(6 - \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 45\,\pi\ (м^3),$$

$$V_2 = \pi \cdot 9^2 \cdot \left(6 - \frac{1}{3} \cdot 9\right) = 243\,\pi\ (м^3).$$

Урок 95-98. Объемы подобных фигур. Обобщающие задания.
4 часа Учеб. стр. 186-190

Содержательный стандарт

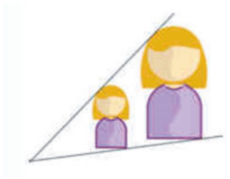
3.2.2. Применяет преобразование в пространстве при решении задач.

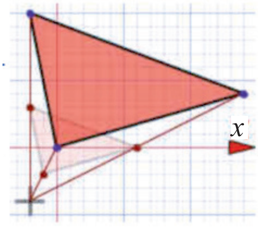
Навыки учащегося:

- определяет подобие пространственных фигур в соответствии с отношением их линейных размеров;
- определяет отношение объемов подобных пространственных фигур по заданным линейным размерам пространственных фигур;
- решает различные задачи, применяя подобие пространственных фигур.

Подобие пространственных фигур похоже на подобие плоских фигур. Т.е. подобные фигуры имеют одинаковую форму и отличаются только линейными размерами. Углы подобных фигур конгруэнтные. Соответствующие размеры пропорциональны.

Отношение любых линейных размеров подобных пространственных фигур равны. Для фигур вращения это отношение размеров высот, диаметров, радиусов, длин окружностей, образующих и т. д. Площади подобных фигур относятся с квадратом коэффициента отношения линейных размеров, а объемы с кубом коэффициента отношения линейных размеров.





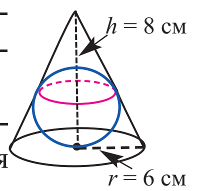
Как известно результатом гомотетии является увеличение или уменьшение размеров фигур в соответствии со значением коэффициента k. Результатом преобразования при гомотетии является подобные фигуры.

Учащимся можно задать следующие вопросы:
1) Отношение линейных размеров двух призм 1: 4. Объясните как относятся их площади.
2) Радиус одной сферы 5, а другой 9. Объясните как относятся их объемы.

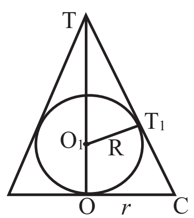
? Решение некоторых заданий из учебника.

У 7. (стр. 189) а) Найдите объем шара с наибольшим радиусом, вписанного в конус, радиус которого равен 6 см, а высота равна 8 см.

б) Найдите радиус шара с наибольшим объемом, помещенного внутрь сосуда в виде конуса, если радиус основания конуса r, а высота h.



Решение: а) Образующая конуса радиуса 6 см и высотой 8 см равна $l = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см. Шар наибольшего радиуса, вписанный в конус должен касаться оснований конуса и всех образующих. Рассмотрим осевое сечение конуса.



Так как $\Delta TT_1O_1 \sim \Delta TOC$, то $\dfrac{R}{6} = \dfrac{8-R}{10}$. Отсюда

$10R = 48 - 6R$, $R = 3$ см. Тогда объем искомого шара $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 =$

$= \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 108\ \pi$ см^3.

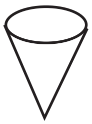
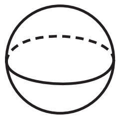
b) Снова рассмотрим осевое сечение и из подобия треугольников ΔTT_1O_1 и ΔTOC при $O_1T = h - R$ можно записать $\dfrac{R}{r} = \dfrac{h-R}{\sqrt{r^2 + h^2}}$.

Отсюда $R(\sqrt{r^2 + h^2}) = rh - rR$ и мы получаем радиус шара, который имеет наибольший объем: $R = \dfrac{h \cdot r}{\sqrt{r^2 + h^2} + r}$

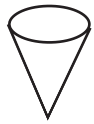
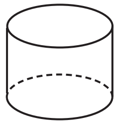
Рабочий лист N1

Имя _______ **Фамилия** _______ **Дата** _______

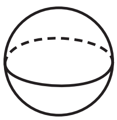
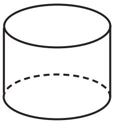
1) Запишите данные в пустые ячейки.

 $= \square$ 

$V_{кон.} = \square$ шар

 $= \square$ 

$V_{кон} = \square$ цилиндр

 $= \square$ 

$V_{шар} = \square$ цилиндр

2) Заполните таблицу.

Радиус	Длина окружности	Площадь круга	Объем цилиндра, высотой 6 см	Объем конуса, высотой 6 см	Объем шара
10 см					

3) Бак с размерами 60 см × 90 см, и высотой 2,40 м заполнен водой на высоте 1,80 м. Если в него опустится человек, рост которого равен 1,80 м, то на сколько увеличится уровень воды?
Указание: примите человека как фигуру в форме цилиндра.

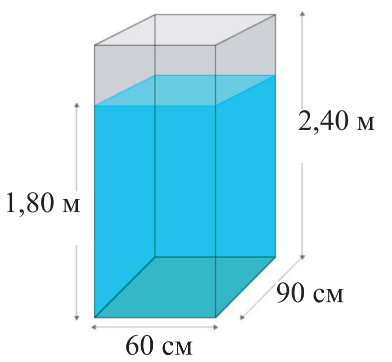
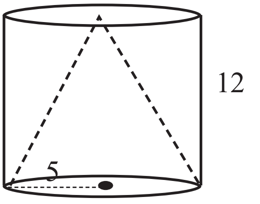


Таблица критериев для оценивания по разделу 6

№	Критерии	Замтки об учащихся
1.	Объясняет формулу объема цилиндра словами и представляет аналитическую запись	
2.	Решает различные задачи, на нахождение объема цилиндра.	
3.	Объясняет формулу нахождения объема конуса словами и представляет аналитическую запись	
4.	Решает различные задачи на вычисление объема конуса.	
5.	Объясняет формулу объема конуса словами и представляет в аналитическом виде;	
6.	Решает различные задачи на вычисление объема шара и его частей.	
7.	Решает различные задачи на вычисление объема подобных фигур.	
8.	Решает задачи на подобие пространственных фигур.	

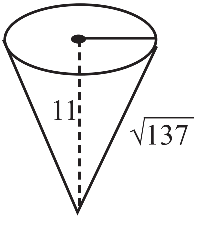
Урок 99. Задания для суммативного оценивания по разделу 6

1) В цилиндр, радиус основания которого равен 5 ед., а высота 12 ед. вписан конус, радиус основания и высота которого равны радиусу основания и высоте цилиндра. Найдите площадь в π единицах вне конуса, но внутри цилиндра.



2) Найдите радиус основания конуса, объем которого равен 300π см^3, а высота равна 15 см.

3) По данным на рисунке найдите объем конуса.

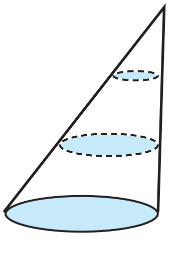


4) a) Запишите соответствующие размеры для конуса, подобного для конуса в пункте 3.

b) Найдите объем найденного в пункте 3 подобного конуса.

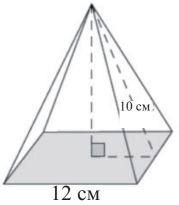
5) Масса сувенира из золота, продаваемого в магазине равна 0,945 грамм. Сувенир имеет форму конуса высотой 6 см и радиусом основания 5 см. Плотность золота 19,32г/см^3. Объясните из чистого золота или нет сделан сувенир. Учтите, что плотность равна отношению массы к объему.

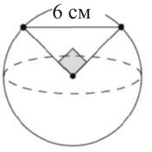
6) Площадь основания конуса равна S, а высота h. Конус, на одинаковом расстоянии пересечен плоскостями, параллельными основанию. Найдите:
a) объем самого верхнего слоя (коэффициент подобия 1/3)
b) объем среднего слоя в виде усеченного конуса (как разность объемов двух конусов)
c) объем нижнего слоя в виде усеченного конуса (как разность объема всего конуса и второго слоя).



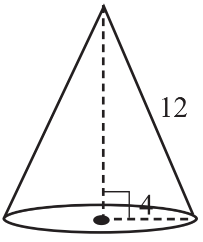
7) Найдите вместимость бака для воды, высотой 1,5 м и радиусом основания 75 см.

8) Какая фигура имеет больший объем?





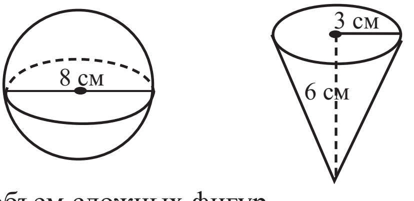
9) Лейла нашла объем конуса с радиусом основания 4 см и образующей 12 см как показано ниже. Объясните, что решение Лейлы верно.



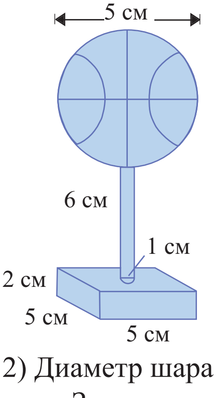
$$V = \frac{1}{3}\pi(4^2)\cdot 12$$
$$= \frac{16\cdot 12}{3}\cdot\pi$$
$$= 64\cdot\pi$$

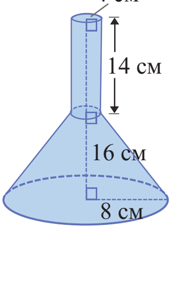
Ответ: 64π см^3

10) По данным на рисунке определите какая фигура имеет боьший объем. .



11) Найдите объем сложных фигур.





12) Диаметр шара разделен параллельными плоскостями на 3 равные части. Зная, что диаметр равен 30 см найдите объем шара и каждой из полученных частей.

Таблица планирования по разделу 7

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Уч. стр.
2.2.1. Находит стационарные точки, при помощи производной и определяет являются или нет они точками экстремума. 2.2.2. Применяет дифференциальное исчисление при исследовании функций и построении их графиков.	100-102	Нахождение промежутков возрастания и убывания фнкции	3	192-196
	103-105	Критические точки и экстремумы функции	3	197-204
	106-109	Построение графика функции с помощью производной. Построение графика функции многочлена. Построение графика рациональной функции	4	205-208
	110-112	Задачи на экстремумы. Оптимизацию.	3	209-215
	113-115	Обобщающие задания. Задания для суммативного оценивания по разделу.	3	216-217
	Всего:		16	

Урок 100-102. Нахождение промежутков возрастания и убывания фнкции. 3 часа. Учеб. стр. 192-196

Содержательный стандарт.
2.2.1. Находит стационарные точки, при помощи производной и определяет являются или нет они точками экстремума.

Навыки учащегося:
- показывает промежутки возрастания и убывания функции на графике;
- определяет промежутки возрастания и убывания функции при помощи производной.

До настоящего времени мы строили график функции по таблице значений,а также могли схематично изображать графики квадратичной и кубической функций по нескольким удобным точкам. При схематичном построении графика простых рациональных функций приходилось находить горизонтальную и вертикальную асимптоты. Но мы легко и достаточно точно можем построить график любой функции при помощи графкалькулятора. А на основе какой информации строит график графкалькулятор? Эту работу графкалькулятор может выполнить в основном на основе правил большого раздела математики математического анализа, который включает в себя такие понятия как предел, производная и интеграл.

В данном разделе мы при помощи производной научимся находить промежутки возрастания и убывания, экстремумы и строить графики функции многочлена и рациональной функций. А также, применяя производную мы научимся решать задачи на оптимизацию .

Обучающие задания в учебнике изучается коллективно. Учащиеся должны уметь определять является ли функция на промежутке возрастающей или убывающей. Для этого он должен уметь проверить условия $f(x_2)>f(x_1)$ или $f(x_2)<f(x_1)$ для произвольных значений x_1, x_2, удовлетворяющей условию $x_2>x_1$. С этой целью, надо создать рабочие листы с графиками.

На самом деле, определить промежутки возрастания и убывания функции мы можем и при помощи знака углового коэффициента. Это было изучено на предыдущих уроках. Учащиеся уже выполняли много заданий и знают, что в точках экстремума касательная бывает горизонтальной прямой и угловой коэффициент касательной в данной точке равен нулю.

Целесообразно начать урок с повторения свойств функции - четности или нечетности, асимптот, области определения и множества значений, точек пересечения с осями координат. Также для исследования функции при помощи производной надо организовать работу, которая будет развивать умение решать уравнения и неравенства. Для этого можно использовать следующие рабочие листы.

Рабочий лист N1

Имя _____ Фамилия_____ **Дата__________**

1) Решите уравнения.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $18v^2 = 36v$

d) $a^2 + 5a = 3a + 35$

e) $4{,}9t^2 - 19{,}6t + 2{,}5 = 0$

f) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$

g) $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 1} = 0$

2) Решите неравенства. Запишите недопустимые значения переменных (если они существуют). Запишите ответ.

a) $2x - 10 > 0$

b) $x(x + 5) < 0$

c) $x^2(x - 4) > 0$

d) $x^2 + 5x - 14 < 0$

e) $(x - 3)(x + 2)(x - 1) \le 0$

f) $\dfrac{x}{x^2 - 1} \ge 0$

3) Найдите точки пересечения графика с осью *x*.

a) $f(x) = 5x - 15$

b) $g(x) = x^2 - 3x - 28$

c) $h(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

d) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$

4) Найдите область определения и множество значений функции.

a) $y = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$

d) $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

f) $k(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$

g) $p(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

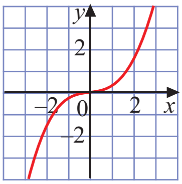
Рабочий лист N2

Имя _____ Фамилия_____ **Дата__________**

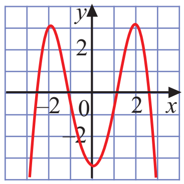
1) Запишите и представьте графически определение четной и нечетной функций.

2) Определите является ли функция четной или нечетной.

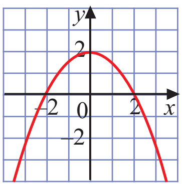
a)



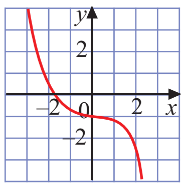
b)



c)



d)



3) Определите алгебраически является ли функция четной, нечетной или никакой (ни четной и ни нечетной).

a) $y = 2x$

b) $r(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -x^2 + 8$

d) $s(t) = x^3 - 27$

e) $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Рабочий лист N3

Имя _____ Фамилия_____ **Дата__________**

Установите соответствие между таблицей и графиком. Обоснуйте свое мнение.

1)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

2)

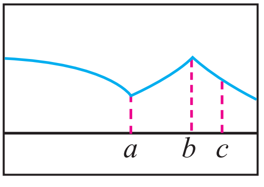
x	$f'(x)$
a	*нет*
b	*нет*
c	–1,7

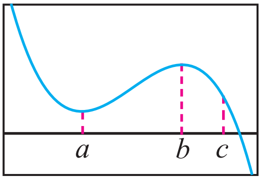
3)

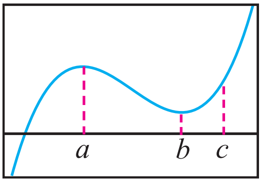
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	–5

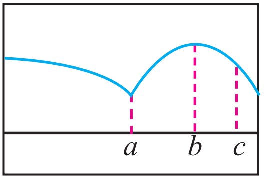
4)

x	$f'(x)$
a	*нет*
b	0
c	–2

a) 

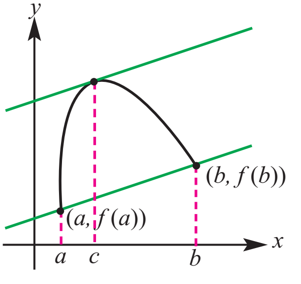
b) 

c) 

d) 

Доказательство теоремы о промежутках возрастания и убывания функции при помощи знака производной не предусмотрено в школьном курсе. Однако, в зависимости от уровня класса или учащегося, можно представить данное доказательство. Доказательство очень просто и основывается на теореме о среднем значении функции. Эта теорема названа в честь Лагранжа - математика, который родился в Италии, а жил во Франции, который впервые доказал эту теорему. Она так и называется теоремой Лагранжа. Наполеон Бонапарт называл Лагранжа “самой высокой пирамидой” среди математиков.
Теорема (Лангранжа). Если функция непрерывнана отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, тогда на интервале $(a; b)$ существует такое число c, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Геометрический смысл теоремы в том, что на отрезке $[a;b]$ прямая линия, касательная к графику в точке, параллельна секущей, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$ Объяснение посредством производной заключается в следующем: на открытом интервале $(a;b)$ существует такая точка c, что значение $f'(c)$, равное мгновенной скорости равно средней скорости изменения на отрезке $[a;b]$.



Обратите внимание, теорема не определяет мгновенную скорость, а устанавливает ее существование. Например, при помощи этой теоремы можно найти касательную.

Например, для функции $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$ на интервале (1; 4), найдем значение c, удовлетворяющее условию

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

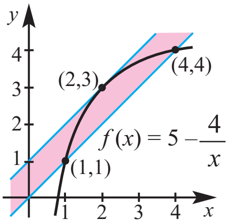
Как видно, удовлетворяет условию теоремы. Функция непрерывна на отрезке [1; 4] и дифференцируема на открытом промежутке (1; 4). Значит, на этом интервале существует такое значение c, что

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = 1$$

Подставив это значение в вражение $f'(x)$ определим точки c.

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} \qquad \frac{4}{c^2} = 1;\ c = \pm 2$$

Это значение находится между значениями интервала (1;4) и равно $x = 2$. Значит, касательная проведена в точке с абсциссой $x = 2$ и она параллельна секущей, проходящей через точки (1; 1) и (4; 4). Что видно и по графику.



Теперь можно доказать теорему о возрастании и убывании функции.

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то

если $f'(x) > 0$, то на отрезке $[a; b]$ функция возрастет;

если $f'(x) < 0$, то на отрезке $[a; b]$ функция убывает; если $f'(x) = 0$,то функция постоянна на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Значения x_1 и x_2 при условии $x_1 < x_2$ являются некоторыми значениями взятых из отрезка $[a, b]$. Применим теорему Лагранжа к функции f на $[x_1; x_2]$. Тогда можно записать, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Здесь число c расположено между x_1 и x_2 : $x_1 < c < x_2$

Правая часть уравнения определена знаком $f'(c)$, так как уже $(x_2 - x_1)$ положительно.

Если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0; f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_1) < f(x_2)$, а это означает, что функция возрастает.

Если $f'(c) < 0$,то $f(x_2) - f(x_1) < 0; f(x_2) < f(x_1)$ или $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что функция убывает.

Если $f'(c) = 0$, то $f(x_2) - f(x_1) = 0; \quad f(x_1) = f(x_2)$, для произвольных x_1 и x_2, а это означает, что функция постоянна.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.9. а) а) Найдите, при каких значениях аргумента производная функции равна нулю.

b) Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

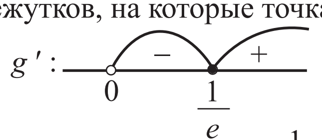
Решение: 8) а) Найдем производную функции $g(x) = x \cdot \ln x, x > 0$:

$$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$$g'(x) = 0; \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0; \ln x = -1;$$

точка $x = e^{-1}$ является точкой, в которой производная равна 0.

b) Знак производной можно найти, выбрав контрольные точки для каждого из промежутков, на которые точка $x = \frac{1}{e}$ делит область определения функции:



Значит,функция убывает при $x \in (0; \frac{1}{e}]$, и возрастает при $x \in [\frac{1}{e}; +\infty)$.

У.11. b) Найдите такие значения b, при которых функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ на всей действительной оси возрастает.

Решение: так как производная функции положительна, то функция возрастающая (для конечного количества точек она может быть равна нулю) Для любых x должно выполняться $f'(x) \geq 0$. Найдем производную функции: $f'(x) \geq 3x^2 + 2bx + 12$.

Для того, чтобы неравенство $3x^2+2bx+12 \geq 0$ было справедливо на всей действительной оси, дискриминант квадратного трехчлена справа не может быть больше нуля.

$D = 4b^2 - 144 \leq 0$; $b^2 - 36 \leq 0$. Т.е если $b \in [-6; 6]$, то заданная функция будет возрастать на всей действительной оси.

Урок 103-105. Критические точки и экстремумы функции.
3 часа. Учеб. стр. 197-204

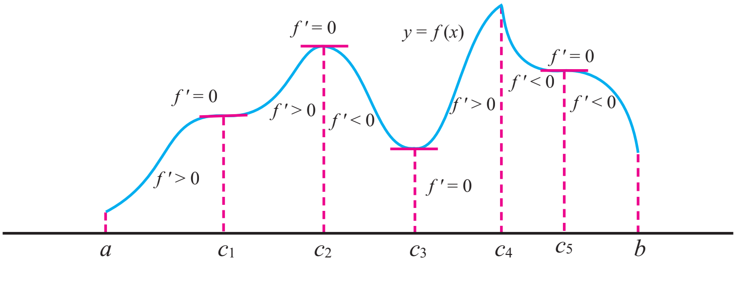
Содержательный стандарт.

2.2.1. Находит стационарные точки, при помощи производной и определяет являются или нет они точками экстремума.

Навыки учащегося.

- определяет точки экстремума при помощи производной;
- определяет по знаку производной являются ли точки экстремума точками максимума или минимума;
- решает задачи, на нахождение точек экстремума..

Определяет точки максимума и минимума по графику, отображающему несколько точек экстремума.



Учащиеся формирую мнение о значении функции в точках указанных на графике, значении производной, положении касательной в данных точках и угловом коэффициенте.

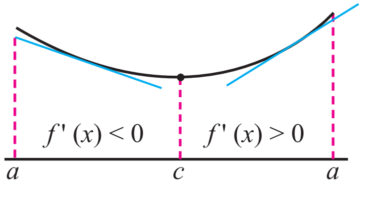
В критических точках производная функции равна нулю $f'(a) = 0$ или не существует.

Если производная в критической точке существует, то угловой коэффициент касательной равен нулю и является горизонтальной прямой, параллельной оси x; если производной нет, то в точке с данной абсциссой, касательной нет.

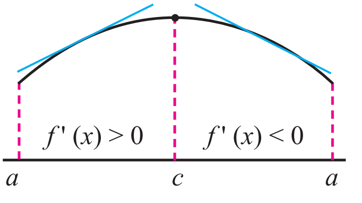
Определить является ли критическая точка точкой минимума или точкой максимума, можно проверив знак производной справа и слева от данной точки. Следующий график наглядно показывает экстремумы в зависимости от изменения знака.

Учащиеся должны понимать, что экстремумы могут быть и у не дифференцируемой функции и в точках, где нет производной. Это рекомендуется выполнять на графических примерах.

Максимумы и минимумы функции в зависимости от знака производной.



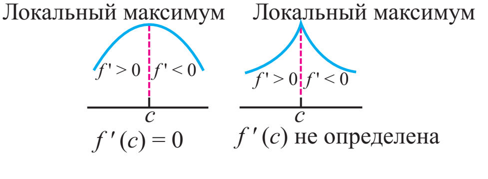
Точка c точка минимума.



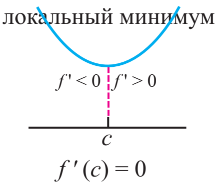
Точка c точка максимума.

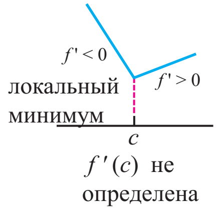
Точка c является критической точкой непрерывной функции f и для производной первого порядка является точкой максимума или минимума.

1. Если при переходе через точку c производная f' меняет свой знак с плюса на минус ($f' > 0$ для $x < c$ и $f' < 0$ для $x > c$), то значение функции f в точке c является максимумом функции.

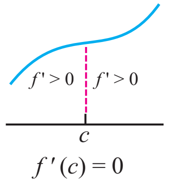


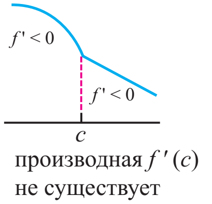
2. Если при переходе через точку c производная f' меняет свой знак с минуса на плюс ($f'< 0$ для $x < c$ и $f' > 0$ для $x > c$), то значение функции f в точке c является минимумом функции.



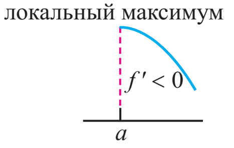


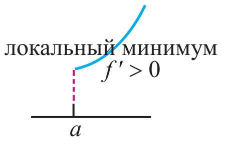
3. Если при переходе через точку c производная функции f' не меняет свой знак (f'имеет одинаковый знак с каждой стороны от точки c), то точка c не является точкой экстремума (ни максимумом, ни минимумом).



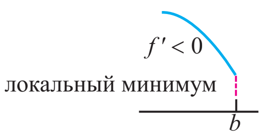


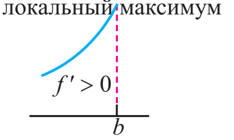
Точка a левая крайняя точка: если для $x > a$ имеем,что $f' < 0$, ($f' > 0$), то точка a является локальным максимумом (минимумом).





Точка b правая крайняя точка: если для $x < b$ имеем, что $f'< 0$, ($f' > 0$), то точка a является локальным минимумом.





После обсуждения учащимся рекомендуется выполнить задания, представленные в качестве примеров в учебнике, записав их в тетрадь, или в качестве домашнего задания. Исследования различных функций учащимися оформленные в виде презентации рекомендуется поместить в портфолио учащегося.

Выполняются задания на нахождение локальных экстремумов. Для этого надо выполнить следующее:

1. Стационарные точки;
2. Найти точки, где производная не существует;
3. Найти граничные точки.

Пример. Найдите НБЗ и НМЗ функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на промежутке $-2 \le x \le 6$.

Решение:

1. $f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x^2 - 9$

$f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x^2 - 9 = 0$; $3(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1$, $x = 3$

2.Так как функция f является функцией-многочлен, то она дифференцируема во всех точках числовой оси.

3. Граничные точки: -2 и 6.

В точках $x = -1$, $x = 3$, $x = -2$, $x = 6$, вычислим значение функции:

$f(-2) = 3$, $f(-1) = 10$, $f(3) = -22$, $f(6) = 59$. Среди них самое большое значение абсолютный максимум, самое маленькое - абсолютный минимум. Для функции на интервале $[-2; 6]$ абсолютный минимум $f(3) = -22$, абсолютный максимум $f(6) = 59$.

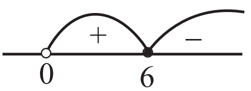
$$\min_{[-2;\,6]} f(x) = f(3) = -22, \quad \max_{[-2;\,6]} f(x) = f(6) = 59$$

У.19. В результате наблюдений было установлено, что изменение температуры больного Т (по Фаренгейту) в течении t дней определялось при помощи функции $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$; $0 \le t \le 12$. Найдите наибольшее и наименьшее значение данной функции и объясните соответствующую ситуацию.

Решение: исследуем изменение температуры больного с помощью производной: $T'(t) = -0{,}2 \cdot t + 1{,}2$.

Найдем критические точки из уравнения $T'(t) = 0$. $-0{,}2 \cdot t + 1{,}2 = 0$ и получим $t = 6$.

T′ :



Точка $t_{max} = 6$ точка экстремума, более точно точка максимума.

$T(0) = 98{,}6$ F; $T(12) = -0{,}1 \cdot 144 + 1{,}2 \cdot 12 + 98{,}6 = -14{,}4 + 14{,}4 + 98{,}6 = 98{,}6$ F

$T_{max} = T(6) = -0{,}1 \cdot 36 + 1{,}2 \cdot 6 + 98{,}6 = 3{,}6 + 98{,}6 = 102{,}2$ F

Значит, НБЗ температуры: $T_{max} = 102{,}2$ F;

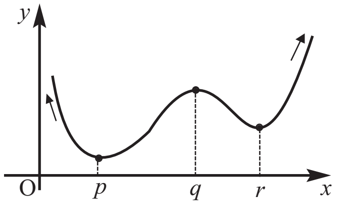
НМЗ: $T_{min} = 98{,}6$ F.

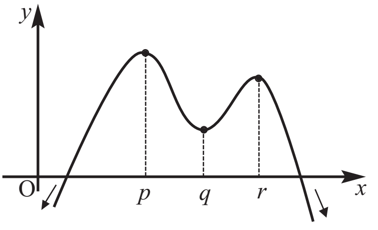
Т.е. вначале у больного была температура 98,6 F, которая повышалась в течении 6 дней, на 6-ой день температура достигла максимума: $T_{max} = 102{,}2$ F , после чего температура начала понижаться и в 12-ый день $t = 12$ температура снова стала равняться нормальной температуре. $T_{min} = 98{,}6$F

Рабочий лист N4

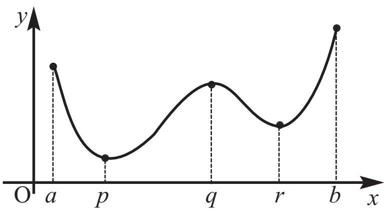
Имя _____ Фамилия_____ Дата__________

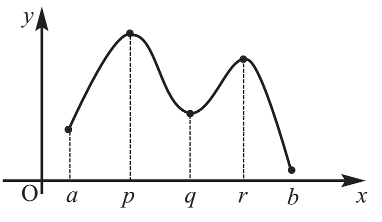
1) Запишите точки локального максимума и минимума непрерывной на всей числовой оси функции.





2) Запишите точки максимума и минимума функции на отрезке $[a;b]$.





3) Изобразите график какой-либо функции соответствующий следующему условию.

a) Точка (1; 1) локальный минимум, локальный максимум (3, 3);
b) Точки (1; 1) и (3, 3) локальные минимумы ;
c) Точки (1, 1) и (3, 3) локальные максимумы

4) Изобразите графики, соответствующие следующим условиям.

$f(2)=3, f'(2)=0$ и:
a) $f'(x)<0$ при $x<2$, $f'(x)<0$ при $x>2$.
b) $f'(x)<0$ при $x<2$, $f'(x)>0$ при $x>2$
c) $f'(x)<0$ при $x\neq 2$.
d) $f'(x)>0$ при $x\neq 2$

Рабочий лист N5

Имя _____ Фамилия_____ **Дата__________**

Найдите критические точки и определите какие из них являются точками максимума и минимума.

1) $f(x) = x^2 + 8x + 7$

2) $f(x) = 2x^2 - 12x - 7$

3) $f(x) = \sin(x)$

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

5) $f(x) = (x-1)^2(x-3)$

6) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 11)$

7) $f(x) = 2x^3 - 96x + 42$

8) $f(x) = 5x - 2$

9) $f(x) = 5x + \cos(2x + 1)$

Найдите наименьшее и наибольшее значение функции на заданном отрезке.

$f(x) = x^2 - 6x + 5$, $[-2;5]$

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$, $[0;2]$

$f(x) = 2 - x^3$, $[-2;1]$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $[1;3]$

$f(x) = x^3 - 3x + 5$, $[-2;1]$

Урок 106-109. Построение графиков функций с помощью производной. 4 часа. Учеб. стр.205-208

Содержательный стандарт.

2.2.2. Применяет дифференциальное исчисление при исследовании функций и построении их графиков.

Навыки учащегося:

- определяет основные свойства функции, область определения, множество значений, четность и нечетность;
- определяет точки пересечения с осью x;
- определяет критические точки функции;
- определяет локальный максимум и локальный минимум функции;
- строит график функции.

Два урока отводится на построение графика функции многочлена, два других урока на построение графика рациональной функции. Каждый первый урок предназначен для изучения, а второй - целесообразно отводить для выполнения заданий.

1-2-ый часы. Важное значение при построении графика функции многочлена имеют точки пересечения с осью x. Поэтому особое внимание отводится умению разлагать многочлен на множители. В связи с этим вспоминаем теорему о разложении на множители. Например, чтобы разложить многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ на множители надо использовать делители числа 18 (теорема о рациональных корнях). При $x = 1$ получим $f(1) = 0$, значит двухчлен $x - 1$ является множителем многочлена.

1. Разделим многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ на двучлен $x - 1$

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^4 - x^3\qquad\qquad\qquad\quad} & x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \\
-4x^3 + x^2\qquad\qquad & \\
-\ \underline{-4x^3 + 4x^2\qquad\qquad} & \\
-3x^2 + 21x\qquad & \\
-\ \underline{-3x^2 + 3x\qquad} & \\
18x - 18 & \\
-\ \underline{18x - 18} & \\
0 &
\end{array}$$

2. Теперь мы должны разложить многочлен $g(x) = x^3 - x^2 - 21x + 18$ на множители. При $x = 3$ имеем $g(3) = 0$ и $x - 3$ множитель многочлена $g(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 - 3x + 18 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^3 - 3x^2\qquad\qquad\quad} & x^2 - x - 6 \\
-x^2 - 3x\qquad & \\
-\ \underline{-x^2 + 3x\qquad} & \\
-6x + 18 & \\
-\ \underline{-6x + 18} & \\
0 &
\end{array}$$

2. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ поэтому разложение функции $f(x)$ на множители будет

$f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)^2$

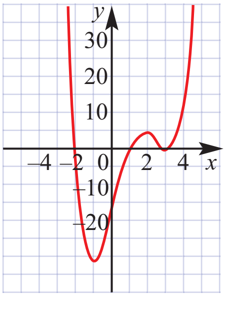


График пересекает ось x в точках $x = -2$, $x = -1$, так как $x = 3$ кратный корень, то в точке $(3;0)$ график график касается оси x и поворачивается. График этой функции представлен на рисунке. Учащиеся могут построить график выполняя другую последовательность шагов.

В примере ниже, вкратце, показаны шаги схематического построения графика функции. Эти шаги показывают моменты, характерные для функции в целом. Поэтому очень важно, примеры исследовать детально, обсуждая и записывая письменно.

Пример 2. Постройте график функции $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$.

Решение: область определенияı: множество всех действительных чисел

Найдем точки пересечения с осями координат.
Точки пересечения с осью Ox найдем из уравнения $x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x = 0$. $x(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = 0$, $x(x-4)^3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

Значит, точки пересечения с осью x: (0; 0), (4; 0).

Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Найдем критические точки.

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 4\cdot(x-1)\cdot(x-4)^2 = 0$
Критические точки: $x = 1$; $x = 4$
Найдем промежутки возрастания и убывания функии, а также экстремумы.

Интервал	$(-\infty; 1)$	$(1; 4)$	$(4; +\infty)$
Пробные точки	$x = -1$	$x = 2$	$x = 5$
Знак $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Возрастание-убывание	на $(-\infty;1]$ убывает	на интервале $[1; 4]$ возрастает	на интервале $[4; +\infty;)$ возрастает

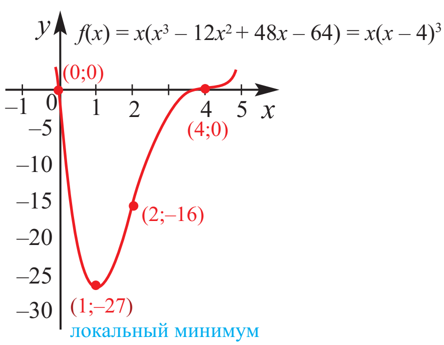
$x_{\min} = 1$ не изменяется

$f_{\min} = f(1) = -27$

При стремлении x к бесконечности: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

На основе полученных данных схематично изобразим график функции.

	$f(x)$	$f'(x)$	О графике
$-\infty < x < 1$		$-$	убывает
$x = 1$	-1	0	локальный минимум
$1 < x < 2$		$+$	возрастает
$x = 2$	-16	$+$	
$2 < x < 4$		$+$	возрастает
$x = 4$	0	0	
$4 < x < +\infty$		$+$	возрастает



3-й час. Построение графика рациональной функции рассмотрим на примере. Для этого целесообразно построить уроки, где находили асимптоту рациональной функции при помощи предела.

Пример 3. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Область определения. Область определения функции множество всех действительных чисел.

2. Нахождение асимптот. Вертикальной асимптоты нет, так знаменатель функции всегда положителен: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$

Для нахождения горизонтальной асимптоты найдем предел функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Значит, горизонтальной асимптотой функции является прямая $y = 0$.

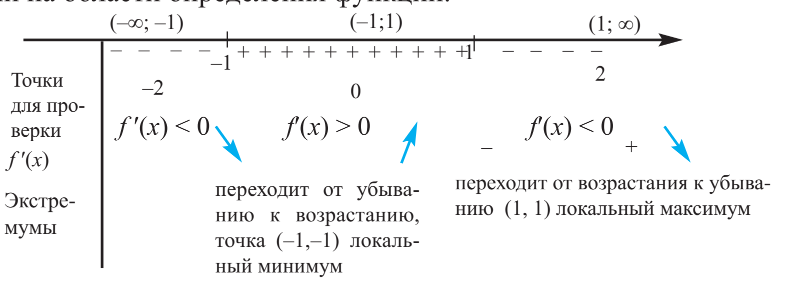
3. Критические точки. $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad 2-2x^2 = 0 \qquad x = \pm 1$$

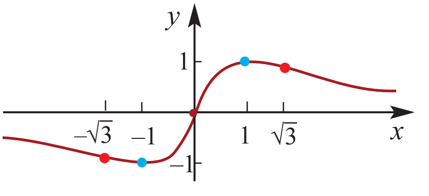
$f(-1) = -1$ $\qquad$ $f(1) = 1$ $\qquad$ Точки $(-1;-1)$ и $(1;1)$ являются критическими точками.

4. Промежутки возрастания и убывания функции. Определим возрастает или убывает функция на интервалах, образованных критическими точками на области определения функции.



5. Отметим точки максимума и минимума, на координатной плоскости и построим график.

Как видно по графику и при условии $x \to -\infty$ и при условии $x \to +\infty$ значения функции стремятся к нулю.



Урок 110-114. Задачи на экстремумы. Оптимизация. Обобщающие задания. 5 часов. Учеб. стр. 209-217

Содержательный стандарт.

2.2.1. Находит стационарные точки, при помощи производной и определяет являются ли они точками экстремума.

2.2.2. Применяет дифференциальное исчисление при исследовании функций и построении их графиков.

Навыки учащегося:

- определяет аналитический вид функции в соответствии с информацией о переменных представленных в задаче;
- решает задачи на оптимизации определяя максимальное и минимальное значение функции.

Мы научились строить графики при помощи производной. Однако, появившиеся в результате развития современных технологий и работающие на основе вычислительно - математического анализа виртуальные инструменты дают возможность построить более точные графики и поэтому такое построение графиков теряет практическую важность. Однако, в повседневной жизни большую роль играют задачи, экономического, промышленного, медицинского и т.д. направлений, в которых надо оптимизировать решение проблемы. Здесь, первостепенную важность имеет определение математической модели реальной жизненной ситуации включающую различные переменные. Поиск оптимального значения независимой переменной (при заданных условиях), которое гарантирует максимальное или минимальное значение зависимой переменной, одна из наиболее важной проблемой. Для нахождения максимального и минимального значения используют следующую стратегию.

Примером этого могут являться решение многих математических задач . Например, “Разность двух чисел равна 20. Выберите такие числа, для которых их произведение будет наибольшим.” Как видите, здесь независимая переменная задана зависимостью друг от друга двух чисел. Обозначим числа через x и y. Зная, что между ними существует такая зависимость: одно число больше другого на 20, зададим аналитически функцию произведения в виде $f(x) = x(x+20)$. Ниже представлен план решения задач на оптимизации. Учащимся рекомендуется записать этот план и решение задачи представлять в соответствии с данным планом.

После выполнения всех заданий из учебника учащиеся могут классифицировать задачи и создать презентацию по данной теме. Например, разделить задачи на типы - максимальный объем, минимальные затраты на материал, максимальная прибыль, максимальная площадь и т.д.

Применяя производную для решения задач ответьте на следующие вопросы. Они помогут решить задачи.

Вопрос 1: Может ли рисунок, соответствующий условию задачи помочь при решении?
Вопрос 2: Какой вопрос поставлен в условии?
Найдите точное решение на следующие вопросы.

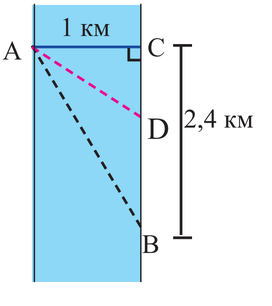
- Какие величины являются постоянными?
- Какие величины являются переменными? Есть ли какая-либо информация о значении данных величин? Могут ли они быть отрицательными, очень большими или очень маленькими?
- Какая связь известна между постоянными и переменными величинами? Выразите эту связь словесно.

Вопрос 3: Что нужно найти по условию задачи?
Вопрос 4: Как аналитически можно выразить зависимость между независимыми переменными при нахождении значений переменных? Чтобы записать эту зависимость в виде функции запишите все переменные связанные с данной переменной. В это время не забывайте о возможных значениях переменной.
Вопрос 5: В каком интервале дифференцируема функция?

- Найдите производную функции.
- Найдите критические точки функции.
- Проверьте удовлетворяют ли критические точки области определения функции.
- Определите являются ли критические точки точками максимума или точками минимума.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.10. (стр.213) **Минимальное время.** Расул должен на лодке из точки A на одном берегу канала, шириной 1 км, попасть в точку B на другом берегу. Для этого он может выбрать следующие варианты:
1) Переплыть канал на лодке из точки A в точку C, а потом пешком добраться до точки B.
2) Переплыть канал из точки A в точку B сразу.
3) Переплыть на лодке из точки A в некоторую точку D, расположенную между точками B и C, а потом из точки D пешком дойти до точки B.



Если Расул за час переплывает на лодке 3 км и проходит пешком 5 км, то какой путь он должен выбрать, чтобы, как можно быстрее, добраться до точки B?

Решение: пусть Расул сначала проплывет до определенной точки D на лодке, а затем доберется пешком до точки B. Обозначим CD = x. Тогда DB = 2,4 – x. Зададим функцию времени, которое Расул потратил от A до B. Согласно условию получим:

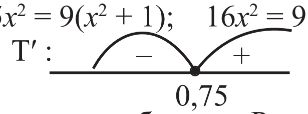
$$T(x) = \frac{AD}{3} + \frac{DB}{5} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{2{,}4-x}{5}\quad .$$

Отсюда

$$T'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 3\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt{x^2+1}}$$

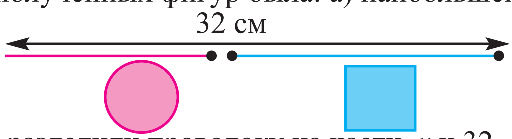
Решим уравнение $T'(x) = 0$. При $x > 0$

$5x - 3\sqrt{x^2+1} = 0$; $25x^2 = 9(x^2+1)$; $16x^2 = 9$; $4x = 3$; $x = 0{,}75$ км



Значит, чтобы преодолеть путь быстрее Расул должен из точки C проплыть на лодке 0,75 км до точки D, а затем пешком дойти до точки B.

У.11. Ученики из проволоки длиной 32 см должны смоделировать квадрат и круг. На отрезки какой длины они должны разрезать проволоку, чтобы сумма площадей полученных фигур была: a) наибольшей; b) наименьшей.



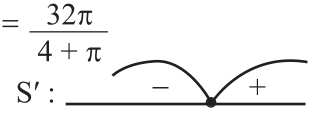
Решение: пусть ученики разделили проволоку на части x и $32 - x$. Тогда сумму площадей фигур можно смоделировать функцией:

$$S(x) = \pi r^2 + a^2 = \pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{32-x}{4}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{1}{16}\cdot(32-x)^2;\ 0 \le x \le 32$$

Найдем экстремумы данной функции.

$$S'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{8}(32 - x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - 4 = \frac{4+\pi}{8\pi}x - 4;$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{32\pi}{4+\pi}$$



$$x_0 = \frac{32\pi}{4+\pi}$$

При $0 < x < x_0$ получим $S'(x) < 0$, при $x > x_0$ получим $S'(x) > 0$ и точка $x_0 = \dfrac{32\pi}{4+\pi}$ является точкой минимума.

При $x = 0$ получим $S(0) = \dfrac{1}{16}32^2 = 64$,

при $x = 32$ получим $S(32) = \dfrac{1}{4\pi^2}32^2 = \dfrac{256}{\pi^2} < 26$.

Значит, при $x = 0$ функция $S(x)$ на отрезке [0;32] принимает НБЗ. А это значит, что ученики изготовив из данного куска проволоки квадрат получат максимальную площадь. В этом случае, отпадет необходимость делать круг.

Экономические задачи на оптимизацию

Для решений задач по оптимизациями для бизнеса и экономике еще раз вспомним изученные экономические термины и их математическое обозначение.

$C(x)$ - функция затрат на производство x единиц продукции (обслуживания).

$C'(x)$ - функция маржинальных затрат. Изменятся в зависимости от количества x.

$R(x)$ - функция маржинальной прибыли. Определяется как произведение проданных x единиц продукции и установленной на нее цены $R(x) = x\,p(x)$. Маржинальная прибыль $R(x)$ изменяется от количества xпроданных единиц продукции.

$P(x)$ - функция маржинального дохода. определяет разность между маржинальной прибылью и затратами $P(x)= R(x) - C(x)$. Функция маржинальной прибыли является производной функции маржинальных затрат.

Пример. Магазин за месяц продает 200 DVD плееров по цене 350 манат за штуку. Менеджер по маркетингу считает, что если цену DVD снизить на 10 манат, то за месяц их можно будет продать на 20 штук больше. Какую максимальную скидку на DVD плееры, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение: для нахождения прибыли надо найти сколько будет стоить DVD плеер, если он подешевеет на 10 манат. Если за месяц было продано x единиц DVD плееров, то месячный прирост будет $(x - 200)$. В этом случае изменится цена каждого проданного DVD плеера и она будет равна $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Цену одной единицы можно определить как:

$$p(x) = 350 - \frac{1}{2}(x - 200)= 450 - \frac{1}{2}x$$

Для x единиц DVD плееров прибыль от продажи можно выразить функцией:

$$R(x) = xp(x) = x\left(450 - \frac{1}{2}x\right) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

Производная функции $R(x)$: $R'(x) = \left(450x - \frac{1}{2}x^2\right)' = 450 - x$

Критические точки функции: $x = 450$

Функция $R(x)$ является квадратичной функцией изображающей параболой с ветвями вниз. Значит, если каждый плеер продать за $p(x)$, то максимальную прибыль можно получить от продажи 450 штук. Найдет цену одного DVD плеера ($x = 450$):

$$p(450) = 350 - \frac{1}{2}(450 - 200)= 350 - \frac{1}{2}\cdot 250 = 225$$

Значит, цена одной единицы DVD плееров может быть снижена до 225.

Критерии для суммативного оценивания по разделу 6

№	Критерии	Замечания об учащихся
1.	Определяет интервалы возрастания и убывания функции при помощи производной.	
2.	Определяет точки экстремума при помощи производной.	
3.	Определяет точкой максимума или минимума является точка, при помощи изменения знака производной первого порядка.	
4.	Строит график функции, при помощи производной.	
5.	Определяет аналитический вид функции для переменных по данным для задачи.	
6.	Решает задачи на оптимизацию, определяя максимальное или минимальное значение функции.	

Урок 115. Задания для суммативного оценивания по разделу 7.

1) Найдите производную функции.

a) $g(x) = \sqrt{x} + (x - 3)$ b) $f(x) = -5x(2x - 3)^4$

2) Определите интервалы возрастания и убывания функций.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140$

3) Найдите точки экстремума функции.

a) $f(x) = x^3 - 9x^2$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

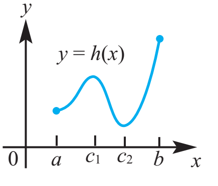
4) Найдите такое значение b, при котором функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ для всех значений x будет возрастающей на всей числовой оси.

5) Найдите экстремумы функции.
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

6) Найдите критические точки функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

7) Найдите и классифицируйте (точки максимума и точки минимума) критические точки функции $f(x) = 2x^3 - 24x + 5$.

8) По графику найдите локальные экстремумы и наибольшее и наименьшее значение функции.



9) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 4x - x^2 + 6$ на отрезке [0; 4].
a) 0   b)2   c)4   d) 6   e)10

10) Непрерывная функция убывает на интервале [2; 10], точка $x = 4$ является критической точкой и $f(4) = 2$. Определите истинное высказывание.

a) Значение $f(10)$ является наименьшим значением.
b) Точка (4; 2) является локальным максимумом.
c) $f'(4)$ не существует.
d) $f'(4) = 0$.

11) Найдите асимптоты функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$ и постройте ее графики.

12) Какая из следующих функций на области определения имеет только две точки экстремума?

a) $f(x) = |x - 2|$
b) $f(x) = x^3 - 6x + 5$
c) $f(x) = x^3 + 6x - 5$
d) $f(x) = \mathrm{tg}x$
e) $f(x) = x + \ln x$

13) Функция $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$ моделирует объем ($0 < x < 5$). Найдите точки экстремума функции. Представьте полученные значения соответствующей ситуацией.

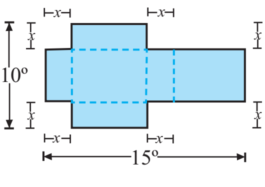
14) Функция f непрерывна на интервале [0; 3] и дифференцируема на интервале (0; 3). По таблице найдите:
a) критические точки;
b) наибольшее значение;
c) схематический график.

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	$+$	$+$	$-$
f'	$+$	$-$	$-$

15) Площадь прямоугольника равна 16 м^2 . Определите: a) наименьший периметр; b) размеры.

16) Функция $C(x) = x^3 - 10x^2 - 30x$ является функцией затрат на производство продукции. Здесь x показывает количество продукции (в 100 единицах). Можно ли найти такое значение количества x, чтобы затраты были минимальными. Если возможно, то найдите это количество.

17) Чтобы сделать коробку от куска картона с размерами 10 × 15 см, изображенного на рисунке, с двух сторон отрезали два конгруэнтных квадрата, а с других двух сторон - два конгруэнтных прямоугольника. Найдите такое значение x, чтобы объем коробки был максимальным.



18) Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ funksiyasını araşdırın və qrafikini qurun.

Таблица планирования по разделу 8

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб. стр.
2.2.3. Знает понятие первообразной функции и находит первообразную некоторых функций. 2.2.4. Знает понятие неопределенного интеграла, вычисляет интеграл функции при помощи таблицы интегралов элементарных функций и правил интегрирования. 2.2.5. Знает определение определенного интеграла и применяет формулу Ньютона-Лейбница. 2.2.6. При помощи определенного интеграла находит площадь криволинейной трапеции. 2.2.7. При помощи определенного интеграла находит объемы тел вращения. 2.2.8. Использует свойство четности- нечетности и периодичности функции для вычисления определенных интегралов. 4.1.1. Используя определенный интеграл находит площадь криволинейной трапеции и других фигур вращения. 4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.	116-118	Первообразная функция.Неопределенный интеграл. Интеграл постоянной и степенной функций.Свойства интегралов.	3	219-223
	119-122	Интеграл показательной функции. Интеграл функции $\frac{1}{x}$. Интеграл тригонометрических функций.	4	224-228
	123-125	Площадь ограниченная кривой. Определенный интеграл и площадь.	3	229-235
	126-129	Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства Определенного интеграла.	4	236-246
	130-132	Площадь фигуры, ограниченной кривыми.	3	247-251
	133-135	Определенный интеграл и объем фигур вращения	3	252-257
	136-137	Обобщающие задания	2	258-259
	138	Задания для суммативного оценивания по разделу	1	
		Всего	23	

Урок 116-118. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Интеграл постоянной и степенной функций.Свойства интегралов
3 часа. Учеб.стр. 219-228

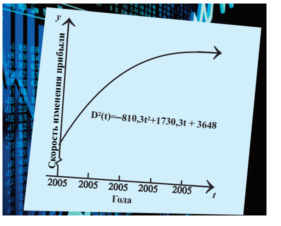
Содержательный стандарт.

2.2.3. Знает понятие первообразной функции и находит первообразную некоторых функций.

2.2.4. Знает понятие неопределенного интеграла, вычисляет интеграл функции при помощи таблицы интегралов элементарных функций и правил интегрирования.

Навыки учащегося:

- понимает, что интегрирование является обратным действием для дифференцирования;
- находит первообразную функции основываясь на производной;
- находит первообразную функции, используя правила интегрирования;
- решает задачи при помощи интегрирования и объясняет их на реальных примерах.



При помощи производной мы можем определить мгновенную скорость и мгновенное изменение. Например, скорость в зависимости от пройденного пути, изменение прибыли в конкретный момент, зная функцию прибыли, маржинальную прибыль, мгновенное изменение температуры и т.д. А сможем ли мы найти путь, зная как изменяется скорость в заданном интервале, найти общую прибыль, зная маржинальную прибыль, найти общий доход фирмы, зная маржинальный доход? Например, пусть, прибыль фирмы с 2005 года по 2009 год в тыс. манат была задана некоторой функцией на рисунке. Если D(0)=41,3 тыс. манат, то какую прибыль фирма имела в 2009 году? Ответить на этот вопрос можно используя действие обратное для дифференцирования - интегрирования.

1-ый час. Дается определение первообразной функции, объясняется запись неопределенного интеграла $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + C$. Эта запись показывает, что множество функций $\mathrm{F}(x) + c$ является первообразными для функции $f(x$. Или для x функции $f(x)$ неопределенным интегралом является множество функций $\mathrm{F}(x) + C$. Левая часть равенства выражает неопределенный интеграл.

Для формирования мнения о первообразной можно выполнить задания с простыми функциями - постоянной и функцией степени с натуральным показателем и.т.д.

Интегрирование:	**Проверка при помощи производной:**
$\int 8dx = 8x + \mathrm{C}$	$\dfrac{d}{dx}(8x + \mathrm{C}) = 8$
$\int 3x^2dx = x^3 + \mathrm{C}$	$\dfrac{d}{dx}(x^3 + \mathrm{C}) = 3x^2$
$\int e^xdx = e^x + \mathrm{C}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x + \mathrm{C}) = e^x$
$\int \dfrac{1}{x}dx = lnx + \mathrm{C}$	$\dfrac{d}{dx}(\ln x + \mathrm{C}) = \dfrac{1}{x} \quad x > 0$

2-ой час. Исследуются правила интегрирования.

Проследить то, что интегрирование является обратным действием для дифференцирования можно еще раз на примере дифференцирования и интегрирования степенной функции.

Например, можно проследить следующую закономерность.

$h(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	...	x^n
$h'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	...	nx^{n-1}

Если мы говорим, что интегрирование является обратным действием для нахождения производной, то получив производную степенной функции и подставив все шаги в обратном порядке, получим ли мы первообразную функцию? Посмотрим.

Процесс дифференцирования

Функция	1-ый шаг - умножаем на степень	2-ой шаг - из степени вычитаем 1	Результат
x^n	nx^n	nx^{n-1}	nx^{n-1}

Процесс интегрирования

Результат	2-ой шаг - делим на степень	1-ый шаг - прибавляем к степени 1	Функция
$\dfrac{nx^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^{n+1}	x^n

Мы можем записать общую формулу в виде

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{или} \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Еще более общий вид формулы можно записать при помощи алгебраических правил интегрирования.

$$\int ax^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{или} \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

До сведения учащихся доводится, что правило интегрирования степенной функции справедливо для всех n, отличных от -1. На следующем уроке, вернемся к случаю $n=-1$. Объясняются правила интегрирования и выполняются прикладные задания.

Правило интегрирования постоянной: $\int k dx = kx + \mathrm{C}$

Правило интегрирования степенной функции: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C},\ n \neq -1$

Расширенное правило интегрирования степенной функции: $\int a x^n dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C},\ n \neq -1$

Обобщенное правило интегрирования степенной функции: $\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + \mathrm{C}$, $n \neq -1$

3-ий час. Изучаются свойства и алгебраические правила интеграла.

$\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)\mathrm{d}x$

$\int[f(x)-g(x)]dx = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$

$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$

Понимание свойств интеграла учащиеся демонстрируют словесно, записывая математически и на примерах, которые можно оформить и представить в виде таблицы.

Свойства:	Примеры:
$\int h'(x)dx = h(x) + C$	$\int \frac{d}{dx}(x^2)dx = \int(2x)dx = x^2 + C$
$\frac{d}{dx}(\int h(x)dx) = h(x)$	$\frac{d}{dx}(\int(x^3)dx) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{4}x^4 + C) = x^3$
$\int kh(x)dx = k\int h(x)dx,\ k \neq 0$	$\int 12x^3dx = 12\int x^3dx = 12(\frac{1}{4}x^4 + C) = 3x^4 + C$
$\int h(x)dx \pm f(x)dx = \int h(x)dx \pm \int f(x)dx$	$\int(2x - 3x^2)dx = \int 2xdx - \int 3x^2dx = x^2 - x^3 + C$

Работа в группах

Группам даются различные функции $f(x)$ и $g(x)$. Члены групп должны доказать справедливость следующих предложений.

Например, $f(x) = ax^n$; $n \neq -1$ $\quad g(x) = bx^m$; $m \neq -1$

a) $\int[f(x) + (x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int[f(x) - (x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

c) $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0$

d) $\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx - \int g(x)dx$

e) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx},\ n - m \neq -1$

Проводятся обсуждения результатов. Значит, если правила интегрирования суммы и разности существуют, то правила интегрирования произведения и частного не существует. Для интегрирования произведения и частного надо используя алгебраические правила привести их к сумме и разности (многочлену) и уже затем применить правила интегрирования. Выполняются примеры и задания из учебника. Рекомендуется при изучении правил интегрирования результаты каждого этапа записывать в соответствующую таблицу.

Урок 119-122. Интеграл показательной функции и функции $\frac{1}{x}$. Интегралы тригонометрических функций. 4 часа. Учеб.стр. 224-228

Содержательный стандарт.

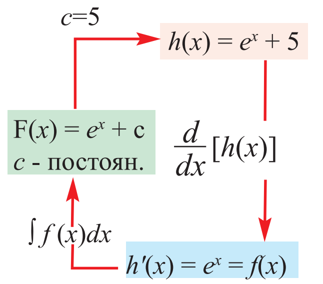
2.2.3. Знает понятие первообразной функции и находит первообразную некоторых функций.

2.2.4. Знает понятие неопределенного интеграла, вычисляет интеграл функции при помощи таблицы интегралов элементарных функций и правил интегрирования.

Навыки учащегося:

- применяет правило интегрирования показательной функции;
- применяет правило интегрирования функции $1/x$;
- применяет правило интегрирования тригонометрической функции;
- определяя постоянные интегрирования находит точное уравнение функции;
- решает задачи реальной ситуации при помощи интегрирования.

1-ый час. Для применения правил интегрирования вниманию учащихся представляется таблица функций, которые надо проинтегрировать. Еще раз учащимся напоминается, что действия интегрирования и дифференцирования являются обратными. Например, на следующем примере схематично представлена связь между дифференцированием и интегрированием. Данную схему учащиеся могут применить для еще ряда примеров.



Интегрирование функции

Правило интегрирования функции $1/x$ можно объяснить следующим образом.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Проинтегрируем обе части $\quad \int \frac{d}{dx}(\ln x)dx = \int \frac{1}{x}dx$

Учитывая, что $\int \frac{d}{dx}(\ln x)dx = \ln x + C$, по правилу интегрирования

получим $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C\ (x > 0)$.

Обобщая получим $\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0$

Нахождение альтернативных решений одной и той же проблемы играет важную роль для формирования умения устанавливать связь между различными событиями и развивает математическое мышление.

Надо быть внимательными при решении следующих заданий. Числа $\ln a$ и e являются постоянными. Например, интегрируя функцию $\frac{7}{x\ln 2}$ множитель 7/ln2 является постоянной и выносится за знак интеграла.

$$\int \frac{7}{x\ln 2}\,dx = \frac{7}{\ln 2}\ln x + C,\ x > 0$$

Или предложим учащимся проинтегрировать функцию $\int \left(\frac{e}{x} - \frac{x}{e}\right) dx$. Учащиеся находят первообразную для члена e/x как $e\ln x$, а функцию x/e рассматривают как степенную функцию и определяют, что первообразной данной функции является $x^2/2e$.

Чтобы ясно представить применение правил интегрирования рекомендуется записывать каждый, даже самый маленький, шаг интегрирования. Ниже это показано для нескольких примеров.

функция	эквивалентная запись	первообразная функция	упрощение
a. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{x}{2x^2} + C$
b. $\int \sqrt{x}dx$	$\int x^{1/2}dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}\,x^{3/2} + C$
c. $\int 2\sin x dx$	$2\int \sin x dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

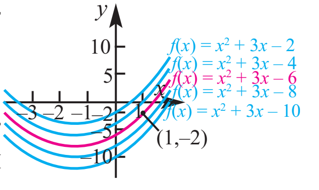
Общее правило для для тригонометрических функций можно найти при помощи производной и работая в группах. Результаты работы могут быть отображены на соответствующих примерах.

Функция: $f(x)$	Первообразная функция: $\int f(x)dx$	Пример:
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$	$\int \sin(5x + 2)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x + 2) + C$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$	$\int \cos(\frac{x}{4} - 1)dx = \int \cos(\frac{1}{4}x - 1)dx = = 4\sin(\frac{x}{4} - 1) + C$
$\sec^2(ax + b)$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{tg}(ax + b) + C$	$\int \sec^2(2x + 3)dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(2x + 3) + C$

2-ой час. Выполняются задания для получения конкретного уравнения уточняя значения C.

Условия задания могут быть заданы в следующем виде.
Найдите функцию, если $f'(x) = 2x + 3$ и $f(1) = -2$ или запишите первообразную функции $f(x) = 2x + 1$ проходящей через точку M(1;–2) или при условии, что F(1) = –2.
Учащиеся должны понимать, что общее решение интеграла является множеством соответствующих функций, отличающихся друг от друга на постоянную C. Однако в этом случае, требуется специальное решение. Решение можно представить как аналитически, так и графически.

Для $\int(2x+3)dx = x^2 + 3x + C$ можно уточнить постоянную C используя дополнительную информацию $f(1) = -2$.
$-2 = 1^2 + 3\cdot 1 + C$, $C = -6$. Значит, искомой функцией является функция $f(x) = x^2 + 3x - 6$. Среди всех первообразных функций данная функция на графике красного цвета.



3-ий час. Здесь решаются задачи реальной жизненной ситуации с использованием интегрирования. Внимание учащихся надо обратить на то, что если производная выражает мгновенную скорость на заданном интервале, то первообразная на том же интервале выражает общее изменение. Значение интеграла мы более подробно изучим при изучении определенного интеграла и определим значение прироста для заданного интервала. Для реальной жизненной ситуации при помощи интеграла можно найти как выросла скорость, прирост населения, скорость размножения и т.д. Задания из учебника выполняются выполняются для неопределенного интеграла и уточняются для координаты одной точки. Например, теперь уже аналитически уточняется в заданном значении переменной.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У. 34. Частица совершает прямолинейное движение со скоростью $v(t)$.
x_0 – координата точки в начальный момент t_0. Найдите координату $x(t)$, как функцию от времени:
a) $v(t) = 4$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ | b) $v(t) = 6$, $t_0 = 0$, $x_0 = 2$ | c) $v(t) = 2t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 3$

Решение: а) Известно, что $v(t) = x'(t)$, т.е. для функции $x(t)$ функция $v(t)$ является первообразной функцией. Тогда $x(t) = \int v(t)dt = v\int 4\,dt = 4t + C$
Зная, что $t_0 = 0$, и из условия, что $x_0 = 0$ найдем $4 \cdot 0 + C = 0$ или $C = 0$.
Значит, $x(t) = 4t$.

c) $v(t) = 2t,\ t_0 = 2,\ x_0 = 3$

$x(t) = \int v(t)dt = \int 2\,tdt = t^2 + C$

При $t_0 = 2$ из условия $x_0 = 3$ получим $x(2) = 4 + C = 3 \Rightarrow C = -1$

Значит, $x(t) = t^2 - 1$

У. 36. Размножение бактерий. Наблюдения показывают, что скорость размножения бактерий $P'(t)$ равна $\dfrac{dP}{dt} = 200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$.

Здесь t показывает время (час). Если в начале наблюдения количество бактерий равно 200000, то сколько их будет через 12 часов?

Решение: так как $\dfrac{dP}{dt} = 200\,e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$

$$P(t) = \int(200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t})\,dt = \frac{200e^{0,1t}}{0,1} - \frac{150}{0,03}\cdot e^{-0,03t} + C =$$

$$= 2000\cdot e^{0,1t} - 5000\cdot e^{-0,03t} + C$$

По условию при $t=0$ получим $P(0)=200000$.

Тогда, $P(0) = 2000 - 5000 + C = 200000$

Отсюда $C = 203000$ və $P(t) = 2000\cdot e^{0,1\cdot t} - 5000e^{-0,03\cdot t} + 203000$.

При $t = 12$ количество бактерий будет

$P(12) = 2000\cdot e^{1,2} - 5000e^{-0,36} + 203000 \approx 206152$.

У. 37. Экология. Скорость изменения поголовья оленей, установленная группой наблюдателей, описывается уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = 3t^3 + 2t \quad 0 \le t \le 5,$$

N показывает количество оленей, t показывает время (год).

Если в начале наблюдения поголовье состояло из 200 оленей, то сколько оленей будет в конце периода наблюдения?

Решение: скорость изменения поголовья оленей от времени найдем при помощи интеграла: $N(t) = \int(3t^3 + 2t)\,dt = 0,75t^4 + t^2 + C$. В начале наблюдения при $t = 0$ имеем $N(0) = 0,75\cdot 0^4 + 0^2 + C = 200$, т.е. $C = 200$. Тогда зависимость количества оленей от времени ожно смоделировать функцией $N(t) = 0,75t^4 + t^2 + 200$. В конце наблюдения, при $t = 5$ приблизительное количество оленей будет $N(5) = 0,75\cdot 5^4 + 5^2 + 200 \approx 693$.

Рабочий лист N 1

Имя _____ Фамилия_____ **Дата__________**

Вычислите неопределенный интеграл.

$\int (3x^2 + 2e^x)dx$ $\int e^x dx$ $\int \frac{7}{3} e^{3x-4} dx$

$\int \frac{e^{3x} + 2e^{3x} + 4}{e^x} dx$ $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} dx$ $\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$

$\int \frac{(x + 1)^2}{x} dx$ $\int \frac{4}{x\ln 3} dx$ $\int (1 - x)(1 + x + x^2)dx$

$\int \frac{4^x - 1}{2^x + 1} dx$

$\int (\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$ $\int \sin 5x \sin x\, dx$ $\int (\sin^2 x - \cos^2 x)\, dx$

$\int \sin x \cos x\, dx$ $\int \cos 3x \cos x\, dx$ $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$

$\int \sin^2 2x\, dx$ $\int \cos^2 2x\, dx$ $\int \sin^4 x\, dx$

$\int \cos^4 x\, dx$ $\int (1 + \mathrm{ctg}^2 3\theta)\, d\theta$ $\int (1 + \mathrm{tg}^2 3\theta)\, d\theta$

Урок 123-125. Площадь, ограниченная кривой. Определенный интеграл и площадь. 3 часа. Учеб.стр. 229-235

Содержательный стандарт.

2.2.5. Знает определение определенного интеграла и применяет формулу Ньютона-Лейбница.

2.2.6. При помощи определенного интеграла находит площадь криволинейной трапеции.

4.1.1. Используя определенный интеграл находит площадь криволинейной трапеции и других фигур вращения.

4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.

Навыки учащегося:

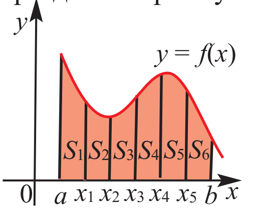
- представляет площадь ограниченную кривой на заданном интервале;
- находит площадь, ограниченную кривой на заданном интервале геометрически, разбивая ее на маленькие прямоугольники методом аппроксимации;
- объясняет значение площади, ограниченной кривой на заданном интервале

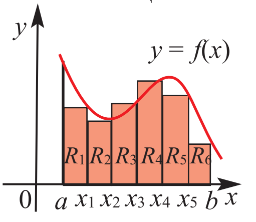
Классическим правилом для вычисления площади является метод разбиения на квадратные единицы, который мы начали изучать еще в начальной школе. Говоря о площади какой-либо фигуры имеется ввиду количество квадратных единиц, которые покрывают эту площадь. Позднее мы научились находить площади различных плоских фигур по геометрическим формулам. Эти геометрические фигуры образуются замкнутыми ломанными линиями.

А как найти площадь, ограниченную не отрезками прямых, а кривыми? Какой смысл имеет значение данной площади для физических событий и реальных ситуаций? Какое практическое применение имеет данная площадь? На все эти вопросы можно ответить при помощи действия, обратного нахождению мгновенной скорости при помощи дифференцирования.

Вместе с учащимися надо рассмотреть все различные подходя для нахождения площади. Площадь плоской фигуры можно найти эмпирически, разделив ее на маленькие квадраты. Этот подход можно применить и к площади ограниченной кривой. Площадь, ограниченную кривой можно приблизительно найти как сумму квадратов, на которую разбивается площадь или как сумму прямоугольников, расположенных под кривой.

Для нахождения площади под кривой функции $y = f(x)$на отрезке $[a;b]$ эту площадь можно разбить на прямоугольники шириной Δx. Сумма площадей данных прямоугольников по значению равна площади под кривой функции $f(x)$ на данном интервале. Если мы разделим прямоугольники на еще более маленькие полоски, то сумма площадей данных прямоугольников будет более точно выражать площадь фигуры под кривой. Ширина каждого прямоугольника $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, а высота $f(x_i)$.

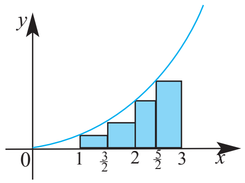




Также одной из главной целью данного урока является научиться находить точное значение площади, ограниченной кривой как предел суммы прямоугольников при стремлении их количества *n к бесконечности.* Т.е. мы сначала заменим площадь на предел, потом предел на определенный интеграл и маленькими шагами приблизимся к формуле Ньютона-Лейбница.

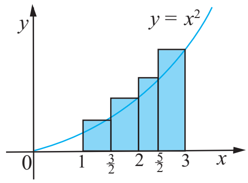
Рассмотрим следующую задачу. Высоту прямоугольника мы можем принять за высоту в левой точке, в правой точке или по середине ширины. Площадь же как сумму площадей маленьких трапеций. В каждом случае фактически надо оценить погрешность.

По крайней левой точке



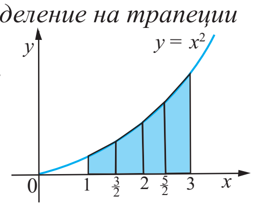
$$\text{Sahə} = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f(\frac{5}{2})$$
$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4})$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{54}{4}) = 6{,}75$$

По крайней правой точке



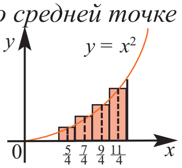
$$\text{Sahə} = \frac{1}{2}f(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f(\frac{5}{2}) + \frac{1}{2}f(3)$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9) = \frac{1}{2}(\frac{86}{4}) = 10{,}75$$

Разделение на трапеции



$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(1)+f(\frac{3}{2})] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(\frac{3}{2})+f(2)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(2)+f(\frac{5}{2})] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(\frac{5}{2})+f(3)]$$
$$= \frac{1}{2}[f(1) + 2f(\frac{3}{2}) + 2f(2) + 2f(\frac{5}{2}) + f(3)]$$
$$= \frac{1}{4}(1 + \frac{9}{2} + 8 + \frac{25}{2} + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{2}\right) = 8{,}75$$

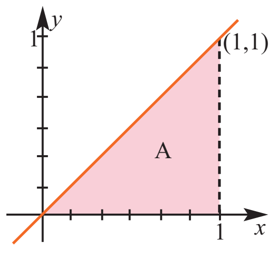
По средней точке



$$A = \frac{1}{2}f(\frac{1+\frac{3}{2}}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{\frac{3}{2}+2}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{2+\frac{5}{2}}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{\frac{5}{2}+3}{2})$$
$$= \frac{1}{2}((\frac{5}{4})^2 + (\frac{7}{4})^2 + (\frac{9}{4})^2 + (\frac{11}{4})^2)$$
$$= \frac{1}{32}(25 + 49 + 81 + 121) = \frac{276}{32}$$
$$= 8{,}625$$

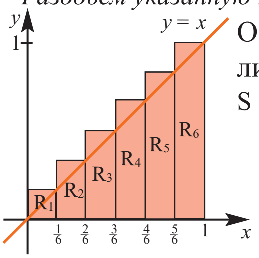
Учащиеся делают выводы. Среднее значение аппроксимации в левой и правой точке (6,75+10,75)/2 = 8,75 близко к полученному при помощи аппроксимации значению для метода трапеции. К этому значению близко и значение, полученное для средней точки прямоугольника. Значит, значение площади по средней точке и при помощи метода трапеции является более точным.

Зная точное значение площади под графиком функции $y = x$ на отрезке [0;1], найдем при помощи аппроксимации данную площадь разделив ее на прямоугольники. А затем при помощи предела, при n стремящимся к бесконечности,точное значение.



Основание прямоугольного треугольника равно 1, высота также равна 1, тогда $S = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$.

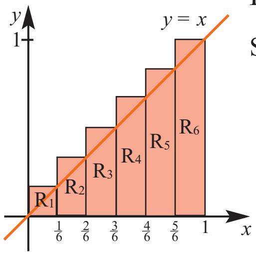
Разобьем указанную площадь на 6 одинаковых прямоугольников.



Основание требуемой площади $\frac{1}{6}$, высота $f(\frac{i}{6})$. Вычислим площадь как сумму площадей прямоугольников.

$$S = \frac{1}{6}f(\frac{1}{6}) + \frac{1}{6}f(\frac{2}{6}) + \frac{1}{6}f(\frac{3}{6}) + \frac{1}{6}f(\frac{4}{6}) + \frac{1}{6}f(\frac{5}{6}) + \frac{1}{6}f(\frac{6}{6}) =$$
$$= \frac{1}{6}(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}) = \frac{1}{36}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) =$$
$$= \frac{21}{36} = 0{,}583$$

Разобьем указанную площадь на 12 прямоугольников с равными основаниями.



Не выполняя всех предыдущих действий можно написать

$$S = \frac{1}{12}\,\frac{1}{12}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6+7+8+9+10+11+12) =$$

$$= \frac{1}{144}\;\frac{12\cdot 13}{2} = 0{,}542\,.$$

Как видно при увеличении количества прямоугольников разность между полученной площадью и реальным значением уменьшается.

Если разделить на n прямоугольников, с шириной $\frac{1}{n}$, то их количество будет равно n. Аналогично выразим площадь n прямоугольников через сумму.

$$S_n = \frac{1}{n}\,f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}\,f\left(\frac{3}{n}\right) + \ \ldots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{n}\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

При стремлении количества (n) прямоугольников к бесконечности $\frac{1}{n}$ стремится к нулю. Предел данной суммы выражает площадь.

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Обобщив все сказанное, получим формулу для нахождения площади, ограниченной любой функцией $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Разделим на n прямоугольников одинаковой ширины площадь, ограниченную положительной, непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Как видно по графику значение в каждой правой точке прямоугольника:

$x_1 = a + \Delta x$

$x_2 = a + 2\Delta x$

$x_3 = a + 3\Delta x$

. . .

$x_i = a + i\Delta x$

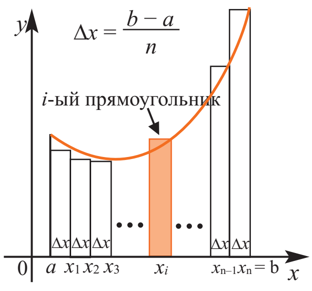
. . .

$x_n = a + (n-1)\,\Delta x$

Площадь каждого i-го прямоугольника

высота × ширина = $f(x_i)\Delta x$.

Найдя предел суммы данных прямоугольников, мы найдем реальную площадь.



Основание каждого прямоугольника выразим через $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Площадь ограниченная кривой, состоящая из площадей прямоугольников длиной Δx и шириной $f(x_i)$ при стремлении Δx- к нулю можно найти как предел суммы.

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad x_i = a + i\Delta x$$

Выполняются задания, где площадь находят при помощи аппроксимации увеличивая количество прямоугольников и переходя к пределу. Задания в учебнике предусмотрены для нахождения площади по формуле в основном на основе геометрических представлений. В методическом пособии для учителя для вычисления площади при помощи предела имеется много дополнительного материала. Эти задания могут выполняться в школах с углубленным изучением математики и с достаточным количеством часов. При решении данных заданий используют следующие тождества.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ сумма полных квадратов (квадратичные функции)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ сумма натуральных чисел (линейные функции)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$$ сумма полных кубов (кубические функции)

Урок 126-127. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. 2 часа. Учеб.стр. 236-241

Содержательный стандарт.

2.2.5. Знает определение определенного интеграла и применяет формулу Ньютона-Лейбница.

2.2.6. При помощи определенного интеграла находит площадь криволинейной трапеции.

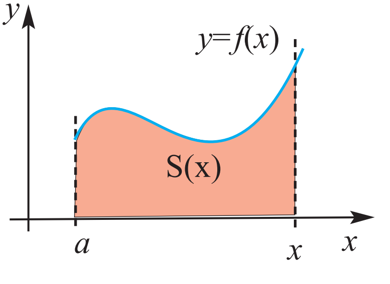
4.1.1. Используя определенный интеграл находит площадь криволинейной трапеции и других фигур вращения.

4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.

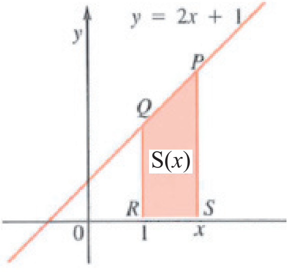
Навыки учащегося:

- объясняет формулу Ньютона - Лейбница для определенного интеграла при помощи основной теоремы математического анализа (kalkulusun);
- Применяет основную теорему kalkulusun.

Площадь, ограниченную функцией $f(x)$ на отрезке можно найти при помощи функции определяющей площадь. Для заданного a, площадь, ограниченная функцией, зависящей от x на отрезке $[a; x]$ будет: $S(x)$ Здесь необходимым условием является $S(a) = 0$. Рассмотрим на примерах как найти функцию площади.



Пример. начертите график функции $y = 2x + 1$ и закрасьте ограниченную площадь на интервале от 1 до некоторого значения x.



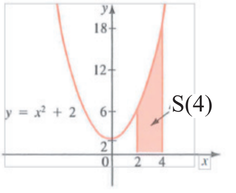
a) Определите функцию, выражающую данную площадь.

b) Сравните уравнения производной данной функции и заданной функцией.

Решение: a) Понятно, что закрашенная площадь является площадью трапеции PQRS. Параллельные стороны трапеции $RQ = f(1) = 3$, $RS = f(x) = 2x + 1$, а высота $RS = x - 1$. Тогда площадь трапеции PQRS будет:

$$S(x) = \frac{1}{2}(x-1)(3 + 2x + 1) = x^2 + x + 2 .$$

b) $S'(x) = (x^2 + x + 2)' = 2x + 1 = f(x)$



Пример. найдите площадь ограниченную кривой функции $y = x^2 + 2$ на отрезке [2;4].

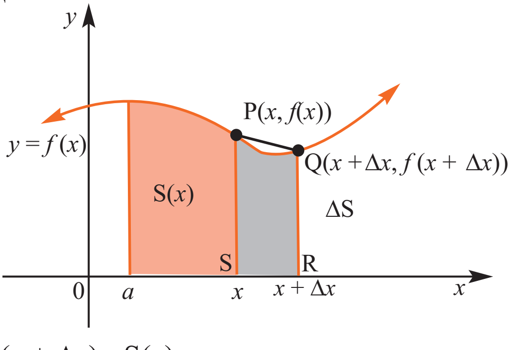
Решение: данная площадь изображена на рисунке и обозначена через S(4). Известна производная функции площади, т.е. $S'(x) = x^2 + 2$. Найдя интеграл данной функции можно найти саму функцию S(x): $S(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + C$. Учитывая условие $S(2) = 0$, найдем постоянную C.

$$\frac{1}{3}2^3 + 2 \cdot 2 + C = 0,\ C = -\frac{20}{3},\ S(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{20}{3}$$

Тогда площадь: $S(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - \frac{20}{3} = \frac{68}{3}$

Решение данной задачи приводит к следующим выводам: производная функции площади и функция данной кривой равны и справедливо следующее равенство $S'(x) = f(x)$. Этот вывод дает возможность решать прикладные задачи. Так, интегрируя заданную функцию, мы можем найти функцию площади.

То, что функция производной, ограниченной кривой и заданная функция равны,т.е. $S'(x) = f(x)$, можно доказать при помощи следующих умозаключений. Пусть, функция площади $S(x)$ непрерывная и положительная функция $f(x)$, охватывающая площадь от a до x.



Площадь, ограниченная кривой определяется точками на кривой $P(x;f(x))$. Выберем на кривой точку $Q(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ очень близко расположенную в точке P. В это время изменению координаты x до Δx соответствует изменение площади ΔS. По определению производной:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}; \qquad S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$

разность S $(x + \Delta x) - S(x)$ приблизительно равна площади трапеции PQRS. Если взять очень маленькое значение Δx, *то значение разности* еще больше приближается к значению площади трапеции PQRS.

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x) + f(x + \Delta x)]$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x\,[f(x) + f(x + \Delta x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x) + f(x + \Delta x)]}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

Таким образом, получим $S'(x) = f(x)$.

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

После чего в учебнике дается графическое объяснение формулы Ньютона -Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Учащиеся должны уметь представлять площадь, ограниченную кривой как увеличение соответствующей величины.

Например, рассмотрим следующий пример. Скорость изменения объема воды в баке определена как $r(t) = 200 - 10t$ *л*/мин. Здесь положительные значения определяют количество воды вливающейся в бак. Найдите объем жидкости, вливающейся за первые 10 минут. Учащимся задается вопрос. При помощи какого интервала можно найти изменение объема воды? Количество воды, вливающейся в бак за 10 минут можно вычислить так:

$$\int_0^{10} (200 - 10t)dt$$

Интеграл вычисляется при помощи свойств интеграла.

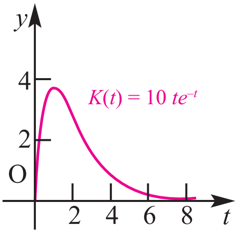
Значение данного интеграла определяет количество воды в баке или полный объем? Значение интеграла показывает увеличение количества воды,однако он показывает актуальный объем воды в баке, вливающейся за 30 минут, если бак был пустым.

Оценивание. Надо провести формативное оценивание умения представлять площадь как определенный интеграл, объяснять примеры, представленные во время дебатов.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.9. Использование электрической энергии. Зависимость потребления энергии (киловатт) небольшого предприятия за день от времени t можно смоделировать функцией $K(t) = 10\,te^{-t}$. Здесь t - время, в часах, принадлежит промежутку [0;24].

a) Сколько киловатт-часов электрической энергии использует предприятие в первые T часов (от $t = 0$ до $t = T$)?
b) Сколько киловатт-часов электрической энергии было использовано в первые 4 часа?
Указание: Функция $y = -10\,(t + 1)e^{-t}$ является одной из первообразных для функции $K(t) = 10\,te^{-t}$.



Решение: a) Зависимость потребления энергии (киловатт) небольшого предприятия за день от времени t смоделирована функцией $K(t) = 10\,te^{-t}$. Временной промежуток [0; T].

$$E(T) = \int_0^T K(t)dt = \int_0^T 10te^{-t}dt = \underbrace{-10(t+1)e^{-t}\Big|_0^T}_{\text{по указанию}} = 10\cdot[1-(T+1)e^{-T}] \text{ киловатт-час}$$

используют электрической энергии.

b) При T = 4 получим
$E(4) = 10(1-5e^{-4}) \approx 9$ киловатт-час.

У.14 Изменение количества. Скорость изменения количества пользователей платежных терминалов в зависимости от времени можно смоделировать функцией $F(t) = 12 + 6\cdot\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Здесь t показывает количество минут. Найдите количество людей, воспользовавшихся платежными терминалами за 60 минут, округлив полученный результат до целого.

Решение: обозначим количество людей, пользующихся услугами автомата в течении промежутка времени t через $N(t)$, тогда должно выполняться отношение $N'(t) = F(t)$.
Отсюда: $N(t) = \int_0^t F(t)\,dt$.
Так как $N(0) = 0$, то за t =60 мин. количество пользователей автомата будет:
$$N(60) = \int_0^{60} \left[12+\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]dt = \left(12t + \pi\cdot\sin\left(\frac{t}{\pi}\right)\right)\Big|_0^{60} = 12\cdot 60 + \pi\cdot\sin\left(\frac{60}{\pi}\right) \approx 721.$$

Урок 128-129. Свойство определенного интеграла. 2 часа. Учеб.стр. 242-246

Содержательный стандарт.

2.2.5. Знает определение определенного интеграла и применяет формулу Ньютона-Лейбница.

2.2.6. При помощи определенного интеграла находит площадь криволинейной трапеции.

2.2.8. Использует свойство четности- нечетности и периодичности функции для вычисления определенных интегралов.

4.1.1. Используя определенный интеграл находит площадь криволинейной трапеции и других фигур вращения.

4.1.2. Находит погрешность, сравнивая результаты полученные при измерениях и вычислениях.

Навыки учащегося:

- представляет свойства определенного интеграла словесно и графически;
- применяет свойства определенного интеграла.

1-ый час. Свойства определенного интеграла объясняются на примерах. Рекомендуется представлять свойства площади для каждого определенного интеграла графически. В это время надо уделять внимание умению записывать границы интегрирования и задавать аналитический вид функции.

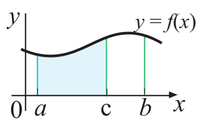
Свойства определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

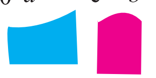
$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_b^a C\, f(x)dx = C\int_b^a f(x)dx$$



Свойства определенного интеграла объясняются словесно и графически.

Например, свойство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ учащиеся могут представить как показано на рисунке. $S = \int_a^b f(x)dx;$ $\quad S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



$$\int_a^c \; + \; \int_c^b$$

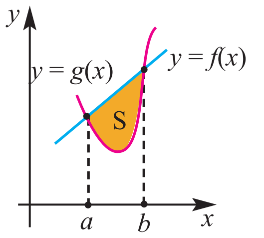
Или, свойство $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\qquad \int_0^2 x^2dx + \int_2^0 x^2dx$

и определенный интеграл можно показать при помощи других свойств.

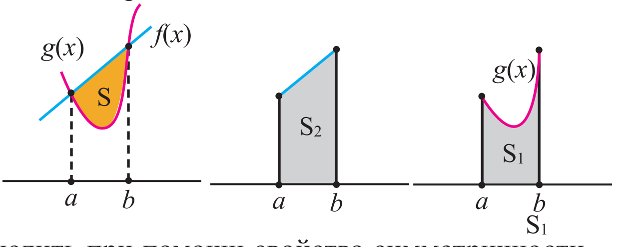
$$\int_0^2 x^2dx + \int_2^0 x^2dx = \int_0^0 x^2dx = 0 \text{ значит, } \int_0^2 x^2dx = -\int_2^0 x^2dx$$

по предыдущему свойству

2-ой час. На этом уроке будет изучено как можно найти площадь ограниченную двумя графиками при помощи разности интегралов и показать это свойство графически. Пусть требуется найти площадь ограниченную функциями $y = f(x)$ и $y = g(x)$. В этом случае, требуемая площадь равна разности площади S_1, ограниченной функцией $y = f(x)$ на заданной отрезке $[a; b]$ и площади S_2, ограниченной функцией $y = g(x)$ на том же отрезке.



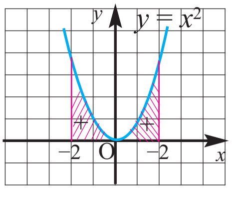
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$



Также интеграл можно вычислить при помощи свойства симметричности для четной или нечетной функции.

Например, изобразите графически площадь, соответствующую интегралу $\int_{-2}^{2} x^2dx$

Зная, что $\int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}$ найдите площадь изображенную на рисунке.



Площадь функции, согласно свойству симметричности:

$$\text{Площадь} = \int_{-2}^{2} x^2dx = 2\int_0^2 x^2dx = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

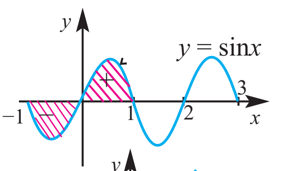
Ученики определяют и графически изображают соответствие свойств четности и нечетности функции и следующим свойствам интеграла.

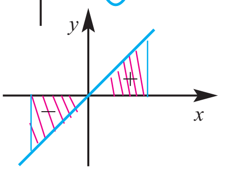
Четная функция симметрична относительно оси y и выражается следующим свойством интеграла.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Нечетная функция симметрична относительно начала координат и справедливо следующее свойство. Это можно увидеть на графиках функций $y = sinx$ и $y = x$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$





Урок 130-132. Площадь фигуры, ограниченной кривыми. 3 часа. Учеб.стр.247-251

Содержательный стандарт.

4.1.1. Используя определенный интеграл находит площадь криволинейной трапеции и других фигур вращения.

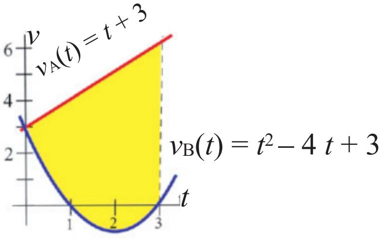
4.1.2. При помощи измерений и вычислений выполняет точные и приближенные вычисления.

Навыки учащегося:

- вычисляет площадь, ограниченную двумя прямыми, при помощи определенного интеграла;
- связывает площадь, ограниченную двумя кривыми и вычисляемую при помощи определенного интеграла, с реальной ситуацией.

До настоящего времени мы вычисляли площадь, заключенную между осью x на заданном интервале, при помощи определенного интеграла. При помощи определенного интеграла можно вычислить площадь, заключенную между двумя графиками. Значение данной площади зависит от увеличения физической величины реальной ситуации (сила, работа, энергия, масса, плотность, расстояние и.т.д.), а также экономические задачи - себестоимость, прибыль и др. прирост. Для примера, рассмотрим задачу на движение.

Две частицы начали движение из одной точки в одно и тоже время. Скорость частицы А $v_A(t) = t + 3$, скорость частицы В $v_B(t) = t^2 - 4t + 3$. Какое расстояние будет между частицами через 3 секунды?

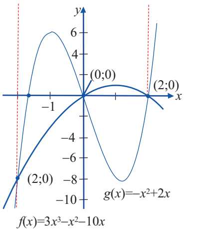


Решение: сначала исследуем заданные величины при помощи производной и интеграла. Нам дана функция скорости. Скорость, производная функции пройденного пути. Значит, интегрируя функцию скорости можно найти изменение расстояния. Интеграл функций $v_A(t) = t + 3$ и $v_B(t) = t^2 - 4t + 3$ на интервале [0; 3] дает возможность найти расстояние, пройденное за 3 секунды. Здесь площадь между графиками при $v_B(t) \leq v_A(t)$ равна разности интегралов данных функций. Через 3 секунды расстояние между частицами будет равно площади между двумя графиками. Эту площадь можно вычислить при помощи определенного интеграла на интервале [0;3].

$$\int_0^3((t+3) - (t^2 - 4t + 3))dt = \int_0^3 (5t - t^2)dt = \left.\frac{5}{2}t^2 - \frac{t^3}{3}\right|_0^3 = 13{,}5 \text{ (м)}$$

Находим площадь между двумя кривыми находящимися в различных состояниях.

1. Кривые не пересекаются.
2. Кривые имеют две точки пересечения.



Графики двух функций могут иметь несколько точек пересечения, как показано на рисунке. Например, графики функций sin$x$ и cos$x$ или графики функций многочленов высших степеней. Однако нами будут рассмотрены простые случаи.

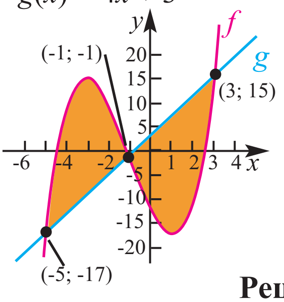
Задания в учебнике рассматриваются совместно с учащимися. Рекомендуется выполнять из письменно.

? Решение некоторых заданий из учебника:

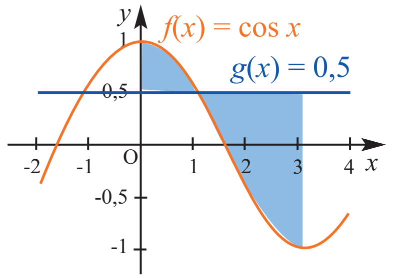
У.3. Вычислите закрашенную площадь.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$

$g(x) = 4x + 3$



$f(x) = \cos x$ və $y = 0,5,\ \ 0 \le x \le \pi$



Решение:

Абсциссы точек пересечения показаны на графике. Их можно найти из уравнения $x^3 + 3x^2 - 9x - 12 = 4x + 3$.

Запишем уравнение в виде $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$. Если данное уравнение имеет рациональный корень, то он является целым числом и находится среди делителей свободного члена (15).

Делители числа 15: ± 1, ± 3, ± 5, ± 15

Убедимся, что число $x = 3$ является корнем уравнения при помощи схемы Горнера.

	1	3	−13	−15
3	1	6	5	0

Значит можно записать следующее разложение на множители.

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x-3)(x^2 + 6x + 5) = (x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+5)$.

Абсциссы точек пересечения $x = -5$, $x = -1$, $x = 3$. Из графика видно, что площадь, которую мы ищем, равна сумме площадей на промежутках $[-5; -1]$ и $[-1; 3]$. На промежутке $[-5; -1]$ справедливо следующее $f(x) \ge g(x)$, на промежутке $[-1; 3]$ - $g(x) \ge f(x)$.

Тогда искомая площадь равна:

$$S = \int_{-5}^{-1}(f(x) - g(x))dx + \int_{-1}^{3}(g(x) - f(x))dx = \int_{-5}^{-1}(x^3 + 3x^2 - 13x - 15)dx +$$

$$+\int_{-1}^{3}(-x^3 - 3x^2 + 13x + 15)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 15x\right)\Bigg|_{-5}^{-1} + \left(-\frac{x^3}{4} - x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 15x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{1}{4} - 1 - \frac{13}{2} + 15 - \frac{625}{4} + 125 + \frac{325}{2} - 75 + \left(-\frac{81}{4} - 27 + \frac{117}{2} - 45 + \frac{1}{4}\right.$$

$$\left. -1 - \frac{13}{2} + 15\right) = 64 + 64 = 128 \text{ (кв. ед).}$$

b) $f(x) = \cos x \quad g(x) = 0{,}5 \quad 0 \le x \le \pi$

Решение:

Найдем точки пересечения графиков. Корень уравнения $\cos x = 0{,}5$ на отрезке $[0; \pi]$ равен $x = \frac{\pi}{3}$. Из графика видно, что площадь, которую мы ищем равна сумме площадей на промежутках $[0; \frac{\pi}{3}]$ и $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

На промежутке $[0; \frac{\pi}{3}]$ имеем $f(x) \ge g(x)$, на промежутке $[\frac{\pi}{3}; \pi]$ имеем $g(x) \ge f(x)$.

$$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx = \left(\sin x - \frac{1}{2}x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} + \left(\frac{1}{2}x - \sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \sin 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\pi - \sin\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \text{ (кв. ед).}$$

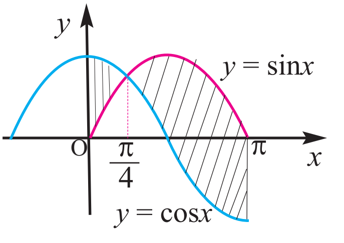
У.6. Постройте графики функций на заданном отрезке и найдите ограниченную ими площадь.

d) $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на промежутке $x = [0; \pi]$

Решение:

Точки пересечения графиков находятся из уравнения $\sin x = \cos x$. Раздели обе стороны на $\cos x$. ($\cos x \ne 0$)

Уравнение $\mathrm{tg}\,x = 1$ на отрезке $[0; \pi]$ имеет единственный корень: $x = \frac{\pi}{4}$



$$S = \int_{0}^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x - \cos x)dx =$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_{0}^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi} = \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ кв.ед.}$$

У.8. Найдите площадь треугольника, вершины которого находятся в точках (2;−3), (4; 6), (6;1) на координатой плоскости,при помощи определенного интеграла.

Решение:

Построим треугольник с вершинами в заданных точках на координатной плоскости. В точке B(4; 6) вертикальная прямая делит площадь треугольника на 2 части: S_1 и S_2. Сначала запишем уравнения прямых, содержащих вершины треугольника.

Для прямой AB : $\dfrac{y+3}{x-2}=\dfrac{6+3}{4-2}$ $\qquad y = 4{,}5\,x-12$

Для прямой AC : $\dfrac{y+3}{x-2}=\dfrac{6+3}{4-2}$ $\qquad y = x-5$

Для прямой BC : $\dfrac{y-6}{x-4}=\dfrac{1-6}{6-4}$; $y=-2{,}5x+16$

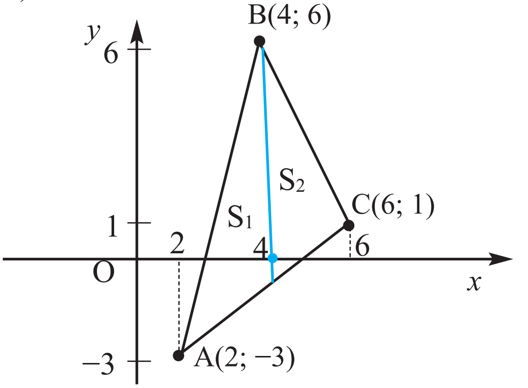
Площадь, которую мы ищем равна сумме площадей S_1 на промежутке [2; 4] и S_2 на промежутке [4; 6]. На промежутке [2; 4] прямая AB выше прямой A, на промежутке [2; 4] прямая BC находится выше прямой AC.

$$S=\int_2^4(4{,}5x-12-x+5)dx+\int_4^6(-2{,}5x+16-x+5)dx=\int_2^4(3{,}5x-7)dx+$$

$$+\int_4^6(-3{,}5x+21)dx=\left(\frac{7}{4}x^2-7x\right)\Big|_2^4+\left(-\frac{7}{4}x^2+21x\right)\Big|_4^6=\frac{7}{4}\cdot16-7\cdot4-\frac{7}{4}\cdot4+$$

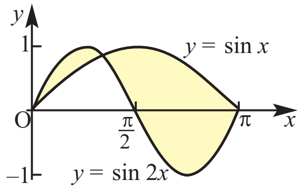
$$+7\cdot2-\frac{7}{4}\cdot36+21\cdot6+\frac{7}{4}\cdot16-21\cdot4=28-28-7+14-63+126+28-$$

$-84=7+7=14$ (ед. площади)



У.9. Найдите закрашенную площадь.

а)



Решение: сначала найдем абсциссы точек пересечения функций $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$ на промежутке $[0; \pi]$:

$\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x\,(1-2\cos x) = 0$

1) $\sin x = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = \pi$

2) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{3}$, $\quad x \in [0; \pi]$

Закрашенная площадь состоит из двух частей. По формуле Ньютона - Лейбница эта площадь равна:

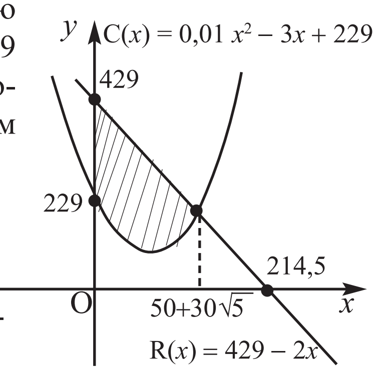
$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right)\Big|_0^{\pi} + \left(-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0\right) + \left(-\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 2\pi\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

D.11. Затраты на производство телефонов в количестве x единиц выражается функцией $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, доход - функцией $R(x) = 429 - 2x$. Найдите площадь, образованную графиками этих функций и прямой $x = 0$. Объясните значение данной площади на примере реальной ситуации.



Решение: найдем площадь, ограниченную графиками функции $C(x) = 0{,}01\,x^2 - 3x + 229$ $R(x) = 429 - 2x$ и прямой $x=0$. Данная площадь закрашена на рисунке. Сначала найдем абсциссы точек пересечения.

$0{,}01\,x^2 - 3x + 229 = 429 - 2x$

$0{,}01x^2 - x - 200 = 0$

$x^2 - 100x - 20\,000 = 0$

$x = 50 \pm\sqrt{4500}$ Отсюда из условия $x > 0$ получим $x \approx 50 + 67 \approx 117$

Учитывая, что на заданном промежутке $R(x) \geq C(x)$, запишем:

$$S \approx \int_0^{117}(429 - 2x - 0{,}01x^2 + 3x - 229)dx = \int_0^{117}(200 + x - 0{,}01x^2)dx$$

$$200x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{300}\Big|_0^{117} = 200\cdot 117 + \frac{117^2}{2} - \frac{117^3}{300} = 23400 + 6844{,}5 -$$

$$-5338{,}71 = 24905{,}79$$

Данная площадь выражает численное значение прибыли фирмы, при выпуске приблизительно 117 телефонов.

Урок 133-135. Определенный интеграл и объем фигур вращения.
3 часа. Учеб. стр 252-257.

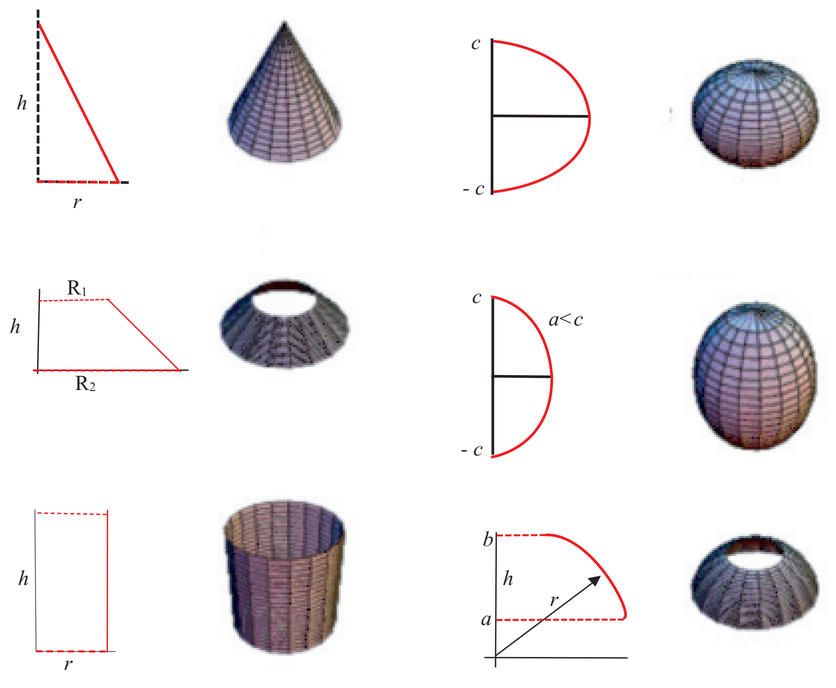
Содержательный стандарт.

2.2.7. При помощи определенного интеграла находит объемы тел вращения.

Навыки учащегося:

- схематично изображает трехмерную фигуру, полученную вращением плоскости, ограниченной кривой;
- находит объем трехмерной фигуры, полученной вращением.

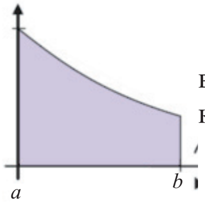
Демонстрируя следующие рисунки, можно показать, как при вращении какой-либо плоской фигуры вокруг одной из осей можно получить эскизы различных фигур, которые мы встречаем в повседневной жизни.



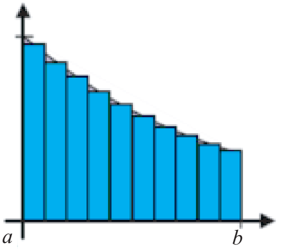
Однако мы будем изучать пространственные фигуры, полученные вращением вокруг оси x и научимся находить их объемы (в некоторых случаях площади поверхностей).

1. Для этого сначала изобразим поэскиз, поверхности, которая принимает участие во вращении и отметим ось вращения.

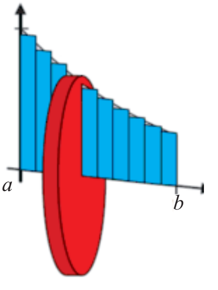
2. Чтобы представить себе тело, полученное при вращении на отрезке $[a; b]$ разделим плоскость на прямоугольники, основания (ширина) которых равны Δx, а высоты $f(x_i)$.



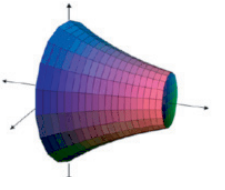
вращение вокруг оси x



Если вращать вокруг оси x один из прямоугольников шириной Δx и высотой $f(c_i)$, то мы получим один тонкий цилиндрический диск. Каждый прямоугольник образует цилиндрический диск, соответствующий своему размеру. Объем данного диска радиуса $f(c_i)$ будет равен $V = \pi r^2 h = \pi(f(c_i))^2\Delta x$. При помощи аппроксимации данных прямоугольников, можно найти объем, полученный вращением части плоскости. Бесконечно уменьшая ширину Δx прямоугольников, увеличивая их количество можно достигнуть хороших результатов аппроксимации. Наконец при условии $\Delta x \to 0$ и $n \to \infty$ предел



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(f(c_i))^2\Delta x$$



показывает объем. Выразим данный предел через интеграл

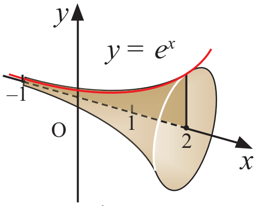
$$V(x) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

При вращении всех прямоугольников вокруг оси x за полный оборот получается фигура, как показано на рисунке.

Таким образом, объем фигуры, полученной вращением площади, ограниченной некоторой функцией $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ можно найти по формуле:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

У.1. На рисунке представлены пространственные тела, полученные вращением вокруг оси x плоской фигуры, ограниченной графиком функции на заданном отрезке. Найдите объемы этих тел.



d) $f(x) = e^x$, $[-1; 2]$

Решение: при вращении части плоскости, ограниченной функцией $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, вокруг оси x получаем тело, объем которого можно найти по формуле:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi\int_{-1}^{2} e^{2x}dx = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_{-1}^{2} = \frac{\pi}{2}\,(e^4 - e^{-2}) \approx 85{,}55 \text{ (ед.объема)}$$

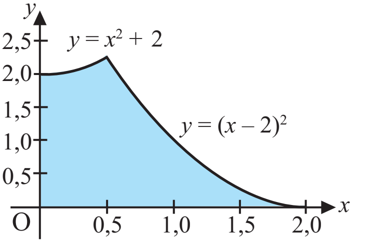
У.3. Найдите объемы тел, полученной вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной заданными линиями.

5) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

Решение: искомый объем равен:

$$V = \pi\int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_1^4 x dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \pi(8 - \frac{1}{2}) = 7{,}5\pi \text{ (ед.объема)}$$

У.6. а)Найдите объем тела, полученной вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = (x - 2)^2$, вокруг оси x. **Указание**. Вычислите объем как сумму двух интегралов на промежутках [0;0,5] и [0,5;2].



Решение: сначала найдем абсциссы точек пересечения графиков.

$x^2 + 2 = (x-2)^2$

$x^2 + 2 = x^2 - 4x + 4$

$x = 0{,}5$

Искомый объем равен сумме объемов на промежутках [0; 0,5] и [0,5; 2]:

$$V = V_1 + V_2 = \pi\int^{0,5} (x^2 + 2)^2 dx + \pi\int_{0,5}^{2} (x-2)^4 dx = \pi\int_0^{0,5}(x^4 + 4x^2 + 4)dx + \pi\int_{0,5}^{2}(x-2)^4 dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^{0,5} + \pi\cdot\frac{(x-2)^5}{5}\Big|_{0,5}^{2} = \pi\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{5}\cdot\frac{243}{8} =$$

$$= 3\frac{83}{120}\pi$$

Урок 136-137. Обобщающие задания. 2 часа. Учеб.стр. 258-259

При изучении определенного интеграла каждый раз надо обращать внимание на следующие моменты. .

1. Функция $f(x)$ выражает изменяемое на промежутке множество. Примерами такого множества могут служить:

a) тело с переменной плотностью (не гомогенное металлическая палочка, доска и т.д.) (изменение массы при изменении линейных размеров)

b) путь пройденный с переменной скоростью

c) объем тела с переменными границами

d) любая функция $f(x)$

Когда мы давали определение интеграла мы выполняли задания, в которых при помощи аппроксимаций реальных значений и приближении аппроксимации к предельному значению, находили предел, соответствующий условию. Это очень важно уметь при помощи аппроксимации находить значение интеграла, так как учащиеся при этом развивают навыки исследования, умение сопоставлять математические понятия и рассуждать.

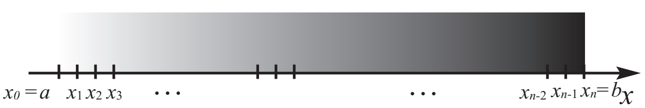
Еще раз напоминается, что дифференциал и интеграл выражают динамические данные. Как видно в любой ситуации мы используем слово изменение. Значит, интегральная величина не имеет обще актуальное значения, а показывает прирост на заданном интервале (в частном случае эти значения могут быть равны).

В учебнике для различных ситуаций записаны шаги решения и дано пояснение. Покажем на прикладных задачах при помощи определенного интеграла массу при переменной плотности на примере "пройденного пути".

Все эти прямоугольники, совершая полный поворот вокруг оси x образуют фигуру, как показано на рисунке.

Сначала, лист металла поместим на оси x и отметим плотность $f(x)$ в точке x.

Разделим лист на n равных частей, при помощи разрезов.



На каждом отрезке $[x_i ; x_{i-1}]$, $i = 1,2,..., n$ плотность приблизительно одинакова и ее можно принять как постоянную. Тогда, масса какой-либо части i будет равна $f(c_i)$ $(x_i - x_{i-1})$, здесь точка c_i взята из интервала $(x_i - x_{i-1})$. Тогда масса листа приближается к сумме $\sum_{i=1}^{n} f(c_i))\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i))\,\Delta x$

При условии $n \to \infty$ предел заданной суммы $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ показывает реальную массу листа. Этот предел на отрезке $[a; b]$ можно заменить определенным интегралом. Значит,

масса $= \int\limits_a^b f(x)dx$ здесь $f(x)$ плотность в точке x

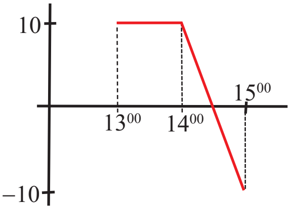
Значит, для любой функции $f(x)$ определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ в различных ситуациях показывает прирост на заданном интервале. Например, интеграл $\int\limits_0^3 x^2 dx$ показывает площадь, ограниченную кривой $y = x^2$ на отрезке [0; 3]. Эта площадь может быть равна:

- массе тела значение плотности которого равно x^2 (плотность измеряется в грамм,см);
- расстоянию, пройденному телу со скоростью t^2 (км/час) и т.д.

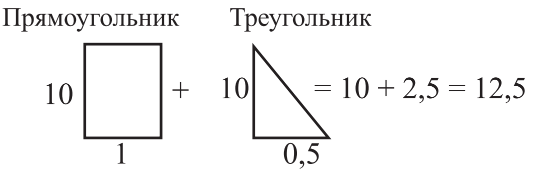
Значит, интеграл плотности выражает массу, интеграл площади - объем , интеграл силы - работу и.т.д. Также в зависимости от ситуации в задачах данные величины могут изменяться.

Особое значение имеет умение сопоставлять при нахождении площади геометрически. Например, изучим решение задачи, представленной в учебнике.

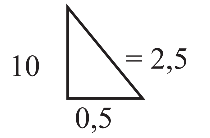
Пример. На графике показано движение насекомого. В 13:00 насекомое начало движение из точки $x = 12$. На графике показано как двигалось насекомое с 13:00 до 15:00. Свяжите пройденный насекомым путь и перемещение с определенным интегралом $\int\limits_1^3 v(t)dt$



Решение: из графика видно, что до 14:30 знак скорости положителен, т.е. движение в течении (1,5 час) происходит в в положительном направлении, с 14:30 до 15:00 направление меняется, движение происходит в отрицательном направлении. Путь, пройденный насекомым (удаление от начальной точки) до 14:30 равен:



Путь, пройденный с 14:30 до 15:00 (направление изменилось и движение в сторону начала), равен площади треугольника.



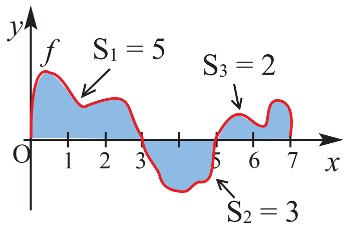
Путь, пройденный насекомым: $S = \int_1^{2,5} v(t)dt + \int_{2,5}^{3} |v(t)|dt = 12,5 + 2,5 = 15$ см

Перемещение, которое совершило насекомое от начальной точки выражает интеграл $\int_1^3 v(t)dt$. Его значение $\int_1^3 v(t)dt = 12,5 - 2,5 = 10$ см показывает перемещение.

? Решение некоторых заданй из учебника:

У.7. Вычислите, используя график функции f.

a) $\int_0^3 f(x)\,dx$ b) $\int_0^5 f(x)\,dx$ c) $\int_3^7 f(x)\,dx$



Решение: согласно геометрическому смыслу определенного интеграла и используя свойства интеграла, получим:

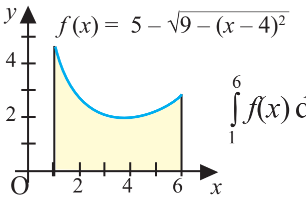
a) $\int_0^3 (f(x))dx = S_1 = 5;$

b) $\int_0^5 (f(x))dx = \int_0^3 (f(x))dx + \int_3^5 (f(x))dx = S_1 - S_2 = \int (f(x))dx = 5 - 3 = 2;$

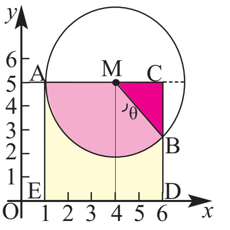
c) $\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^5 (f(x))dx + \int_5^7 (f(x))dx = -S_2 + S_3 = -3 + 2 = -1.$

У.8. Основываясь на геометрическом смысле, вычислите заданный интеграл.

b) $\int_1^6 f(x)\,dx$



Решение: значение интеграла численно равно площади закрашенной фигуры на рисунке. Запишем равенство $y = 5 - \sqrt{9-(x-4)^2}$ в виде $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 3^2$. Отсюда ясно видно, что график функции $f(x)$ на рисунке является дугой AB с центром в точке (4;5) и радиусом $r = 3$. Требуемая площадь равна разности площадей квадрата ACDE со стороной 5 и суммы площадей сектора AMB и треугольника MCB: $S = S_{ACDE} - (S_{AMB} + S_{MCB})$



Из ΔMCB $\cos\angle\theta = \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{2}{3}$ отсюда $\angle\theta \approx 48°$. Тогда

знаая, что $\angle AMB \approx 132°$ получим $S_{AMB} \approx \pi \cdot 3^2 \cdot \dfrac{132}{360} \approx 3{,}3\,\pi$. Так как $S_{MCB} = \dfrac{1}{2} \cdot MC \cdot MB \cdot \sin\theta = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 48° \approx 2{,}23$, то

$S \approx 25 - (3{,}3\,\pi + 2{,}23) = 22{,}77 - 3{,}3\,\pi \approx 12{,}4$. Таким образом, $\int\limits_1^6 f(x)\,dx \approx 12{,}4$.

В данной задаче можно рассмотреть различные случаи изменения границ интегрирования. Например, данную площадь можно вычислить как площадь фигуры ограниченную кривой на отрезке [1;4] (вычитая из площади прямоугольника 1/4 площади круга) или на отрезке [1;7] (вычитая из площади прямоугольника площадь полукруга).

У.12. Тело массой m движется вдоль оси Ox под действием силы направленной вдоль данной оси. Зная, что в момент $t = t_0$ скорость равна v_0, а координата равна x_0, запишите формулу $x(t)$. Здесь $F(t)$ измеряется в Ньютонах, t - в секундах, v - в $\dfrac{m}{san}$, m - в кг.

a) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$

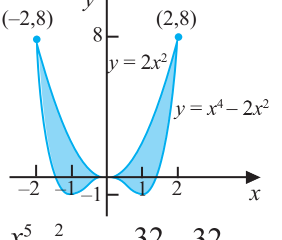
b) $F(t) = 14\sin\pi$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$

Решение: а) из формулы $ma = F$ получим: $m = 3$, $a = x''(t)$, учитывая, что $F(t) = 6 - 9t$, можно записать отношение: $3 \cdot x''(t) = 6 - 9t$ или $x''(t) = 2 - 3t$. Интегрируя последнее равенство получим: $x'(t) = 2t - 3t^2/2 + C$, т.е. $v(t) = 2t - 3t^2/2 + C$. По условию, так как $v(1) = 4$, то $4 = 2 - 3/2 + C$, $C = 3{,}5$. Теперь $x'(t) = 2t - 3t^2/2 + 3{,}5$. Отсюда получим $x(t) = t^2 - 0{,}5t^3 + 3{,}5t + C_1$. По условию, так как $x(1) = -5$, то $-5 = 1^2 - 0{,}5\cdot 1^3 + 3{,}5\cdot 1 + C_1$, $C_1 = -9$.

Таким образом, $x(t) = t^2 - 0{,}5t^3 + 3{,}5t - 9$

Ниже представлены задания, которые можно выполнить перед оцениванием.

Пример. По данным графика, найдем площадь закрашенной части, заключенной между кривыми.



Решение: Каждая из функций $y = x^2$ и $y = x^4 - 2x^2$ является четной и на рисунке видно, что закрашенная фигура симметрична относительно оси y. Поэтому, можно найти площадь фигуры справа от оси y и полученный результат умножить на 2.

$$S = 2\cdot\int\limits_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)dx = 2\cdot\int\limits_0^2 (4x^2 - x^4)dx = 2\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2\cdot\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) =$$
$$= 2\cdot 32\cdot\frac{2}{15} = \frac{128}{5}$$

Таблица критериев оценивания по разделу 8.

№	Критерии	Заметки об учащихся
1.	Находит первообразную применяя правила интегрирования.	
2.	Уточняет аналитическую запись, определяя постоянные интегрирования	
3.	Решает задачи реальной жизненной ситуации при помощи интегрирования	
4.	Представляет площадь, охватывающую кривой на заданном отрезке.	
5.	Находит геометрически площадь ограниченную кривой на заданном отрезке, разбивая ее на маленькие прямоугольники (методом аппроксимации).	
6.	Находит значение определенного интеграла как значение площади, ограниченную кривой на заданном отрезке.	
7.	Применяет формулу Ньютона-Лейбница при вычислениях.	
8.	Применяет свойства определенного интеграла	
9.	Находит площадь между двумя кривыми при помощи определенного интеграла.	
10.	С помощью определенного интеграла находит объем тел вращения	
11.	Решает задачи реальной жизненной ситуации и простые физические задачи при помощи определенного интеграла.	

Урок 138. Задания для суммативного оценивания по разделу 8.

1) Запишите первообразную для функции $f(x) = 5x^2 - 2x^{-2} - 1$.

2) Зная, что $f'(x) = 4x^5 - 2x^3 + x - 2$ и $f(0) = 3$ запишите уравнение для функции $f(x)$.

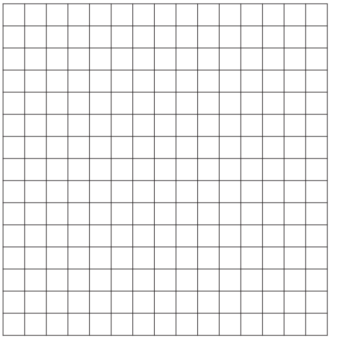
3) Вычислите интеграл $\int_1^2 (3x^3 - 2x^{-1} + x)\mathrm{d}x$

4) Какая из функций показывает площадь, ограниченную функцией $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ на отрезкее [–5; 5]?

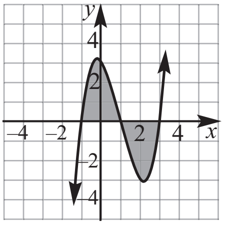
a) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = \frac{500}{3}$ b) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = \frac{3}{500}$ c) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = 3$ d) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = 500$

5) Постройте график функции $y = -x + 1$ на отрезке [0; 1] и ограниченную осью x. Найдите площадь, ограниченную данными линиями:
a) Геометрически, используя график функции.

b) Алгебраически, при помощи правил интегрирования.



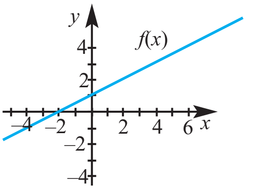
6) Найдите площадь закрашенной части, ограниченную графиком $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$



7) Определите функцию $f(x)$ по следующим условиям.

$f'(x) = ax^2 + bx \qquad f'(1) = 5 \qquad f''(1) = 11 \qquad \int_1^2 f(x)dx = 11$

8) Найдите каждый из следующих определенных интегралов функции $f(x)$ по графику.



a) $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ b) $\int_{-4}^{0} f(x)dx$ c) $\int_{2}^{4} f(x)dx$ d) $\int_{-2}^{0} |f(x)|dx$

9) Функция f определена как $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ x-1, & x \geq 3 \end{cases}$.Найдите значение функции $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$?

a) 2 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

10) Зная, что $\int_{1}^{10} f(x)dx$ и $\int_{10}^{3} f(x)dx = 7$, найдите значение интеграла $\int_{1}^{3} f(x)dx$

a) –3 b) 0 c) 3 d) 10 e) 11

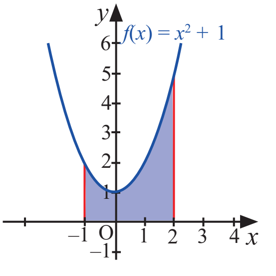
11) Найдите интегралы.

$\int x^2\sqrt{x}dx$ $\int(5\cos x + 4\sin x)dx$ $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

12) Зная, что $\int_{0}^{a} (2ax - x^2)dx = 18$ найдите значение a.

13) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4x$.

14) Найдите закрашенную площадь.



15) Вычислите.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3x + \cos x)\, dx$$

16) Найдите объем тела, полученной вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, относительно оси абсцисс.

Таблица планирования по разделу 9

Стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб. стр.
5.1. Собирает, систематизирует, обрабатывает и представляет статистические данные. 5.1.1.Вычисляет дисперсию измерений и среднеквадратичное отклонение. 5.2. Понимает и применяет основные понятия теории вероятности. 5.2.1. Применяет закон нормального распределения при вычислении вероятности событий.	139-140	Статистические показатели.	2	261-265
	141-142	Формы распределения данных. Нормальное распределение.	2	266-269
	143-144	Диаграмма “ящик с усами”	2	270-273
	145-148	Случайные события и вероятность. Формулы для вычисления вероятности.	4	274-276
	149	Обобщающие задания	1	280-281
	150	Задания для суммативного оценивания по разделу	1	
	Всего		12	

Урок 139-140. Статистические показатели. 2 часа.
Учеб.стр. 261-265
Содержательный стандарт
5.1.1.Вычисляет дисперсию измерений и среднеквадратичное отклонение
Навыки учащегося:
■ Представляет характеристики распределения статистических показателей мер центральных тенденций - среднего арифметического, медианы, моды и наибольшую разность;
■ Вычисляет отклонение, дисперсию и стандартное отклонение для набора данных, представленных в различных формах;
■ Объясняет на примерах понимание связи между значением стандартного отклонения и распределением значений данных;
Проводится беседа о том, почему важно изучать статистику.

Так как статистика является одним из разделов математики, то она также изучается в школе. Статистика является областью науки, при помощи которой можно изучить события, происходящие в мире, и давать прогнозы, как происходящие события могут повлиять на будущее. Иногда, мы какое-либо направление можем выразит одним словом.

Например, экономика - деньги; психология - почему мы так думаем и что мы думаем?; биология - жизнь; антропология - кто; история - что, где, когда; философия - для чего; финансы - сколько манат? Каким словом можно охарактеризовать статистику? Статистика изучает изменения, происходящие в каждой области. Ежедневно люди совершают покупки в различных on-line магазинах и берут деньги в разных банках. Откуда они знают вас и где вы живете? Они заносят данные о вас в свою базу. Для каждой фирмы этот процесс очень важен. Переменные, составляющие базу данных позволяют при помощи запросов могут ответить на многие вопросы.

На вопросы, которые рассматриваются в различных областях науки, может дать ответ статистика. Статистика выполняет функцию сбора, систематизации, обработки и представления результатов данных.

До настоящего времени мы систематизировали и группировали информацию при помощи таблиц или графиков. Теперь мы научимся систематизировать данные при помощи квартилей и представлять из в виде диаграммы “ящик с усами”.

Обработку информации можно проводить с помощью различных статистических показателей. До настоящего времени мы использовали в этих целях среднее арифметическое, медиану, моду, наибольшую разность ряда.Теперь мы изучим показатели, характеризующие распределение информации.

Это отклонение, дисперсия и стандартное отклонение. Почему для распределения информации возникла необходимость других показателей, отличных от перечисленных выше. Понятно, что для распределения данных среди всех перечисленных показателей нам более всего подходит наибольшая разность. Однако, эта разность дает возможность изучить из всех элементов только два, не дает нам представления об интервале плотности информации или насколько данные удалены друг от друга или данные выходящие за пределы интервала.

Все это можно возможно при помощи отклонения, дисперсии и стандартного отклонения. Так для того, чтобы создать представление о том как данные расположены с совокупности важно знать, на сколько они удалены от среднего арифметического, а также на сколько плотно расположены различные данные вокруг среднего арифметического. Для этого мы будем использовать такие статистические показатели как среднее арифметическое и стандартное отклонение.

среднее арифметическое: $x=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$,

дисперсия: $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$

стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Этапы вычисления стандартного отклонения проводится и обобщаются коллективно, на примерах, представленных в учебнике. Изучаются пр помощи каких кнопок на калькуляторе можно провести данные вычисления. Вычисление стандартного отклонения и дисперсии являются достаточно трудоемким процессом, поэтому рекомендуется использовать калькулятор. А для этого важно уметь вводить данные при помощи соответствующих кнопок.

Рекомендации для выполнения некоторых заданий.

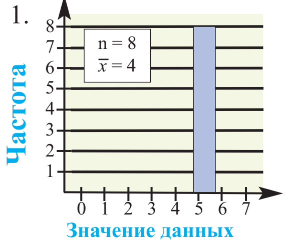
Желательно отработать механизм вычисления дисперсии и стандартного отклонения для набора из 3-4 элементов. Например, пусть имеются следующие данные 1, 3 и 8.

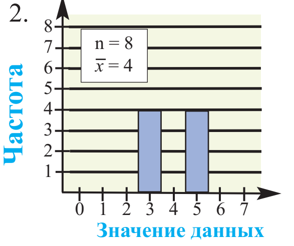
Среднее арифметическое: (1 +3 + 8)/3 = 4 ,

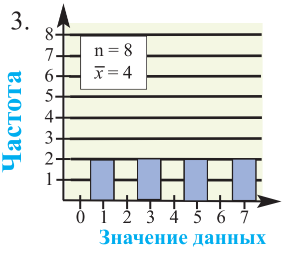
Дисперсия: $\sigma^2 = \dfrac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + 8-4)^2}{3} = \dfrac{9+1+16}{3} \approx 8{,}67$

Стандартное отклонение: $\sigma \approx 2{,}94$

У.1. Сначала определим, приблизительно, стандартное отклонение совокупности при помощи графика, не проводя письменных вычислений,







a) Значение всех данных равно 4. Среднее арифметическое равно 4. Значит каждое отклонение равно нулю. Значит дисперсия и стандартное отклонение также равны нулю $\sigma = 0$.

b) Для указанных данных выборка равна или 3 или 5. Так как значение среднего арифметического равно 4, то значения отклонений равны ±1. Значит, sстандартное отклонение равно 1. Если провести вычисления, то можно убедиться, что стандартное отклонение равно 1.

$4(3-4)^2 + 4(5-4)^2 = 4 + 4 = 8;\ 8/8 = 1,\ \sigma \approx 2{,}24$

c) Отклонение каждого из 8 данных от совокупности или ±1 или ±3. Стандартное отклонение равно 2. При вычислениях получим $\sigma \approx 2{,}24$.

Особое внимание уделяются умению по данным, представленных в виде графика или таблицы находить стандартное отклонение, объяснять на примерах увеличения или уменьшение стандартного отклонения, как изменение плотности данных.

- СО показывает отклонение от среднего значения.
- СО увеличивается при увеличении промежутка между данными.
- На сколько ближе будут расположены данные, на столько же меньше будет СО. Другими словами, если данные сосредоточены вокруг среднего арифметического, то СО будет маленьким. Внимание акцентируется на том, что при вычислении $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ рассматриваются только положительные значения. Так как на сколько стандартное отклонение удалено от среднего арифметического другими словами можно охарактеризовать как расстояние. А оно не может быть отрицательным. Стандартное отклонение и среднее арифметическое измеряются в одинаковых величинах. В статистике есть много понятий которые введены им. Так же используются следующие формулы, связывающие дисперсию и стандартное отклонение со средним значением.

$$\sum(x - \overline{x})^2 = \sum x^2 - 2\overline{x}\sum x + n\overline{x}^2 = \sum(x)^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 = \sum(x)^2 - \frac{(\overline{x}^2)}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{n(\sum x)^2 - (\sum \overline{x})^2}{n(n-1)};$$

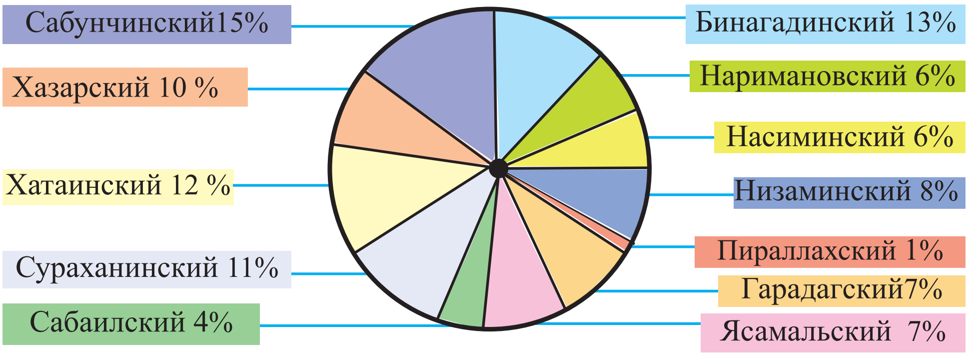
$$\sigma = \sqrt{\frac{n(\sum x)^2 - (\sum \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

Надо объяснить учащимся, что выражения $\sum X^2$ и$(\sum X)^2$ имеют разный смысл.

Замечание: $\sum x^2$ - сначала x возводят в квадрат, а потом складывают, $(\sum x)^2$ - складывают, а затем возводят в квадрат.

У.6. **(стр. 265)**

На круговой диаграмме представлено распределение учеников, получающих образование в городе Баку по районам в 2016 году.



Источник. *Министерство Образования Азербайджанской Республики. Годовой отчет за 2016 год.*

a) 1. Найдем среднее арифметическое данных:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+10+12+11+4+13+6+6+8+1+7+15}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3};$$

2. Найдем наибольшую разность:

15 – 1 = 14.

3. Найдем дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{12} = \frac{(7-\frac{25}{3})^2 + (10-\frac{25}{3})^2 + (12-\frac{25}{3})^2 +}{12}$$

$$+(11-\frac{25}{3})^2 + (4-\frac{25}{3})^2 + (13-\frac{25}{3})^2 + 2\cdot(6-\frac{25}{3})^2 + (8-\frac{25}{3})^2 + (1-\frac{25}{3})^2 +$$

$$+(7-\frac{25}{3})^2 + (15-\frac{25}{3})^2 =$$

$$= \frac{4^2+5^2+11^2+8^2+13^2+11^2+2\cdot 7^2+1^2+22^2+4^2+20^2}{12\cdot 9} =$$

$$= \frac{16+25+121+64+169+121+98+1\,484+16+400}{12\cdot 9} = \frac{1515}{108} \approx 14{,}03$$

4. Стандартное отклонение равно $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{14{,}03} \approx 3{,}75$.

b) Наибольшим отклонением обладает Пираллахский район.

d) Общее количество обучающихся в Баку

$$\frac{59088}{15}\cdot 100 \approx 393\,920$$

Рабочий лист N1

Имя_____ Фамилия__________ Дата_________

При помощи вычислений скажите для каких данных стандартное отклонение является большим, а для каких маленьким. Обоснуйте свое мнение. Какие сходные и отличительные черты имеют данные?

a)

(I)	
0	9
1	5 8
2	3 3 7 7
3	2 5
4	1

Ключ: 4 | 1 = 41

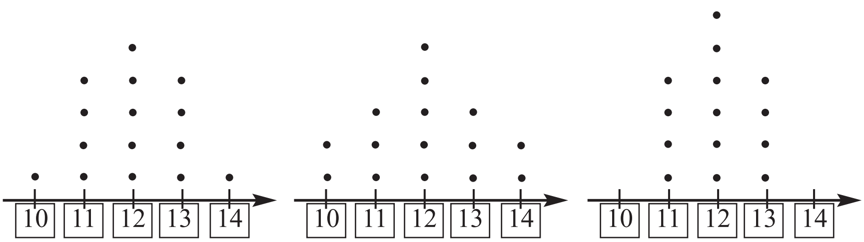
(II)	
0	9
1	5
2	3 3 3 7 7 7
3	5
4	1

Ключ : 4 | 1 = 41

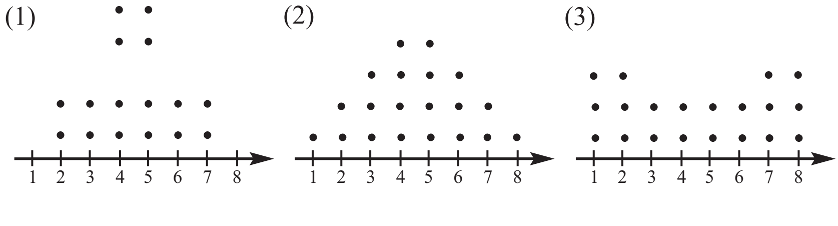
(III)	
0	
1	5
2	3 3 3 3 7 7 7 7
3	5
4	

Ключ: 4 | 1 = 41

b)



c)



Урок 141-142. Формы распределения данных. Нормальное распределение 2 часа Учеб.стр. 266-269

Содержательный стандарт

5.1.1.Вычисляет дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

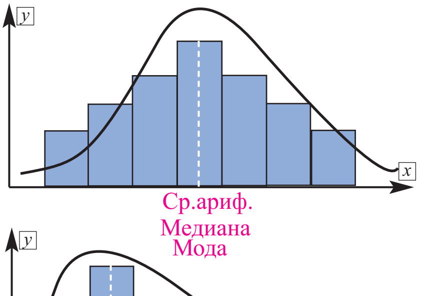
5.2.1. Применяет закон нормального распределения при вычислении вероятности событий.

Навыки учащегося:

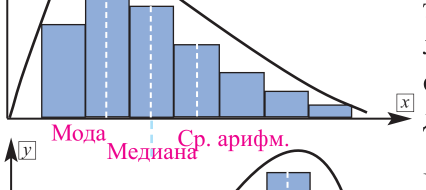
- Строит кривую нормального распределения и представляет соответствующую ситуацию в соответствии с выборкой ();
- Представляет данные в виде графика нормального распределения в соответствии со средним арифметическим и стандартным отклонением;
- Определяет при помощи вычислений и представляет данные в соответствии с условием нормального распределения;
- Решает задачи на вероятность при помощи кривой нормального распределения;

Распределение данных может иметь различные формы. Однако наиболее широко для обобщения статистических показателей используются объединенные в 3 группы формы.

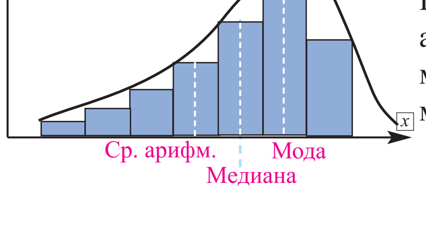
1. Нормальное распределение, оно еще называется симметричным распределением.
2. Форма с отклонением вправо, она называется положительным распределением.
3. Форма с отклонением влево, она называется отрицательным распределением.



При нормальном распределении среднее арифметическое, медиана и мода совпадают. Одна половина данных зеркальное отображение другой половины. Распределение симметрично.

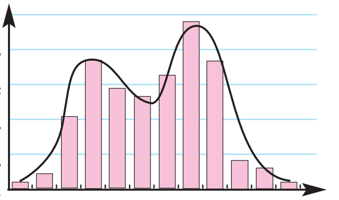


В форме отклонения вправо (положительное отклонение) мода самая маленькая, медиана больше моды, а среднее арифметическое больше медианы (самым большим).



В форме отклонения влево среднее арифметическое меньше медианы, а медиана меньше моды (среднее арифметическое - самым маленьким).

Помимо данных форм широко используется биномиальное распределение статистических данных. Однако в учебнике данная форма не представлена. Для объяснения видов распределения можно привести примеры реальных жизненных ситуаций. Ряд средних показателей

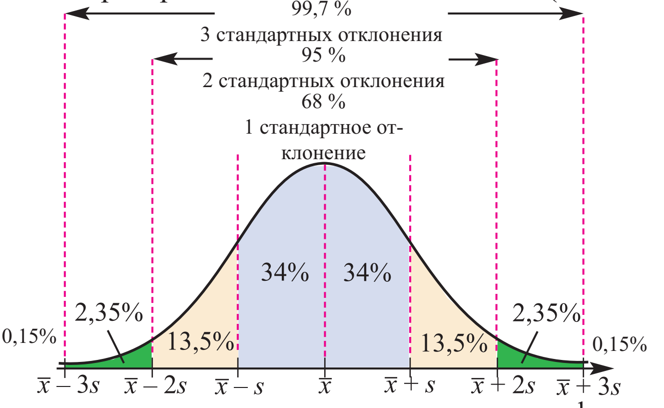


совокупности приблизительно соответствует нормальному распределению, например, рост женщин и мужчин определенного возраста, результаты İQ тестов и т. д.Примером отклонения вправо (положительного отклонения) являются данные о том, сколько времени ежедневно молодежь тратит на телефонные разговоры, примером отрицательного отклонения могут служить данные о том, сколько времени тратят ежедневно на телефонные разговоры люди преклонного возраста.

При нормальном распределении, используя эмпирическое правило, можно определить интервалы, где расположен больше или меньше данных.

Нормальное распределение

Форма нормального распределения называется **симметричным распределением** или распределением в виде **колокола (колокольчика).**



Выполняются задания, где по заданным среднему арифметическому и стандартному отклонению надо построить график нормального распределения. Для достижения целей каждый учащийся должен изготовить карту как показано выше, показывающую как сгруппированы данные, которую они затем будут применять при решении заданий. Учащийся должен представить площадь, охватывающую графиком кривой, раскрасив их разными цветами. Распределение такого вида называется правилом эмпирического распределения 68-95-99.

$\bar{x} \pm 1CO$ соответствует интервал 68%

$\bar{x} \pm 2s\ CO$ соответствует интервал 95%

$\bar{x} \pm 3s\ CO$ соответствует интервал 99%

Распределение данных определяется при помощи теоремы распределения данных Чебышева. Эта теорема не предусмотрена для изучения, но может быть рассмотрена в зависимости от уровня класса.

Теорема Чебышева. Для любых данных часть находящаяся от среднего арифметического на k стандартных отклонений ($k>1$) равна $1-\frac{1}{k^2}$

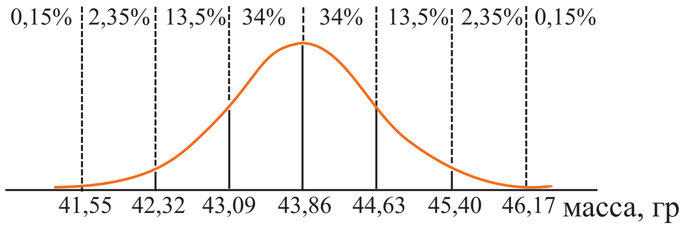
Выводы из теоремы Чебышева:

при $k=2$, $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$, т.е. три четверти или 75% данных удалены от среднего арифметического на 2 стандартных отклонения;

при $k=3$, $1-\frac{1}{3^2}=\frac{8}{9}$, т.е. 88,9% данных удалены от среднего арифметического на 3 стандартных отклонения

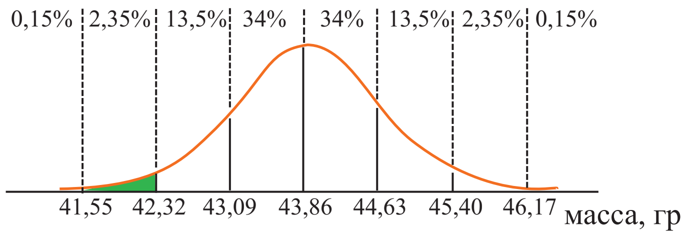
Например, после проверки 10 ящиков с перепелиными яйцами, средняя масса которого равна 43 гр, было усыновлено, что средняя масса яйца 43,86 гр при стандартном отклонении 0, 77. Учащиеся должны определить какая часть графика соответствует изменению массы и соответственно раскрасить их.

1. На горизонтальной прямой отмечается среднее арифметическое. От средней точки симметрично отмечаются значения вправо ($\overline{x}$ + s) и влево ($\overline{x}$ - s). Аналогично отмечаются значения ($\overline{x}$ + 2s), ($\overline{x}$ +3s) и ($\overline{x}$ – 2s), ($\overline{x}$ – 3s).

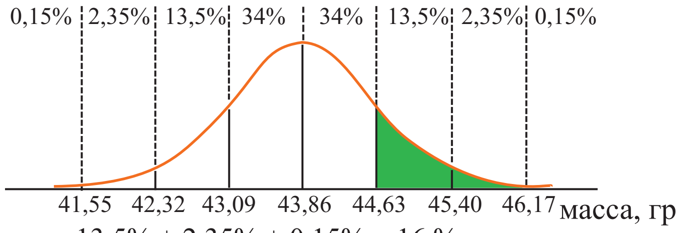


2. Сколько процентов составляют яйца массой меньше 42,32 гр.

Из распределения видно, что они составляют 2,35% + 0,15% = 2,5%. Раскрашивается соответствующая часть графика.

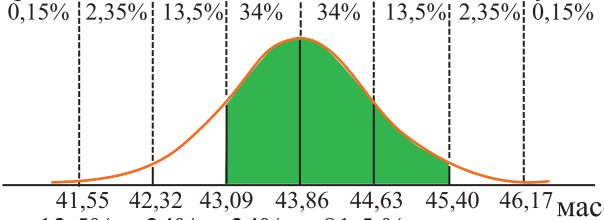


3.Сколько процентов составляют яйца, масса которых больше 44,63 гр?



13,5% + 2,35% + 0,15% = 16 %

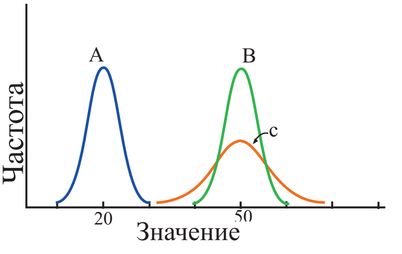
4.Сколько процентов составляют яйца с массой между 45,40 гр и 43,09 гр?



13,5% + 34% + 34% = 81,5 %

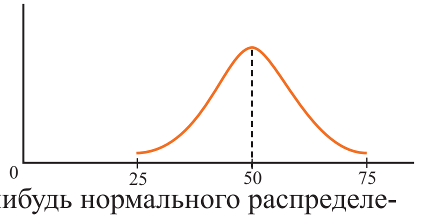
По нормальному распределению можно найти и наибольшую разность. В данном случае мы знаем, что 99,7% данных расположены внутри 3 стандартных отклонений. Значит, наиболее легким будет ящик массой 43,86 – 3·0,77 = 41,55 гр, наиболее тяжелым – 43,86 + 3·0,77 = 46,17; 46,17– 41,55 = 4,62 гр.

Еще раз подытоживается, что распределение данных показывает как стандартное отклонение расположено относительно среднего арифметического. Т.е., нормальное распределение строится на основе среднего арифметического и стандартного отклонения. Среднему арифметическому могут соответствовать различные растянутые и сжатые кривые. На сколько кривая будет сжата, на столько данные будут расположены вблизи среднего арифметического. Чем больше растянута кривая, тем дальше от среднего арифметического располагаются данные.



Рекомендуется данные суммативного оценивания учащихся изображать при помощи кривой нормального распределения. Оценивание можно провести по 80-ти балльной или 100 бальной системе.

Для того, чтобы оценить как учащиеся поняли зависимость формы графика нормального распределения от значения стандартного отклонения можно выполнить следующие задания.



На доске изображается кривая какого-нибудь нормального распределения, соответствующая среднему арифметическому и стандартному отклонению. Например, среднее арифметическое 50, стандартное отклонение 4.

Вызванный к доске учащийся выполнят следующее задание: изобразите в новой системе координат кривую, если среднее арифметическое не изменилось, а стандартное отклонение стало 18.

Другой учащийся чертит кривую, при условии, что среднее арифметическое стало равно 75, а стандартное отклонение не изменилось.

При этом учащиеся понимают, что в случае неизменного стандартного отклонения, при изменении среднего арифметического, кривая движется только влево или вправо вдоль оси x. Если же изменяется стандартное отклонение, то можно наблюдать растяжение или сжатие кривой.

Выполняются задания на нормальное распределение. Предусматривается решение задач на вероятность в соответствие с нормальным распределением. Здесь выполняются задания, где требуется вычисление вероятности для данных, взятых из определенной площади, охватывающей графиком кривой нормального распределения. Также выполняются задания, где строится нормальное распределение при вероятном распределении.

У.2. (стр. 267.) Известно, что средний балл на испытательном экзамене соответствующий нормальному распределению, равен 72 (балла), а стандартное отклонение 6 (баллов). 1) Запишите следующие данные:

a) удаленные на 1 стандартное отклонение от среднего значения

b) удаленные на 2 стандартных отклонения от среднего значения

c) удаленные на 3 стандартных отклонения от среднего значения

2) Изобразите кривую, соответствующую нормальному распределению. Покажите каждый интервал в виде процента.

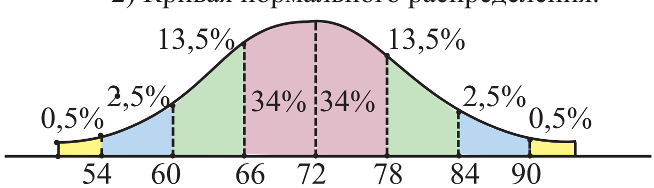
Решение: $\bar{x} = 72$, стандартное отклонение $\sigma = 6$.

a) Данные, удаленные на 1стандартное отклонение от среднего арифм.
$(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma) = (72 - 6; 72 + 6) \equiv (66; 78)$

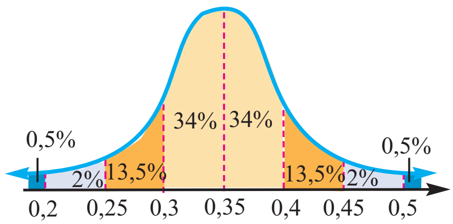
b) Данные, удаленные на 2 стандартных отклонения от среднего арифм.
$(\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma) = (60; 84)$

c) Данные, удаленные на 3 стандартных отклонения от среднего арифм. (54; 90)

2) Кривая нормального распределения.



У.6. (стр. 269.) На рисунке, в виде нормального распределения, показаны результаты тестов на координацию, проведенных среди 1800 подростков, при среднем значении 0,35 секунд и стандартном отклонении 0,05 секунды.



a) Про какое количество подростков можно сказать, что их реакция между 0,25 и 0,45 секундами? b) Какова вероятность, что реакция случайно выбранного подростка составляет более 0,4 секунд?

Решение: $x = 0,35$, $\sigma = 0,5$

a) данные, попадающие во временной интервал (0,25; 0,45) должны быть удалены на 2 стандартных отклонения. $(x - 2\sigma, x + 2\sigma)$

В процентах это составит $(13,5 + 34) \cdot 2 = 95\%$. Приблизительно количество подростков выполняющих тест так, равно $1800 \cdot \dfrac{95}{100} = 18 \cdot 95 = 1710$.

b) То, что реакция на координацию составляет 0,4 секунды, говорит, о том что это попадает в интервал $(x + \sigma, x + 2\sigma)$. А это $13,5 + 2 + 0,5 = 16\%$.

Тогда, вероятность того, что реакция случайно выбранного подростка больше 0,4 секунды равна $P(\tau; 0,4) = \dfrac{16}{100} = 0,16$

Урок 143 -144. Диаграмма “ящик с усами”. Учеб.стр. 270-273

Содержательный стандарт

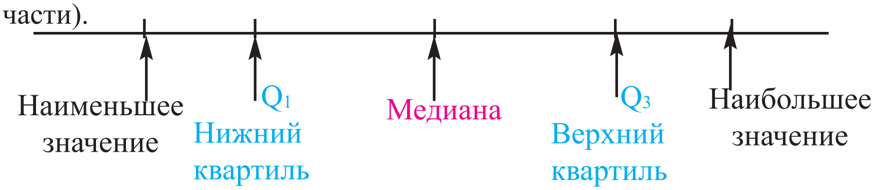
5.1. Собирает, систематизирует, обрабатывает и представляет статистические данные.

5.1.1.Вычисляет дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

Навыки учащегося:

- Делит данные на квартили;
- Представляет данные в виде диаграммы “ящик с усами”.

Медиана делит данные на две части. Эти равные части вновь делятся на две части значениями, называющимися квартилями (медиана соответствующей части).



Данные, расположенные слева от медианы называются нижним квартилем и обозначаются квартилем Q_1, справа от медианы расположен верхний квартиль, который обозначается Q_3. Q_1 и Q_3 делят данные части на две равные части. Разность нижнего и верхнего квартилей - данные, расположенные в центральной части (50%) определяет диапазон изменения. Медиана и квартили делят данные на 4 части (по 25%). Рекомендуется, чтобы учащиеся выполнили несколько заданий, на определение квартилей.

Q_1 Медиана Q_3

3			3			3			3		
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37

Так как построение диаграммы “ящик с усами” основан на определении квартилей.

У.2. Представьте данные в виде диаграммы “ящик с усами”и объясните на примере реальной жизненной ситуации.

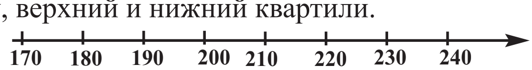
206, 173, 198, 241, 179, 236, 181, 231, 215, 222, 228

Решение: представим данные в виде диаграммы “ящик с усами”.

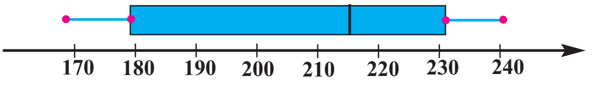
1-ый шаг. Расположим данные в порядке возрастания и найдем медиану, а также верхний и нижний квартили.

173, 179, **181**, 198, 206, **215**, 222, 228, **231**, 236, 241

2-ой шаг. Расположим данные на числовой оси.
Отметим медиану, верхний и нижний квартили.



3-ий шаг. От значения Q_1 до значения Q_3 изобразим ящик.
От значения от Q_1 до НМЗ нарисуем левый “ус”, от Q_3 до НБЗ - правый “ус”.



Наряду с построением диаграммы “ящик с усами” надо обратить внимание на умение представлять данные в виде кластера.
Учащиеся должны уметь представит данные соответствующие данным задачи с диаграммой “ящик с усами” следующим образом.
Правый “ус” ящика соответствует 25% данных. Значение нижнего квартиля 181 секунд, т.е. 25% песен меньше 181 секунд, 50% от 181 до 231 секунды, еще 25% больше 231 секунды, но меньше 241. Длина левого и правого “ус”-а зависит от того насколько близко или далеко расположены данные. Если данные расположены далеко друг от друга, то “ус” длинный, если близко - “ус” короткий. По диаграмме “ящик с усами” отчетливо видна наибольшая разность. Также до сведения учащихся доводится, что если данные в 1,5 раза больше значения разности квартилей, то они называются выбросами.

Урок 145-149 Случайные события и вероятность. Формула вычисления вероятности. Обобщающие задания. 5 часов. Учеб. стр. 274-281

Содержательный стандарт.
5.2. Понимает и применяет основные понятия теории вероятности.
5.2.1. Применяет закон нормального распределения при вычислении вероятности событий.

Навыки учащегося:
- демонстрирует понимание понятий случайного события, пространства случайных событий и испытания;
- применяет правило сложения вероятностей совместных и несовместных событий ;
- применяет правило умножения вероятностей независимых событий;
- применяет формулу условной вероятности при решении задач.

Из курса математики младших классов учащиеся знакомы с основными понятиями теории вероятности. Целесообразно провести разъяснение данных понятий на примерах совместно со всем классом. После чего можно дать в качестве долгосрочного домашнего задания.

Долгосрочные задания для портфолио. Запишите объяснение и представьте на примерах основные понятия теории вероятности.

При обсуждении особое внимание нужно обратить на то, чтобы вспомнить и дать правильное объяснение следующим понятиям.

Случайное событие- известен результат события, но неизвестно с какой частотой это событие повторяется.
Испытание - попытка при котором происходит случайное событие, это может быть наблюдение или опыт.
Результат- размер величины, количество и т д., полученной в результате испытания.
Элементарное событие - группа исходов (например, выпадение 2 очков на заре) и невозможность их разделения на другие события.

Пространство элементарных событий - множество всех элементарных событий.
Несовместные события - независимые случайные события. Не имеют общих результатов.
Совместные события - события, результаты которых совпадают.
Зависимые события - результат одного события влияет на результат другого события.

Независимые события- результат одного события не влияет на результат другого события.
Экспериментальная вероятность- вероятность, получена долгосрочным наблюдением или многочисленным опытом.
Теоретическая вероятность- определяется при помощи вычислительной модели.

Правило сложения вероятностей - применяется для двух несовместных событий A и B. P(A или B) = P(A) + P(B).

Правило умножения вероятностей - применяется для нахождения вероятности двух независимых событий A и B. P(A и B) = P(A) × P(B)

Объяснение условной вероятности можно провести на следующих примерах, опираясь на примеры из учебника.

Пример. В мешке находятся карты с числами от 1 до 10. Если известно, что число на случайно выбранной карте больше 3-х, то какова вероятность того, что данное число является четным.

Возможные события: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

A - результаты для события, что число четное (или пространство элементарных событий)

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

B - результаты, что число больше 3-х: $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Благоприятное событие - события A и B совпадают: $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

$$P(A) = \frac{5}{10} \qquad P(B) = \frac{7}{10} \qquad P(A \cap B) = \frac{4}{10} \qquad P(A|B) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

Решение некоторых заданий из учебника:

У.3. (стр 275) Группы крови обозначаются следующим образом: O (I группа), A (II группа), B (III группа) и AB (IV группа). По данным организации красного креста в городе, где произошла авария, 45% жителей имеют группу крови O, 40% - A, 11% - B, остальные - AB.
Найдите вероятность того, что добровольный донор имеет группу крови:
a) AB (IV группа) ; b) A (II группа) или B (III группа) ; c) O (I группа).

Решение:
1) а) городское население с группой крови AB составляет
100% – (45% + 40% + 11%) =4%
a) Вероятность того, что добровольный донор имеет группу крови AB

$$P(AB) = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

b) Аналогичными умозаключениями приходим к тому, что вероятность группы A или B будет

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) = \frac{40}{100} + \frac{11}{100} = 0{,}51 .$$

c) Вероятность того, что добровольный донор имеет группу крови O
равна $P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 1 - \frac{45}{100} = 0{,}55$.

У.3. (стр.279) Пусть вероятность того, что какой-либо человек доживет до 80 лет (событие B) равна P (B) = 0,3, а до 90 лет (событие A)
$P(A) = P(A \cap B) = 0{,}2$.
a) Найдите вероятность того, что человек доживший до 80 лет, доживет и до 90 лет.
b) Вероятность $P(B|A)$ равна 1. Обоснуйте высказывание и объясните на примере конкретной ситуации.

a) B - событие, что человек доживет до 80 лет, A - событие, что человек доживет до 90 лет. Тогда событие, что человек, доживший до 80, доживет и до 90 лет, событие B наступит при условии события A.
По формуле условной вероятности получим:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3} .$$

Чтобы проверить являются ли события зависимыми можно установить влияет ли вероятность наступления одного из них на вероятность наступления другого. Поясним это учащимся на следующем примере.
Пусть, события E и F такие события, что, P (E и F) = 0,24, P(E) = 0,4 и P(F) = 0,6. Являются ли события E и F независимыми?
Если E и F независимые события, то P(E/F) = P(E).
Проверим.

$$P(E/F) = \frac{P\,(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}24}{0{,}60} = 0{,}40$$

$$P(E/F) = P(E) = 0{,}04$$

Значит, события E и F независимые.

У.4. Зара брошена 3 раза. При этом получились следующие события:
Событие А : при каждом третьем броске выпадает 4 очка;
Событие В : каждый первый бросок дает 6 очков, каждый второй - 5 очков. Найдите вероятность события А при условии события В.

Решение: здесь количество всех возможных событий 216.

Событие А:

$$A = \begin{cases} (1,1,4) \quad (1,2,4) \ldots (1,6,4)\ (2,1,4)\ (2,2,4) \ldots (2,6,4) \\ (3,1,4)\ (3,2,4) \ldots (3,6,4)\ (4,1,4)\ (4,2,4) \ldots (4,6,4) \\ (5,1,4)\ (5,2,4) \ldots (5,6,4)\ (6,1,4)\ (6,2,4) \ldots (6,6,4) \end{cases}$$

Событие В:

$$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\},\ P(B) = \frac{6}{216}$$

Для событий А и В существует общее событие.

$$A \cap B = \{(6,5,4)\},\ \ P(A \cap B) = \frac{1}{216}\ .$$

Тогда условная вероятность требуемого события равна:

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

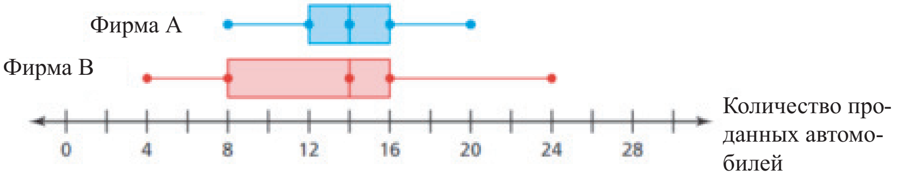
D.5. (стр.279). Фирма по изготовлению автомобильных колес распространила информацию о возможном дефекте 2% продукции. Найдите вероятность того, что из 4 купленных вами колес данной фирмы, как минимум, одно будет иметь дефект.

Решение: P(хотя бы одно колесо с дефектом) =
$=1 - P$ (все колеса с дефектом) $= 1 - (0{,}98)^4 \approx 0{,}078$

Рабочий лист № 1

Имя_________ Фамилия___________ Дата______

1) Диаграмма "ящик с усами" отображает данные о продаже автомобилей двух фирм. По диаграмме найдите требуемые данные и разность от продаж двух фирм.



1. Наименьшее значение:
 фирма A _________ фирма B ________
2. Нижний квартиль:
 фирма A_____________ фирма B ________

3. Медиана:
 фирма A_____________ фирма B ________

4. Верхний квартиль.
 фирма A_____________ фирма B ________

5. Наибольшее значение:
 фирма A _________ фирма B ________

6. Разность между верхним и нижнем квартилем:
 фирма A _________ фирма B ________

2) Брошены две зары. Найдите вероятность, того что:
 a) хотя бы на одной выпадет очко 3;
b) хотя бы на одной появится четное число.
3) В таблице представлены результаты о забитых голах 10 игроков команды.

количество игроков	4	2	3	1
количество забитых голов	0	1	2	3

По данным таблицы найдите медиану, моду, среднее арифметическое, наибольшую разность и дисперсию.

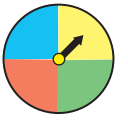
Таблица критериев для суммативного оценивания по 9 разделу.

№	Критерии	Заментки об учащихся
1.	Представляет статистические показатели, распределяя данные по характеристикам: мера центральных тенденций - среднее арифметическое, мода и медиана, и наибольшей разности.	
2.	Вычисляет отклонение, дисперсию и стандартное отклонение для различных наборов данных.	
3.	Строит кривую нормального распределения для выборки (совокупности) и представляет соответствующую реальную ситуацию.	
4.	Определяет при помощи вычислений и представляет требуемые согласно условию данные по нормальному распределению.	
5.	Строит диаграмму “ящик с усами”	
6.	Демонстрирует понимание понятий случайного события, пространства элементарных событий и испытания.	
7.	Применяет правило сложения при нахождение вероятности совместных и несовместных событий.	
8.	Применяет правило умножения для зависимых событий.	
9.	Решает задачу на условную вероятность.	

Урок 150. Задания для суммативного оценивания по разделу 10.

1) Брошены две зары. Если сумма выпавших очков равна 6, то какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 4 очка?

2) Колесо фортуны поделено на 4 равные части. В таблице ниже представлены результаты, полученные при вращении колеса 20 раз. Совпадает ли экспериментальная вероятность того, на каком цвете остановится стрелка, с теоретической вероятностью?



Колесо фортуны			
Красный	Зеленый	Синий	Желтый
5	9	3	3

3) 30 участников семинара разговаривают на английском языке, 20 на немецком языке. 5 из них владеют как английским, так и немецким языком. Найдите вероятность того, что случайный участник семинара говорит только на немецком языке.

4) Зара брошена 3 раза.

a) Найдите вероятность, что в первый раз выпадет 1, второй раз - 2, а в третий раз - 3.

b) Найдите вероятность, что выпадет 4.

5) Для каждого случая запишите два примера:

a) элементарное событие;

b) сложное событие;

c) совместное сложное событие;

d) несовместное сложное событие.

6) Для следующих данных запишите среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение.

11 10 8 4 6 7 11 6 11 7

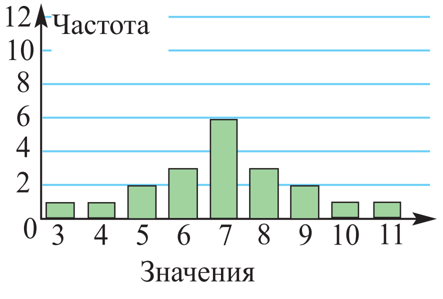
7) В прошлом году Наиля купила 3 DVD диска по цене 4,50 манат, 5 DVD дисков по цене 6,25 манат и 3 DVD диска по цене 3,80 манат. Найдите среднюю цену DVD дисков и стандартное отклонение от цены.

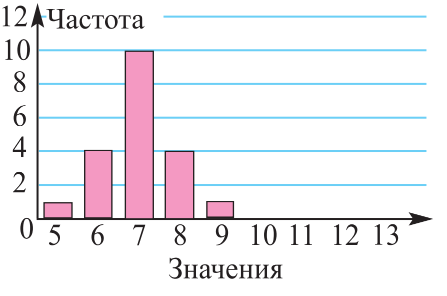
8) Отметьте точки расположенные от среднего арифметического на: a) 1 стандартное отклонение; b) 2 стандартных отклонений; c) 3 стандартных отклонений. Для каждого расстояния отметьте соответствующий процент и изобразите кривую нормального распределения.

9) Известно, что среднее арифметическое равно 75, а стандартное отклонение равно 5. Сколько процентов соответствует значению более 69?

10) Среднее срок службы 10 000 батареек для ручных ламп равен 30 часам при стандартном отклонении 3 часа.
1) Найдите время службы, в пределах 1,2,3 стандартных отклонений.
2) Сколько процентов батареек имеют срок службы:
   a) между 27 и 33 часами?
   b) более 21 часа и менее 24 часов?
   c) более 30 часов?

11) Какой из графиков соответствует большему стандартному отклонению? Обоснуйте.





12) Ниже представлены баллы, набранные учащимися при оценивании. Максимально возможный балл равен 80.

68, 59, 71, 65, 75, 58, 46, 54, 67, 61, 51, 69, 56, 59, 78, 80, 64, 72

a) Запишите 5 названий, которые необходимы для построения диаграммы “ящик с усами” .
b) Определите их значения для вышеуказанных данных.
c) В каком интервале находятся 25% учащихся, набранных наибольший балл?
d) Найдите наибольшую разность.
e) Сколько процентов учащихся набрали более 65 баллов? (проверьте)
f) Если вы наберете 70 баллов, то сможете ли попасть в 25% набравших наибольшие баллы?

Таблица планирования по 10 разделу

Основные стандарты и подстандарты	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб. стр.
2.3.1. Решает систему тригонометрических уравнений 2.3.2. Решает систему показательных и логарифмических уравнений	151-152	Иррациональные уравнения и неравенства	2	283-284
	153-155	Система показательных уравнений. Система логарифмических уравнений. Система тригонометрических уравнений.	3	285-288
	156-172	Обобщающие задания. Задания для суммативного оценивания за 2 полугодие	17	289-310
	Сумма		22	

Урок 151-155 Иррациональные уравнения и неравенства. Система показательных уравнений. Система логарифмических уравнений. Система тригонометрических уравнений. 5 часов. Учеб. стр. 283-286

Содержательный стандарт

2.3.1. Решает систему тригонометрических уравнений

2.3.2. Решает систему показательных и логарифмических уравнений

Навыки учащегося:

• решает систему показательных уравнений

• решает систему логарифмических уравнений

• решает систему тригонометрических уравнений

Выполняются задания на решение иррациональных уравнений и неравенств, систем показательных и логарифмических уравнений. Для каждой системы представлены примеры. Учащиеся должны уметь проверять удовлетворяют ли множество решений системе. При решении тригонометрических систем уравнений обратите внимание на правильный выбор промежутка. Также рекомендуется решать простые уравнений графически.

? Решение некоторых заданий из учебника:

У.3. Сколько действительных чисел удовлетворяют уравнению?

c) $\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-4} = 3$

Решение: множество возможных значений переменной находится из системы неравенств

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

1-ому неравенству системы удовлетворяют $-2 \leq x \leq 2$, 2 - $x \geq 4$. Так как $[-2;2] \cap [4;+\infty) = \varnothing$, то уравнение не имеет действительных корней.

У.4 Решите неравенства.

12) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 2$

Решение: запишем неравенство как показано ниже.

$$\sqrt{(x-3)^2} \leq 2$$

Отсюда получаем неравенство $|x-3| \leq 2$. Его решение приводит к решению двойного неравенства

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

Таким образом, находим

$$1 \leq x \leq 5.$$

У.1. (стр. 285) Решите систему уравнений.

i) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 10, \\ x - y = 2 \end{cases}$

Решение: из 2-го уравнения системы находим $y = x - 2$. Подставим это в 1-ое уравнение.

$$3^x + 3^{x-2} = 10$$

$$3^{x-2} \cdot (3^2 + 1) = 10$$

$$3^{x-2} = 1, \quad x = 2$$

Подставим это в замену. Получаем $y = 0$. Решением данной системы является пара (2;0).

У.1. (стр. 286) Решите систему уравнений.

i) $\begin{cases} \log_2 x + 2^{\log_2 y} = 6, \\ x^y = 32 \end{cases}$

Решение: прологарифмируем обе части второго уравнения по основанию 2.

$$\log_2 x^y = \log_2 32,$$
$$y \cdot \log_2 x = 5$$

Учитывая основное логарифмическое тождество, данную систему можно привести к равномощной системе.

$$\begin{cases} \log_2 x + y = 6, \\ y \cdot \log_2 x = 5 \end{cases}$$

Числами, сумма которых равна 6, а произведение 5, являются числа 1 и 5

1-ый случай

$$\begin{cases} \log_2 x = 5, \\ y = 1 \end{cases}$$

$x = 32,\ y = 1$

2-ой случай

$$\begin{cases} \log_2 x = 1, \\ y = 5 \end{cases}$$

$x = 2,\ y = 5$

Решением данной системы являются следующие пары (2; 5) и (32; 1).

Урок 156-172 Обобщающие задания. Задания для суммативного оценивания за 2 полугодие. 17 часов. Учеб. стр 289 - 310

Обобщающие задания охватывают содержательные стандарты 5-11 классов.

Решение некоторых заданий из учебника:

У.13. (стр. 290)

Сравните числа.

1) $a = 5^{200}$, $b = 3^{300}$, $c = 28^{100}$ 2) $m = \log_4 3$, $n = \log_5 4$

Решение: 1) Записав числа $a = 5^{200} = (5^2)^{100} = 25^{100}$ в виде

$b = 3^{300} = (3^3)^{100} = 27^{100}$

$c = 28^{100}$

становится ясно, что $a < b < c$.

2) Понятно, что если $m > 0$, $n > 0$, то можно записать следующее:

$$\frac{m}{n} = \frac{\log_4 3}{\log_5 4} = \log_4 3 \cdot \log_4 5$$

По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом при $a \geq 0$, $b \geq 0$ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Отсюда, учитывая $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\frac{m}{n} = \log_4 3 \cdot \log_4 5 \leq \left(\frac{\log_4 3 + \log_4 5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_4 16}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

Значит, $\frac{m}{n} < 1$, т.е. $m < n$

У. 93. (стр. 299)

Решение: если одно из трех чисел, образующих геометрическую прогрессию равно n, то по условию второе будет $n + 3$. Тогда третье число пусть будет равно x. Числа n; $n + 3$; x образуют геометрическую прогрессию. По свойству геометрической $(n + 3)^2 = nx$.

Отсюда $$x = \frac{(n+3)^2}{n} = \frac{n^2 + 6n + 9}{n} = n + 6 + \frac{9}{n}$$

По условию x должно быть натуральным числом. Тогда $\frac{9}{n}$ также должно являться натуральным числом, т.е. число n является делителем числа 9. Это 1; 3 и 9. Значит, количество прогрессий, удовлетворяющих условию, равно 3.

У. 113. b) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

Решение:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} =$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| =$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & x > 2 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

У. 194. (стр. 310)

Решение:

а) $$\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{2\cos 18^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\sin 72^\circ} = \frac{1}{4}$$

Задания для суммативного оценивания за год

1) Постройте график функции и установите существует или нет предел при $x \to 0$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ \sqrt{x}, & x \geq 2 \end{cases}$ b) $g(x) = |x| - 1$

2) Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$

3) Найдите расстояние между точками A (0; –1; 4) и B (8; 8; –8).

4) Даны точки A (–1; 2; 0) и B (5; 8; –12). Найдите координаты точки M, которая делит отрезок AB в отношении AM : MB = 2 : 1.

5) Остаток при делении многочлена $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + m$ на двучлен $(x - 2)$ равен 3. Найдите m.

6) Корни уравнения $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ являются рациональными числами. Найдите эти корни.

7) Даны точки A (2; 0; 1), B (4; 2; –1), M (x; –1; 3). Зная, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BM}$ перпендикулярны, найдите абсциссы точки M.

8) Даны точки A (0; 2; –1) и B (3; –1; 0). Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$.

9) Дана функция $f(x) = 2^{x^2+1}$. При каком значении xвыполняется равенство $f'(x) = f(x)$?

10) Дана функция $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}x$. При каких значениях x справедливо равенство $f'(x) = 0$.

11) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на отрезке [–1; 2].

12) Тело массой $m = 5$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 3t^2 - t$ (m). Вычислите кинетическую энергию через 5 минут после начала движения.

13) Для функции $f(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку B(1; 0).

14) Вычислите определенный интеграл

a) $\int_1^2 (4x^3 - 2x + 1)dx$ b) $\int_0^8 \sqrt[3]{x^4}\, dx$

15) Найдите площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

16) Найдите объем фигуры, полученной вращением фигуры, ограниченной следующими линиями вокруг оси абсцисс.

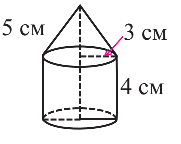
$y = x + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

17) Разверткой конуса является круговой сектор с радиусом 8 см и углом 90°. Найдите площадь осевого сечения.

18) Из точки M, находящейся на расстоянии 9 см от сферы, проведена касательная. Расстояние от точки M до каждой точки сферы равно 15 см. Найдите площадь поверхности сферы.

19) Найдите объем цилиндра, полученного вращением квадрата с диагональю $3\sqrt{2}$ см вокруг своей стороны.

20) Найдите полную поверхность и объем тела, изображенного на рисунке.



21) Металлическую монету бросили 10 раз. Найдите вероятность того, что 6 раз монета упадет вверх картой.

22) Для следующих данных найдите среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение.

11; 8; 10; 12; 9; 6; 11; 10; 8; 5

23) Постройте график функции $f(x) = x^3 - 3x^2$.

24) Площадь сечения шара, расположенного на расстоянии 9 см от центра равна 144π см^2. Найдите площадь поверхности шара и его объем.

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 11

Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin
Metodik Vəsaiti
(Rus dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Tərcüməçi: **Viktoriya Abdullayeva**

Elmi redaktoru: **Əbdürrəhim Quliyev**

Kompüter tərtibatı: **Mustafa Qəhrəmanov**

Korrektor: **Tərlan Qəhrəmanova**

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2018-202

Kağız formatı: 70×100 $^1/_{16}$.
Fiziki çap vərəqi 15.
Səhifə sayı 240.
Tiraj:360. Pulsuz.
Bakı 2018

Radius nəşriyyatı
Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ