ЗАУР ИСАЕВ, ГЮНАЙ ГУСЕЙНЗАДЕ, МАГОМЕД КЕРИМОВ, АГШИН АБДУЛЛАЕВ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по предмету Математика для 6-х классов
общеобразовательных заведений

6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1 КОМПОНЕНТЫ УЧЕБНИКА

В учебный комплект по предмету Математика для 6-го класса входят:

- Учебник
- Рабочая тетрадь
- Методическое пособие

<u>В учебнике</u> отражены учебные материалы, предназначенные непосредственно для ученика и реализующие соответствующие содержательные стандарты, установленные в куррикулуме.

Учебник состоит из двух частей и содержит всего 9 разделов. Соответствующие разделы имеют титульную страницу, и каждый раздел заканчивается заданиями, предназначенными для обобщающего урока. Каждая тема в разделе начинается с новой страницы. Все вопросы и задания каждого урока пронумерованы.

<u>Рабочая тетрадь.</u> Содержит примеры и задачи для более глубокого понимания учениками содержания учебника. Рабочая тетрадь имеет особое значение для усовершенствования приобретенных знаний и формирования практических навыков. Соответственно деятельности ученика в рабочей тетради могут быть осуществлены формативное оценивание, мониторинг учебного процесса обучения и контроль за успеваемостью учащихся.

<u>Методическое пособие</u>, предназначенное для учителей, состоит из введения (общей части) и комментария уроков. Во введении описываются содержательная структура и методологическая концепция учебника. Они представлены ниже:

- Основные принципы обучения математике в VI классе.
- Организация обучения математике по линиям деятельности.
- Организация уроков решения задач.
- Годовое планирование.
- Таблица реализации содержания разделов и тем по стандартам.
- Организация обобщающих уроков.

В начале каждого раздела даются обзор соответствующего учебного материала и карта содержания раздела по компонентам учебника (раздел, урок, стандарт, страница и др.) В изложении каждого урока должны отражаться нижеследующие пункты:

- Результаты обучения по стандартам.
- Необходимые для урока ресурсы (наглядные пособия и электронные источники).
- Рекомендации по мотивации (побуждение).
- Рекомендации по технологии обучения.
- Рекомендации по преодолению трудностей, с которыми обычно сталкиваются ученики в процессе обучения.
- Рекомендации по решению задач и выполнению заданий.
- Рекомендации по дифференцированному обучению.
- Рекомендации по организации уроков решения задач.
- Критерии и средства формативного оценивания.
- Организация обобщающих уроков по разделу.

2 СТРУКТУРА УЧЕБНИКА И КОНЦЕПЦИЯ ОБУЧЕНИЯ

Модель изучения тем основана на модели: “Изучай → Закрепляй → Применяй”.

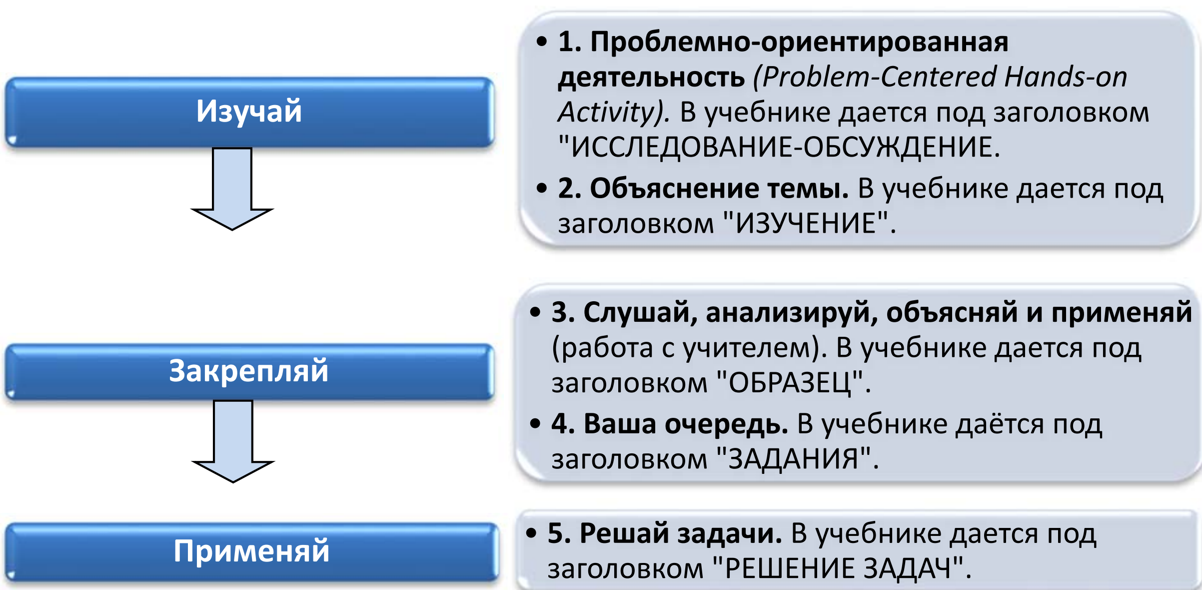
Изучай – приобретение знаний и навыков.

Закрепляй – усовершенствование приобретенных новых знаний и навыков с помощью практических заданий, упражнений, проектов и другими способами.

Применяй – применение полученных знаний и навыков для решения постепенно усложняющихся задач и математического моделирования.

Каждая тема преподается на основе пятиэтапного цикла обучения. Тема начинается с решения исследовательско-дискуссионной задачи и заканчивается применением полученных новых знаний для решения задач.

Соответствие модели обучения и рубрик в учебнике:



Учебные материалы сгруппированы по следующим рубрикам:

Функции рубрик обучения, представленных в учебнике, разъясняются в разделе “Познакомимся с учебником”.

Первая страница раздела. Во вводной части разделов даются начальные представления о темах, которые будут изучены, и их применении. На этой странице представлены знания и навыки, которые будут приобретены в рамках рубрики «В этой главе вы научитесь». Задача, представленная под заголовком «Попытайтесь!», предназначена для объяснения ученикам важности навыков, которые они приобретут в разделе. Даже если не решать данную задачу, можно организовать дискуссию о стратегии решения задачи и требуемых знаниях.

Предварительная проверка. Предназначена для повторения полученных учащимися в младших классах знаний и навыков, связанных с материалами, которые будут изучены в разделе, и может быть использована в целях диагностического оценивания.

Исследование-обсуждение. Изучение каждой темы начинается с деятельности, которая позволяет сформировать важные математические мысли, помогает усовершенствовать навыки решения задач. Эта деятельность осуществляется путем использования учениками конкретных или пиктуральных моделей и путем поощрения учеников за более активное участие на уроке. В деятельности ученики могут участвовать и в группах. В связи с этим в методическом пособии для учителя будут даны краткие рекомендации и объяснения того, как осуществить проблемно-ориентированную деятельность в классе, какие вопросы и инструкции (подсказки) использовать для того, чтобы ученики могли правильно мыслить и координировать свои действия, а также обобщать результаты своей деятельности

Изучение. Объяснение новых знаний и информации. После проблемно-ориентированной деятельности во время разъяснения определенной темы будут использованы конкретные и пиктуральные модели, соответствующие ***“конкретно-пиктурально-абстрактному”*** подходу. В одной теме может быть несколько материалов для изучения. После каждого учебного материала дается задание с образцом.

Исследуется, какие преимущественно ошибки допускают учащиеся в ходе деятельности, и даются необходимые рекомендации и объяснения для их устранения. В процессе этого в учебнике и рабочей тетради даются конкретные рекомендации по фокусированию внимания на ключевых темах, базовой информации, правильном мышлении учеников, частых ошибках или недоразумениях.

Основываясь на “конкретно-пиктурально-абстрактном” подходе в процессе изучения новых понятий, ученики должны иметь возможность использовать несколько моделей, соответствующих одному и тому же понятию. С другой стороны, стратегия scaffolding (“строительные леса”) заключается в том, чтобы адаптировать учебный процесс к индивидуальным потребностям учеников. Другими словами, цель состоит в том, чтобы постепенно научить учеников лучше понимать и в итоге сделать их более независимыми в процессе урока.

Образец. Прилагаются примеры и соответствующие задачи, которые обобщают математические знания и навыки, составляющие основу объяснения темы или деятельности. Ожидается, что ученик сначала проанализирует их (или выслушает объяснение учителя), а затем объяснит. Далее предусмотрены аналогичные задания, чтобы ученики могли применить полученные знания.

Внимание. Важные знания или навыки, связанные с темой.

Запомни. Особо важные математические правила.

Из истории математики. Интересные факты из истории математики, связанные с темой.

Задания. Изучив задание, данное в виде образца, ученикам дают несколько заданий, которые предусмотрены для закрепления и приобретения соответствующих знаний и навыков. Это также поможет учителю провести формативное оценивание. Методическое пособие отражает рекомендации для заданий, предусмотренных при дифференцированном обучении. Так, ученикам, показавшим низкий результат во время самостоятельной работы, дается повторное объяснение, а ученикам, показавшим высокий результат, даются дополнительные упражнения и задания.

Решение задач. Предусмотрено решение нескольких задач по каждой теме. Навыки решения задач формируются в виде поэтапного решения поставленной задачи.

3 ОРГАНИЗАЦИЯ УРОКОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач является неотъемлемой частью изучения математики. Ученики должны заниматься решением задач, способ решения которых неясен и которые требуют применения не только обычных математических действий, но и более творческого подхода. В стандартах, подтвержденных *Национальным советом учителей математики (National Consil of Teachers of Mathematics), указано: "Решение задачи является не только основной целью математического обучения, но также является его основным средством. Для учеников должны создаваться условия, чтобы они составляли задачи и решали их, в основном сложные задачи, которые требуют больших усилий при решении" (NTCM, Principles Standards and for School Mathematics, p.52.)*

Американский исследователь в области образования Анна Ньюман (Anne Newman), которая проанализировала ошибки учеников во время решения задач, разделила эти ошибки на 5 этапов:

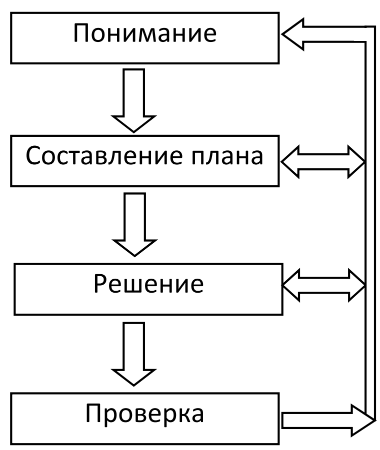
Характер ошибки	Пояснения	Рекомендации ученикам по устранению ошибок
Чтение	Математические термины и символы не прочитаны должным образом.	Повторно прочтите вопрос.
Понимание	Задача полностью не осознана.	Что требуется найти в задаче?
Преобразования	Неправильно выполнены преобразования.	Как вы думаете решить задачу?
Математические процедуры и факты	Допускаются ошибки в математических вычислениях.	Как бы вы вычислили результат?
Кодирование	Хотя решение найдено, ответ задачи указан неверно.	Повторно решив, напишите свой ответ в нижней строке.

Newman, M. A. (1977). *An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39*, 31-43.

Newman, M. A. (1983). *Strategies for diagnosis and remediation*. Sydney: Harcourt, Brace Jovanovich.

Основываясь на теории известного математика, популяризатора науки и исследователя в области обучения математике Джорджа Пойа (George Pólya, How to Solve It, 2nd ed., Princeton University Press, 1957), решение задачи проходит в 4 этапа:

1. Понять задачу (понимание).



Так как учителя часто не воспринимают этот этап всерьез, ученики испытывают трудности даже при решении самых простых задач. Для того чтобы постепенно устранить это затруднение, ученикам можно задать разные вопросы:

- Понятно ли значение всех слов в условии задачи?
- Что требуется найти и показать?
- Как своими словами вы можете пересказать условие задачи?
- Как вы представляете себе условие задачи?
- Как можно представить задачу – схемой или рисунком, чтобы лучше понять ее?

Можно также использовать краткую форму записи, таблицу, схему, рисунок и другие формы представления задачи, чтобы лучше понять ее условие.

2. Составить план решения задачи.

Можно использовать разные методы для решения одной и той же задачи. Лучший способ для формирования навыка выбора правильного метода – решать больше задач. С накоплением опыта ученики смогут выбрать более легкую стратегию для решения задачи. Основные стратегии решения задач (Alfred S. Posamentier & Stephen Krulik, "Problem Solving Mathematics", Corwin, 2009) следующие:

- Предположение и проверка (*Guess and Check*) – эта стратегия предусматривает, что предположив, можно проверить ответ и усовершенствовать решение.
- Практическая деятельность (*Act it Out*) – практическая деятельность с применением пособий.
- Рисование (*Draw*) – нарисовать рисунки и диаграммы.
- Составить список и построить таблицу (*Make a List and Table*).
- Логическое мышление (*Think*) – логически мыслить, используя предшествующие знания.

3. Решение задачи.

Этот этап относительно проще этапа составления плана. Ученикам нужно объяснить, что, если выбранный метод не помогает, надо его изменить. Не надо избегать этого: даже самые выдающиеся математики вынуждены были менять метод решения, если не получалось решить задачу.

4. Проверить ответ.

Этап проверки может быть очень полезным для учеников. При обсуждении решения задачи выявляются ошибки и определяется, какой метод более эффективен для решения такого типа задач.

В целом очень важно различать понятия “решение задачи” и “обучение решению задач”. С этой точки зрения рекомендуется, чтобы во время учебного процесса рассматривался четырехфазный познавательный процесс решения каждой задачи (понимание - составление плана - решение - проверка) как подход к трехэтапному познавательному процессу деятельности ученика. Согласно Дж. Мейсону, Л. Бертону и К. Стейси (2010), обучение решению задач выполняется в три этапа: *привлечение, «мозговой штурм» и обсуждение* (Mason J., Burton L., & Stacey K. “Thinking Mathematically”, 2nd. ed., New York, Pearson, 2010).

1. Этап привлечения создает основу для решения задач, поэтому нужно уделить ему достаточно времени. На этом этапе важно удостовериться в том, что ученик полностью понял условие задачи и что от него требуется найти в ней. Для этого учитель руководствуется нижеследующими вопросами для размышления:

- Что я знаю?
- Что хочу сделать?
- Что я могу сделать?

Чтобы лучше понять условие задачи, можно также использовать краткую форму записи, таблицу, схемы, рисунки и другие изображения. Обычно этот этап проходит с активным участием учеников. Чтобы лучше понять и легко решить задачу, они моделируют одну и ту же задачу разными способами. Это могут быть ролевая игра, сценки, поставленные по разным сценариям, или практическая деятельность.

2. Решение задачи («мозговой штурм») – служит для построения плана и решения задачи. Учитель следит за выбором учениками правильной стратегии. Он создает условия для учеников, чтобы они могли решить задачу разными способами, и еще больше поощряет учеников с отличающимся мышлением. Для этого им дается возможность свободно использовать разные манипулятивы (соединяющиеся кубики, счетные палочки, конструктор, магниты, десятичные кубы, рамки с десятью клетками и т.д.)

3. Обсуждение – служит для проверки и обобщения. На этом этапе:

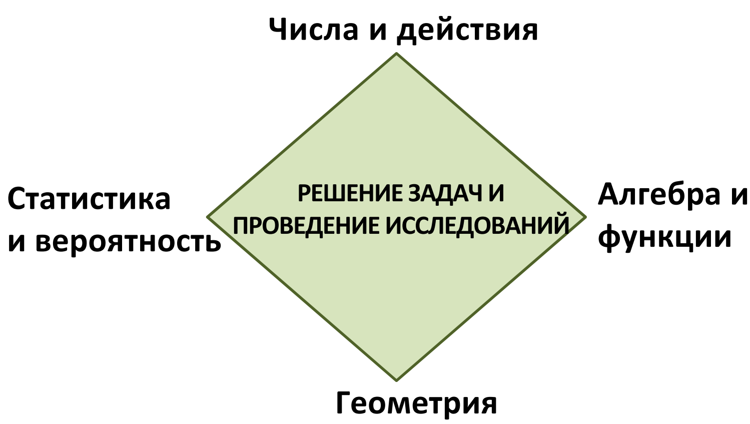
- Проверяется правильность решения.
- Обсуждаются ключевые идеи (key ideas) и важные этапы процесса решения (рефлексивное мышление).
- Обобщаются задача и её решение.

В методическом пособии в объяснении способа решения относительно сложных задач даны рекомендации для этапа «*Побуждения*».

4 УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ

Государственные стандарты и программы (куррикулум) общеобразовательного уровня служат для формирования у учеников математического мышления и навыков математического оценивания.

В 6-м классе предмет математикам преподается по 4 стандартным линиям, соответственно программе дисциплины: *числа и действия, алгебра и функции, геометрия и измерения, статистика и вероятность*. Основная цель всех содержательных линий – формирование у учеников навыков решения задач.



При организации обучения по содержательным линиям предполагается углубить и расширить знания и навыки от простых к сложным. Наряду с этим каждые знание и навык, входящие в содержание предмета, не ограничиваясь только данной содержательной линией, будут связываться и с другими содержательными линиями.

5 НАВЫКИ, РЕАЛИЗУЕМЫЕ ПО СТАНДАРТАМ В 6-м КЛАССЕ

Содержательная линия 1. ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ

Стандарт 6-1.1. Применяет разложение чисел на простые множители.

6-1.1.1. Определяет простые и составные числа, записывает натуральное число в виде произведения простых множителей.
6-1.1.2. Применяет алгоритм нахождения НОД и НОК чисел.

Стандарт 6-1.2. Определяет, читает, записывает и сравнивает целые числа.

6-1.2.1. Читает и записывает целые числа.
6-1.2.2. Отмечает на числовой оси точку, соответствующую целому числу.
6-1.2.3. Объясняет понятие абсолютного значения (модуля) числа.
6-1.2.4. Сравнивает и упорядочивает целые числа.

Стандарт 6-1.3. Выполняет действия над целыми числами.

6-1.3.1. Складывает целые числа.
6-1.3.2. Вычитает целые числа.
6-1.3.3. Умножает целые числа.
6-1.3.4. Делит целые числа.
6-1.3.5. Находит степень целого числа.
6-1.3.6. Находит значение числового выражения.

Стандарт 6-1.4. Объясняет понятия отношение и пропорция, применяет свойства пропорции.

6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция.
6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.

Стандарт 6-1.5. Выполняет простые процентные вычисления.

6-1.5.1. Вычисляет, сколько процентов составляет одна из одноименных величин от другой.
6-1.5.2. Выражает изменение величины в процентах.
6-1.5.3. Решает задачи на простой процентный рост ().

Содержательная линия 2. АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ

Стандарт 6-2.1. Составляет, упрощает математические выражения и вычисляет значение выражения при заданном значении переменной.

6-2.1.1. Составляет математическое выражение с не более чем двумя переменными.
6-2.1.2. Упрощает выражения с двумя переменными.
6-2.1.3. Выносит общий множитель за скобки.
6-2.1.4. Вычисляет значение выражения при заданных целых значениях переменных.

Стандарт 6-2.2. Находит целые решения простых неравенств, решает простые уравнения.

6-2.2.1. Записывает простое неравенство (включающее целые числа), соответствующее ситуации, описывает ситуацию, соответствующую неравенству.
6-2.2.2. Решает простое неравенство методом подбора.
6-2.2.3. Решает простые уравнения в множестве целых чисел.
6-2.2.4. Использует уравнения и неравенства при решении задач.

Стандарт 6-2.3. Различает прямую и обратную пропорциональные зависимости и представляет их в разных формах.

6-2.3.1. Объясняет прямую пропорциональную зависимость между двумя величинами.
6-2.3.2. Объясняет обратную пропорциональную зависимость между двумя величинами.
6-2.3.3. Представляет заданную прямую пропорциональную зависимость в разных формах.
6-2.3.4. Представляет заданную обратную пропорциональную зависимость в разных формах.

Стандарт 6-2.4. Понимает понятие множества, записывает отношения между множествами.

6-2.4.1. Объясняет понятие множества.
6-2.4.2. Выполняет операции над множествами.
6-2.4.3. Применяет операции над множествами при решении задач.

Содержательная линия 3. ГЕОМЕТРИЯ

Стандарт 6-3.1. Применяет свойства углов.

6-3.1.1 Определяет углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых с третьей прямой, применяет их свойства.

6-3.1.2 Определяет углы, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны, и применяет их свойства.

Стандарт 6-3.2. Демонстрирует знание о углах, элементах, последовательности, конгруэнтности и неравенстве треугольников.

6-3.2.1. Применяет свойства внутренних и внешних углов треугольника.

6-3.2.2. Объясняет понятие конгруэнтности треугольников и признаки конгруэнтности.

6-3.2.3. Объясняет понятия медианы, биссектрисы и высоты в треугольнике.

6-3.2.4. Применяет неравенство треугольника и соотношения между сторонами и углами треугольника.

Стандарт 6-3.3. Чертит простые геометрические фигуры.

6-3.3.1. Строит треугольник по длинам трех сторон с помощью линейки и циркуля.

Стандарт 6-3.4. Вычисляет периметр и площадь плоских фигур.

6-3.4.1. Вычисляет длину окружности и площадь круга.

6-3.4.2. Вычисляет площадь параллелограмма и ромба.

6-3.4.3. Вычисляет площадь треугольника.

Стандарт 6-3.5. Вычисляет длину, периметр и площадь в декартовой системе координат, решает задачи на симметрию и перемещение.

6-3.5.1. Объясняет прямоугольную систему координат и определяет координаты точки.

6-3.5.2. Объясняет понятие расстояния на координатной плоскости.

6-3.5.3. Выполняет вычисления площади в системе координат.

6-3.5.4. Применяет симметрию относительно координатных осей.

6-3.5.5. Применяет перемещение на координатной плоскости.

Стандарт 6-3.6. Вычисляет площадь поверхности и объем пространственных фигур.

6-3.6.1. Вычисляет площадь поверхности прямой призмы, в основании которой треугольник или параллелограмм, и цилиндра.

6-3.6.2. Вычисляет объем прямой призмы и цилиндра.

Содержательная линия 5. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

Стандарт 6-5.1. Собирает, представляет и анализирует данные.

6-5.1.1. Представляет заданные данные в процентах на круговой диаграмме.

6-5.1.2. Находит медиану и моду числовых данных.

6-5.1.3. Выполняет сравнительный анализ, вычисляя медиану, моду и среднее арифметическое двух множеств данных.

6-5.1.4. Выражает увеличение и уменьшение величин, указанных на линейной диаграмме, в процентах.

Стандарт 6-5.2. Находит вероятность элементарного события.

6-5.2.1. Выражает вероятность наступления события такими словами, как «невозможно», «маловероятно», «скорее всего произойдет», «обязательно произойдет», «вероятность 50%».

6-5.2.2. Высказывает мнение о всех возможных результатах испытания.

6-5.2.3. Находит вероятность двух равновозможных элементарных событий.

6-5.2.4. Находит вероятность двух равновозможных элементарных событий на основе испытания.

* Примечание: Содержательная линия 4. ИЗМЕРЕНИЕ не рассматривается как отдельная линия, так как она интегрирована с другими содержательными линиями в 5–11 классах.

Таблица реализации содержательных стандартов и план работы за I полугодие

Разделы и темы / Стандарты содержания	I раздел				II раздел									III раздел							IV раздел		
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4.**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**4.1**	**4.2**	**4.3**
Содержательная линия 1. Числа и действия																							
Стандарт 6-1.1. Применяет разложение чисел на простые множители.																							
6-1.1.1. Определяет простые и составные числа, записывает натуральное число в виде произведения простых множителей.		✓																					
6-1.1.2. Применяет алгоритм нахождения НОД и НОК чисел.			✓	✓																			
Стандарт 6-1.2. Определяет, читает, записывает и сравнивает целые числа.																							
6-1.2.1. Читает и записывает целые числа.														✓									
6-1.2.2. Отмечает на числовой оси точку, соответствующую целому числу.														✓									
6-1.2.3. Объясняет понятие абсолютного значения (модуля) числа.																✓							
6-1.2.4. Сравнивает и упорядочивает целые числа.															✓								
Стандарт 6-1.3. Выполняет действия над целыми числами.																							
6-1.3.1. Складывает целые числа.																	✓						
6-1.3.2. Вычитает целые числа.																		✓					
6-1.3.3. Умножает целые числа.																			✓				
6-1.3.4. Делит целые числа.																			✓				
6-1.3.5. Находит степень целого числа.	✓																			✓			
6-1.3.6. Находит значение числового выражения.	✓															✓	✓	✓	✓	✓			
Стандарт 6-1.4. Объясняет понятия отношение и пропорция, применяет свойства пропорции.																							
6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция.					✓	✓	✓	✓	✓														
6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓												
Стандарт 6-1.5. Выполняет простые процентные вычисления.																							
6-1.5.1. Вычисляет, сколько процентов составляет одна из одноименных величин от другой.												✓											
6-1.5.2. Выражает изменение величины в процентах.													✓										
6-1.5.3. Решает задачи на простой процентный рост ().													✓										

Разделы и темы / Стандарты содержания	I раздел				II раздел									III раздел							IV раздел		
	1.1	1.2	1.3	1.4.	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4.1	4.2	4.3
Содержательная линия 2. Алгебра и функции																							
Стандарт 6-2.1. Составляет, упрощает математические выражения и вычисляет значение выражения при заданном значении переменной.																							
6-2.1.1. Составляет математическое выражение с не более чем двумя переменными.																							
6-2.1.2. Упрощает выражения с двумя переменными.																							
6-2.1.3. Выносит общий множитель за скобки.				✓																✓			
6-2.1.4. Вычисляет значение выражения при заданных целых значениях переменных.																		✓	✓	✓			
Стандарт 6-2.2. Находит целые решения простых неравенств, решает простые уравнения.																							
6-2.2.1. Записывает простое неравенство (включающее целые числа), соответствующее ситуации, описывает ситуацию, соответствующую неравенству.																							
6-2.2.2. Решает простое неравенство методом подбора.																							
6-2.2.3. Решает простые уравнения в множестве целых чисел.																		✓	✓				
6-2.2.4. Использует уравнения и неравенства при решении задач.																							
Стандарт 6-2.3. Различает прямую и обратную пропорциональные зависимости и представляет их в разных формах.																							
6-2.3.1. Объясняет прямую пропорциональную зависимость между двумя величинами.										✓													
6-2.3.2. Объясняет обратную пропорциональную зависимость между двумя величинами.											✓												
6-2.3.3. Представляет заданную прямую пропорциональную зависимость в разных формах.										✓													
6-2.3.4. Представляет заданную обратную пропорциональную зависимость в разных формах.											✓												
Стандарт 6-2.4. Понимает понятие множества, записывает отношения между множествами.																							
6-2.4.1. Объясняет понятие множества.																							
6-2.4.2. Выполняет операции над множествами.																							
6-2.4.3. Применяет операции над множествами при решении задач.																							
Содержательная линия 3. Геометрия																							
Стандарт 6-3.1. Применяет свойства углов.																							
6-3.1.1. Определяет углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых с третьей прямой, применяет их свойства.																							
6-3.1.2. Определяет углы, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны, и применяет их свойства.																							

Разделы и темы / Стандарты содержания	I раздел				II раздел									III раздел							IV раздел		
	1.1	1.2	1.3	1.4.	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4.1	4.2	4.3
Стандарт 6-3.2. Демонстрирует знание о углах, элементах, последовательности, конгруэнтности и неравенстве треугольников.																							
6-3.2.1. Применяет свойства внутренних и внешних углов треугольника.																							
6-3.2.2. Объясняет понятие конгруэнтности треугольников и признаки конгруэнтности.																							
6-3.2.3. Объясняет понятия медианы, биссектрисы и высоты в треугольнике.																							
6-3.2.4. Применяет неравенство треугольника и соотношения между сторонами и углами треугольника.																							
Стандарт 6-3.3. Чертит простые геометрические фигуры.																							
6-3.3.1. Строит треугольник по длинам трех сторон с помощью линейки и циркуля.																							
Стандарт 6-3.4. Вычисляет периметр и площадь плоских фигур.																							
6-3.4.1. Вычисляет длину окружности и площадь круга.																							
6-3.4.2. Вычисляет площадь параллелограмма и ромба.																							
6-3.4.3. Вычисляет площадь треугольника.																							
Стандарт 6-3.5. Вычисляет длину, периметр и площадь в декартовой системе координат, решает задачи на симметрию и перемещение.																							
6-3.5.1. Объясняет прямоугольную систему координат и определяет координаты точки.																					✓		
6-3.5.2. Объясняет понятие расстояния на координатной плоскости.																						✓	
6-3.5.3. Выполняет вычисления площади в системе координат.																						✓	
6-3.5.4. Применяет симметрию относительно координатных осей.																							✓
6-3.5.5. Применяет перемещение на координатной плоскости.																							✓
Стандарт 6-3.6. Вычисляет площадь поверхности и объем пространственных фигур.																							
6-3.6.1. Вычисляет площадь поверхности прямой призмы, в основании которой треугольник или параллелограмм, и цилиндра.																							
6-3.6.2 Вычисляет объем прямой призмы и цилиндра.																							
Содержательная линия 5. Статистика и вероятность																							
Стандарт 6-5.1. Собирает, представляет и анализирует данные.																							
6-5.1.1. Представляет заданную информацию в процентах на круговой диаграмме.																							

Таблица реализации содержательных стандартов и план работы за II полугодие

Разделы и темы / Стандарты содержания	V раздел			VI раздел						VII раздел					VIII раздел					IX раздел			
	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	9.1	9.2	9.3	9.4
Содержательная линия 1. Числа и действия																							
Стандарт 6-1.1. Применяет разложение чисел на простые множители.																							
6-1.1.1. Определяет простые и составные числа, записывает натуральное число в виде произведения простых множителей.																							
6-1.1.2. Применяет алгоритм нахождения НОД и НОК чисел.																							
Стандарт 6-1.2. Определяет, читает, записывает и сравнивает целые числа.																							
6-1.2.1. Читает и записывает целые числа.																							
6-1.2.2. Отмечает на числовой оси точку, соответствующую целому числу.																							
6-1.2.3. Объясняет понятие абсолютного значения (модуля) числа.																							
6-1.2.4. Сравнивает и упорядочивает целые числа.																							
Стандарт 6-1.3. Выполняет действия над целыми числами.																							
6-1.3.1. Складывает целые числа.																							
6-1.3.2. Вычитает целые числа.																							
6-1.3.3. Умножает целые числа.																							
6-1.3.4. Делит целые числа.																							
6-1.3.5. Находит степень целого числа.																							
6-1.3.6. Находит значение числового выражения.																							
Стандарт 6-1.4. Объясняет понятия отношение и пропорция, применяет свойства пропорции.																							
6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция.																							
6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.																							
Стандарт 6-1.5. Выполняет простые процентные вычисления.																							
6-1.5.1. Вычисляет, сколько процентов составляет одна из одноименных величин от другой.																							
6-1.5.2. Выражает изменение величины в процентах.																							
6-1.5.3. Решает задачи на простой процентный рост ().																							

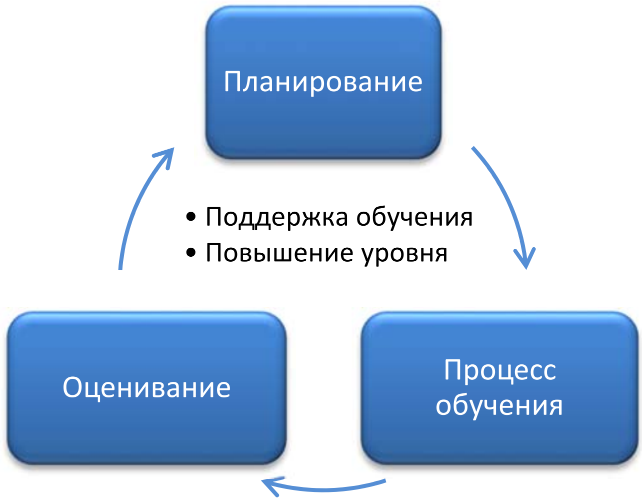
Разделы и темы / Стандарты содержания	V раздел			VI раздел						VII раздел					VIII раздел					IX раздел			
	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	9.1	9.2	9.3	9.4
Содержательная линия 2. Алгебра и функции																							
Стандарт 6-2.1. Составляет, упрощает математические выражения и вычисляет значение выражения при заданном значении переменной.																							
6-2.1.1. Составляет математическое выражение с не более чем двумя переменными.				✓																			
6-2.1.2. Упрощает выражения с двумя переменными.					✓	✓																	
6-2.1.3. Выносит общий множитель за скобки.					✓	✓																	
6-2.1.4. Вычисляет значение выражения при заданных целых значениях переменных.				✓	✓	✓																	
Стандарт 6-2.2. Находит целые решения простых неравенств, решает простые уравнения.																							
6-2.2.1. Записывает простое неравенство (включающее целые числа), соответствующее ситуации, описывает ситуацию, соответствующую неравенству.									✓														
6-2.2.2. Решает простое неравенство методом подбора.									✓														
6-2.2.3. Решает простые уравнения в множестве целых чисел.							✓	✓															
6-2.2.4. Использует уравнения и неравенства при решении задач.							✓	✓	✓														
Стандарт 6-2.3. Различает прямую и обратную пропорциональные зависимости и представляет их в разных формах.																							
6-2.3.1. Объясняет прямую пропорциональную зависимость между двумя величинами.																							
6-2.3.2. Объясняет обратную пропорциональную зависимость между двумя величинами.																							
6-2.3.3. Представляет заданную прямую пропорциональную зависимость в разных формах.																							
6-2.3.4. Представляет заданную обратную пропорциональную зависимость в разных формах.																							
Стандарт 6-2.4. Понимает понятие множества, записывает отношения между множествами.																							
6-2.4.1. Объясняет понятие множества.	✓																						
6-2.4.2. Выполняет операции над множествами.		✓	✓																				
6-2.4.3. Применяет операции над множествами при решении задач.		✓	✓																				
Содержательная линия 3. Геометрия																							
Стандарт 6-3.1. Применяет свойства углов.																							
6-3.1.1. Определяет углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых с третьей прямой, применяет их свойства.												✓											
6-3.1.2. Определяет углы, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны, и применяет их свойства.												✓											

Разделы и темы / Стандарты содержания	V раздел			VI раздел						VII раздел					VIII раздел					IX раздел			
	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	9.1	9.2	9.3	9.4
Стандарт 6-3.2. Демонстрирует знание о углах, элементах, последовательности, конгруэнтности и неравенстве треугольников.																							
6-3.2.1. Применяет свойства внутренних и внешних углов треугольника.													✓										
6-3.2.2. Объясняет понятие конгруэнтности треугольников и признаки конгруэнтности.											✓												
6-3.2.3. Объясняет понятия медианы, биссектрисы и высоты в треугольнике.										✓													
6-3.2.4. Применяет неравенство треугольника и соотношения между сторонами и углами треугольника.														✓									
Стандарт 6-3.3. Чертит простые геометрические фигуры.																							
6-3.3.1. Строит треугольник по длинам трех сторон с помощью линейки и циркуля.														✓									
Стандарт 6-3.4. Вычисляет периметр и площадь плоских фигур.																							
6-3.4.1. Вычисляет длину окружности и площадь круга.																	✓						
6-3.4.2. Вычисляет площадь параллелограмма и ромба.																✓							
6-3.4.3. Вычисляет площадь треугольника.															✓								
Стандарт 6-3.5. Вычисляет длину, периметр и площадь в декартовой системе координат, решает задачи на симметрию и перемещение.																							
6-3.5.1. Объясняет прямоугольную систему координат и определяет координаты точки.																							
6-3.5.2. Объясняет понятие расстояния на координатной плоскости.																							
6-3.5.3. Выполняет вычисления площади в системе координат.																							
6-3.5.4. Применяет симметрию относительно координатных осей.																							
6-3.5.5. Применяет перемещение на координатной плоскости.																							
Стандарт 6-3.6. Вычисляет площадь поверхности и объем пространственных фигур.																							
6-3.6.1. Вычисляет площадь поверхности прямой призмы, в основании которой треугольник или параллелограмм, и цилиндра.																		✓					
6-3.6.2. Вычисляет объем прямой призмы и цилиндра.																			✓				
Содержательная линия 6-5. Статистика и вероятность																							
Стандарт 6-5.1. Собирает, представляет и анализирует данные.																							
6-5.1.1. Представляет заданные данные в процентах на круговой диаграмме.																							✓

Разделы и темы / Стандарты содержания	V раздел			VI раздел						VII раздел					VIII раздел					IX раздел			
	5.1	**5.2**	**5.3**	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**
6-5.1.2. Находит медиану и моду числовых данных.																				✓			
6-5.1.3. Выполняет сравнительный анализ, вычисляя медиану, моду и среднее арифметическое двух множеств данных.																				✓			
6-5.1.4. Выражает увеличение и уменьшение величин, указанных на линейной диаграмме, в процентах.																							✓
Стандарт 6-5.2. Находит вероятность элементарного события.																							
6-5.2.1. Выражает вероятность наступления события такими словами, как «невозможно», «маловероятно», «скорее всего произойдет», «обязательно произойдет», «вероятность 50%».																					✓		
6-5.2.2. Высказывает мнение о всех возможных результатах испытания.																					✓		
6-5.2.3. Находит вероятность двух равновозможных элементарных событий.																						✓	
6-5.2.4. Находит вероятность двух равновозможных элементарных событий на основе испытания.																						✓	

Планирование

Наряду с повышением эффективности процесса обучения компоненты, входящие в комплект учебников, служат также для повышения результатов обучения у учеников. Предложенный комплект учебников служит для полной реализации подстандартов по математике VI класса и помогает учителям при годовом и ежедневном планировании.



Ежедневное планирование

Основную часть пособия для учителей составляют рекомендации по ежедневному планированию уроков. Доступно описывается преподавание каждой темы и даются рекомендации по использованию разных методов представления материалов обучения. В зависимости от уровня подготовки учеников и технического оснащения класса учитель может повысить уровень достижения целей обучения, используя разную цифровую технику (интерактивная доска, проектор и др.).

Организация обобщающих уроков

Основной целью обобщающих уроков в разделах является систематизация и закрепление знаний, полученных в ходе преподавания тем. Такие уроки помогают связывать и углублять знания, полученные в разделе, а также улучшить предполагаемые навыки. Проведя общий опрос по разделу, можно определить темы, которые вызывают трудности у учеников и в которых относительно слабо реализованы стандарты. В этом случае более целесообразно построить урок, направленный на устранение слабых сторон учеников.

В дополнение к задачам, приведенным в учебнике и рабочей тетради, учитель может задать ученикам дополнительные вопросы и задания на основе подстандартов, которые предполагается реализовать в разделе.

Учитель обязательно должен контролировать динамику развития учеников. Еще одной целью урока является наблюдение за уровнем усвоения учениками тем раздела на основе заданий.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ НА STEAM ПРОЕКТАХ

Проекты STEAM (наука, технология, инженерия, искусство, математика) направлены на объединение математических знаний учеников, применение математических знаний и навыков в повседневной жизни. Проекты предполагают проведение учащимися самостоятельных исследований по определенной теме. Уточняется время работы над проектом, учащимся даются рекомендации и советы. Проблема ставится конкретно. Учителя и ученики определяют продолжительность работы над проектом, используемые средства (литература, источники, вспомогательные средства и т.д.), способы их получения, формы работы. В процессе работы учитель может направлять учащихся. Ученики же ответственны за выполнение работы. Результат исследования может быть представлен в виде готового продукта, презентации, иллюстрации, фотографии, видеоматериала, альбома и др. формах.

Проект представляет собой подготовленную и реализованную по рекомендации учителя творческую самостоятельную работу учеников, направленную на изучение темы, раздела.

Работа над проектом осуществляется по следующим этапам:

1. Подготовка. 2. Планирование. 3. Деятельность. 4. Презентация.

VI класс. Математика (1-я часть)
Планирование за I полугодие (17×5 = 85 часов)

№	Раздел, глава и темы	часы
	РАЗДЕЛ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ	
	Предварительная проверка	1
1.1.	Степень натурального числа	3
1.2.	Простые и составные числа	3
1.3.	Наибольший общий делитель	3
1.4.	Наименьшее общее кратное	3
	Обобщающий урок. STEAM "Криптография"	2
	МСО-1	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**16**
	РАЗДЕЛ 2. ОТНОШЕНИЕ. ПРОПОРЦИЯ. ПРОЦЕНТ	
	Предварительная проверка	1
2.1.	Отношение	2
2.2.	Отношение величин	3
2.3.	Деление величины в данном отношении	3
2.4.	Пропорция	3
2.5.	Масштаб	2
2.6.	Прямая пропорциональная зависимость	3
2.7.	Обратная пропорциональная зависимость	3
	Задачи и примеры	2
2.8.	Выражение отношения в процентах	4
2.9.	Выражение изменения величины в процентах	3
	Обобщающий урок. STEAM. " Соотношение сторон и разрешение экрана"	2
	МСО-2	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**32**
	РАЗДЕЛ 3. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА	
	Предварительная проверка	1
3.1.	Целые числа	2
3.2.	Сравнение и упорядочивание целых чисел	2
3.3.	Абсолютное значение числа	2
3.4.	Сложение целых чисел	3
3.5.	Вычитание целых чисел	3
	Задачи и примеры	2
3.6.	Умножение и деление целых чисел	3
3.7.	Действия над целыми числами	3
	Обобщающий урок. STEAM. " Экстремальная температура и абсолютный ноль"	2
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**23**
	РАЗДЕЛ 4. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	
	Предварительная проверка	1
4.1.	Прямоугольная система координат	2
4.2.	Расстояние в прямоугольной системе координат	3
4.3.	Симметрия и перемещение в прямоугольной системе координат	3
	Обобщающий урок. STEAM. " Беспилотные автобусы"	2
	МСО-3	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**12**
	Повторение за I полугодие	1
	БСО-1	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ЗА I ПОЛУГОДИЕ	**85**

VI класс. Математика (2-я часть)
Планирование за II полугодие (17×5 = 85 часов)

№	Раздел, глава и темы	часы
	РАЗДЕЛ 5. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ	
	Предварительная проверка	1
5.1.	Множество	2
5.2.	Операции над множествами	3
5.3.	Решение задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна	3
	Обобщающий урок. STEAM "Поисковые системы"	2
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**11**
	РАЗДЕЛ 6. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ. УРАВНЕНИЕ. НЕРАВЕНСТВО	
	Предварительная проверка	1
6.1.	Выражения с переменной	2
6.2.	Раскрытие скобок в математических выражениях	2
6.3.	Упрощение выражений с переменными	3
6.4.	Уравнение	3
6.5.	Решение задач на составление уравнений	3
6.6.	Неравенства	2
	Обобщающий урок. STEAM. " Математическое моделирование "	3
	МСО-4	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**20**
	РАЗДЕЛ 7. ТРЕУГОЛЬНИКИ	
	Предварительная проверка	1
7.1.	Медиана, биссектриса и высота треугольника	2
7.2.	Признаки конгруэнтности треугольника	3
7.3.	Параллельность прямых	2
7.4.	Сумма углов треугольника	3
7.5.	Построение треугольника по трем сторонам	2
	Обобщающий урок. STEAM. " Геодезические купола"	2
	МСО-5	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**16**
	РАЗДЕЛ 8. ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР	
	Предварительная проверка	1
8.1.	Площадь треугольника	2
8.2.	Площадь параллелограмма и ромба	3
8.3.	Длина окружности. Площадь круга	3
	Задачи	2
8.4.	Площадь поверхности прямой треугольной призмы и цилиндра	3
8.5.	Объем прямой треугольной призмы и цилиндра	2
	Обобщающий урок. STEAM. " Поселение на Марсе "	3
	МСО-6	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**20**
	РАЗДЕЛ 9. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ	
	Предварительная проверка	1
9.1.	Медиана и мода	2
9.2.	Случайное событие	2
9.3.	Вероятность события	2
9.4.	Представление информации	3
	Обобщающий урок. STEAM. "Генеалогический ДНК-тест и теория вероятностей"	2
	МСО-7	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**13**
	Повторение за учебный год	4
	БСО-2	**1**
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ЗА II ПОЛУГОДИЕ	**85**

1-й РАЗДЕЛ — Натуральные числа и действия с ними

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	8	
Тема 1.1	Степень натурального числа	3	9	3
Тема 1.2	Простые и составные числа	3	12	6
Тема 1.3	Наибольший общий делитель	3	16	9
Тема 1.4	Наименьшее общее кратное	3	20	13
	Обобщающий урок. STEAM "Криптография"	2	26	17
	МСО-1	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**16**		

Краткий обзор раздела

В разделе проверяются знания о натуральных числах, полученные в V классе, разъясняется понятие “степень натурального числа”, даются сведения о простых и составных числах, показаны способы разложения составных чисел на простые множители, приведены правила нахождения НОД и НОК чисел, сокращение дробей с помощью НОД, сравнение дробей с разными знаменателями путем приведения их к общему знаменателю с помощью НОК и правила выполнения действий над ними. Также решаются задачи, связанные с применением каждой из изученных новых концепций.

На что стоит обратить внимание?

Хотя ученики знакомы с квадратом и кубом числа, необходимо на основе предыдущих знаний объяснить более высокие степени натурального числа. Поскольку ученики знакомятся со степенью натурального числа в этом разделе, они должны уметь определять простые и составные числа. Потому что эти числа и некоторые их свойства будут использоваться в следующих учебных материалах.

Особое внимание следует уделить разложению натуральных чисел на простые множители. Эти навыки очень важны для нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел. Целесообразно предоставить ученикам дополнительную информацию о различных способах разложения числа на простые множители.

Необходимо обратить внимание на хорошее усвоение правил нахождения НОД и НОК чисел. Эти навыки широко используются при сокращении дробей, приведении дробей с разными знаменателями к общему знаменателю. Рекомендуется уделять особое внимание применению знаний и навыков, изученных по каждой теме, при решении задач.

Развитие математического языка

Правильное использование понятий “степень натурального числа”, “простое число”, “составное число”, “разложение составных чисел на простые множители”, “наибольший общий делитель” или “НОД”, “наименьшее общее кратное” или “НОК” позволяет определить уровень владения этими понятиями и правильно оценить полученные знания.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Степень натурального числа, простое число, составное число, разложение на простые множители, “НОД”, “НОК”, “взаимно простые числа”.

Необходимые предварительные знания и навыки:

• Квадрат и куб натурального числа
• Нахождение наибольшего общего делителя (НОД) из списка общих делителей двух чисел
• Нахождение наименьшего общего кратного (НОК) из списка общих кратных двух чисел
• Сокращение дроби
• Сложение и вычитание дробей
• Сложение, вычитание, умножение, деление, приближенное вычисление, предположение, правдоподобность ответа.

Междисциплинарная интеграция

Ряд величин можно выразить натуральными числами и их степенями. Разложение чисел на простые множители и нахождение их НОД и НОК с помощью этого разложения используется в современной криптографии, в области шифрования и дешифрования, а также при обеспечении конфиденциальности при передаче информации. Нахождение НОД, используя алгоритм Евклида, позволяет интегрировать математику с информатикой (программированием).

ТЕМА 1.1. Степень натурального числа

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.3.5. Находит степень целого числа. 6-1.3.6. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Согласно определению степени, записывает n-ю степень. • Вычисляет n-ю степень натурального числа. • Вычисляет значение выражения, содержащее n-ю степень числа. • Соблюдает последовательность операций при нахождении значения числового выражения, включая степень числа.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки с цифрами от 1 до 100, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	*https://video.edu.az/video/4180* *https://video.edu.az/video/1181* *https://youtu.be/8q9DnKoqX9c* *https://math-from-scratch.com/power-with-a-natural-exponent* *https://youtu.be/pH_YPTeqyQg*

Обсуждение исходной задачи. Обсуждается задача, данная на первой странице раздела. В младших классах делается попытка найти НОК чисел из списка, используя понятие о делителях и кратных натурального числа.

Чтобы направить учеников, учитель рисует на доске таблицу и в столбце записывает несколько чисел. Он дает ученикам задание сначала написать общие делители двух чисел, а затем трех чисел и несколько общих кратных. Если ученики затрудняются написать соответствующие числа в столбцы делители и кратные, то учитель может задать наводящие вопросы, чтобы напомнить ученикам о делителях и кратных.

Числа	Делители	Кратные
16	1, 2, 4, 8, 16	16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 144, ...
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	24, 48, 72, 96, 120, 144, ...
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	36, 72, 108, 144, 180, ...

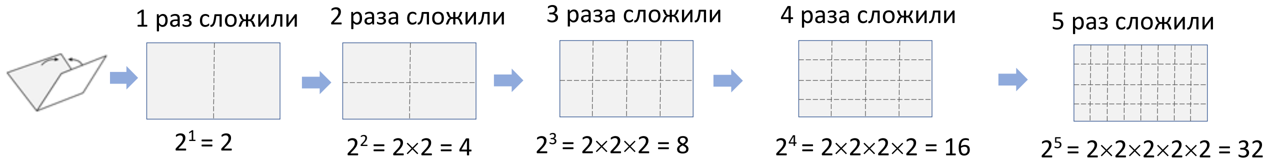
После того как ученики познакомятся с нахождением НОК путем разложения на простые множители, решение задания повторно обсуждается в конце раздела

Побуждение. Учитель записывает на доске квадрат и куб нескольких натуральных чисел, рисует таблицу и записывает в столбец несколько чисел. Он предлагает ученикам вычислить другие степени этих чисел, исходя из закономерности вычисления квадратов и кубов.

$a \backslash n$	**2**	**3**	**4**	**5**
2	$2^2 = 2 \times 2 =$	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 =$	$2^4 =$	$2^5 =$
3	$3^2 = 3 \times 3 =$	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 =$	$3^4 =$	$3^5 =$
4	$4^2 = 4 \times 4 =$	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 =$	$4^4 =$	$4^5 =$
5	$5^2 = 5 \times 5 =$	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 =$	$5^4 =$	$5^5 =$

К сведению учителя! Хотя ученики обладают знаниями и навыками о квадрате и кубе чисел, они не знакомы с вычислением больших степеней, и возникают определенные трудности. Поэтому целесообразно создать у них определенное представление, показав несколько примеров (деление клетки, раскладывание в каждую из клеток шахматной доски в 2 раза больше пуговиц, чем в предыдущую, вычисление ряда физических величин).

Исследование-обсуждение Ученикам дают лист бумаги формата А4 и просят сложить его вдвое. Затем сложенную бумагу раскрывают и подсчитывают полученные части. На следующем этапе бумагу складывают еще раз, лист снова раскрывают и подсчитывают полученные части. У учеников могут возникать трудности с каждым новым складыванием. Сначала по аналогии находится, сколько частей получится в 5-й раз.



Таким образом, если сложить прямоугольную бумагу n раз в указанном порядке, количество полученных деталей будет равно 2^n.

Изучение Степень натурального числа

Напоминается правило вычисления квадрата и куба натуральных чисел. Объясняется, что операция возведения в степень используется для более короткой записи и вычисления произведения одинаковых множителей. В выражении $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$ показывается основание и показатель степени. Объясняется разница между степенью 3^5 и произведением $3 \cdot 5$.

$$3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 6 + 3 + 3 + 3 = 9 + 3 + 3 = 12 + 3 = 15$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243$$

Ученикам сообщается, что любое число в 1-й степени равно самому числу.

Подумай! Для ответа на вопрос “Как можно обосновать равенство $1^n = 1$?” уместно вспомнить свойство умножения числа на 1. Чтобы ответить на вопрос, учитель может попросить учащихся заменить n числом. Согласно этому правилу, ответ равен 1 при любом значении n.

$$1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1}_{n \text{ штук}} = 1$$

Уместно спросить учеников, чему равна любая степень 0. Для этого можно задать ученикам несколько примеров и дать задание обосновать, что $0^n = 0$.

Задания

3. Записывается степень, изображается как произведение и вычисляется. В это время ученикам рекомендуется выполнить вычисление, как указано в материале для изучения. Каждому ученику дается задание выполнить вычисление одной степени и процесс вычисления сравнивается с учебным материалом. Между тем учителю следует обратить внимание на то, понимают ли ученики, что $x^n \neq n \cdot x$.

4. При заполнении таблицы ученики также видят закономерность, основанную на умножении, при вычислении 2-й или 3-й степени. Итак, при нахождении 2^7 они смогут умножить найденный ответ 2^6 на 2. Ученики могут применить то же правило при нахождении 3-й степени. Учитель также может посоветовать им найти степень другого однозначного числа.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики пытаются найти произведение показателя степени на его основание при вычислении натуральной степени числа. Для таких учеников целесообразно еще раз объяснить определение степени и организовать работу над ошибками.

Изучение Нахождение значения выражений, содержащих степень

Сначала проверяются полученные знания о последовательности выполнения действий при вычислении значения выражений. Ученикам объясняется, что возведение в степень следует выполнять перед другими действиями. Например, напоминается, что порядок выполнения действий в выражениях без скобок осуществляется в порядке возведения в степень, умножения и деления, сложения и вычитания. В выражениях со скобками значение выражения вычисляется путем сначала выполнения действий внутри скобок по приведенному выше алгоритму, а затем с учетом результата скобок.

К сведению учителя! В этом классе не предусмотрено использовать свойства степеней при выполнении заданий. Свойства степеней будут изучаться в 7 классе. В этом классе рассматривается только вычисление степени.

Задания

6. Вычисляются значения выражений. Иногда ученики испытывают затруднения при вычислении выражений в скобках. Таким ученикам уместно напомнить о последовательности действий.

з) $(5^3 + 5^2) \cdot 8 - 4^2 = (125 + 25) \cdot 8 - 4^2 = 150 \cdot 8 - 4^2 = 1200 - 4^2 = 1200 - 16 = 1184.$

9. Значения данных выражений вычисляются и сравниваются.

е) $5^3 - 3^2$ и $3^3 + (2^2)^2$

Поскольку $5^3 - 3^2 = 125 - 9 = 116$ и $3^3 + (2^2)^2 = 27 + 16 = 43$, числа 116 и 43 сравниваются.

Таким образом, 116> 43.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. К доске вызывают 2 учеников и одному из них предлагается написать несколько степеней числа 4, а другому — несколько степеней числа 5. Затем ученики сравнивают полученные значения.

Углубление. К доске вызывают 3 учеников. Ученики выбирают разные однозначные числа. Затем каждый ученик возводит выбранное число в степень, равную числу, выбранному другими учениками, и читает полученные выражения.

Учитель также может давать ученикам различные задания на рабочих листах.

В технически оснащенных классах можно выполнять подобные интерактивные задания:

https://www.k5learning.com/free-math-worksheets/sixth-grade-6/exponents/exponents-whole-number-base-hard

Игра. Учитель записывает на доске 3 однозначных числа. Ученикам дается задание определить, какое из этих чисел должно быть основанием, а какое — показателем степени, чтобы получилось наименьшее число. Побеждает тот игрок, который быстрее всех найдет ответ. Например, если написаны числа 2, 5 и 6, то из этих чисел 5^2 будут наименьшим вариантом. Увеличивая количество чисел (то есть записывая на доске число 4 или 5), игру можно организовать и между командами.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:

https://www.mathnook.com/math2/cross-traffic-exponents.html
https://www.mathnook.com/math/math-speed-racing-exponents.html
https://www.mathnook.com/math/pyramid-math-2.html
https://www.mathnook.com/math2/mathpup-ppap-exponents.html
https://mrnussbaum.com/exponents-online
https://www.mathplayground.com/ASB_Otter_Rush.html
https://games.legendsoflearning.com/game/exponent-monsters/3776?partner=legends-public&media=game

Решение задач

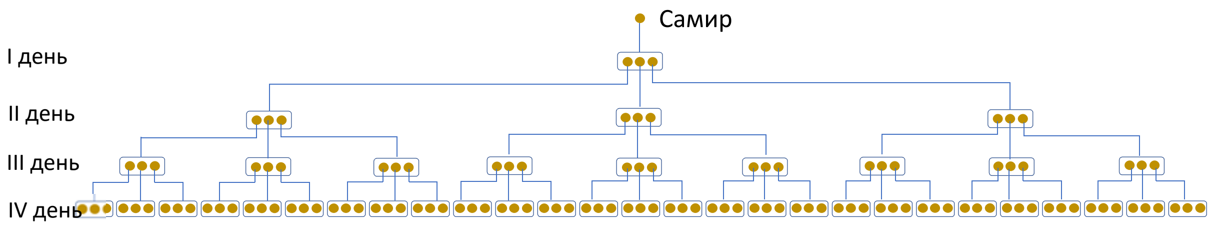
11. В задаче требуется найти, сколько человек получит открытку на 4-й день и за 4 дня.

Решение задачи:

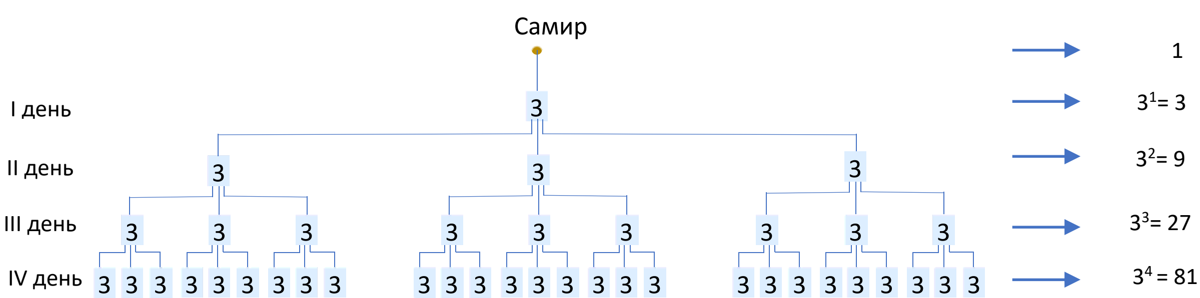
- Находится, сколько человек получит открытку на 4-й день. $3^4 = 81$.
- Находится, сколько человек получит открытку за 4 дня.

$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$.

Задачу можно представить схематически следующим образом:

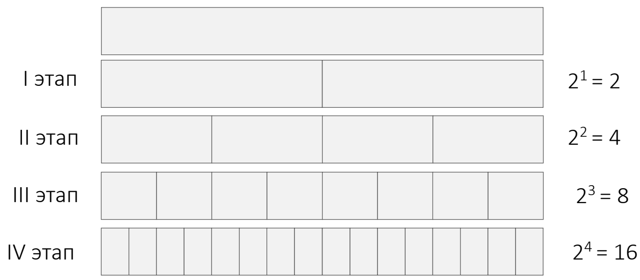


Учитель может вместо точек написать соответствующие числа.



Ответ: За 4 дня открытку получит 120 человек.

12. В этом задании, носящем образовательный характер и включающем интеграцию с предметом биологии, даются сведения о процессе деления клетки на две клетки – митозе. В материале ученикам сообщается о развитии клеток, которые делятся на две, а через определенный промежуток времени каждая из них снова делится на две клетки, а для наблюдения за этим процессом под микроскопом используются прозрачные чашки, называемые чашками Петри.
Привлечение. Учитель берет бумажную ленту, разрезает ее ножницами и делит на две равные части. каждая часть ленты делится на 2, и за 4 шага она разделяется на равные части. На каждом этапе ученикам задаются вопросы:
– Сколько частей получилось? Как это можно выразить через степень числа? Если разделить 3 листа бумаги на такие части, сколько частей получится каждый раз? Как написать это в виде выражения, содержащее степень?



Решение задачи:
• Находится, сколько клеток будет в чашке через 1 час. $24 \cdot 2^1 = 48$
• Исходя из приведенной выше аналогии, находится, сколько клеток будет в чашке через 3 часа. $24 \cdot 2^3 = 192$.
Ответ: Через 1 час будет 48 клеток, а через 3 часа будет 192 клетки.
К сведению учителя. Задания такого типа помогают ученикам хорошо освоить понятие «степень» и развить способность применять его для решения задач. Решение подобных задач может в будущем помочь легче справиться с задачами, которые будут представлены в разделе «Последовательности». Задачи помогают детям в ~~дальнейшем~~ развивать знакомство с новым действием, использовать это действие в реальных жизненных ситуациях, а также формировать привычки правильного выполнения последовательности действий при вычислении значений выражений. Давая ученикам аналогичные задачи, можно еще больше закрепить полученные знания.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Записывает и читает произведение одинаковых множителей в виде степени.	Рабочие листы, учебник, РТ
Умеет вычислять степень натурального числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Правильно выполняет порядок выполнения действий (включая степень) в числовых выражениях без скобок.	Рабочие листы, учебник, РТ
Правильно выполняет порядок выполнения действий (включая степень) в числовых выражениях со скобками.	Рабочие листы, учебник, РТ

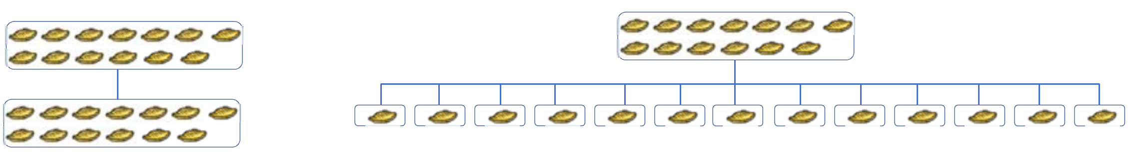
ТЕМА 1.2. Простые и составные числа

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.1.1. Определяет простые и составные числа, записывает натуральное число в виде произведения простых множителей.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	● Определяет простые и составные числа. ● Раскладывает составное число на простые множители разными способами (используя разделение чертой, дерево множителей, признаки делимости).
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Таблица простых чисел, рабочие листы
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	*https://www.k5learning.com/free-math-worksheets/sixth-grade-6/factoring/factoring-0-100-into-prime-factors* *https://www.k5learning.com/free-math-worksheets/sixth-grade-6/factoring/factoring-2-500-into-prime-factors* *https://www.pw.live/maths-doubts/what-are-prime-numbers-with-examples* *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Prime_numbers/#:~:text=Prime%20numbers%20and%20their%20properties,their%20mystical%20and%20numerological%20properties.*

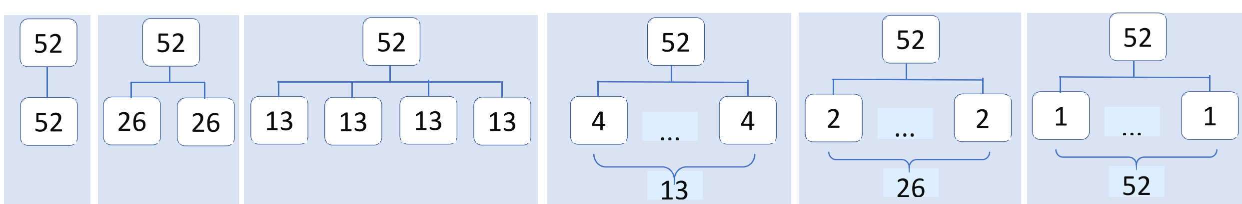
Побуждение. Учитель вызывает к доске двух учеников. Он дает одному из них 10 пуговиц, а другому – 7. Учитель дает задание ученикам, стоящим у доски, распределить пуговицы между другими учениками так, чтобы у каждого было более 1 пуговицы. Он может задавать ученикам наводящие вопросы:
– Сколькими способами можно распределить 10 пуговиц? Сколькими способами можно распределить 7 пуговиц?

Исследование-обсуждение

Даются ответы на вопросы об упаковке 13 шекербуры, испеченных пекарем.
• Ученики сообщают, что можно разложить по 13 шекербуры в одну коробку или по 1 шекербуре в каждую из 13 коробок. Учитель может схематически описать это следующим образом.



• 4 пекаря вместе испекли 52 шекербуры Ученики могут сказать, что шекербуры можно распределить с использованием делителей числа 52: в 1 коробке 52 штуки, в 2 коробках по 26 штук, в 4 коробках по 13 штук, в 13 коробках по 4 штуки, в 26 коробках по 2 штуки и в 52 коробках по 1 штуке. Учитель может описать это схематически так.



Ответы на эти вопросы помогут повторить знания о делителях числа, а также развить навыки практического применения этих знаний.

Изучение Простые и составные числа

С простыми числами ученики знакомы с 4-го класса. Важно, чтобы учитель еще раз дал информацию об этом. Подчеркивается, что число делителей натурального числа конечно. Упоминается, что каждое натуральное число делится как на единицу, так и на себя. Ученикам можно предложить выбрать число и

посчитать делители этого числа. При этом особое внимание уделяется тому, какое число имеет только два делителя, и исследуется отличие этих чисел от других. Ученикам еще раз объясняется, что числа, которые делятся только на 1 и на само себя, являются простыми числами. С другой стороны, ученики могут различать числа, имеющие более двух делителей, и узнают, что такие числа называются составными. Подчеркивается, что число 1 не является ни простым, ни составным числом.
В технически оснащенных классах можно проверить, является ли данное число простым или нет, также с помощью этого сайта.
http://www.math.com/students/calculators/source/prime-number.html

Подумай!

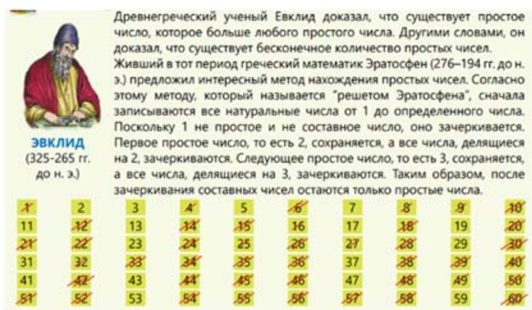
Для ответа на вопрос «Как объяснить, что все простые числа, кроме 2, нечетные?» ученикам можно задать наводящие вопросы о четных и нечетных числах. Ученики высказывают мнения о делителях четных и нечетных чисел и отмечают, что четные числа делятся не только на себя, но и на 1, и на 2. Это означает, что все четные числа, кроме 2, являются составными. Другими словами, *все простые числа, кроме 2, являются нечетными*.

Задания

1. Задание можно организовать в виде соревнования между группами. Класс делится на несколько групп, а доска — на соответствующее количество частей с помощью вертикальной линии. По команде учителя «старт» группы приступают к выполнению задания на доске. Каждый участник группы по очереди подходит к доске и отмечает, является ли число простым или составным в своей части. Затем к доске подходит очередной участник другой группы и записывает следующее число. Побеждает та группа, которая быстро и правильно выполнит задание.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики думают, что все нечетные числа простые. В подобном случае им можно посоветовать воспользоваться «Решетом Эратосфена» или таблицей простых чисел.

Из истории математики


Древнегреческий ученый Евклид доказал, что существует простое число, которое больше любого простого числа. Другими словами, он доказал, что существует бесконечное количество простых чисел.
Живший в тот период греческий математик Эратосфен (276–194 гг. до н. э.) предложил интересный метод нахождения простых чисел. Согласно этому методу, который называется "решетом Эратосфена", сначала записываются все натуральные числа от 1 до определенного числа. Поскольку 1 не простое и не составное число, оно зачеркивается. Первое простое число, то есть 2, сохраняется, а все числа, делящиеся на 2, зачеркиваются. Следующее простое число, то есть 3, сохраняется, а все числа, делящиеся на 3, зачеркиваются. Таким образом, после зачеркивания составных чисел остаются только простые числа.

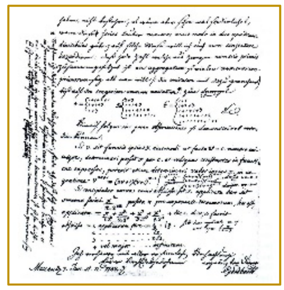
ЭВКЛИД
(325-265 гг. до н. э.)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	32	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

В учебнике объясняется материал, данный в блоке «Из истории математики». «Решето Эратосфена» можно выполнить как практическое задание. Для этого на доске пишутся числа от 1 до 100 и число 1 зачеркивается. Затем к доске приглашается ученик для выполнения каждого этапа.
1-й шаг. Число 2 сохраняется, а все числа, делящиеся на 2, зачеркиваются.
2-й шаг. Следующее число, которое не зачеркнуто, (3) сохраняется, а последующие числа, делящиеся на 3, зачеркиваются. В это время числа, делящиеся на 3 и 2 (6, 12 и т.д.), зачеркиваются 2 чертами.
3-й шаг. Следующее число, которое не зачеркнуто, (5) сохраняется, а последующие числа, делящиеся на 5, зачеркиваются.
Здесь внимание учеников можно обратить на черты, зачеркивающие числа. Итак, в результате работы алгоритма 2 черты над числом указывают на то, что число состоит из произведения 2-х разных простых множителей, 3 черты показывают, что число состоит из произведения 3-х разных простых множителей и т.д.
Алгоритм можно наглядно посмотреть здесь: *https://www.youtube.com/watch?v=klcIklsWzrY*
https://www.geogebra.org/m/uGX53dy7
Ученики знакомятся с древнегреческим ученым Евклидом и его трудом «Начала». Можно сослаться на доказательство теоремы Евклида о простых числах. *https://mathworld.wolfram.com/EuclidsTheorems.html*
В технически оснащенных классах можно выполнять подобные интерактивные задания:
https://www.transum.org/Maths/Game/Primes/Pick.asp
https://www.abcya.com/games/number_ninja_factors
К сведению учителя! Если двузначное число является составным, оно должно делиться на одно из простых однозначных чисел. Чтобы определить, является ли данное двузначное число простым числом, достаточно проверить, делится ли это число на 2, 3, 5 и 7. Если оно ни на что не делится, то данное двузначное число является простым числом. Ученикам можно дать задания, связанные с определением простых чисел среди чисел 70-80, 80-90, 90-100 с помощью этого метода.

3. Числа, соответствующие пустым клеткам, находятся методом подбора. В некоторых случаях можно использовать таблицу простых чисел.

5. Задача решается методом подбора. В последнем примере требуется выразить одно число как сумму двух простых чисел. Для этого отмечают, что одно из этих чисел является четным простым числом, то есть 2. Целесообразно обсудить причину с учениками.



К сведению учителя! Ученикам можно представить список задач Гильберта, в который входит одна из нерешенных проблем — проблема Гольдбаха. Проблема Гольдбаха гласит: *любое четное число, начиная с 4, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел*.

7 июня 1742 года немецкий математик Кристиан Гольдбах (*Christian Goldbach*) написал в письме Леонарду Эйлеру (*Leonhard Euler*), что любое нечетное число, большее 5, можно представить как сумму трех простых чисел. Эта гипотеза называется **тернарной проблемой Гольдбаха**. Российский учёный И.М. Виноградов и другие трудились над доказательством гипотезы. В 2013 году Херальд Хельфготт (*Harald Andrés Helfgott Seier*) предоставил полное доказательство этого факта.

Изучение Разложение составного числа на простые множители

Ученикам объясняется, что все составные числа можно разделить на простые множители. Отмечается, что для этого более удобны несколько методов, в том числе использование метода разделения чертой, дерева множителей и признаков делимости. Сначала методом разделения чертой объясняется разложение составного числа на простые множители, затем это же число раскладывается на простые множители с помощью дерева множителей. С учениками обсуждается, какой метод более эффективен. Ученикам объясняется, как записывать разложение на простые множители, используя степень.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные материалы для изучения:
https://www.numberempire.com/numberfactorizer.php

К сведению учителя! Помимо учебного материала ученикам может быть предоставлена информация об определении количества простых множителей, различных простых множителей и числа простых делителей заданного числа, используя разложение числа на простые множители.

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	Простые множители: 2, 2, 5	Число простых множителей: 3
	Разные простые множители: 2, 5	Число разных простых множителей: 2
	Простые делители: 2, 5	Число простых делителей: 2

В качестве примера ученикам можно показать, как найти все делители нескольких чисел с 2 или 3 простыми множителями. 1, само число и произведение различных комбинаций его простых множителей являются делителями числа.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot 5 = 10 \qquad 3 \cdot 5 = 15$$

Таким образом 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30 делители числа 30.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель вызывает к доске 3 учеников и дает каждому из них задание написать трехзначное число. Затем он дает задание 1-му ученику разложить написанное им число на простые множители методом разделения чертой, 2-му ученику разложить написанное им число с помощью дерева множителей, а 3-му ученику – с помощью признаков делимости.

Углубление. Учитель вызывает к доске нескольких учеников. Дает им задание написать составное число, разложить его на простые множители, найти количество различных простых множителей, найти несколько делителей, используя простые множители.

В технически оснащенных классах можно выполнять интерактивные задания.
https://www.transum.org/Maths/Activity/Prime/

Решение задач

12. В задаче требуется определить, при каком условии площадь прямоугольника со сторонами, выраженными натуральными числами, является простым числом, а его периметр — простым или составным числом.

Привлечение. Учитель дает ученикам задание нарисовать в тетради прямоугольник, записать натуральные числа, соответствующие сторонам прямоугольника, найти периметр и площадь прямоугольников. Затем ученикам задаются вопросы:

– У кого площадь нарисованного прямоугольника равна простому числу? Чему должна быть равна одна из сторон, чтобы площадь была простым числом? У кого периметр нарисованного прямоугольника равен простому числу? Почему периметр прямоугольника не является простым числом? Может ли периметр прямоугольника быть простым числом, если его стороны — простые числа? Может ли площадь прямоугольника быть простым числом, если его стороны — простые числа?

Решение задачи:

• Площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Если одна из сторон прямоугольника — простое число, а другая — 1, то площадь будет простым числом.

• Периметр прямоугольника равен сумме всех его сторон, или удвоенной сумме длины и ширины. Следовательно, периметр прямоугольника — четное число, то есть составное число.

Ответ: Если одна из сторон прямоугольника — простое число, а другая — 1, то его площадь будет простым числом. Периметр прямоугольника — составное число.

14. Необходимо определить, сколько минимум тарелок потребуется для равномерного распределения 91 печенья на мероприятии, а также сколько печений будет в каждой тарелке.

Решение задачи:

• Число 91 раскладывается на простые множители: $91 = 7 \cdot 13$.

• 91 печенье можно равномерно распределить по 91 тарелке, если в каждой будет по 1 печенью, по 7 тарелкам, если в каждой будет по 13 печений, и по 13 тарелкам, если в каждой будет по 7 печений.

Ответ: Для распределения печений необходимо как минимум 7 тарелок. В этом случае в каждом тарелке будет 13 печений.

Примечание: Поскольку в задаче требуется распределить поровну, случай разложить 91 печенье в 1 тарелку не рассматривается.

15. В задаче требуется найти, сколько карандашей и сколько кисточек достанется каждому ребенку.

Решение задачи:

• Число 55 раскладывается на простые множители. $55 = 5 \cdot 11$.

Указываются два варианта: каждому из 5 учеников может достаться по 11 карандашей, или 11 ученикам может достаться по 5 карандашей.

• Число 22 раскладывается на простые множители. $22 = 2 \cdot 11$.

В этом случае указываются два варианта: каждому из 2 учеников может достаться по 11 кистей, или 11 ученикам может достаться по 2 кисти.

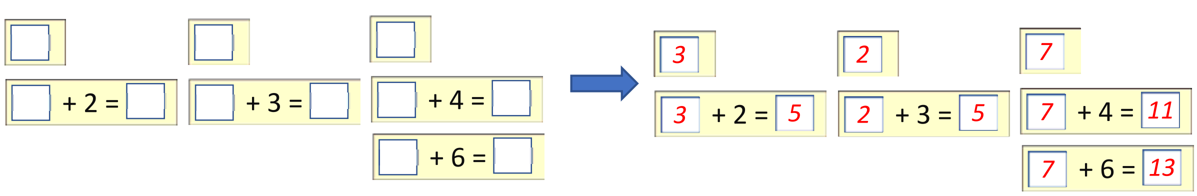
Оба случая сравниваются и определяется, что в классе 11 учеников. Каждый ученик получает 5 карандашей и 2 кисточки.

Ответ: 5 карандашей и 2 кисточки.

16. В задаче требуется определить возраст самого младшего человека в парке.

Привлечение. На доске рисуется пустая клетка. Учитель задает ученикам вопросы:

– Какое простое число нужно записать в клетку, чтобы число, большее этого числа на 2 единицы, тоже было простым числом? Какое простое число нужно записать в клетку, чтобы число, большее этого числа на 3 единицы, тоже было простым числом? Какое простое число нужно написать в клетку, чтобы числа, на 4 и 6 единиц больше него, также были простыми? Ученикам предлагается найти наименьшее возможное число. Ученики методом подбора находят простое число, подходящее для всех трех случаев, и проверяют ответ, записывая его в клетку.



Решение задачи:
1-й способ.
• Задача решается методом подбора.
Изначально возраст самого младшего человека в парке принимается равным 2 годам. Тогда возраст человека, который старше его, составляет 4 года. Поскольку 4 — составное число, возраст самого младшего не может быть 2.
Тогда возраст самого младшего человека в парке принимается равным 3 годам.
Задачу можно решить, составив таблицу методом подбора. Если возраст одного из людей представляет собой составное число, эти клетки можно оставить пустыми, поскольку нет необходимости определять возраст остальных. Ответ находится, когда во всех ячейках стоят простые числа.

Возраст людей в парке (от младшего к старшему)					
I человек (самый младший)	II человек	III человек	IV человек	V человек	VI человек
2	2 + 2 = 4 *Составное число*				
3	3 + 2 = 5 *Простое число*	3 + 6 = 9 *Составное число*			
5	5 + 2 = 7 *Простое число*	5 + 6 = 11 *Простое число*	5 + 8 = 13 *Простое число*	5 + 12 = 17 *Простое число*	5 + 14 = 19 *Простое число*

2- й способ.
В условии задачи следует учитывать, что числа, показывающие возрастные различия (кроме 2), являются составными числами. Итак, возраст самого молодого человека в парке должен быть нечетным числом, чтобы полученные суммы также были простыми числами. С другой стороны, число 6 делится на 2 и 3, число 8 — на 2, 4 и 8, число 12 — на 2, 3, 4, 6 и 12, а число 14 — на 2, 7 и 14, поэтому возраст самого младшего человека не может быть равен ни одному из этих делителей. В противном случае сумма возраста самого младшего человека и этих чисел делилась бы на его возраст. Следовательно, возраст самого младшего человека должен быть числом, делящимся на 5. Чтобы сумма была простым числом, минимальный возраст принимается равным 5. Ученикам говорят, что это решение в большей степени найдено методом подбора, и другие варианты не рассматриваются.
Ответ: Самому младшему человеку в парке 5 лет.
Проект. Каждому из учеников предлагается выразить свой рост в сантиметрах и разложить его на простые множители. Каждого можно попросить сложить простые делители числа, соответствующие его росту, и коллективно записать эти числа в порядке возрастания.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет простые и составные числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Раскладывает составное число на простые множители, используя разделение чертой.	Рабочие листы, учебник, РТ
Раскладывает составное число на простые множители, используя дерево множителей.	Рабочие листы, учебник, РТ
Раскладывает составное число на простые множители, используя признаки делимости.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 1.3. Наибольший общий делитель

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.1.2. Применяет алгоритм нахождения НОД и НОК чисел.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	● Находит наибольший общий делитель (НОД) двух чисел. ● Определяет взаимно простые числа. ● Использует НОД при сокращении дробей.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	*https://www.free-training-tutorial.com/rounding/rounding-spaceships.html* *https://youtu.be/UVJvATSDSNA* *https://youtu.be/S53MSB6LYkI?list=PLf-DFjBsn8uUKkYjupLPvozzlZ5gDCN1n* *https://www.k5learning.com/free-math-worksheets/sixth-grade-6/factoring/greatest-common-factor-gcf-2-numbers-2-50* *https://www.k5learning.com/free-math-worksheets/sixth-grade-6/factoring/greatest-common-factor-gcf-3-numbers-2-100*

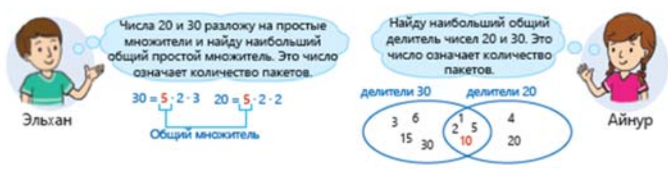
Побуждение. Учитель пишет на доске любые два числа, например 40 и 50, и просит разложить их на простые множители. Затем он просит найти и сравнить делители этих чисел.

40 = 2 · 2 · 5	50 = 2 · 5 · 5
40 = 5 · 8 = 4 · 10	50 = 2 · 25 = 5 · 10

Учитель задает ученикам вопросы:
- Чем отличается разложение чисел 40 и 50 на простые множители?
- Какие числа являются общими делителями чисел 40 и 50?

Исследование-обсуждение

Эльхан и Айнур предложили разные способы раздать гостям поровну 30 магнитов и 20 роботов.



Но их подходы разные. Эльхан думает найти количество гостей между простыми делителями 20 и 30. Айнур предлагает найти количество гостей среди общих делителей чисел 20 и 30. Очевидно, что число гостей — это наибольшее число между общими делителями 30 и 20. То есть, Айнур высказывает более правильное мнение.

Изучение Нахождение наибольшего общего делителя (НОД)

Ученики находили наибольший общий делитель двух чисел из списка общих делителей этих чисел. Ученикам объясняется, что находить подобным способом НОД больших чисел зачастую не удобно. Поскольку данные числа делятся на их НОД, простые множители НОД также являются простыми множителями этих чисел. То есть, чтобы найти НОД двух чисел, необходимо эти числа разложить на простые множители и взять произведение их общих простых множителей.

Подумай!

Так как НОД двух чисел выбирается из общих делителей этих чисел, НОД не может быть больше этих чисел. Поскольку каждое число также является собственным делителем, то НОД $(a, a) = a$.

Задания

1. По образцу находится НОД чисел. Здесь числа раскладываются на простые множители и находится произведение общих простых множителей, исходя из деления обоих чисел на НОД.

К сведению учителя! Целесообразно ознакомить учеников с различными способами нахождения НОД двух чисел. Например, можно показать примеры нахождения НОД, написав разложение чисел со степенью или используя нахождение произведения общих простых множителей. Ученики могут быть проинформированы об алгоритме Евклида для поиска НОД. Применение алгоритма Евклида также очень актуально в современной информатике. Алгоритм Евклида больше подходит для написания программы поиска НОД чисел на компьютере.

При нахождении НОД двух чисел, НОД числа, полученного при вычитании меньшего числа из большего, и меньшего числа равно НОД исходных чисел. Таким образом, уменьшая большие числа с помощью этого алгоритма, можно найти их НОД. Алгоритм продолжается до тех пор, пока разность не станет равна нулю.

Алгоритм Евклида поиска НОД (с вычитанием)

1. Из большего числа вычитается меньшее.
2. Если разность равна нулю, то НОД равен этим числам, так как числа равны. Выполнение алгоритма останавливается.
3. Если разность не равна нулю, большее число заменяется разностью.
4. Переход к шагу 1.

Алгоритм продолжается на 2-м шаге до тех пор, пока разность не станет равной нулю.

НОД (32, 40) = НОД (32, 8) = НОД (24, 16) = НОД (16, 8) = НОД (8, 8) = 8

НОД (32, 40) =?
Решение: 40 – 32 = 8
32 – 8 = 24
24 – 8 = 16
16 – 8 = 8
8 – 8 = 0

Аналогично, вместо вычитания, используя операцию деления, можно сократить числа и найти их НОД. В это время алгоритм продолжается до получения 1 в частном.

Алгоритм Евклида поиска НОД (с делением)

1. Большее число делится на меньшее.
2. Если большее число нацело делится на меньшее, то меньшее число равно НОД.
3. Если большее число не делится на меньшее, то большее число заменяется остатком.
4. Переход к 1-му шагу.

Алгоритм продолжается на 2-м шаге до тех пор, пока не поделится нацело.

НОД (70, 20) = НОД (20, 10) = 2

НОД (20, 70) = ?
Решение: 70 : 20 = 3 (ост. 10)
20 : 10 = 2

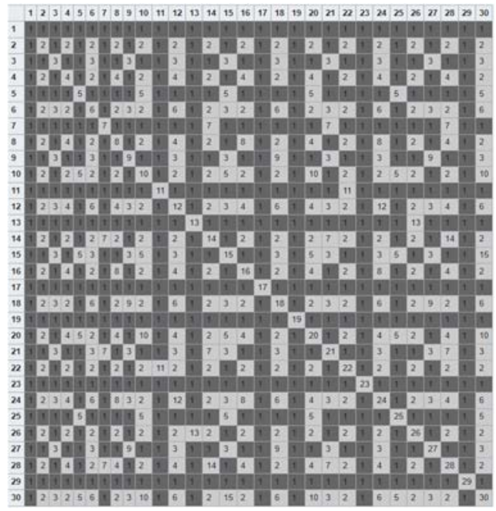
3. Чтобы равенство было верным, находится несколько значений переменной.
а) Поскольку и x, и 30 делятся на 30, то x кратное числа 30.
НОД (30, x) = 30; x = 30, 60, 90, 120, ...
б) Поскольку и m, и 20 делятся на 20, то m кратное числа 20.
НОД (m, 20) = 20; m = 20, 40, 60, 80, ...
в) Поскольку и k, и 20 делятся на k, то k делитель числа 20.
НОД (k, 20) = 20; k = 1, 2, 4, 5, 10, 20.
Ученикам можно дать задание показать аналогичные примеры.
4. Используя образец задания, находится НОД данных трех чисел, разложив их на простые множители. Поскольку НОД является делителем всех трех данных чисел, он равен произведению общих простых множителей.
К сведению учителя! Ученикам можно предоставить информацию о том, как находить НОД трех и более чисел. Например, чтобы найти НОД трех чисел, сначала находится НОД двух из этих чисел, а затем вычисляется НОД полученного и третьего числа. НОД (a, b, c) = НОД (НОД (a, b), c).
При выполнении 4-го задания это правило можно использовать для объяснения нахождения НОД.
г) НОД (30, 45, 75) = НОД (НОД (30, 45), 75) = НОД (15, 75) = 15.

5. При записи разложения чисел на простые множители с помощью степени находится их наибольший общий делитель. Внимание учеников концентрируется на наименьшей степени общих множителей. Сначала определяются общие множители и выбираются с наименьшей степенью, затем находится их произведение.
б) $a = \underline{2}^2 \cdot \underline{3}^1 \cdot \underline{5}^2$, $b = \underline{2}^3 \cdot \underline{3}^1 \cdot \underline{5}^1$ Определяются общие множители: 2; 3; 5.
Общие множители выбираются с наименьшей степенью и находится их произведение: НОД (a, b) = $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Изучение **Взаимно простые числа**

Дается определение взаимно простых чисел, информация о том, что НОД этих чисел равен 1, приводятся примеры.

Запомни!



Ученикам сообщается, что можно определить взаимно простые числа, не раскладывая их на простые множители. Ученикам объясняется, что два последовательных натуральных числа, два последовательных нечетных числа и два простых числа являются взаимно простыми числами. В это время внимание учеников направляется на то, что каждое число взаимно простое с числом 1.

К сведению учителя! Полезно предоставить ученикам дополнительную информацию о взаимно простых числах, показывая примеры.

• Если одно из чисел равно 1, эти числа являются взаимно простыми числами.

• Два последовательных нечетных числа являются взаимно простыми числами.

• Два последовательных четных числа не являются взаимно простыми числами и их НОД равен 2.

В технически оснащенных классах ученикам можно показать таблицу взаимно простых чисел от 1 до 30:
https://wiki.fenix.help/matematika/vzaimno-prostye-chisla

Изучение Полное сокращение дробей

Некоторые навыки сокращения дробей ученики приобрели еще с младших классов. В этой теме они научатся сокращать дроби, разделив числитель и знаменатель на их НОД. Если числитель и знаменатель дроби являются взаимно простыми числами, то их НОД равен 1. В этом случае дробь является несократимой.

Задания

10. Учитывая, что числитель и знаменатель дроби имеют общие множители, находится их НОД. Числитель и знаменатель делятся на НОД, дробь полностью сокращается. Например: $\frac{32}{60}$ ⟶ 32 и 60 имеют общие делители, поэтому дробь можно сократить.

$$\text{НОД }(32, 60) = 4; \quad \frac{32}{60} = \frac{32:4}{60:4} = \frac{8}{15}$$

11. Чтобы записать правильные и несократимые дроби с заданным знаменателем, прежде всего необходимо определить числа, меньшие числа в знаменателе и взаимно простые с ним.

г) Определяются числа, меньшие 20 и взаимно простые с ним. 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

Записываются $\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{17}{20}, \frac{19}{20}$ правильные и несократимые дроби со знаменателем 20:

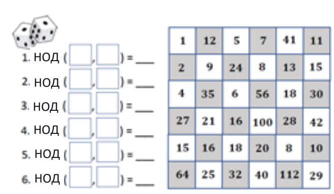
Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске два четных числа (оба числа даны в виде разложения на простые множители, одно делится на другое или разложение обоих чисел на простые множители со степенями). Ученикам дается задание объяснить, какими способами находится НОД этих чисел.

Можно задать ученикам привести примеры взаимно простых чисел, а также устно сократить некоторые дроби, проведя опрос среди всего класса.

На доске можно написать несколько примеров на сокращение дробей и попросить учеников ответить на них устно.

Углубление. Учитель записывает на доске 3 числа и предлагает найти НОД этих чисел. Несколько учеников, которые нашли ответ разными способами, приглашаются к доске. Каждый ученик объясняет, как он нашел ответ.



Практическое задание. Класс делится на группы. Каждой группе раздаются листы с заданиями и игральные кости. Кости бросают 2 раза. Определяется число на пересечении строки, соответствующей результату на 1-м кубике, и столбца, соответствующего результату на 2-м кубике. В пустую клетку записываются любые два числа, НОД которых равен этому числу. Победителем объявляется группа, которая быстрее и правильно заполнит пустые клетки рабочего листа.

Рабочий лист можно скачать по данной ссылке:
https://drive.google.com/file/d/11D7fgnxvXYbwNCHZFxh8DCqLeGcAJ30w/view?usp=sharing

Решение задач

12. В задаче требуется найти наибольшее количество килограммов фруктов, которое можно собрать в один ящик.
Решение задачи:
• Чтобы собрать одинаковое количество фруктов в каждый ящик, нужно найти числа, на которые делятся 240 и 270. А чтобы в каждый ящик поместилось как можно больше фруктов, необходимо найти НОД чисел 240 и 270: НОД (240, 270) = 30.
Ответ: 30 кг

13. В задаче требуется найти наибольшее количество классов, на которые можно разделить учеников, чтобы в каждом классе было одинаковое количество мальчиков и девочек, и сколько в этом случае мальчиков и девочек будет учиться в каждом классе.
Решение задачи:
• Находится НОД чисел 91 и 119. НОД (91, 119) = 7.
• Находится сколько мальчиков и девочек в каждом классе.
Мальчики ⟶ 91 : 7 = 13; Девочки ⟶ 119: 7 = 17.
Ответ: 7 классов; в каждом классе 13 мальчиков, 17 девочек.

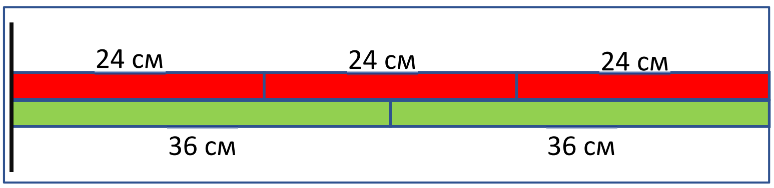
14. В задаче требуется найти, наибольшее количество букетов из 24 лилий, 30 нарциссов и 36 роз, которые можно составить из одинакового количества цветов в каждом букете. В этом случае требуется найти, сколько каждого цветка будет в букете.
Решение задачи:
• Вычисляется НОД чисел 24, 30 и 36, чтобы найти наибольшее возможное количество букетов.
НОД (24, 30, 36) = 6.
• Находится число цветов в одном букете.
Лилии ⟶ 24 : 6 = 4; Нарциссы ⟶ 30: 6 = 5; Розы ⟶ 36 : 6 = 6.
Ответ: 6 букетов; 4 лилии, 5 нарциссов и 6 роз.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит наибольший общий делитель (НОД) двух чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет взаимно простые числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Использует НОД при сокращении дробей.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 1.4. Наименьшее общее кратное

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.1.2. Применяет алгоритм нахождения НОД и НОК чисел.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	● Находит НОК двух (трех) чисел. ● Применяет свойства НОД и НОК. ● Приводит дроби к общему знаменателю, используя НОК. ● Решает задачи, используя НОК.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, картонная лента
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	*https://video.edu.az/video/1169* *https://video.edu.az/video/4137* *https://video.edu.az/video/4193* *https://mathkite.com/least-common-multiple-lcm/* *https://www.twinkl.com/teaching-wiki/least-common-denominator* *https://www.sheppardsoftware.com/math/fractions/least-common-denominator/* *https://www.cuemath.com/numbers/least-common-denominator-lcd/*



Побуждение. Учитель вызывает к доске двух учеников. Один из них получает 6 вырезанных из картона красных лент длиной 24 см, а другой — 4 зеленые ленты длиной 36 см. Учитель проводит вертикальную линию на доске и просит учеников приклеить ленты, начиная от этой линии, соединяя их концы с помощью клейкой ленты. После выполнения задания можно задать вопросы классу:
• На каком расстоянии концы красных и зеленых лент будут на одном уровне?
• Сколько раз красная лента будет на этом расстоянии? А как насчет зеленой ленты?
Учитель просит учеников продолжать приклеивать ленточки в том же порядке.
• На каком расстоянии концы красной и зеленой лент в следующий раз окажутся на одном уровне?

Исследование-обсуждение

В задании указано, что занятия Лалы проходят в даты, делящиеся на 3, а занятия Самира — в даты, делящиеся на 5. Учитель может задавать ученикам наводящие вопросы:
- В какие дни месяца Лале следует идти на тренировку? 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30
- В какие дни месяца Самиру следует приходить на тренировку? 5, 10, 15, 20, 25, 30
Эти даты сравниваются. Определяются совпадающие даты: 15, 30.
Ученикам можно предложить найти наименьшую из совпадающих дат. Ученики могут сказать, что Лала и Самир пойдут на занятия в один и тот же день не раньше 15-го числа месяца.

Изучение Нахождение наименьшего общего кратного (НОК)

Наименьшее кратное двух чисел находится из списка общих кратных этих чисел. Ученикам объясняется, что находить таким образом НОК больших чисел зачастую не удобно. Для нахождения НОК чисел используется их разложение на простые множители. Поскольку НОК двух чисел делится на оба числа, в разложении НОК на простые множители должны участвовать простые множители обоих чисел.
Например, чтобы найти НОК (60, 24), оба числа раскладываются на простые множители.
Простые множители в разложении числа 60 умножаются на простые множители, которые присутствуют в разложении числа 24, но отсутствуют в разложении 60.
НОК (60, 24) разложение 60 на простые множители недостающий простой множитель
По этому же правилу простые множители в разложении числа 24 умножается на простые множители, которые присутствуют в разложении 60, но отсутствуют в разложении 24.
НОК (60, 24) разложение 24 на простые множители недостающий простой множитель

В технически оснащенных классах можно играть в интерактивные игры.
https://www.mathplayground.com/factortrees.html

Внимание!

На примерах объясняется, что при полном делении одного числа на другое их НОК равен делимому. Отмечается, что простые множители обоих чисел входят в число простых множителей НОК.

Подумай!

Деление НОК двух чисел на их НОД объясняется разложением их на простые множители. Отмечается, что два данных числа делятся на свой НОД. С другой стороны, НОК делится на оба заданных числа. Итак, НОК двух чисел делится на их НОД. Например:

НОК (24, 36) = 72, НОД (24, 36) =12, НОК (24, 36) : НОД (24, 36) = 72 : 12 = 6.

Задания

1. Находится НОК с помощью разложения на простые множители.
в) $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 2 \cdot \underline{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \underline{7}$
Определяются множители, присутствующие в разложении числа b и недостающие в разложении числа a. При нахождении НОК разложение числа a на простые множители умножается на недостающие простые множители в числе a:
НОК $(a, b) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 = 8820$
2. В этом задании заданные числа раскладываются на простые множители, а затем по соответствующему алгоритму находится НОК.

42 и 63 ⟶ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ $63 = \underline{3} \cdot 3 \cdot 7$ НОК $(21, 63) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \underline{3} = 189$
35 и 50 ⟶ $35 = 5 \cdot \underline{7}$ $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ НОК $(35, 50) = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \underline{7} = 350$

3. Без вычислений можно объяснить, что ответы неправильные на основе деления НОК двух чисел на оба числа.
НОК (22, 200) = 11; Число 11 не делится на 22 или 200. Значит ответ не верен.
НОК (22, 200) = 44; Число 44 делится на 22, но не делится на 200. Значит ответ не верен.
НОК (22, 200) = 20; Число 20 не делится на 22 или 200. Значит ответ не верен.
5. Здесь используется произведение общих простых множителей чисел по образцу задания.

а) НОК (48, 80) =?
$48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3$
$80 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5$
Общие простые множители: 2, 2, 2, 2
Не общие простые множители: 3 и 5
НОК $(48, 80) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

в) НОК (120, 130) =?
$120 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$
$130 = \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot 13$
Общие простые множители: 2, 5
Не общие простые множители: 2, 2, 3, 13
НОК $(120, 130) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 1560$

6. По заданным условиям исследуется, какими простыми числами могут быть m и n. В это время НОК чисел *a* и *b* раскладывается на простые множители и искомые числа находятся путем сравнения.
б) Определяются общие простые множители чисел a и b.
$a = \underline{3} \cdot \underline{7} \cdot m$, $b = \underline{3} \cdot \underline{7} \cdot n$, ⟶ числа 3 и 7 общие простые множители.
Число 210 раскладывается на простые множители. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Числа 2 и 5 не общие простые множители. Это означает, что $m = 2$, $n = 5$ или $m = 5$, $n = 2$.
Таким образом, m и n простые числа.
7. Для того чтобы равенство было верным, используется известное свойство НОК, а именно, что НОК двух чисел, из которых одно делится на другое, равен делимому.
а) НОК $(20, a) = 20$; чтобы НОК чисел 20 и a был равен 20, число 20 должно быть делимым числа a, другими словами, число a должно быть делителем 20. Таким образом, $a = 1, 2, 4, 5, 10, 20$
б) НОК $(b, 20) = b$; чтобы НОК чисел 20 и b был равен b, число b должно быть делимым числа 20, то есть, $b = 20, 40, 60, 80, 100, 120$ и т.д.

Изучение Свойства НОД и НОК

Главным свойством НОД и НОК считается то, что произведение НОД и НОК двух чисел равно произведению этих чисел.

К сведению учителя! Ученикам может быть предоставлена информация о некоторых свойствах, вытекающих из этого свойства НОК и НОД. Например:

НОД $(k \cdot a, k \cdot b) = k \cdot$ НОД (a, b)
НОК $(k \cdot a, k \cdot b) = k \cdot$ НОК (a, b)

Если НОК (a, b): НОД $(a, b) = c$,
$a \cdot b = c \cdot$ НОД$^2(a, b)$
$a \cdot b \cdot c =$ НОК$^2(a, b)$

Учитывая возрастные уровни учеников, нет необходимости обосновывать, как получены эти свойства. Целесообразно предложить ученикам проверить справедливость этих свойств, подставив вместо переменных *a* и *b* различные числа.

Подумай! Если a и b взаимно простые числа, то НОД $(a, b) = 1$. Учитывая этот факт в формуле выше, получаем НОК $(a, b) = a \cdot b$.

10. Оба заданных условия учитываются при нахождении неизвестного.

а) НОД $(33, b) = 11$, НОК $(33, b) = 165$.

По свойствам НОД и НОК

$33 \cdot b = 11 \cdot 165$

$b = 55$

11. Для выполнения задания используются свойства НОД и НОК.

Из формулы НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = a \cdot b$ находится, что $\frac{a \cdot b}{\text{НОД}\,(a,b)} = \text{НОК}\,(a,b)$ или $\frac{a \cdot b}{\text{НОК}\,(a,b)} = \text{НОД}\,(a,b)$.

С другой стороны, если число b нацело делится на число a, НОК $(a, b) = b$ и НОД $(a, b) = a$.

а) $\frac{24 \cdot 48}{\text{НОК}\,(24,\ 48)} + \frac{72 \cdot 18}{\text{НОД}\,(18,72)} = \text{НОД}\,(24,\ 48) + \text{НОК}\,(72,18) = 24 + 72 = 96.$

12. Известно, если число b нацело делится на число a, их НОК $(a, b) = b$ *и* НОД $(a, b) = a$. С другой стороны, учитывается, что если a и b взаимно простые числа, то их НОК $(a, b) = a \cdot b$ и *НОД* $(a, b) = 1$.

в) $\frac{\text{НОК}\,(80,\ 160)}{\text{НОК}\,(5,\ 8)} = \frac{160}{40} = 4$

13. Находится НОК трех чисел.

г) НОК (18, 27, 45)

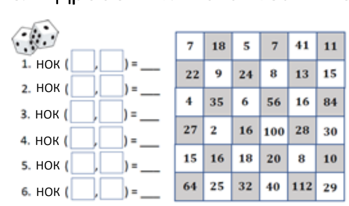
НОК (18, 27) = 54, НОК (54, 45) = 270

К сведению учителя! Нахождение двух чисел НОД и НОК, применение их свойств важно для развития у учеников навыков алгебраических манипуляций (упрощение без нахождения значения выражения, вычисление и т.п.) Для этого ученикам очень полезно выполнять задания, связанные с применением этих свойств, индивидуально и обсуждать результаты со всем классом. Задачи, связанные с применением некоторых простых свойств, целесообразно выполнять группами.

Изучение Приведение дробей к общему знаменателю

При сравнении дробей с разными знаменателями или выполнении операций сложения и вычитания с ними объясняется, что их приводят к общему знаменателю, и приводятся несколько примеров на нахождение дополнительных множителей.

Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики иногда не используют НОК при приведении дробей с разными знаменателями к общему знаменателю. Итак, когда знаменатели являются взаимно простыми числами, их произведение принимается за общий знаменатель дробей. Некоторые ученики используют этот приобретенный навык во всех ситуациях, что нецелесообразно. Целесообразно направить таких учеников на то, чтобы они научились различать случаи, когда знаменатели дробей являются взаимно простыми числами, и когда один из них является делителем другого. Во всех случаях ученикам следует предложить найти НОК знаменателей и привести их к общему знаменателю.



Практическое задание. Класс делится на группы. Каждой группе раздаются листы с заданиями и игральные кости. Кости бросают 2 раза. Определяется число на пересечении строки, соответствующей результату на 1-м кубике, и столбца, соответствующего результату на 2-м кубике. В пустую клетку записываются любые два числа, НОК которых равен этому числу. Победителем объявляется группа, которая быстрее и правильно заполнит пустые клетки рабочего листа.

Рабочий лист можно скачать по данной ссылке:

https://drive.google.com/file/d/1brERjnxFSc7AsxxOr3lDs3BC_G6ntRZn/view?usp=sharing

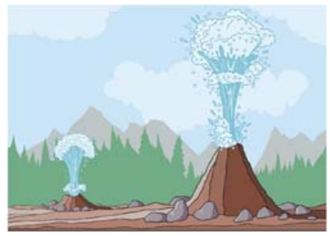
Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске две дроби и предлагает привести их к общему знаменателю. Ученики сравнивают свои методы решения и полученные результаты, и каждый ученик объясняет свой метод решения.

Углубление. Учитель вызывает к доске трех учеников. Одному из них дает задание сравнить две дроби с разными знаменателями, другому – найти сумму дробей с разными знаменателями, а третьему – выполнить действия сложения и вычитания над тремя дробями. С классом обсуждается время, затраченное на выполнение заданий, трудности, возникшие в процессе решения.

Работа в группах. Класс делится на несколько групп. Каждой группе даются три разных числа. Учитель дает ученикам задание найти НОК этих чисел, составить выражение, состоящее из дробей, знаменателями которых являются эти числа, написать задания, связанные со сравнением дробей. Затем каждая группа передает сформулированные на листах вопросы следующей группе (группы располагаются по кругу) для решения. В заключение все результаты обсуждаются.

Решение задач



17. В задании представлена образовательная информация о гейзерах, обеспечивающая междисциплинарную интеграцию. В задаче требуется найти время повторного одновременного извержения двух разных гейзеров.

Решение задачи.

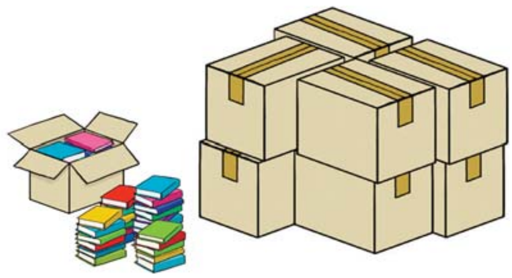
• Время, когда гейзеры снова извергнутся одновременно в один и тот же день, должно быть таким, чтобы оно делилось как на 4, так и на 6.

• Чтобы это время было самым быстрым, находится НОК чисел 4 и 6: НОК (4, 6) = 12

Ответ: 12 дней.

20. Требуется найти количество книг, подаренных школе.

Решение задачи.



• По условию задачи, если книг упаковано по десять, по двенадцать или по пятнадцать, то книг останется 8. То есть, если из общего количества вычесть 8 книг, то полученное число делится на 10, 12 и 15. Поскольку в задаче говорится о наименьшем количестве книг (число a), то количество книг находится по следующему выражению.

a – 8 = НОК (10, 12, 15); НОК (10, 12, 15) = 60;

a – 8 = 60; a = 68

Ответ: 68 книг.

21. Исследуется движение велосипеда пенни-фартинг, у которого точки А и В, отмеченные на колесах, в момент начала движения одновременно касаются земли.

Решение задачи.

• Чтобы обе точки одновременно коснулись земли, расстояние должно быть кратно 120 и 180. Поскольку спрашивается наименьшее расстояние, находится НОК.

НОК (120, 180) = 360 (см)

• При преодолении этого расстояния находится, сколько полных оборотов совершает маленькое и большое колесо.

Маленькое колесо: 360: 120 = 3 Большое колесо: 360: 180 = 2.

Ответ: 360 см, 3 раза, 2 раза.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит НОК двух чисел. Находит НОК взаимно простых чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит НОК трех чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойства НОД и НОК.	Рабочие листы, учебник, РТ
Используя НОК, приводит дроби к общему знаменателю, сравнивает их, выполняет операции над дробями.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. Понятия, данные в заключении раздела в учебнике, повторяются с учениками. Учитель повторяет с учениками термины, изученные в разделе. По мере упоминания каждого понятия ученики объясняют его суть и приводят примеры.

Натуральная степень числа, простое число, составное число, делители числа, кратные числа, общий делитель, общее кратное, разложение составного числа на простые множители, наибольший общий делитель, взаимно простые числа, наименьшее общее кратное

Решение исходной задачи. Обсуждаются информация, представленная на первой странице раздела, и задание "Попробуйте!". Вспоминаются ответы, данные учениками в начале раздела, и сравниваются с решением исходной задачи. Можно организовать обсуждение, предоставив учащимся краткую информацию о шестеренках часов и установив связь между количеством зубьев на шестеренках и их оборотами. Целесообразно дать ученикам простые задания, касающиеся часов с различным количеством зубьев на шестеренках.
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы:
https://youtu.be/9_QsCLYs2mY
https://javalab.org/en/gear_en/

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЙ

2. В ходе решения задачи вычисляются и сравниваются степени заданных чисел.
К сведению учителя! Не рекомендуется использовать свойства степени при решении 2-го задания, так как свойства степеней и их сравнение будут изучаться в следующих классах.
4. В примерах при нахождении значения выражения соблюдается последовательность действий.
д) $(3^5 - 2^5 - 1) : 3 + 1^5 = (243 - 32 - 1) : 3 + 1 = 70 + 1 = 71$.
6. Чтобы определить, сколькими нулями оканчивается данное число, необходимо узнать количество множителей 2 и 5, участвующих в разложении этого числа на простые множители.
д) Составные числа записываются в виде произведения простых множителей.
$2 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$
На основании того, что в разложении на простые множители участвуют 3 множителя 5 и 3 множителя 2, можно сказать, что среди натуральных делителей есть число 1000.
$2 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 7 = 1000 \cdot 7$
Итак, это число заканчивается тремя нулями.

К сведению учителя!

После выполнения 6-го задания можно провести обобщение:

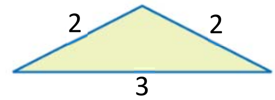
1) Если при разложении числа на простые множители количество 2 и 5 одинаково, то число оканчивается на столько нулей, сколько этих пар. Например, задание 6, пункт д).
2) Если количество 2 и 5 при разложении числа на простые множители разное, определяются оба количества и выбирается наименьшее из них. Тогда делается вывод, что число оканчивается на столько нулей, сколько меньшее из количеств множителей 2 и 5. Например, задание 6, пункт б).

8. Разложив число на простые множители, определяют числа, соответствующие буквам, данным в условии.
г) $480 = a^5 \cdot 3^b \cdot c^1$
$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^1$; $a = 2$, $b = 1$, $c = 5$

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

10. Чтобы показать пример соответствующих чисел, необходимо учитывать, что НОД двух чисел является делителем обоих чисел, а НОК двух чисел делится на эти числа.
а) Чтобы найти два числа, НОД которых равен 20, определяются два числа, делящиеся на 20. При этом обращается внимание на то, чтобы полученные частные при делении выбранных чисел на 20 были простыми числами.
$40 = 20 \cdot 2$ и $60 = 20 \cdot 3$; Тогда, НОД чисел 40 и 60 равен 20.
б) Чтобы найти три числа, у которых НОК равен 24, определяются 3 числа, на которые делится 24.
Например, 6, 8, 12. Тогда, НОК чисел 6, 8 и 12 равен 24.

18. Чтобы ответить на вопросы, нужно найти НОК двух чисел.
б) Чтобы найти наименьшее натуральное число с остатком 2 при делении на 3 и 5, сначала находится НОК чисел 3 и 5 и к ответу прибавляется 2.
НОК (3, 5) = 1; 15 + 2 = 17.
в) Чтобы найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 8 дает в остатке 5, а при делении на 7 — в остатке 4, отмечается, что если к этому числу прибавить 3, то полученное число будет делиться как на 7, так и на 8.
Тогда, находится, что НОК (7, 8) = 56 и вычитается 3. 56 – 3 = 53.
19. Стороны равнобедренного треугольника с периметром 7 единиц находятся, выразив все стороны простыми числами.
Решение задачи:
Учитывая, что треугольник равнобедренный и его стороны выражаются простыми числами, задача решается методом подбора. Проверять это неравенство нет необходимости, поскольку задача формально решается числами, а неравенство треугольника ученики еще не прошли.



P = 2 + 2 + 3 = 7

• Стороны треугольника с периметром 7 единиц могут быть одним из этих вариантов:
1; 1 и 5   1; 2 и 4   1; 3 и 3   2; 2 и 3.
• Из этих вариантов только варианты 1 1 5; 1 3 3 и 2 2 3 соответствуют равнобедренному треугольнику.
• Поскольку все стороны треугольника простые числа, правильным ответом в этих вариантах является только 2; 2 и 3.
Ответ: Стороны треугольника равны 2, 2 и 3 единицам.
20. Решение задачи формирует у учеников навыки нахождения НОК и включает в себя интеграцию с социальной жизнью, а также со спортом.
Решение задачи:

• Время, необходимое Анару и Самиру для повторной встречи на стартовой линии, должно делиться как на 90, так и на 120. По условию, поскольку этот период времени наименьший, находится НОК чисел 90 и 120.
НОК (90, 120) = 360; 360 с = 6 мин
Ответ: Через 6 минут они снова встречаются на стартовой линии.
21. В задании ученикам даются сведения о полупростых числах с целью предоставления дополнительных сведений из теории чисел.
Решение задачи:
• Ребра кубоида — натуральные числа, а их объем равен 22. По формуле объема V = 1 · 2 · 11, отсюда получается, что ребра равны 1, 2, 11.
• Учитывая, что площадь основания – полупростое число, определяется, что ребра основания равны 2 и 11.
Ответ: Ребра основания кубоида равны 2 и 11, а высота равна 1 единице.

К сведению учителя! Полупростые числа обладают интересными свойствами. Таким образом, достаточно большие нечетные числа можно выразить в виде суммы трех полупростых чисел. Квадрат любого простого числа является полупростым числом.
В технически оснащенных классах можно продемонстрировать ученикам таблицу полупростых чисел.
Ученикам можно предоставить более разнообразную информацию о полупростых числах. *https://modulouniverse.com/tag/semiprime/*

Таблица полупростых чисел

×	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
2	4	6	10	14	22	26	34	38	46	58	62	74	82	86	94	106
3	6	9	15	21	33	39	51	57	69	87	93	111	123	129	141	159
5	10	15	25	35	55	65	85	95	115	145	155	185	205	215	235	265
7	14	21	35	49	77	91	119	133	161	203	217	259	287	301	329	371
11	22	33	55	77	121	143	187	209	253	319	341	407	451	473	517	583
13	26	39	65	91	143	169	221	247	299	377	403	481	533	559	611	689
17	34	51	85	119	187	221	289	323	391	493	527	629	697	731	799	901
19	38	57	95	133	209	247	323	361	437	551	589	703	779	817	893	1007
23	46	69	115	161	253	299	391	437	529	667	713	851	943	989	1081	1219
29	58	87	145	203	319	377	493	551	667	841	899	1073	1189	1247	1363	1537
31	62	93	155	217	341	403	527	589	713	899	961	1147	1271	1333	1457	1643
37	74	111	185	259	407	481	629	703	851	1073	1147	1369	1517	1591	1739	1961
41	82	123	205	287	451	533	697	779	943	1189	1271	1517	1681	1763	1927	2173
43	86	129	215	301	473	559	731	817	989	1247	1333	1591	1763	1849	2021	2279
47	94	141	235	329	517	611	799	893	1081	1363	1457	1739	1927	2021	2209	2491
53	106	159	265	371	583	689	901	1007	1219	1537	1643	1961	2173	2279	2491	2809

22. В задаче требуется найти наименьшее количество бидонов молока, которое было отправлено на продажу за 3 дня.

Решение задачи:

• Количество молока делится на 6, 8 и 9. Находится НОК чисел 6, 8 и 9. НОК (6, 8, 9) = 72.

• Наименьшее число, большее 100 и делящееся на данные числа, определяется как 2, умноженное на 72. 72 · 2 = 144. Итак, каждый день на ферме доят 144 *л* молока.

• Находится количество бидонов, отправленных на продажу за 3 дня.

1-й день ⟶ 144 : 6 = 24 штук 6 *л*-вых, 2-й день ⟶ 144 : 8 = 18 штук 8 *л*-вых, 3- й день ⟶ 144 : 9 = 16 штук 9 *л*-вых

Находится общее количество бидонов, отправленных на продажу за три дня. 24 + 18 + 16 = 58

Ответ: За три дня на продажу было отправлено 58 бидонов.

Ученикам дается информация о криптографии.

1. Записывается одно слово, например: “КАРАБАХ”

2. С помощью сайта *https://www.browserling.com/tools/prime-numbers* выбираются два случайных простых числа и находится их произведение. Например, выбираются числа a = 3 и b = 7 и находится их произведение $a \cdot b$ = 21. Код шифрования 21.

3. Сначала, используя код шифрования, слово “КАРАБАХ” зашифровывается.

Можно поручить ученикам передать зашифрованное слово другу и попросить его найти исходное слово.

Исходный текст:	**К**	**А**	**Р**	**А**	**Б**	**А**	**Х**
Числа, соответствующие исходному тексту:	**12**	**1**	**18**	**1**	**2**	**1**	**23**
Числа, соответствующие зашифрованному тексту:	**33**	**22**	**5**	**22**	**23**	**22**	**10**
Зашифрованный текст:	**Я**	**Ф**	**Д**	**Ф**	**Х**	**Ф**	**И**

4. Ученикам предлагается передать зашифрованное слово **ЮХДХЦХЙ** другу и найти исходное слово и соответствующие простые числа.

5. Исходное слово КАРАБАХ передается другу, и дается задание найти заранее выбранные простые числа.

6. Из интернета находится информация о кибербезопасности, шифровании с использованием простых чисел и криптографии, после чего готовится презентация.

Ученикам можно также предоставить ссылки для сбора информации.

https://youtu.be/56fa8Jz-FQQ

https://youtu.be/YQw124CtvO0

2-й РАЗДЕЛ

Отношение. Пропорция. Процент

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	30	
Тема 2.1	Отношение	2	31	20
Тема 2.2	Отношение величин	3	35	23
Тема 2.3	Деление величины в данном отношении	3	39	26
Тема 2.4	Пропорция	3	42	28
Тема 2.5	Масштаб	2	46	31
Тема 2.6	Прямая пропорциональная зависимость	3	49	34
Тема 2.7	Обратная пропорциональная зависимость	3	53	37
	Задачи и примеры	2	57	40
Тема 2.8	Выражение отношения в процентах	4	59	43
Тема 2.9	Выражение изменения величины в процентах	3	63	46
	Обобщающий урок. STEAM. “Соотношение сторон и разрешение экрана”	2	68	49
	МСО-2	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	32		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики научатся записывать отношение величин, упрощать отношение, делить величину в заданном отношении, пропорцию и ее свойства, решать задачу составлением пропорции, находить необходимое расстояние по масштабу, записывать формулы прямых и обратных пропорциональных зависимостей, определять их графики. В то же время они овладеют навыками решения задач, связанных с отношением, выражением изменения величины в процентах, простого процентного роста.

На что стоит обратить внимание?

Некоторые учащиеся затрудняются отличать понятия «частное» и «отношение». В этом случае полезно объяснить им, что частное – это число, а отношение – это связь между двумя числами.

Уместно показать ученикам примеры решения задач с использованием свойств пропорции или эквивалентных отношений. Ученикам можно задать определить, какой способ решения задач является более подходящим.

В случае отношения одноименных величин следует обратить внимание на то, чтобы выражать величины в одних и тех же единицах. Иногда ученики совершают ошибки при нахождении масштаба, поскольку не выражают величины в одинаковых единицах измерения.

Некоторые ученики не обращают внимания на нахождение доли каждой части после нахождения значения неизвестного, когда решают задачи, связанные с делением величины в данном отношении, путем составления уравнения.

Они допускают ошибки при определении ситуаций, соответствующих прямо и обратно пропорциональным величинам.

Им трудно определить способы нахождения процента числа, нахождения числа по процентам и вычисления процентного отношения двух чисел.

Развитие математического языка

Правильное определение таких понятий, как «отношение», «предыдущий и последующий члены отношения», «обратное отношение», «эквивалентные отношения», «пропорция», «средние и крайние члены пропорции», «прямо пропорциональная зависимость», «обратно пропорциональная зависимость», "коэффициент пропорциональности", "формула прямой пропорциональной зависимости", "формула обратной пропорциональной зависимости", "выражение отношений в процентах", "выражение изменения величины в процентах", "простой процентный рост", позволяет оценить, насколько усвоены эти понятия.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Отношение, члены отношения, обратное отношение, эквивалентные отношения, отношение одноименных величин, отношение разноименных величин, масштаб, пропорция, средние и крайние члены пропорции, основное свойство пропорции, прямая пропорциональная зависимость, обратная пропорциональная зависимость, коэффициент пропорциональности, выражение отношения в процентах, выражение изменения величины в процентах, простой процентный рост

Необходимые предварительные знания и навыки:

- Выражение части в виде обыкновенной, десятичной дробей и процентах
- Уравнения
- Изображение зависимости в виде формулы, таблицы и графика
- Действия над обыкновенными и десятичными дробями

Междисциплинарная интеграция

Во многих ситуациях, встречающихся в повседневной жизни, широко используется понятие отношения и пропорции. Новые величины также возникают из отношения различных величин. Понятие процента также связано с отношением. Построение карт, создание моделей и макетов основывается на применении эквивалентных пропорций. Ученики будут применять знания из этого раздела на уроках географии при работе с картами, а также на уроках предмета "Природа" при решении задач, связанных с различными смесями.

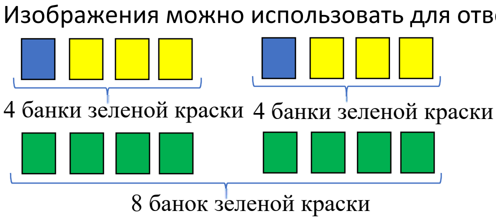
ТЕМА 2.1. Отношение

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция. 6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Понимает и представляет отношение как сравнение двух величин. • Записывает и применяет отношение в разных формах. • Объясняет, что показывает отношение. • Записывает отношения, эквивалентные заданному отношению.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://phet.colorado.edu/az/simulations/ratio-and-proportion* *https://www.mathspad.co.uk/interactives/ratioEquivalence/ratioEquivalence.php* *https://video.edu.az/video/1164* *https://video.edu.az/video/1162* Задания: *https://video.edu.az/video/1267* *https://video.edu.az/video/1507*

Обсуждение исходной задачи.
Обсуждаются материал и задача, данные на первой странице раздела. Выслушиваются мнения учеников о стратегии решения задач. После изучения понятий отношение и масштаб, формирования навыков выражения изменения количества в процентах решение этой задачи будет снова рассмотрено в конце раздела.
Побуждение.
Приводятся примеры сравнения чисел с использованием разности или частного. Учитель спрашивает учеников, как они сравнивают количество разных предметов. Например, как сравнить количество столов и стульев в классе?
Ответ учеников может быть таким: В классе 14 столов и 28 стульев. Поскольку 28 – 14 = 14, то стульев на 14 больше, чем столов или 28: 14 = 2, то есть стульев в 2 раза больше, чем столов.
Учитель обращается к классу: “Если каждый день в школьном коридоре дежурят 1 учитель и 2 ученика, как бы вы представили эту информацию?”
В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:
https://www.geogebra.org/m/wv49ht3k#material/UWyJEuSN

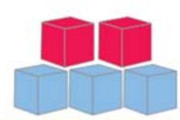
Исследование-обсуждение

Маляр хочет получить зеленый цвет, добавив к каждой 1 банке синей краски 3 банки желтой. Находятся ответы на вопросы.
• Маляр покупает 4 банки (1 + 3 = 4) зеленой краски, потратив 1 банку синей.
• Поскольку использовано 3 банки желтой краски, то желтая краска составляет $\frac{3}{4}$ части от купленной зеленой краски.
• Если на каждые 4 банки зеленой краски нужна 1 банка синей и 3 банки желтой краски, то чтобы получить 8 банок зеленой краски, нужно добавить 1 + 1 = 2 банки синей краски, 3 + 3 = 6 банки желтой краски.
Изображения можно использовать для ответа на последний вопрос.



Для 8 банок зеленой краски нужно:
2 банки синей краски
6 банок желтой краски

Изучение Отношение


Отношение 2 : 3 означает, что каждые 2 красных кубика соответствуют 3 синим кубикам.

Отмечается, что понятие отношения вводится для сравнения величин. Сначала рассматриваются примеры отношений чисел, которые показывают количество предметов. Обычно отношение записывается как a: b или $\frac{a}{b}$ и читается как «отношение *a* к *b*».
Важность упорядочивания членов отношения поясняется на примере цветных кубиков. Например, на примере с цветными кубиками, изображенном на рисунке, отношение 2: 3 означает, что каждые 2 красных кубика соответствуют 3 синим кубикам.
Здесь отношение 2 : 3 показывает сравнение частей, составляющих целое. Объясняется на примерах, которые можно записать как отношение части к части, части к целому или целого к части.

Например, в соответствии с информацией, представленной на рисунке, можно записать отношения 2 : 5 или 3 : 5. Здесь отношение 2 : 5 представляет собой отношение количества красных кубиков к общему количеству кубиков, а 3 : 5 представляет собой отношение количества синих кубиков к общему количеству кубиков.

Учитель может задать ученикам дополнительные вопросы:

- Что показывает отношение 5 : 2 на приведенном рисунке? Что показывает отношение 5 : 3 на приведенном рисунке?

Отмечается, что члены отношения принимаются отличными от 0, а при изменении мест членов получается противоположное заданному отношению. Ищутся ответы на вопросы, связанные с отношением. Например, какую часть от общего количества кубиков составляет количество красных кубиков? Каково отношение количества всех кубиков к числу синих кубиков? Как будет обратное этого отношения? и т.д.

Целесообразно составить такую таблицу.

Отношение	Сравнение	Словами	a:b	$\frac{a}{b}$
Отношение части к части	Количество красных кубиков и количество синих кубиков	Отношение 2 к 3	2:3	$\frac{2}{3}$
	Количество синих кубиков и количество красных кубиков	Отношение 3 к 2	3:2	$\frac{3}{2}$
Отношение части к целому	Количество синих кубиков и общее количество кубиков	Отношение 3 к 5	3:5	$\frac{3}{5}$
	Количество красных кубиков и общее количество кубиков	Отношение 2 к 5	2:5	$\frac{2}{5}$
Отношение целого к части	Общее количество кубиков и количество красных кубиков	Отношение 5 к 2	5:2	$\frac{5}{2}$
	Общее количество кубиков и количество синих кубиков	Отношение 5 к 3	5:3	$\frac{5}{3}$

Чтобы записать связь между значениями величин как отношение их значений, важно указать каждый член отношения. Иногда ученики понимают эту зависимость как то, во сколько раз одно значение больше другого. Например, если в коробке 3 красных шара и 1 зеленый шар, отношение количества красных шаров к количеству зеленых следует записать как 3 : 1. «Во сколько раз количество красных шаров больше количества зеленых шаров?» Чтобы ответить на вопрос, нужно найти частное, полученное при делении 3 на 1.

В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:

https://mathsnacks.com/ratio-rumble.html

Задания

5. Объясняется значение приведенных на рисунке отношений, пишется обратное этим отношениям и поясняется, что они показывают.

3 : 4 → отношение числа кружков к числу квадратов
4 : 7 → отношение числа квадратов к общему числу фигур
5 : 2 → отношение числа синих к числу красных фигур
2 : 7 → отношение числа красных фигур к общему числу фигур
3 : 7 → отношение числа кружков к общему числу фигур

- 4 : 3 → отношение числа квадратов к числу кружков.

С помощью этого правила записывается обратное значение других отношений и поясняется их значение.

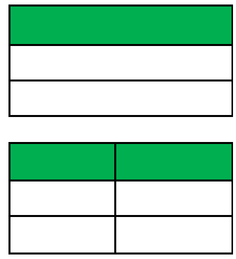
К сведению учителя! Иногда ученики затрудняются выразить, что показывают отношения, соответствующие данному рисунку. Если ученикам трудно понять, что означают члены отношения, полезно обсудить, почему выбрано подходящее выражение. Это важно, чтобы избежать подобных ошибок в будущем.

Определение общих и различных аспектов понятий дроби и отношения также является одним из важных моментов. Отношение части к целому более тесно связано с дробью, тогда как отношение части к дроби иное. Например, если соотношение количества мальчиков и девочек в одной группе 3 : 4, а в другой группе 2 : 3, то при объединении этих двух групп отношение будет 5 : 7. Как видно, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\neq\frac{5}{7}$, то есть арифметические действия над дробями могут привести к неверным результатам для отношений.

Ложные представления, возникающие у учеников. У учеников могут возникнуть трудности с рассмотрением сходств и различий между понятиями пропорции и отношения. При написании отношения следует указывать долю обеих сравниваемых величин. Например, Самиру 5 лет, Анару 1 год. Находя отношение возраста Самира и возраста Анара, ученики узнают частное. Ученикам, допускающим подобные ошибки, целесообразно объяснить, что отношение – это связь между двумя числами. «Во сколько раз значение одной величины больше или меньше другой?» Отмечается, что ответ на вопрос дает вычисление отношения соответствующих значений величин.

Отношение числа 5 к числу 1	
Ложное	Верное
5	5 : 1

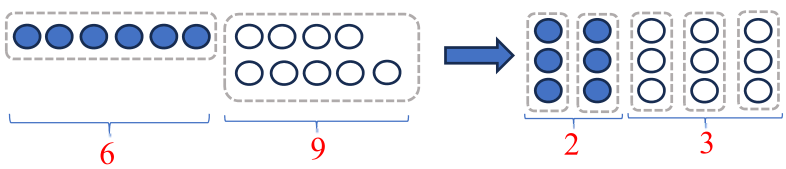
Изучение Эквивалентные отношения



На доске нарисован прямоугольник и разделен на 3 равные части, одна из которых окрашена. Учитель обращается к классу с наводящим вопросом: Какая часть прямоугольника закрашена? Поскольку отношение части к целому более тесно связано с понятием дробей, ученики легко определяют, что $\frac{1}{3}$ прямоугольника закрашена. Каково отношение закрашенной части к не закрашенной части? Ученики отвечают 1 : 2. В данном прямоугольнике проводится вертикальная линия по середине. Ученикам говорят, что прямоугольник разделен на 6 равных частей, из них 2 закрашенные и 4 не закрашенные. Итак, в этом прямоугольнике отношение закрашенной части к не закрашенной составляет 2 : 4. Поскольку в обоих случаях окрашена одна и та же часть прямоугольника, ясно, что отношения 1 : 2 и 2 : 4 представляют собой одно и то же сравнение. То есть отношения 1:2 и 2:4 являются эквивалентными (равными). Полученный результат обобщается:
Когда оба члена отношения умножаются или делятся на одно и то же ненулевое число, получается равное отношение. Эквивалентные дроби связаны с эквивалентными отношениями на основе отношения, записанного в виде дроби.

$$1:2 = 2:4 \longleftarrow 2:4 = 1:2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} = \frac{1\times2}{2\times2} = \frac{2}{4} \longleftarrow \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

Приведены различные примеры эквивалентных отношений. Например, отношения 6 : 9 и 2 : 3 можно изобразить с помощью моделей.



Отмечается, что отношение с разными членами можно заменить отношением взаимно простых чисел. Например, поскольку НОД (12, 15) = 3, отношение 12 : 15 можно упростить, разделив оба слагаемых на НОД этих слагаемых, т.е. на 3.

$$12 : 15 = 4 : 5 \Longleftrightarrow \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Подумай!

Ученики обсуждают, как упростить отношение с равными членами. В качестве примера приходят к мнению, что отношение 4 : 4 записывается как 1 : 1.

7. Эквивалентные отношения записываются путем умножения или деления обоих членов данного отношения на одно и то же натуральное число.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько отношений и дает ученикам задание назвать эквивалентные отношения.

Углубление. Учитель записывает на доске несколько отношений. Он предлагает ученикам написать эквивалентное отношение к этим отношениям и объяснить, как его записать.

Для повышения активности учеников можно раздать им карточки с написанными на них разными эквивалентными отношениями. Каждый ученик находит, у кого есть карточка с отношением, эквивалентным отношению на имеющейся у него карточке.

Таблица – хороший метод представления информации. По приведенной таблице спрашивается, сколько саженцев на площади 60 м^2.

Площадь ($м^2$)	2	4	20	60
Число саженцев	15	30	150	?

Или предлагается узнать, какая площадь нужна для 900 саженцев. Ученики находят ответы на различные вопросы и дополняют таблицу, добавляя в таблицу дополнительные столбцы.
Ученики самостоятельно выполняют предложенные задания аналогичным способом.

Решение задач

15. В задаче требуется ответить на вопросы по диаграмме.

Решение задачи.
Определяется количество людей, пришедших в школу на автомобиле, автобусе, метро и пешком, и находится количество учеников в классе. 4 + 7 + 8 + 5 = 25.
Записывается подходящее отношение: а) 8 : 7 б) 5 : 4 в) 25 : 7
г) количество приехавших на машине составляет $\frac{4}{25}$ учеников класса.
• Записывается обратное отношение и объясняется его значение.
7 : 8 → Показывается отношение количества прибывших на автобусе к числу прибывших пешком.
4 : 5 → Показывается отношение количества приехавших на автомобиле к количеству приехавших на метро.
7 : 25 → Показывается отношение количества приехавших на автобусе к общему количеству.
25 : 4 → Показывается отношение общего количества к количеству приехавших на автомобиле.
16. Решение задачи служит развитию у учеников навыка писать отношения, эквивалентные заданному отношению. На вопросы, поставленные в задаче, можно ответить, умножив оба члена данного отношения на определенное число или составив и заполнив таблицу.
Решение задачи.
Составляется таблица и фиксируются данные в задаче. Следующие столбцы таблицы заполняются умножением чисел в столбце 1 на 2, 3, 4, 5 и 6 соответственно.

Золото	15	30	45	60	75	90
Медь	4	8	12	16	20	24

Находятся ответы на вопросы по таблице.
а) Для изготовления украшений к 90 г золота следует добавить 24 г меди. Находится масса полученной смеси. 90 + 24 = 114 (г)
б) А к 75 г золота следует добавить 20 г меди. Находится масса полученной смеси. 20 + 75 = 95 (г).
Ответ. а) 24 г меди, масса смеси 114 г; б) 75 г золота, масса смеси 95 г.
К сведению учителя! Использование эквивалентных отношений для решения задач играет важную роль в дальнейшем решении задач с использованием отношений. Во многих случаях не заданный член отношения легче найти суждением при условии эквивалентности отношений, чем применять свойства отношения. Этот подход развивает у учеников навыки использования различных методы при решении задач. Рекомендуется показывать подобные примеры на простых задачах. Используя дифференцированные методы обучения, можно распределить между учениками утверждения, данные в 9-м задании, и дать ученикам задание написать и решить задачу, соответствующую каждому утверждению. Целесообразно провести обмен мнениями, сравнивая различные задачи, записанные по одному и тому же выражению.
Проект. Ученикам предлагается написать и объяснить отношения, подходящие для различных ситуаций (дом, путешествие, магазин, спорт и т.д.), а также подготовить презентацию. Ученикам, испытывающим трудности, можно предоставить рисунки, создающие определенное представление о различных ситуациях.


Приготовление сладостей


Потребление топлива

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Записывает и объясняет отношение в разных формах.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает отношения, эквивалентные заданному отношению.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи, связанные с отношением.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.2. Отношение величин

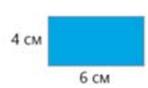
ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция. 6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Понимает и представляет понятия отношения как сравнение двух величин. • Записывает и применяет отношение в разных формах. • Записывает и упрощает отношение одноименных величин. • Записывает и объясняет значение отношение разноименных величин.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: https://www.geogebra.org/m/jce3ff53 *https://www.geogebra.org/m/jce3ff53* *https://www.mathplayground.com/tb_ratios/index.html* *https://phet.colorado.edu/az/simulations/unit-rates* Задания: *https://video.edu.az/video/1212* *https://video.edu.az/video/9009* *https://video.edu.az/video/9369* *https://video.edu.az/video/9386*

Побуждение.
Учитель предлагает ученикам измерить пядью ширину и длину парты, за которой они сидят, и записать соответствующее отношение. Ученики записывают отношение количества пядей ширины к количеству пядей длины парты. Результаты сравниваются.
Учитель задает ученикам наводящие вопросы: Зависит ли результат от того, большие или маленькие пяди? А будет ли тот же результат получен при измерении линейкой?

Исследование-обсуждение Ученикам задается выбрать любой текст из учебника и быстро прочитать его в течение 2 минут. За это время они подсчитывают прочитанные слова и записывают отношение количества слов к количеству минут.
Учитель задает вопрос: что означает полученное отношение? Учеников подводят к мысли, что записанное отношение указывает на количество слов, прочитанных за 1 минуту.
Учитель задает наводящий вопрос: Как по количеству слов, прочитанных за 1 минуту, найти, сколько слов мы сможем прочитать за 4 минуты?
Ученики говорят, что количество слов, прочитанных за 4 минуты, будет в 4 раза больше, чем количество слов, прочитанных за 1 минуту.

Изучение **Отношение одноименных величин**

При нахождении отношения одинаковых величин, например, длины к длине, массы к массе, объема к объему, подчеркивается, что они выражены в одних и тех же единицах, и полученное отношение записывается без единиц, т.е. дается отношение одноименных величин. Например, показывается, что отношение длины к ширине прямоугольника со сторонами 6 см и 4 см равно 3:2.



$\frac{6\text{ см}}{4\text{ см}} = \frac{6\cdot 1\text{ см}}{4\cdot 1\text{ см}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{3}{2} = 3:2$

Целесообразно написать разные примеры на отношение одноименных величин. Например, каждый ученик записывает и упрощает отношение своего роста (или массы) к росту (массе) своего одноклассника, сидящего за соседней партой.

Запомни!

Особо подчеркивается, что для нахождения отношения одноименных величин, заданных в различных единицах, эти величины должны быть выражены в одних и тех же единицах. Например, если ширина прямоугольника на рисунке равна 40 мм, как найти отношение его длины к ширине? Следует отметить, что в этом случае ширина и длина должны быть выражены в мм или см, а затем следует найти отношение.

Задания

2. Величины выражаются в одинаковых единицах. Записывается отношение, и оба члена отношения упрощаются путем деления на их НОД.
3. Сначала вычисляются длины отрезков, отношения которых будут найдены, затем записываются и упрощаются соответствующие отношения.
4. Записываются искомые отношения.
а) Если из 50 *л* бензина в баке автомобиля было израсходовано 35 *л*, то в баке осталось 50 – 35 = 15 (литров) бензина.

Отношение оставшегося бензина к израсходованному бензину: $\frac{15\ л}{35\ л} = \frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}$

Отношение израсходованного бензина к исходному бензину в баке: $\frac{35\ л}{50\ л} = \frac{35}{50} = \frac{35:5}{50:5} = \frac{7}{10}$

в) Квадрат площадью 9 см^2 имеет длину стороны 3 см ($3^2 = 9$).

Находится длина стороны другого квадрата: 240 : 4 = 60 (мм) = 6 (см). Значит, площадь этого квадрата равна 36 см^2.

К сведению учителя! Иногда целесообразно обратить внимание учеников на то, что отношения пар трех и более одноименных величин записываются кратко. Например, если длины меньшей и средней сторон треугольника равны 3:4, а длины средней и большей сторон — 4:5, то обычно пишут, как 3:4:5.

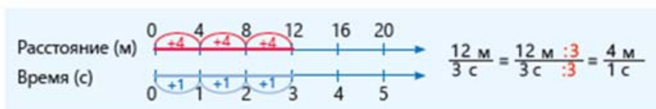
Ложные представления, возникающие у учеников. При записи и упрощении отношений одноименных величин одна из типичных ошибок учеников состоит в том, что они забывают выразить величины в одной и той же единице или допускают ошибку в правильном выражении величин в одной и той же единице. Рекомендуется обратить особое внимание на этот момент на различных примерах.

Ложное $\frac{14\ см}{4\ м} = \frac{14}{4} = \frac{14:2}{4:2} = \frac{7}{2}$

Верное $\frac{14\ см}{4\ м} = \frac{14\ см}{400\ см} = \frac{14}{400} = \frac{14:2}{400:2} = \frac{7}{200}$

Изучение Отношение разноименных величин

Ученикам сообщается, что иногда необходимо находить отношение разноименных величин. Учитель обращается к классу с наводящими вопросами: Как можно найти, какое расстояние проедет велосипедист за 1 секунду, двигаясь с постоянной скоростью? Или если за 8 одинаковых ручек было заплачено 2,40 маната, как найти цену 1 ручки? Чтобы дать ответы на подобные вопросы, исследуются, какие отношения были записаны, и ученикам объясняется, что при этом возникает новая величина. Подчеркивается, что эквивалентное отношение записывается с 1 единицей следующего члена для отношения разноименных величин. В этом случае удобно использовать двойную числовую ось. На осях отмечаются соответствующие точки распределения по значениям величин.



Например, если проехать 12 м за 3 секунды, можно найти расстояние, пройденное за 1 секунду, то есть скорость.

Обращается внимание на формы записи единицы скорости в виде $\frac{м}{с}$, м/с и т.д.

Подумай!

Какое отношение величин указывает на цену товара? Цена 1 единицы товара (1 кг и т.п.) находится при указании количества или массы товара, приобретенного на определенную сумму, на подходящих примерах. На подходящих примерах разъясняется, отношение каких величин показывает цену товара. Если дана оплаченная сумма и количество (или масса) купленного товара, находится цена за одну единицу (например, за 1 кг и т. п.).

К сведению учителя! Целесообразно объяснить учащимся, что означает отношение разноименных величин в каждом случае. Например, они должны объяснить, что новая величина, такая как скорость, создается из отношения пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь, плотность из отношения массы объекта к его объему, а цена товара от отношения оплаченной суммы к количеству (или массе) приобретаемого товара.

В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:
https://www.pbslearningmedia.org/resource/mket-math-rp-atthetrack/atthetrack/

Дифференцированное обучение.

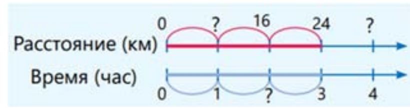
Поддержка. Учитель записывает на доске несколько примеров на отношение разноименных величин и дает ученикам задание представить их в виде эквивалентного отношения с единицей в одном из членов и объяснить его смысл.

Углубление. Учитель дает ученикам задание написать на доске несколько примеров на отношение разноименных величин и сравнить их.

Выполняются задание на отношение разноименных величин.

5. Требуется ответить на вопросы, найдя числа, соответствующие пустым ячейкам на числовых осях.

Точки деления на оси времени (в часах) отмечаются через каждые 1 единицу, а на оси расстояния (в км) через каждые 8 единиц (24 – 16 = 8). Поэтому определяются числа, которые будут записаны вместо знаков?



а) Находится скорость велосипедиста, т.е. расстояние, пройденное за 1 час. (16 – 8 = 8).

б) Находится расстояние, пройденное за 4 часа. (16 + 8 = 24).

в) Находится, за какое время был пройден путь в 16 км. (1 + 1 = 2).

6. Требуется заполнить таблицу и ответить на вопросы согласно эквивалентным отношениям. Числа в 1-м столбце (1 и 10) определяются путем деления чисел в 3-м столбце таблицы на 4. Затем путем умножения чисел в этом столбце на 2, 8, 16 соответственно заполняются пустые ячейки в остальных столбцах. Ответы на вопросы находятся соответственно заполненной таблице.

Расстояние (км)		20	40		
Бензин (литр)	1		4	8	16

• На 1 литре бензина можно проехать 10 км.

• На 20 км расходуется 2 литра бензина.

• Расстояние 160 км можно преодолеть, используя 16 литров бензина.

7. Если на принтере за 15 секунд печатается 30 страниц, требуется найти, сколько страниц печатается за 1 секунду и сколько времени затрачивается на печать 1 страницы.

Привлечение. Учитель берет в руки две книги. Одна книга толстая, другая тонкая, и задает ученикам наводящие вопросы.

Что показывает отношение количества напечатанных страниц к затраченному времени? Что показывает отношение времени, затраченного на печать, к количеству страниц?

• Ученики записывают отношение, соответствующее данному утверждению, и эквивалентное отношение, следующий член которого равен единице.

$$\frac{30\ \text{стр}}{15\ \text{с}} = \frac{30\ \text{стр}: 15}{15\ \text{с}: 15} = \frac{2\ \text{стр}}{1\ \text{с}}$$

Следовательно, за 1 секунду печатается 2 страницы.

• Ученики записывают отношение, соответствующее данному утверждению, и эквивалентное отношение, следующий член которого равен единице.

$$\frac{15\ \text{с}}{30\ \text{стр}} = \frac{15\ \text{с}: 30}{30\ \text{стр}: 30} = \frac{0{,}5\ \text{с}}{1\ \text{стр}}$$

То есть на печать 1 страницы уходит 0,5 секунды.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

Решение 8-й задачи выполняется соответственно аналогичным правилам.

9. Мастера Али спрашивают, сколько денег он заработал за 1 час и сколько он мог бы заработать, если бы на прошлой неделе проработал 40 часов.

• Сумма денег, заработанная за 1 час, находится путем записи отношения 432 манатов к 36 часам:

$$\frac{432\ \text{ман}}{36\ \text{час}} = \frac{432\ \text{ман}:36}{36\ \text{час}:36} = \frac{12\ \text{ман}}{1\ \text{час}}$$

Ответ. Мастер Али зарабатывает 12 манатов в час.

• Умножив сумму денег, заработанную за 1 час, на количество рабочих часов, находится, сколько манатов мог заработать мастер Али, проработав 40 часов: $12 \cdot 40 = 480$ (ман)

Ответ. Если бы мастер Али на прошлой неделе отработал 40 часов, он бы заработал 480 манатов.

Запомни!

Ученикам объясняется, что плотность находится путем записи отношения массы предмета к его объему. Если масса указана в кг, объем указан в м^3, единица плотности – $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, если масса указана в граммах, а объем указан в см^3, плотность выражается в $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

10. Требуется найти плотность тела по заданным его размерам и массе.

а) $\frac{81\ \text{г}}{18\ \text{см}^3} = \frac{81\ \text{г}: 18}{18\ \text{см}^3:18} = \frac{4{,}5\ \text{г}}{1\ \text{см}^3}$

Масса 1 см^3 предмета равна 4,5 грамма. То есть его плотность равна 4,5 $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

б) Сначала находится объем деревянного куба со стороной 0,4 м. Ученики выражают длину куба в см: 0,4 м = 40 см.

Объем куба $40^3 = 64000$ (см^3). Данная масса выражается в граммах: 44,8 кг = 44800 г.

Плотность рассчитывается. $\frac{44800\ \text{г}}{64000\ \text{см}^3} = \frac{44800\ \text{г}: 640000}{64000\ \text{см}^3:64000} = \frac{81\ \text{г}}{18\ \text{см}^3} = \frac{81\ \text{г}: 18}{18\ \text{см}^3:18} = \frac{4{,}5\ \text{г}}{1\ \text{см}^3} = 0{,}7\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$

Решение задач

11. Согласно информации, данной в вопросе, требуется найти скорости Самира и Лалы и соответственно ответить на вопросы.

Решение задачи:

а) Для каждого из детей скорость определяется путем записи отношения длины пути, который он пробежал, ко времени, затраченному на прохождение этого пути.

Скорость Лалы: $\frac{360\text{ м}}{3\text{ мин}} = \frac{360\text{ м}:3}{3\text{ мин}:3} = \frac{120\text{ м}}{1\text{ мин}} = 120\text{ м/мин}$

Скорость Самира: $\frac{600\text{ м}}{4\text{ мин}} = \frac{600\text{ м}:4}{4\text{ мин}:4} = \frac{150\text{ м}}{1\text{ мин}} = 150\text{ м/мин}$

Скорость Самира на 150 – 120 = 30 (м/мин) больше скорости Лалы.

б) Найдите длину пути, который каждый из них проедет за 12 минут:

Лала пробежит 12 · 120 = 1440 (м), а Самир 12 · 150 = 1800 (м).

Самир пробегает 1800 – 1440 = 360 (м) больше, чем Лала за 12 минут.

Ответ. а) Скорость Самира на 30 м/мин меньше скорости Лалы; б) Самир пробегает более 360 м.

12. В задаче требуется выяснить, какая упаковка сахарной пудры, продаваемая в разных упаковках, дешевле за 1 кг.

Решение задачи:

а) $\frac{7{,}50\text{ ман}}{5\text{ кг}} = \frac{7{,}50\text{ ман}:5}{5\text{ кг}:5} = \frac{1{,}50\text{ ман}}{1\text{ кг}}$ $\qquad$ $\frac{4{,}80\text{ ман}}{3\text{ кг}} = \frac{4.80\text{ ман}:3}{3\text{ кг}:3} = \frac{1{,}60\text{ ман}}{1\text{ кг}}$

Цена 1 кг сахарной пудры в упаковке 5 кг составляет 1,60 – 1,50 = 0,10 (ман), то есть на 10 гяп. дешевле.

б) 15 · 0,10 = 1,5 (ман) экономятся деньги при покупке 15 кг сахарной пудры в упаковках по 5 кг.

Ответ. а) упаковка 5 кг, 10 гяпиков; б) 1,5 маната

13. В задаче требуется определить, какой способ плавания у пловца является наиболее быстрым. Записав отношение расстояния, пройденного каждым способом, к затраченному времени и сравнив их, определяют, каким способом пловец плывет быстрее.

14. В задаче, исходя из данных таблицы, задается вопрос, в каком соке содержится в 2 раза больше углеводов, чем в других, а в каком меньше сахара. Задача решается путем записи и сравнения соответствующих отношений.

16. Решение задачи способствует дальнейшему развитию навыков ученика в записи отношения, эквивалентных заданному отношению. Также в этой задаче даны пары отношения трех одноименных величин.

Решение задачи:

Согласно данному условию найдено, что в конце 1-й недели у Самира оказывается сумма в размере 3 манатов. Затем путем умножения чисел в 1-м столбце на 2, 3 и 4 находятся числа, соответствующие пустым ячейкам во 2-м, 3-м и 4-м столбцах.

Ученик	I неделя	II неделя	III неделя	IV неделя
Лала	2 ₼	4 ₼	6 ₼	8 ₼
Самир	3 ₼	6 ₼	9 ₼	12 ₼
Эльхан	5 ₼	10 ₼	15 ₼	20 ₼

Ответы на вопросы даются согласно заполненной таблице.

Когда у Лалы 4 маната, у Эльхана 6 манатов.

Общая сумма денег детей на 4-й неделе составила более 30 манатов (8 + 12 + 20 = 40).

Отношение денег Лалы, Самира и Эльхана можно записать как 2 : 3 : 5.

Ответ. 6 манатов; 4-я неделя; 2:3:5

К сведению учителя! Рекомендуется развивать навыки решения задач путем написания эквивалентных отношений. Особое значение в формировании этих привычек имеет запись эквивалентных соотношений путем заполнения таблицы или определения цифр, соответствующих пустым клеткам на двойной числовой строке. Также желательно добавить схему для нахождения отношения между 3 одноименными величинами на основе их попарных отношений.

Проект. Ученикам можно предложить написать и решить задачи, связанные с отношением величин в разных ситуациях (дома, прогулка, покупки, спорт и т.д.) и подготовить презентацию с объяснением решения.

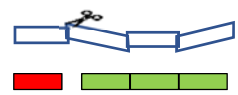
Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Записывает и упрощает отношение одноименных величин.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает и объясняет значение отношение разноименных величин.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачи, связанные с отношением.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.3. Деление величины в данном отношении

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция. 6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Понимает и представляет понятия отношения как сравнение двух величин. • Записывает и упрощает отношение одноименных величин. • Делит величину в данном отношении. • Решает различные задачи, связанные с отношением.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/XhqRtAFa* *https://www.mathspad.co.uk/interactives/ratioSharing/ratioSharing.php* Задания: *https://www.mathspad.co.uk/interactives/ratioSharing2/ratioSharing2.php*

Побуждение.

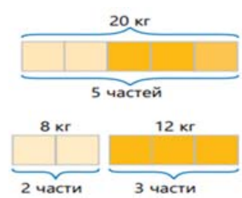


Учитель предлагает ученикам сложить бумажную ленту пополам, затем снова сложить сложенную ленту посередине и раскрыть ее, разрезать по одной из разделительных линий и раскрасить разделенные части разными цветами. Учитель задает вопрос:
Каково было отношение длин цветных частей? Ученики говорят, что лента разделена на две части в отношении 1:3.
Учитель спрашивает: Какую часть всей ленты составляет каждая из отдельных частей?
Ответ ученика: красная часть — $\frac{1}{4}$ ленты, зеленая — $\frac{3}{4}$.

Исследование-обсуждение

Ученикам предоставляется информация о том, что памятники сделаны из бронзы и что бронза получается из смеси меди и олова в соотношении 9 : 1. Учитель спрашивает: какую часть этой смеси составляет олово?
Ученики отвечают: «Олово составляет $\frac{1}{10}$ часть этой смеси». Тогда как узнать, сколько олова понадобится для изготовления памятника весом 400 кг?
• Ученики находят $\frac{1}{10}$ от 400: $400 \cdot \frac{1}{10} = 40$ (кг).
Ученики приходят к выводу, что найти это можно разными способами.

Изучение **Деление величины в данном отношении**



Пример на деление величины в данном отношении и его решение рассмотрены в учебнике. По данному отношению сначала определяют, на сколько равных частей необходимо разделить данную величину. Например, если какую-то величину требуется разделить на две части в отношении 2:3, сначала она делится на 5 равных частей (2+3=5) и находится доля, которая приходится на одну часть. Затем рассчитываются доли, соответствующие 2 и 3 частям.
Решение задачи рассматривается путем построения уравнения. Для этого 1 часть обозначается x, составляется и решается соответствующее уравнение. После нахождения значения неизвестного вычисляют части, соответствующие членам отношения.
Можно посмотреть примеры простых задач, связанных с делением величины в данном отношении. Например, ученики могут ответить на вопросы, заданные в исследовании, составив и решив уравнение.

Задания

1. Требуется определить точку, которая делит отрезок в заданном отношении. Ученики находят, что отрезок АВ разделен на 8 равных частей и на основании этого определяют искомые точки.
а) Точка С — точка, разделяющая отрезок в отношении 1:7.
е) Поскольку 3 : 1 = 6 : 2, находится точка, разделяющая отрезок в отношении 6 : 2. Это точка Н.
2. Задание можно выполнить в парах. Один из учеников предполагает. Другой проверяет его предположение, измерив и записав соответствующие отношения.
3. Рекомендуется решить задачу разными способами.
в) *1-й способ.* Части складываются. 3 + 7 = 10
120 кг муки делится на 10 равных частей и находится масса каждой части:
120 : 10 = 12 (кг); 3 · 12 = 36 (кг); 7 · 12 = 84 (кг).

2-й способ. В один из мешков распределяется 3 из 10 равных частей, в другой — 7 из 10 равных частей. То есть в первом мешке будет $\frac{3}{10}$ от 120 кг муки, а во втором мешке $\frac{7}{10}$: $120 \cdot \frac{3}{10} = 36$ (кг); $120 \cdot \frac{7}{10} = 84$ (кг).

3-й способ. Одна часть обозначается x, уравнение составляется и решается:

$3x + 7x = 120$	Вычисляется сколько муки в каждом мешке.
$10x = 120$	В первом мешке → $3 \cdot 12$ кг = 36 кг
$x = 12$	Во втором мешке → $7 \cdot 12$ кг = 84 кг

5. Величину необходимо разделить на три части в заданном отношении. Обсуждаются методы решения, приведенные в примере. На вопросы отвечают аналогично.

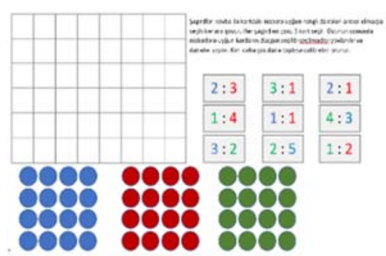
К сведению учителя! Иногда у учеников возникают трудности с решением задач на отношение, связанных с делением величины на три части. Целесообразно объяснить ученикам, как понять разделение величины на три части в отношении, например, 2:5:6. При этом ученики должны понимать, что первая и вторая части находятся в отношении 2:5, а вторая и третья части – в отношении 5:6. Иногда требуется разделить величину, например, первую и вторую части в отношении 1:2, а вторую и третью части в отношении 4:5. При этом, поскольку отношение 1:2 эквивалентно соотношению 2:4, рекомендуется объяснить, что величину следует разделить на три части в отношении 2:4:5.

Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторым ученикам достаточно найти значение неизвестного при решении задачи, связанной с делением величины в данном отношении путем построения уравнения. Ученикам, допускающим такую ошибку, следует объяснить необходимость нахождения доли каждой части с учетом значения неизвестного. Можно предложить проверить равенство суммы частей равна заданному значению величины, а также эквивалентность отношения частей требуемому отношению. На этот момент рекомендуется обратить особое внимание на различных примерах.

Из истории математики

Рекомендуется ознакомиться с понятием золотого сечения и посмотреть соответствующие видеоматериалы.

https://youtu.be/lluL6tuyif8 https://youtu.be/4TF6mMUe3FY
https://youtu.be/2tv6Ej6JVho
https://www.interaction-design.org/literature/topics/golden-ratio



Игра. К доске приглашаются 2 или 3 ученика. Им раздаются рабочие листы, и дается задание — разместить цветные кружки в пустых ячейках. Карточки с записанными отношениями выкладываются на стол лицевой стороной вниз. Каждый ученик выбирает одну карточку.

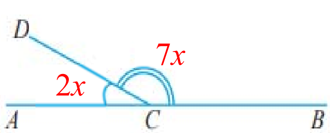
По очереди ученики подбирают и откладывают в сторону цветные кружки, соответствующие отношению, указанному на карточке. Каждый ученик может выбрать максимум 3 карточки. В конце игры проверяется, правильно ли были выбраны карточки в соответствии с отношениями, и подсчитывается количество кружков. Побеждает тот, кто собрал больше всего кружков.

Пример рабочего листа можно скачать по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1zJ1LNKyurIZG9PKKo-FPgQpENGPWLj6y/view?usp=sharing

В классах с техническими возможностями можно провести аналогичную интерактивную игру: *https://mathsnacks.com/ratio-rumble.html*

Решение задач

6. Требуется найти градусную меру каждого из смежных углов, градусные меры которых относятся как 2:7.



$2x + 7x = 180^\circ$	Вычисляются градусные меры углов ACD и BCD.
$9x = 180^\circ$	$\angle ACD = 2x = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$
$x = 20^\circ$	$\angle BCD = 7x = 7 \cdot 20^\circ = 140^\circ$

Решение задачи: Градусные меры углов ACD и BCD обозначаются соответственно $2x$ и $7x$.

Ответ. 40° и 140°

7. В задаче требуется найти, сколько цемента, песка и гравия нужно взять для изготовления 27 тонн бетонной смеси, состоящей из 2 частей цемента, 3 частей песка и 4 частей гравия.

Решение задачи:

а) Одна часть обозначается через x, соответствующее уравнение записывается и решается.	$2x + 3x + 4x = 27$ $9x = 27$ $x = 3$	Вычисляется масса цемента, песка и гравия. Цемент $\rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ (т), Песок $\rightarrow 3 \cdot 3 = 9$ (т), Гравий $\rightarrow 4 \cdot 3 = 12$ (т)
б) Одна часть цемента обозначается через y, поскольку цемент состоит из 2 частей, записывается и решается соответствующее уравнение.	$2y = 4$ $y = 2$	Сначала вычисляется масса песка и гравия, а затем масса бетонной смеси. Песок $\rightarrow 3y = 3 \cdot 2 = 6$ (т) Гравий $\rightarrow 4y = 4 \cdot 2 = 8$ (т) Бетонная смесь $\rightarrow 4 + 6 + 8 = 18$ (т)

Ответ. а) 2 т цемента, 6 т песка, 8 т гравия; б) 18 т бетонной смеси

8. В задаче требуется найти, сколько грибов собрал каждый из детей, если количество грибов, собранных Самиром и его сестрой, равно 3 : 4.

Решение задачи:

а) $\frac{3}{4} = \frac{12}{c}$ Какое число можно записать в пустую клетку, чтобы отношения были эквивалентными? Ученики изучили это на предыдущих уроках. Чтобы получить 12, нужно умножить 3 на 4. Тогда необходимо умножить второй член отношения (4) на 4. То есть в пустую клетку должно быть записано 16. Значит, если Самир соберет 12 грибов, то его сестра соберет 16 грибов.

б) Одна часть обозначается x. Грибы, собранные Самиром $\rightarrow 3x$, Грибы, собранные сестрой Самира $\rightarrow 4x$ Записывается и решается соответствующее уравнение.	$3x + 4x = 42$ $7x = 42$ $x = 6$	Вычисляется количество грибов, собранных Самиром и его сестрой. Грибы, собранные Самиром $\rightarrow 3 \cdot 6 = 18$ Грибы, собранные сестрой Самира $\rightarrow 4 \cdot 6 = 24$

Ответ. а) 16; б) 18 и 24.

9. В задаче требуется найти площадь каждого поля пшеницы и ячменя.

Решение задачи:

б) Одна часть обозначается x. Пшеничное поле (в га) $\rightarrow 9x$, Ячменное поле (в га) $\rightarrow 5x$ Площадь пшеничного поля на 20 га больше площади ячменного поля. Записывается и решается соответствующее уравнение.	$9x - 5x = 20$ $4x = 20$ $x = 5$	Вычисляются площади полей. Площадь пшеничного поля: $9 \cdot 5 = 45$ (га) Площадь ячменного поля: $5 \cdot 5 = 25$ (га)

Ответ. Площадь пшеничного поля 45 га, площадь ячменного поля 25 га**.**

10. В задаче, когда 28 учеников класса разделены на 3 группы, требуется найти, сколько учеников в каждой группе.

Решение задачи:

$\frac{3}{7}$ части учеников в первой группе: $28 \cdot \frac{3}{7} = 12$ Находится число остальных учеников: $28 - 12 = 16$ 16 учеников разделены на вторую и третью группы в отношении 3:5.	$3x + 5x = 16$ $8x = 16$ $x = 2$	Число учеников во 2 группе $\rightarrow 3 \cdot 2 = 6$, Число учеников в 3 группе $\rightarrow 5 \cdot 2 = 10$

Ответ. В первой группе 12, во второй 6, в третьей 10 учеников.

Обсуждение. Обсуждаются способы решения учеников, которые решают задачу разными способами.

11. В задаче требуется найти периметр треугольника.

Решение задачи:

Одна часть обозначается x. Длины сторон треугольника (в см): $3x$, $4x$, $5x$ Большая сторона на 4 см длиннее меньшей.	$5x - 3x = 4$ $2x = 4$ $x = 2$	Длины сторон треугольника: $3 \cdot 2 = 6$ (см); $4 \cdot 2$ см $= 8$ см; $5 \cdot 2$ см $= 10$ см Периметр треугольника: $6 + 8 + 10 = 24$ (см).

Ответ. Периметр треугольника 24 см.

13. В задаче требуется узнать, сколько гусей, сколько уток, сколько кур содержится на птицефабрике.

Решение задачи:

Отношение числа гусей и уток $\rightarrow$ 1 : 2

Отношение числа уток и кур → 4 : 5

Записывается отношение количества гусей, уток и кур на ферме. 2 : 4 : 5

Гуси	Утки	Куры
1	2	
↓	↓	
2	4	5

$2x + 4x + 5x = 1320$
$11x = 1320$
$x = 120$

Находится число птиц на ферме.
Число гусей → 2 · 120 = 240;
Число уток → 4 · 120 = 480;
Число кур → 5 · 120 = 600

Ответ. На ферме 240 гусей, 480 уток и 600 кур.

14. В задаче требуется найти цену 1 килограмма смеси изюма и кураги.

Решение задачи:

Поскольку изюм и курага смешаны в отношении 3:2, находится сколько изюма и кураги содержится в 1 кг смеси:

$3x + 2x = 1$
$5x = 1$
$x = 0,2$

Масса изюма → 3 · 0,2 = 0,6 (кг)
Масса кураги → 2 · 0,2 = 0,4 (кг)
Цена 0,6 кг изюма → 0,6 · 6 = 3,60 (₼)
Цена 0,4 кг кураги → 0,40 · 12 = 4,80 (₼)
Находится цена 1 кг смеси. 3,60 + 4,80 = 8,40 (₼)

Ответ. Цена 1 кг смеси 8,40 манатов.

К сведению учителя! Навыки решения задач рекомендуется развивать на примерах, связанных с делением величины в данном отношении. При этом особое значение имеет более глубокое понимание понятия отношения.

Проект. Ученикам можно предложить написать и решить задачу, связанную с делением величин в заданном отношении в разных ситуациях, и подготовить презентацию с объяснением решения.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Записывает и упрощает отношение одноименных величин.	Рабочие листы, учебник, РТ
Делит величину в данном отношении.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи, связанные с отношением.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.4. Пропорция

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция. 6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет пропорцию как равенство двух отношений. • Составляет пропорцию, записывая эквивалентное отношение к заданному отношению. • Знает и применяет свойства пропорции. • Решает различные задачи, связанные с пропорциями.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/7799* *https://video.edu.az/video/8662* *https://video.edu.az/video/9117* *https://video.edu.az/video/9464* *https://video.edu.az/video/9578* *https://video.edu.az/video/10604* *https://phet.colorado.edu/az/simulations/ratio-and-proportion* Задания: *https://www.geogebra.org/m/rwzxchnf* *https://www.geogebra.org/m/sat6wybk* *https://www.geogebra.org/m/k7mbrv5b*

Побуждение.

Учитель предлагает ученикам написать отношение, эквивалентное заданному отношению, например, $\frac{4}{6}$. Разделив оба члена отношения на 2, ученики пишут разные отношения, которые эквивалентны отношению, полученному при умножении на 2, 3, 4 и т.д.

Учитель задает ученикам вопросы: Какое число нужно записать в пустую клетку, чтобы уравнение $\frac{2}{5} = \frac{c}{6}$ было верным? Как это определить? Мнения учеников выслушиваются и обсуждаются.

Исследование-обсуждение

Ученики говорят, что в смеси Лалы отношение воды и сиропа составляет 2:4, а в смеси Эльхана – 3:6. Учитель задает вопрос: Одинакова ли в обеих смесях пропорция воды и сиропа? Как это определить? Под руководством учителя ученики различными способами определяют, что эти отношения равны. Например, умножив оба члена отношения 2:4 на 1,5, получается отношение 3:6, или, упрощая оба отношения, записывают равенство данных отношений, показывая, что они оба эквивалентны отношению 1: 2.

Изучение Пропорция

Равенство двух отношений называется пропорцией, а как определяют, образуют ли данные отношения пропорцию или нет, поясняется на примерах, приведенных в учебнике.

Дается информация об общем написании и чтении пропорции. Показаны крайние и средние члены пропорции.
Целесообразно привести различные примеры пропорций. Например, ученик пишет какое-либо отношение, а его одноклассник пишет отношение, эквивалентное этому отношению. Пропорции устанавливаются путем записи равенства этих отношений.
При пропорциональном изменении двух величин можно записать разные отношения и равенство этих отношений. Например, если 2 ручки стоят 5 манатов, сумма уплаченных денег меняется при изменении количества ручек. В этом случае, например, деньги, заплаченные за 4 ручки, можно найти, определив неизвестный член пропорции. При этом можно записать отношение начального количества ручек (2) к заплаченной сумме денег (5) и отношение последующего количества ручек (4) к заплаченным деньгам. Либо можно написать отношение начального (2) и последующего количества ручек (4), а также отношение суммы заплаченных денег в первом и втором случаях. В обоих случаях записанные отношения будут равны и образуют пропорцию.
В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:
https://www.mathplayground.com/ASB_DirtBikeProportions.html

Задания

1. Показывается, что отношения эквивалентны, и на основании этого обосновывается, что они образуют пропорцию. Показываются крайние и средние члены пропорции.
2. Данное отношение упрощается и составляется пропорция путем записи равенства эквивалентных отношений.
3. Проверяется правильность мнений. Пропорции пишутся из эквивалентных отношений.
4. Обсуждается решение примера. Среди заданных отношений определяют эквивалентные и записывают пропорцию исходя из их равенства.
К сведению учителя! У некоторых учеников может возникнуть мнение, что определить эквивалентность отношений можно, только упростив их и сравнив полученные отношения. Поэтому рекомендуется привести примеры альтернативных способов определения этого. Например, можно показать, что отношения 8:6 и 24:18 эквивалентны, умножив оба члена отношения 8:6 на 3 или разделив оба члена отношения 24:18 на 3.
Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики могут допустить ошибку при определении крайних и средних членов пропорции. Особенно это заметно, когда пропорция записана в виде $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Поэтому ученикам, допустившим подобную ошибку, рекомендуется предложить сначала записать заданную пропорцию в виде $a : b = c : d$ и указать средние и крайние члены согласно этой записи. Ученики могут спутать члены пропорции с алгоритмом перекрестного умножения.
Чтобы проверить рассуждение ученика, целесообразно попросить его объяснить, как он решил задачу.

Изучение Основное свойство пропорции

Целесообразно обосновать основное свойство пропорции на примере. Ученикам предлагается умножить оба члена отношения $\frac{2}{5}$ на 1,2, чтобы записать эквивалентное отношение и соответствующую пропорцию. В записанной пропорции $\frac{2}{5} = \frac{2,4}{6}$ показываются средние и крайние члены. Обе части пропорции умножаются на произведение $5 \cdot 6$ и получается уравнение $2 \cdot 6 = 5 \cdot 2,4$.
Затем основное свойство пропорции объясняется в общих чертах.

Произведение средних членов

$$\overset{b \times c}{a : b = c : d} \rightarrow a \times d = b \times c \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \times d = b \times c$$

$a \times d$

Произведение крайних членов

Цедесообразно показать на примерах, что справедливо и обратное основному свойству пропорции. $a \times d = b \times c \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

На примерах показывается, что равенство не нарушается при изменении мест крайних или средних членов пропорции.

$a : b = c : d \rightarrow d : b = c : a$ или $a : b = c : d \rightarrow a : c = b : d$

Подумай!

Обсуждаются и приводятся примеры, какие еще пропорции можно записать, изменяя места членов в пропорции.

5. Обсуждается решение данного примера. Используя основное свойство пропорции, определяют, образуют ли отношения пропорцию.

6. Сначала проверяется, образуют ли отношения пропорцию. Затем записываются новые пропорции путем изменения мест соответствующих членов в пропорции.

а) Умножив оба члена отношения 4:5 на 3, получим отношение 12:15. Итак, 4:5 = 12:15 пропорция. Пропорции 4:12 = 5:15, 15:12 = 5:4 и 15:5 = 12:4 записываются путем замены мест соответствующих членов.

7. Обсуждается решение данного примера, неизвестное находится с помощью основного свойства пропорции.

9. Используя данные числа, записываются возможные пропорции.

а) По заданным числам 4, 5, 8, 10 сначала определяют, какие два числа равны произведению двух других чисел: 4 · 10 = 5 · 8. Поскольку обратное основному свойству пропорции также верно, то записывается пропорция 4:8 = 5:10 , а затем, поменяв местами соответствующие члены, записываются еще три пропорции 10 : 8 = 5 : 4   10 : 5 = 8 : 4   4 : 5 = 8 : 10.

Остальные пункты выполняются аналогичным образом.

10. Требуется записать три пропорции по данному условию.

а) в пропорции с крайними членами 6 и 10, поскольку произведение этих слагаемых равно 60, произведение средних членов также должно быть равно 60. 2 и 30, 4 и 15, 5 и 12 принимаются как числа с произведением 60 и записываются соответствующие пропорции.

6 : 2 = 30 : 3, 6 : 4 = 15 : 10, 6 : 5 = 12 : 10. Целесообразно провести в классе обсуждение о том, какие пропорции можно записать согласно заданному условию. Ученики могут записать новые пропорции, подставив соответствующие члены в каждое из уже написанных пропорций.

Остальные пункты задания выполняются аналогично.

11. Требуется вписать в пустую клетку такое число, чтобы из четырех полученных чисел можно было составить пропорцию. Спрашивается, сколько чисел можно выбрать для каждой тройки чисел.

а) 1 2 5 с

Обсуждаются различные методы решения. Определить число, которое нужно записать в пустую клетку, можно, составив пропорцию из заданных чисел и найдя не заданный член пропорции. Либо можно найти число, которое нужно записать в пустую клетку, и установить соответствующую пропорцию ввиду равенства пары произведений.

Например, из равенства 2 · 5 = 1· с находится число, соответствующее пустой клетке: 2 · 5 = 1 · 10. Отсюда записывается пропорция 2 : 1 = 10 : 5

Из равенства 1 · 5 = 2 · с в пустую клетку вписывается число 2,5: 1 · 5 = 2 · 2,5. Отсюда записывается пропорция 1 : 2,5 = 2 : 5.

Из равенства 1 · 2 = 5 · с в пустую клетку вписывается число 0,4 : 1 · 2 = 5 · 0,4. Отсюда записывается пропорция 1 : 5 = 0,4 : 2.

Таким образом определяется, что по заданной тройке найдены три числа.

12. На вопросы дается ответ путем нахождения неизвестного члена пропорции.

а) Ширина прямоугольника (в метрах) обозначается x и по данному условию записывается пропорция 4 : 3 = 6 : x. Неизвестное находится с помощью основного свойства пропорции: x = 4,5 (м).

На вопросы в пунктах б и в отвечают аналогично.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько примеров нахождения неизвестного члена пропорции, дает ученикам задание найти неизвестное и объяснить, как его найти.

Углубление. Учитель дает ученикам задание написать на доске любые два числа и составить различные пропорции, используя эти числа как крайние (или средние) члены.

Решение задач

Задачи решаются составлением пропорций.

13. В задаче требуется найти, каковы затраты или доходы мастера Али, исходя из того, что отношение денег, которые он тратит, к деньгам, которые он собирает, равно 3 : 1.

Решение задачи.

а) Сбережения за первый месяц составили 120 манатов. Расход обозначается x и записывается пропорция: $3 : 1 = x : 120$.

Неизвестное находится с помощью основного свойства пропорции: $x = 360$ (ман).

б) Расходы за второй месяц составили 630 манатов. Сбережения обозначаются y и записывается пропорция: $3 : 1 = 630 : y$.

Отсюда находится $y = 210$ (ман). Вычисляется доход Мастера Али за этот месяц: 630 + 210 = 840 (ман)

Ответ. а) Расходы за первый месяц составили 360 манатов. б) Доход за второй месяц составил 840 манатов.

14. В задаче требуется найти количество марок Эльхана и сколько марок купила Лала, количество марок будет в отношении 2 : 3.

Решение задачи.

а) Количество марок Эльхана обозначается x и записывается пропорция: $3 : 5 = 18 : x$. Отсюда находится $x = 30$.

б) Если Лала купит x марок, то у нее будет $18 + x$ марок. По условию записывается пропорция: $(18 + x) : 30 = 2 : 3$. Отсюда находится $x = 2$.

Ответ. а) У Эльхана 30 марок. б) Если Лала купит 2 марки, то число марок будет относится как 2 : 3.

15. В задаче требуется найти отношение сока моркови к потерям, сколько из 2 кг моркови теряется и сколько килограммов моркови нужно на 3 кг сока.

Решение задачи.

а) Если из 1 кг моркови получается 600 г, т.е. 0,6 кг сока, то теряется 1 кг – 0,6 кг = 0,4 кг. Отношение морковного сока к исходящим потерям записывается и упрощается: 0,6 кг : 0,4 кг = 0,6 : 0,4 = 6 : 4 = 3 : 2

б) *Привлечение.* Учитель задает ученикам наводящие вопросы:

Если 1 кг моркови приводит к потере 0,4 кг, то можно ли сказать, что 2 кг моркови приводят к потере в 2 раза большей, т.е. 0,8 кг? Или как ответить на вопрос, составив пропорцию?

Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

в) По условию морковь и сок относятся как 1:0,6. Итак, если для получения 3 кг сока взять x кг моркови, то можно записать пропорцию $1:0,6 = x:3$. Отсюда находится $x = 5$ (кг)

Ответ. а) Отношение сока моркови и потери составляет примерно 3:2; б) из 2 кг моркови теряется 0,8 кг; в) на 3 кг сока необходимо 5 кг моркови.

16. В задаче требуется найти, сколько красных шаров брошено в ящик.

Решение задачи.

Количество добавленных красных шаров обозначается x. Отношение записывается исходя из того, что количество белых и красных шаров относится как 3:4, а неизвестное находится с помощью основного свойства пропорции:

$$12 : (10 + x) = 3 : 4$$
$$3 \cdot (10 + x) = 12 \cdot 4$$
$$10 + x = 16$$
$$x = 6$$

Ответ. В ящик добавили 6 красных шаров.

К сведению учителя! Важно развивать навыки написания отношения, эквивалентного заданному отношению. Ученики выполнили аналогичные задания на предыдущих уроках, заполнив таблицу и вписав соответствующее число в пустую ячейку на двойной числовой оси. На этом занятии предполагается развивать соответствующие навыки, основанные на использовании пропорции и ее основного свойства. Эти навыки очень важны на следующих уроках при нахождении необходимого расстояния по масштабу, а также при решении задач, связанных с пропорциональными величинами.

Проект. Ученикам можно предложить написать и решить задачу на пропорции для различных ситуаций и подготовить презентацию, объясняющую решение. Рекомендуется показать примеры, связанные с выбором темы. Например, выбрать рецепт блюда и переписать его, используя пропорции для разных объемов, вычислить стоимость продуктов, используя пропорции и заданную сумму денег, и т. п.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Составляет пропорцию, записывая эквивалентное отношение к заданному отношению.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойства пропорции.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи, связанные с пропорциями.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.5. Масштаб

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет понятия отношение и пропорция. 6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет масштаб как отношение длины на плане к действительной длине. • Находит искомое расстояние в соответствии с масштабом и заданным расстоянием. • Решает различные задачи на масштаб.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, рисунки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.mathspad.co.uk/interactives/ratioMaps/ratioMaps.php* Задания: *https://www.geogebra.org/m/vFxMhyTS* *https://www.geogebra.org/m/caevjscw* *https://www.geogebra.org/m/y83qaebk* _*https://www.geogebra.org/m/udu4kxcr*

Побуждение.

Учитель прикрепляет к доске уменьшенное изображение учебника по математике, держит сам учебник в руках и задает ученикам вопросы:

– Как можно определить, во сколько раз уменьшены ширина и длина учебника на изображении? Какие размеры нужно для этого знать?

Ученики измеряют ширину и длину учебника, затем измеряют размеры на изображении с помощью линейки и записывают их на доске. Составляя соответствующие отношения, они рассчитывают, во сколько раз размеры уменьшены.

Ученикам задается взять любую книгу или тетрадь, уменьшить ее размеры в несколько раз и нарисовать вид сверху в тетради. Нескольким ученикам задаются вопросы: во сколько раз они уменьшили размеры и какие размеры получили. Проводится обсуждение с классом.

Исследование-обсуждение

Ученики считают квадратные клетки по заданному плану дачного дома, и определяют реальные размеры дома и участка, если сторона каждой квадратной клетки соответствует 6 м:

Ширина дома → 2·6=12 (м), длина → 3·6=18 (м);

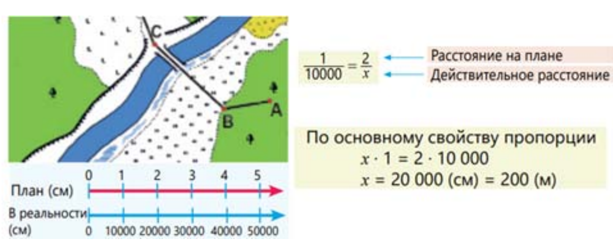
Ширина участка → 3·6=18 (м), длина → 6·6 = 36 (м).

Учитель спрашивает учеников: Как перерисовать план так, чтобы каждая квадратная клетка в реальности соответствовала 3 метрам? В это время ученики делают вывод, что ширина дома на плане составляет 12 : 3 = 4 клетки, а длина - 18 : 3 = 6 клеток. При аналогичных рассуждениях выясняется, что ширина участка составит 6 клеток, а для длины двора подойдет 12 клеток.

Учитель задает наводящие вопросы: Если каждая квадратная клетка соответствует 6 метрам, какие рассуждения можно было бы использовать, чтобы определить, что ширина дома будет соответствовать 2 клеткам, а если каждая квадратная клетка будет соответствовать 3 метрам, то ширина дома будет соответствовать 4 клеткам? Обсуждение проводится всем классом, выслушивается мнение учеников.

Изучение Масштаб

Дается информация, что для изображения объектов на бумаге часто необходимо уменьшить их размеры, и для этого используется масштаб. Масштаб определяется как отношение длины отрезка на изображении к его фактической длине. Например, если предмет изображен в 1000 раз меньшим, чем он есть на самом деле, масштаб записывается как 1:1000 или $\frac{1}{1000}$. Нахождение расстояния на плане и



действительного расстояния по масштабу поясняется на примере.
Отмечается, что масштаб также используется для описания объектов, которые в действительности очень малы. При этом указывается, что все расстояния увеличиваются в одинаковое число раз и масштаб записывается как 10:1, 100:1 и т.д.
В классах с техническими возможностями можно использовать онлайн-платформы Google Earth и Google Maps для демонстрации реальных размеров и расчета по масштабу:
https://www.google.com/maps
https://earth.google.com/web/

Задания

1. Исследуется решение данного примера. Составлением пропорции находятся действительные расстояния на основе масштаба плана и расстояния на плане.
2. С помощью линейки измеряют расстояние между городами на карте и рассчитывают действительное расстояние между этими городами по масштабу.
Ученики формулируют различные вопросы на основе карты и отвечают на них. Например, расстояние между какими городами больше, какие города находятся примерно на одинаковом расстоянии и т.д.
3. Обсуждается решение приведенного примера нахождения расстояния на плане по масштабу и действительному расстоянию. Решение задач осуществляется путем составления подходящей пропорции.
4. На карте заданного масштаба находится расстояние между двумя точками с реальным расстоянием 4 км.
а) На карте масштаба 1:10000 это расстояние обозначается x. Поскольку отношение расстояния на карте к реальному расстоянию составляет 1:10000, то записывается соответствующая пропорция и находится неизвестное, применяя основное свойство пропорции.

$$\frac{1}{10000} = \frac{x}{400000}, \quad 10000x = 400000,\ x = 40 \text{ (см)}$$

В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:
https://video.edu.az/video/8452
5. Рассматривается решение примера нахождения масштаба по действительному расстоянию и расстоянию на плане и решение заданий выполняется аналогичным образом.

Запомни!

Ученикам объясняется, что по заданному масштабу можно определить, во сколько раз уменьшается или увеличивается действительное расстояние. Например, на плане, изображенном в масштабе 1:1000, действительное расстояние уменьшено в 10 000 раз. Итак, умножив расстояние на плане на 1000, можно найти действительное расстояние, а разделив действительное расстояние на 10 000, можно найти расстояние на плане.
Рекомендуется выполнить 6-е и 7-е задания в учебнике, основываясь на этом результате.
6. Составлен план масштаба 1:200. Итак, умножив расстояние на плане на 200, можно найти действительное расстояние, а разделив действительное расстояние на 200, можно найти расстояние на плане.
а) Длина комнаты на плане составляет 3 см. Действительная длина: 200·3 см = 600 см = 6м.
б) Длина забора 20 м. Длина на плане: 20 м : 200 = 0,1 м = 10 см.
7. Дорога длиной 30 м изображена на плане длиной 5 см. Масштаб плана находится: 5 см:30 м = 5:3000 = 1:600. То есть действительное расстояние на плане уменьшается в 600 раз.
а) Длина дороги, которая на плане составляет 10 см: 10 см · 600 = 6000 см = 60 м
б) Мост длиной 15 м на плане имеет длину: 15 м: 600 = 1500 см: 600 = 2,5 см.
8. Находится чему равно расстояние между двумя точками на карте с масштабом 1:50000, если это расстояние на карте с масштабом 1:20000 равно 6 см.
Действительное расстояние между точками (в см) обозначается *x*. Поскольку отношение расстояния на карте к действительному расстоянию составляет 1:20000, то записывается соответствующая пропорция и находится неизвестное, применяя основное свойство пропорции.

$$\frac{1}{20000} = \frac{6}{x}, \quad x = 120000 \text{ (см)} = 1200 \text{ (м)}$$

На карте масштаба 1:50000 это расстояние (в см) обозначается y, пишется соответствующая пропорция и находится неизвестное.

$$\frac{1}{50000} = \frac{y}{120000}, \quad y = 120000 : 50000 = 2{,}4 \text{ (см)}$$

К сведению учителя! Ученикам важно правильно определить, что означают члены пропорции при нахождении искомого расстояния на основе масштаба и заданного расстояния путем составления пропорции. У некоторых учеников здесь могут возникнуть трудности. В таком случае целесообразно обсудить, как составляется соответствующая пропорция.

Ложные представления, возникающие у учеников. При определении масштаба по заданным расстояниям ученики могут забыть выразить величины в одной и той же единице или допустить ошибку в правильном выражении величин в одной и той же единице. Рекомендуется обратить особое внимание на этот момент, рассматривая различные примеры.

Ложное

$$\frac{2\ \text{см}^2}{50\ \text{м}^2} = \frac{2\ \text{см}^2}{5000\ \text{см}^2} = \frac{2:2}{5000:2} = \frac{1}{2500}$$

Верное

$$\frac{2\ \text{см}^2}{50\ \text{м}^2} = \frac{2\ \text{см}^2}{500000\ \text{см}^2} = \frac{2}{500000} = \frac{2:2}{500000:2} = \frac{1}{250000}$$

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько примеров нахождения расстояния в реальности (на плане) по масштабу и (действительного) расстояния на плане и предлагает ученикам найти искомое и объяснить, как они это нашли.

Углубление. Учитель предлагает ученикам написать на доске несколько примеров того, как по расстоянию на карте определенного масштаба найти действительное расстояние между двумя точками на карте другого масштаба и решить их.

Решение задач

Решаются данные в учебнике задачи на масштаб.

9. Требуется определить возможность построения плана футбольного поля длиной 90 м и шириной 60 м масштаба 1:30.

Решение задачи.

По масштабу 1:30 определяется, что реальные размеры уменьшены в 30 раз. Поскольку 90 м : 30 = 3 м, делается вывод, что этот план невозможно нарисовать.

Ответ. Невозможно нарисовать необходимый план.

10. В задаче требуется найти длину модели самолета масштаба 1:50 с реальной длиной 25 м и размахом крыльев 14 м, а ученики должны определить, какое мнение является верным.

Решение задачи.

• Длина модели (в см) обозначается x. Учитывая, что 25 м = 2500 см, пропорция записывается по заданному масштабу и неизвестное находится по основному свойству пропорции.

$\frac{1}{50} = \frac{x}{2500}$ Þ $50x = 2500$ Þ $x = 2500 : 50 = 50$ (см)

• По заданному масштабу действительное расстояние уменьшается в 50 раз. Тогда расстояние между крыльями 14 м на макете будет 14 м : 50 = 1400 см : 50 = 28 см. Таким образом, мнение Лалы верное.

Ответ. Мнение Лалы верное.

11. В задаче требуется найти действительную длину пчелы по рисунку, выполненному в масштабе 2:1.

Привлечение. Учитель задает ученикам наводящие вопросы.

Изображение пчелы увеличено или уменьшено? Во сколько раз? Как это определить?

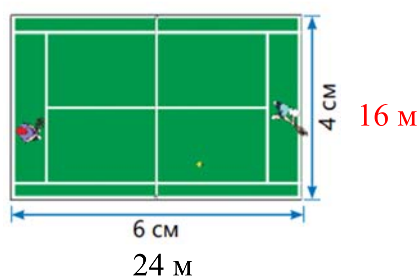
Решение задачи:

По заданному масштабу ученики определяют, что размер пчелы в 2 раза превышает ее реальный размер, и находят действительную длину пчелы по размеру, указанному на рисунке: 4 см : 2 = 2 см.

Ответ. действительная длина пчелы 2 см.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

12. В задаче требуется найти масштаб плана по заданной длине прямоугольного теннисного корта и размерам, указанным в плане, и ответить на вопросы.



Решение задачи:

Сначала определяется масштаб плана. Длина корта, составляющая 24 м, на плане равна 6 см.

$$\frac{6\ \text{см}}{24\ \text{м}} = \frac{6\ \text{см}}{2400\ \text{см}} = \frac{6:6}{2400:6} = \frac{1}{400}$$

План выполнен в масштабе 1:400.

• Обсуждается, как можно найти ширину корта разными способами. На плане указывается ширина корта 4 см. Таким образом, в реальности ширина корта в 400 раз больше этой:

4 см · 400 = 1600 см = 16 м.

• Периметр корта: 2 · (24 + 16) = 80 (м). Периметр корта на плане: 2 · (6 + 4) = 20 (см).

Отношение периметра корта к его периметру на плане записывается и упрощается:

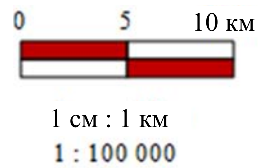
$$\frac{80\ \text{м}}{20\ \text{см}} = \frac{8000\ \text{см}}{20\ \text{см}} = \frac{8000:20}{20:20} = \frac{400}{1} = 400 : 1$$

• Площадь корта: 24 м · 16 м = 384 м^2. Площадь на плане: 6 см · 4 см = 24 см^2.
Отношение площадей записывается и упрощается:

$$\frac{384\ \text{м}^2}{24\ \text{см}^2} = \frac{3840000\ \text{см}^2}{24\ \text{см}^2} = \frac{3840000:24}{24:24} = \frac{160000}{1} = 160000 : 1$$

Ответ. План выполнен в масштабе 1:400. Ширина корта 16 метров. Отношение периметра корта к периметру на плане 400:1, а отношение площади корта к площади на плане 160000:1.

К сведению учителя! Целесообразно рассказать о различных формах записи масштаба. На картах и макетах масштаб может быть представлен не только в виде числового отношения, но и в виде графической шкалы.



Ученикам объясняется, что масштаб может быть записан, например, как 1:100000 или как 1 см : 1 км.
Рекомендуется обсудить, как перейти от одной формы записи масштаба к другой. Ученикам можно показать примеры таких представлений.

Проект. Ученикам можно поручить создать план с выбранным масштабом, придумать задачу по этому плану и подготовить презентацию с ее решением. Например, план школьного двора, создание 3D-моделей исторических памятников и т. д. При подготовке таких проектов ученики могут использовать цифровые приложения, такие как Tinkercad и SketchUp.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет масштаб по расстоянию на плане и в реальности.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит искомое расстояние в соответствии с масштабом и заданным расстоянием.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи на масштаб.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.6. Прямая пропорциональная зависимость

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции. 6-2.3.1. Объясняет прямо пропорциональную зависимость между двумя величинами. 6-2.3.3. Представляет заданную прямо пропорциональную зависимость в разных формах.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Записывает и применяет отношения в разных формах. • Применяет свойства пропорции. • Различает и объясняет прямо пропорциональные величины. • Решает различные задачи, связанные с прямо пропорциональными величинами. • Записывает формулу прямо пропорциональной зависимости. • Рисует таблицу и график прямо пропорциональной зависимости.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/qqzrbtfh* *https://video.edu.az/video/7762* *https://video.edu.az/video/8998* *https://www.mathspad.co.uk/interactives/proportion/directProportion.php* *https://www.mathspad.co.uk/interactives/proportion/directProportion2.php* Задания: *https://video.edu.az/video/9073* *https://video.edu.az/video/9755*

Побуждение.
Учитель предлагает ученикам решить такую задачу. Айнур купила 3 одинаковых пирожка и заплатила 6 манатов. Сколько она заплатит, если купит 6 таких пирожков? Учитель может направить учеников на решение задачи несколькими способами, задавая наводящие вопросы.
1-й способ. Если 3 пирожка – 6 манатов, то 1 пирожок – 2 маната. Тогда за 6 пирожков нужно заплатить 12 манатов.
2-й способ. 3 пирожка стоят 6 манатов. 6 пирожков получается, если взять по 3 пирожка 2 раза каждый. Тогда оплаченная сумма равна 2 · 6 = 12 (ман).

3-*й способ*. Отношение оплаченной суммы к количеству полученных пирожков указывает цену одного пирожка. Поскольку цена пирожка не меняется, в пустой ячейке равенства $\frac{6}{3} = \frac{c}{6}$ следует записать 12. Значит, за 6 пирожков надо заплатить 12 манатов.

Исследование-обсуждение

Отмечается, что турист заплатил 100 $ и получил в обменном пункте 170 манатов.

• Поскольку 200$ = 100$ + 100$, и так как за каждые 100$ он получает 170₼, то если турист обменивает 200$, то он получает 170₼ + 170₼ = 340₼.

Учитель задает наводящий вопрос: во сколько раз количество манатов, которую купил турист, увеличится, если количество долларов, обмененных туристом, увеличилось в 2 раза? Во сколько раз 850 манатов больше 170 манатов?

• Поскольку 850 ₼ = 5·170 ₼, определяется, что турист должен обменять 5 · 100 $ = 500 $, чтобы купить 850 манатов.

• Определяется, во сколько раз число, обозначающее полученную туристом сумму в манатах, больше числа, обозначающего количество обменянных им долларов. Отмечается, что за каждый обмененный доллар получается 1,7 маната. Под руководством учителя ученики приходят к мнению, что искомую зависимость можно выразить формулой $d = 1{,}7m$.

Изучение Прямо пропорциональные величины

Если одна величина увеличивается (уменьшается) в несколько раз, то другая величина увеличивается (уменьшается) в такое же число раз, такие величины называются прямо пропорциональными величинами. На примере, приведенном в учебнике, объясняется, что пройденное расстояние прямо пропорционально времени, если скорость не меняется.

$$\frac{\text{Пройденный путь (км)}}{\text{Время (час)}} = \frac{70}{1} = \frac{140}{2} = \frac{210}{3} = \ldots$$

Соответствующие значения прямо пропорциональных величин, отношения которых эквивалентны, показаны на образце.

Целесообразно привести различные примеры прямо пропорциональных величин. Например, рекомендуется создать условия для выражения учениками своего мнения о том, прямо пропорциональны ли количество одинаковых ручек, купленных в магазине, и уплаченная сумма, а также объем тела и его масса.

Подумай! На примерах объясняется возможность составления пропорции из соответствующих отношений значений прямо пропорциональных величин. Показан пример прямо пропорциональных величин, из соответствующих значений этих величин записываются разные пропорции.

Задания

Первые задания, данные в учебнике, служат формированию и закреплению представлений учеников о прямо пропорциональных величинах.

1. Определяется, что оплачиваемая сумма увеличивается (уменьшается) во сколько раз увеличивается (уменьшается) количество купленных упаковок попкорна. Таким образом, делается вывод, что оплаченная сумма денег прямо пропорциональна количеству упаковок.

2. Если одна сторона прямоугольника остается постоянной, определяют, что его площадь и длина прямо пропорциональны.

3. Определяется, в какой таблице переменные x и y прямо пропорциональны. Приходят к выводу на основании того, эквивалентны или нет отношения соответствующих значений переменных.

4. Таблица заполняется путем записи эквивалентных отношений исходя из того, что оплачиваемая сумма и количество товаров, а также масса и объем тела прямо пропорциональны.

5. Обсуждается решение данного примера. Сначала выслушиваются мнения учеников о прямо пропорциональности данных величин. Ответы на вопросы даются путем составления пропорции и решения аналогично решению примера.

К сведению учителя! Отмечая еще раз возможность составления пропорции из соответствующих значений прямо пропорциональных величин, целесообразно объяснить, что пропорцию в решении примера в 5-м задании можно записать в виде $\frac{2}{8} = \frac{5}{y}$, и отсюда пропорция $\frac{2}{5} = \frac{8}{y}$ получается изменением места средних членов. При решении задач, связанных с прямо пропорциональными величинами, путем составления пропорции, рекомендуется уточнить суть того, что стрелки находятся в одном направлении при записи краткого условия задачи, и объяснить ученикам, что удобнее и понятнее записывать пропорцию согласно определению прямо пропорциональных величин.

Ложные представления, возникающие у учеников. При ответе на вопросы по составлению и решению пропорции необходимо сначала правильно определить, являются ли величины прямо пропорциональными или нет. Иногда ученики пишут и решают пропорции механически, не задумываясь об этом. Это может привести к ошибкам, особенно на последующих уроках. При этом величины могут быть не прямо пропорциональны (например, обратно пропорциональны, как в следующей теме и т.д.) На этот момент рекомендуется обратить особое внимание на различных примерах.

Запомни!

Отмечается, что частное, полученное от деления соответствующих значений прямо пропорциональных величин, является постоянным, и эту константу называют коэффициентом пропорциональности. Обозначая коэффициент пропорциональности через k, объясняют, что формула прямой пропорциональной зависимости записывается в виде $y = kx$.

6. Рассматривается приведенный пример нахождения коэффициента пропорциональности и записи формулы для соответствующих значений прямо пропорциональных величин x и y. Задания решаются аналогичным образом.

7. а) Выслушиваются мнения учеников о том, во сколько раз больше краски нужно, если площадь помещения больше.

б) Находится и объясняется коэффициент пропорциональности, показывающий количество краски, необходимой для окраски 1 м^2 площади.

в) Формула зависимости количества использованной краски (m) от площади помещения (S) записывается: $m = 0{,}2S$.

г) По заданному значению S вычисляют соответствующие значения m.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель дает ученикам задание найти коэффициент пропорциональности и записать на доске соответствующую формулу зависимости по соответствующим значениям прямо пропорциональных величин.

Углубление. Учитель дает ученикам задание написать на доске пример записи формулы зависимости между прямо пропорциональными величинами и нахождения соответствующего значения другой по заданному значению одной из величин.

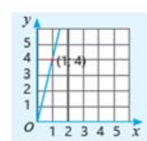
Изучение График прямой пропорциональной зависимости

На примере, приведенном в учебнике, объясняется, что количество купленного молока прямо пропорционально оплаченной сумме, составляется таблица соответствующих значений величин и строится график зависимости путем отметки точек, соответствующих парам (x; y) на координатной плоскости. Коэффициент пропорциональности определяют путем нахождения частного, полученного от деления соответствующих значений прямо пропорциональных величин, и записывают формулу зависимости.

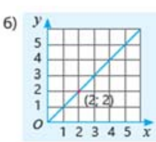
Отмечается, что точки, соответствующие прямой пропорциональной зависимости, расположены на прямой, проходящей через начало координат. Целесообразно объяснить на примерах, что прямая, не проходящая через начало координат, не имеет графика прямо пропорциональной зависимости. Например, можно обсудить на основе таких вопросов: Какой из данных графиков является графиком прямой пропорциональной зависимости? Как это определить?

Выполняются задания, данные в учебнике.

а)



б)



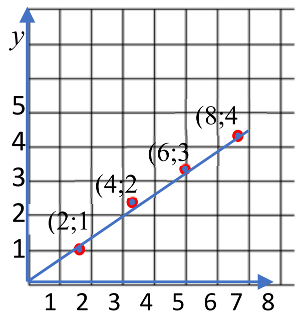
8. Обсуждается решение примера, связанного с нахождением коэффициента пропорциональности и написанием формулы зависимости по заданному графику прямой пропорциональной зависимости. Задания решаются аналогичным образом.

9. По заданному условию находится коэффициент прямой пропорциональности. Записывается соответствующая формула, заполняется таблица и строится график. Для данного значения x находится соответствующее значение y.

б) По таблице $y = 3$ при $x = 6$. Тогда коэффициент пропорциональности: $k = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Записывается соответствующая формула: $y = 0{,}5\,x$

Можно провести обсуждение всем классом о различных способах заполнения таблицы. Ученики могут предложить, что это можно сделать, написав эквивалентные отношения или воспользовавшись формулой зависимости. Выслушиваются мнения, ученики заполняют таблицу и сравнивают результаты. На координатной плоскости отмечают соответствующие точки согласно значениям таблицы и строят график.

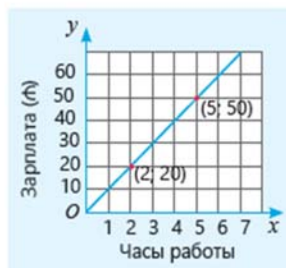


x	2	4	6	8
y	1	2	3	4

По формуле $y = 0{,}5x$ находится, что $y = 5$ при $x = 10$, y = 50 при $x = 100$.

10. Коэффициент пропорциональности находится исходя из условия прохождения графика прямой пропорциональной зависимости через заданную точку. Записывается соответствующая формула. Составляется таблица и строится график.

11. Коэффициент пропорциональности находится при условии, что график зависимости проходит через точку M (2; 8): $k = \frac{8}{2} = 4$.
Записывается соответствующая формула: $y = 4x$. Координаты точки, расположенной на графике, должны удовлетворять этой формуле.
Например, ордината точки B, абсцисса которой равна $x = 1$, должна быть $y = 4$.
Координаты остальных точек, которые не заданы, находятся по аналогичному правилу.



Решение задач

12. На основе графика, приведенного в задаче, требуется написать формулу зависимости объема воды, набранной в бак, от времени и объяснить, что показывают координаты точек, отмеченных на графике.
Решение задачи:
Коэффициент пропорциональности находится путем проведения графика прямо пропорциональной зависимости через точку (2; 30): $k = \frac{30}{2} = 15$. Записывается соответствующая формула: $y = 15x$
• Объясняется, что обозначают координаты отмеченных точек на графике.
(2; 30) - за 2 минуты в бак набирается 30 литров воды.
(6; 90) - за 6 минут набирается 90 литров воды.
13. В задаче требуется ответить на вопросы по графику зависимости заработной платы работника от количества рабочих часов и написать формулу зависимости.
Решение задачи:
• Поскольку соответствующие точки расположены на прямой, проходящей через начало координат, график поясняется как график прямо пропорциональной зависимости.
• По координатам точки (2; 20) на графике определяется, что работник получает заработную плату в размере 20 манатов при работе в течение 2 часов.
• По координатам точки (5; 50) на графике определяется, что работник должен отработать 5 часов, чтобы заработать 50 манатов.
• Коэффициент пропорциональности определяется путем нахождения частного, полученного от деления соответствующих значений величин: $k = \frac{20}{2} = 10$. Коэффициент пропорциональности показывает деньги, заработанные работником за 1 час.
• Записывается формула зависимости зарплаты работника от количества рабочих часов: $y = 10x$
• Записав $x = 10$ в формулу $y = 10x$, находится $y = 100$.
То есть, если работник отработает 10 часов, он получит 100 манатов.
К сведению учителя! Рекомендуется развивать навыки решения задач путем составления и решения пропорция для прямо пропорциональных величин. Запись эквивалентных отношений путем заполнения таблицы или определения чисел, соответствующих пустым ячейкам на двойной числовой оси, играет полезную роль в формировании этих привычек. Также особое внимание следует уделить формированию и развитию умений и навыков составления таблицы, построения графика, определения пропорциональной

зависимости по графику, написания соответствующей формулы и определения того, расположена ли точка, координаты которой даны, на графике пропорциональной зависимости.

Проект. Ученикам можно предложить написать и решить задачу, связанную с прямо пропорциональными величинами, встречающимися в повседневных жизненных ситуациях, и подготовить презентацию, объясняющую решение.

Формативное оценивание.

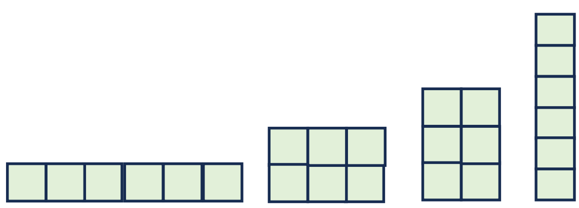
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Решает задачи, связанные с прямо пропорциональными величинами, путем составления пропорции.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит коэффициент пропорциональности, записывает формулу прямо пропорциональной зависимости.	Рабочие листы, учебник, РТ
Рисует таблицу и график прямо пропорциональной зависимости.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.7. Обратная пропорциональная зависимость

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.2. Применяет свойства отношения и пропорции. 6-2.3.2. Объясняет обратно пропорциональную зависимость между двумя величинами. 6-2.3.4. Представляет заданную обратно пропорциональную зависимость в разных формах.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Записывает и применяет отношения в разных формах. • Применяет свойства пропорции. • Различает и объясняет обратно пропорциональные величины. • Решает различные задачи, связанные с обратно пропорциональными величинами. • Записывает формулу обратно пропорциональной зависимости. • Составляет таблицу обратно пропорциональной зависимости. • Отвечает на вопросы, связанные с обратно пропорциональной зависимостью, по ее графику.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.mathspad.co.uk/interactives/proportion/inverseProportion.php* *https://contrib.pbslearningmedia.org/WGBH/mgbh/mket-int-shadowpup/index.html* *https://www.pbslearningmedia.org/resource/mket-math-rp-musicscale/musicscale/* Задания: *https://www.bbc.co.uk/bitesize/articles/zyfsydm#zggbr2p* *https://teachers.thenational.academy/units/direct-and-indirect-proportion-e7d4*

Побуждение.

Учитель предлагает ученикам составить разные прямоугольники из 6 единичных квадратов или нарисовать их в тетради. Идет обсуждение длины и ширины прямоугольников, которые ученики составили или нарисовали. Учитель задает наводящие вопросы: Что можно сказать о площадях этих прямоугольников? Как изменится длина прямоугольника, если увеличить его ширину в два раза? Ученики видят, что площадь прямоугольника во всех случаях равна 6 квадратным единицам, и наблюдают, что во сколько раз увеличивается одна из сторон, то во столько же раз уменьшается другая.



Исследование-обсуждение

На свои деньги Самир может купить 10 тетрадей стоимостью 60 гяпиков. Найдя произведение 60 · 10 = 600, ученики определяют, что у Самира 600 гяпиков, то есть 6 манатов.

• Вычисляется цена одного карандаша: 60 : 2 = 30.

• Определяется, сколько карандашей можно купить за 6 манатов: 600 : 30 = 20.

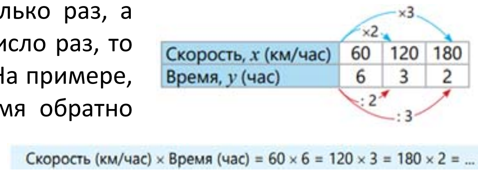
• Вычисляется цена одной ручки: 60 × 5 = 300.

• Определяется, сколько ручек купил Самир: 6 : 3 = 2.

• Отмечается, что если цена товара уменьшается в 2 раза, то количество приобретаемого товара увеличивается в 2 раза, а если цена увеличивается в 5 раз, то количество уменьшается в 5 раз.
Таким образом, подчеркивается, что чем выше цена товара, тем меньшее количество сможет купить Самир.

Изучение **Обратно пропорциональные величины**

Если одна величина увеличивается (уменьшается) в несколько раз, а другая величина уменьшается (увеличивается) в такое же число раз, то такие величины называются обратно пропорциональными. На примере, приведенном в учебнике, поясняется, что скорость и время обратно пропорциональны, если расстояние не меняется.



Соответствующие значения обратно пропорциональных величин показаны на примере, где произведение остается постоянным.
Целесообразно привести различные примеры обратно пропорциональных величин. Например, рекомендуется создать условия, чтобы ученики задумались о том, обратно пропорциональна ли цена одного карандаша и количества таких же карандашей, которые можно купить за определенную сумму денег в магазине, и провели дискуссию.

Задания

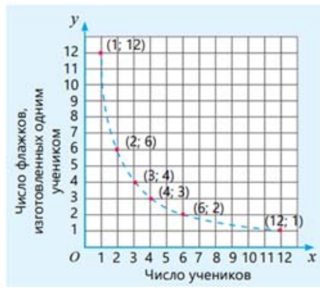
Первые задания, данные в учебнике, служат формированию и закреплению представлений учеников об обратно пропорциональных величинах.
1. Ответив на заданные вопросы, определяется, что чем в большее количество раз увеличивается (уменьшается) скорость, тем в больше раз уменьшается (увеличивается) время, затраченное на поездку между двумя точками.
2. Заполняя данную таблицу, ученики отмечают, что ширина и длина прямоугольника обратно пропорциональны при условии, что площадь остается постоянной.
3. На основе рассуждений о том, остается ли произведение соответствующих значений переменных постоянным, устанавливается, в какой таблице переменные x и y обратно пропорциональны.
4. Выслушиваются мнения учеников о том, что между количеством (массой) товаров, приобретенных на определенную сумму, и ценой одного из них существует обратно пропорциональная зависимость. Таблица составлена исходя из того, что произведение соответствующих значений обратно пропорциональных величин остается постоянным.
5. Обсуждается решение данного примера. Сначала выслушиваются мнения учеников об обратной пропорциональности данных величин. Ответы на вопросы даются путем составления пропорции и решения аналогично решению примера.
Задачи 6 и 7, представленные в учебнике, решаются с помощью составления пропорции для обратно пропорциональных величин.
К сведению учителя! При решении задач, связанных с обратно пропорциональными величинами путем составления пропорции, рекомендуется в кратком условии задачи уточнить характер стрелок противоположного направления и объяснить, что пропорцию удобнее и понятнее записывать по определению обратно пропорциональных величин.
Ложные представления, возникающие у учеников. При ответе на вопросы по составлению и решению пропорции необходимо прежде всего правильно определить, являются ли величины обратно пропорциональными. Иногда ученики записывают пропорцию механически, не задумываясь и поэтому допускают ошибку. На этот момент рекомендуется обратить особое внимание на различных образцах.

Запомни!

Отмечается, что произведение соответствующих значений обратно пропорциональных величин является постоянным и эту константу называют коэффициентом пропорциональности. Обозначая коэффициент пропорциональности через k, поясняют, что формула обратной пропорциональной зависимости записывается в виде $x \cdot y = k$ или $y = \frac{k}{x}$.
8. Обсуждается представленный образец нахождения коэффициента пропорциональности и записи формулы для соответствующих значений обратно пропорциональных величин x и y. Задачи решаются аналогичным образом.
9. а) Выслушиваются мнения учеников о том, что если емкость собранного за день молока разлить в бидоны, объем которых в 2 раза меньше, то и количество бидонов будет в два раза больше. Если емкость

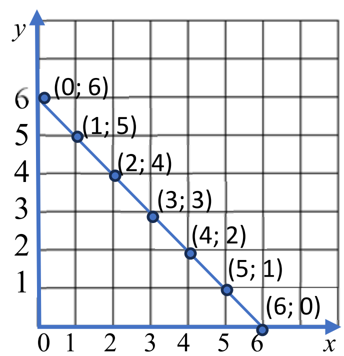
бидонов станет, например, в 4 раза меньше или в 4 раза больше, как изменится их количество? и т.п. вопросы можно обсудить.
б) Путем обсуждения определяется, что емкость бидонов и их количество обратно пропорциональны.
в) Находится коэффициент пропорциональности и объясняется что, он показывает количество молока, собранного в течение суток.
г) Формула зависимости количества бидонов (n) от их емкости (m) записывается: $m \cdot n = 2000$ или $n = \frac{2000}{m}$.
д) по заданному значению m вычисляют соответствующие значения n.
В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:
https://video.edu.az/video/10593
Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель дает ученикам задание найти коэффициент пропорциональности и записать на доске формулу зависимости по соответствующим значениям обратно пропорциональных величин.
Углубление. Учитель предлагает ученикам написать на доске пример, касающийся записи формулы зависимости обратно пропорциональных величин и нахождения соответствующего значения одной из величин по заданному значению другой.

Изучение График обратной пропорциональной зависимости



На примере, приведенном в учебнике, объясняется, что количество учеников (x) и количество изготовленных каждым из них флажков (y) обратно пропорциональны, составляется таблица соответствующих значений величин и строится график зависимости, отмечая на координатной плоскости точки, соответствующие парам (x, y). Следует отметить, что в рассмотренном примере, а также в некоторых ситуациях величины не могут принимать любые значения (например, переменная x, указывающая на количество учеников в примере, может принимать только натуральные значения). Поэтому рекомендуется подчеркнуть, что точки, отмеченные на координатной плоскости, иногда соединяются не цельной, а ломаной линией.
Находя произведение соответствующих значений обратно пропорциональных величин, определяют коэффициент пропорциональности и записывают формулу зависимости. Целесообразно отметить, что график зависимости между обратно пропорциональными величинами представляет собой ветвь гиперболы, и при увеличении одной из координат точки графика другая координата уменьшается (и наоборот).

Подумай!



Если значение одной величины увеличится на 2 единицы, а другой уменьшится на 2 единицы, обсуждается характер зависимости между ними. В качестве примера зависимость между переменными, заданными формулой $y = 6 - x$, сведена в таблицу и построена на графике.

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = 6 - x$	6	5	4	3	2	1	0

На основании значений подготовленной таблицы и построенного графика ученики делают вывод, что данная зависимость не является обратно пропорциональной. Чтобы величины были обратно пропорциональны, значение одного должна увеличиться настолько, насколько должна возрасти значение другого.
К сведению учителя! Иногда ученики затрудняются определить, являются ли данные величины прямо или обратно пропорциональны. Целесообразно сравнительное решение следующих задач, связанных с прямой и обратной пропорцио-нальной зависимостью, и представление зависимостей на графике.
Например, 2 комбайна убирает 6 га поля за 4 часа.

Количество отработанных часов прямо пропорционально площади скошенной травы.

Количество комбайнов и количество рабочих часов обратно пропорциональны.

:2 ·2 ·3

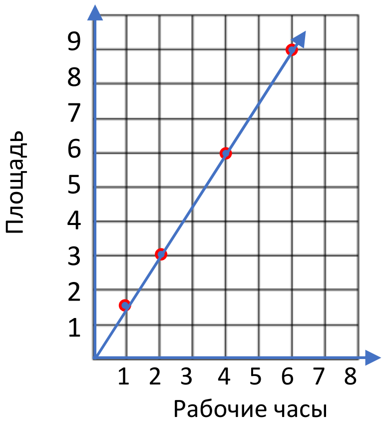
Рабочие часы	1	2	4	6
Площадь (га)	1,5	3	6	9

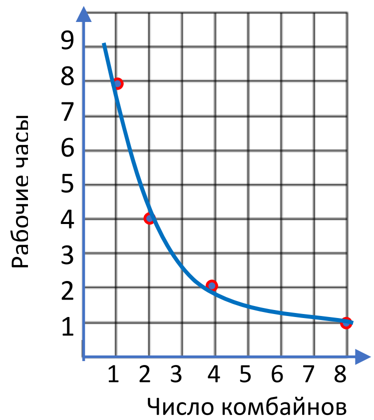
:2 ·2 ·3

:2 ·2 ·4

Число комбайнов	1	2	4	8
Рабочие часы	8	4	2	1

·2 :2 :4



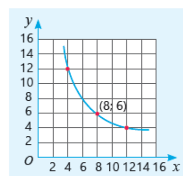


Произведение соответствующих значений обратно пропорциональных величин постоянно, а отношение соответствующих значений прямо пропорциональных величин постоянно. В обратной пропорциональной зависимости точки лежат не на прямой, а на кривой.

11. Обсуждается решение примера, связанного с нахождением коэффициента пропорциональности и записи формулы зависимости по заданному графику обратно пропорциональной зависимости. Задания решаются аналогичным образом.

12. Коэффициент пропорциональности находится при условии, что график обратной пропорциональной зависимости проходит через точку M (4; 3): k = 4 · 3 = 12. Соответствующая формула записывается: $y = \frac{12}{x}$. Координаты точки, расположенной на графике, должны удовлетворять этой формуле. Например, ордината точки A, абсцисса которой равна x = 3, должна быть y = 4. Координаты остальных точек, которые не заданы, находятся по аналогичному правилу.

Решение задач



13. На основании графика, приведенного в задаче, требуется написать формулу зависимости и объяснить, что означают координаты точек, отмеченных на графике.

Решение задачи:

а) Коэффициент пропорциональности находится поскольку график обратно пропорциональной зависимости проходит через точку (8;6): k = 8 · 6 = 48.

Коэффициент пропорциональности представляет собой площадь прямоугольника.

б) Записывается соответствующая формула: $y = \frac{48}{x}$

в) Координаты точки (8;6) на графике обозначают стороны прямоугольника.

г) Еще раз напоминается, что координаты точек, расположенных на графике, должны удовлетворять формуле $y = \frac{48}{x}$. На основе этого находятся соответствующие координаты заданных точек: A (3;16), B (2;24)

14. В задаче требуется ответить на вопросы и написать формулу зависимости по графику зависимости времени, затраченного на вспашку поля, от количества тракторов.

Решение задачи:

а) Данные, соответствующие координатам точек, отмеченных на графике, представляются в таблице.

Число тракторов	8	4	2
Рабочие часы	2	4	8

б) По таблице определяется, что для вспашки поля за 8 часов необходимо 2 трактора.

в) Записывается соответствующая формула: $y = \frac{8}{x}$

г) В формуле y = 0,5 при x = 16. Это значит, что 16 тракторов вспашут поле за 0,5 часа.

К сведению учителя! Рекомендуется развивать навыки решения задач путем составления и решения пропорции обратно пропорциональных величин. Также особое внимание следует уделить формированию и развитию умений и навыков составления таблицы, построения графика, определения зависимости обратной пропорциональности по графику, написания соответствующей формулы, определения того, находится ли данная точка на график обратной пропорциональности или нет.

Проект. Ученикам можно дать задание написать и решить задачу, связанную с обратно пропорциональными величинами, с которыми они сталкиваются в повседневных жизненных ситуациях, и подготовить презентацию, объясняющую решение.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Решает задачи, связанные с обратно пропорциональными величинами, путем составления пропорции.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит коэффициент пропорциональности, записывает формулу обратно пропорциональной зависимости.	Рабочие листы, учебник, РТ
Составляет таблицу обратно пропорциональной зависимости по графику, записывает формулу.	Рабочие листы, учебник, РТ

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

На предыдущих уроках ученики ознакомились с темами “отношение”, “деление величины в данном отношении”, “пропорция”, “масштаб”, “прямая пропорциональная зависимость”, “обратная пропорциональная зависимость”. Они будут решать различные задачи и примеры, чтобы закрепить то, что было изучено на этом уроке.

В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы:

https://video.edu.az/video/1211
https://video.edu.az/video/12912
https://video.edu.az/video/9068
https://video.edu.az/video/12912
https://video.edu.az/video/12907
https://video.edu.az/video/4502
https://video.edu.az/video/11265
https://video.edu.az/video/8497

Решение заданий.

1. Определяются соответствующие числа для пустых клеток на основе того, что при умножении или делении членов отношения на одно и то же число, больше нуля, получается эквивалентная пропорция.
б) 2 : 5 = c : 15. Ученики обосновывают, что умножение 5 на 3 дает 15, и, следовательно, записать в пустую клетку число, равного 2, умноженному на 3, то есть 6 означает, что отношения эквивалентны.

К сведению учителя! Перед решением 2-го задания рекомендуется еще раз обратить внимание учеников на краткую запись отношения пар трех и более одинаковых величин. Например, ученики должны уметь объяснить отношение 3 : c : 6 как отношение 1-й величины к 2-й 3 : c, а 2-й к 3-й в отношении c : 6. В этом случае целесообразно обсудить и показать на подходящих примерах, что эквивалентные отношения будут получены путем умножения или деления их членов на одно и то же число.

2. Требуется найти такое значение переменной c, чтобы отношение 3 : c : 6 было эквивалентно заданному отношению.
а) Умножение членов отношения 3 : c : 6 на 2 дает эквивалентное отношение 6 : (2c) : 12. Следовательно, чтобы отношение 3 : c : 6 было эквивалентно отношению 6 : 10 : 12, 2c = 10. Итак, если c = 5, отношение 3 : 5 : 6 эквивалентно отношению 6 : 10 : 12.

3. Значение искомого выражения находится по заданному равенству.
а) если $4a = 3b$, значение выражения $\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = \frac{4\cdot a}{4\cdot b} = \frac{3b}{4b} = \frac{3}{4}$

4. Неизвестное находится, используя основное свойство пропорции.
г) $(x - 3) : 4 = 7 : 2$ Þ $2(x - 3) = 4 \cdot 7$ Þ $x - 3 = 14$ Þ $x = 17$.

5. Отмечается, что во дворе 40 куриц и 25 гусей.
а) По данному условию записывают и упрощают отношение количества гусей к числу кур: $\frac{25}{40} = \frac{25:5}{40:5} = \frac{5}{8}$
б) Каждым 5 гусям соответствует 8 кур. Так, если во двор завести дополнительно 5 гусей, то для сохранения прежнего отношения необходимо завести 8 кур.

К сведению учителя! Целесообразно организовать дискуссию об альтернативных путях решения проблемы. Ученики обозначают количество принесенных кур x и делают вывод, что можно решить задачу, применив основное свойство пропорции из уравнения $\frac{25+5}{40+x} = \frac{5}{8}$, и выполняют задание.

6. По данным требуется найти длины сторон треугольника.
Решение задачи.

Составляется и решается уравнение:

$3x + 4x + 5x = 24$

$12x = 24$

$x = 2$

Находятся длины сторон треугольника:

$3x = 3 \cdot 2 = 6$ (см)

$4x = 4 \cdot 2 = 8$ (см)

$5x = 5 \cdot 2 = 10$ (см).

Ответ. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см, 10 см.

7. В задаче требуется найти площадь прямоугольника.

Решение задачи

Если ширина прямоугольника x, то из заданного отношения длина будет $3x$. Тогда периметр $2(x + 3x)$, то есть $8x$.

По условию $8x = 32$. Отсюда находится $x = 4$.

Тогда ширина прямоугольника 4 см, а длина $3 \cdot 4$ см = 12 см.

Площадь: $S = 4 \cdot 12 = 48$ (см^2)

Ответ. Площадь прямоугольника 48 см^2.

8. На вопросы отвечают путем составления и решения соответствующего уравнения.

а) Длины частей ленты: $3x$ и $5x$:

$3x + 5x = 2,4$

$8x = 2,4$

$x = 0,3$

Длины частей ленты находятся:

$3x = 3 \cdot 0,3 = 0,9$ (см)

$5x = 5 \cdot 0.3 = 1,5$ (см).

Разность длин этих частей: $1,5 - 0,9 = 0,6$ (см).

б) Длины частей веревки $4x$ и $7x$:

$7x - 4x = 6$

$3x = 6$

$x = 2.$

Длины частей веревки находятся.

$4x = 4 \cdot 2 = 8$ (см)

$7x = 7 \cdot 2 = 14$ (см).

Длина веревки: $8 + 14 = 22$ (см).

9. В задаче, исходя из того, что расстояние 36 км между двумя точками на карте равно 1,8 см, требуется найти масштаб карты и определить длину дороги длиной 100 км, описанной на этой карте.

Решение задачи.

а) Чтобы найти масштаб карты, записывается отношение:

$$\frac{1,8 \text{ см}}{36 \text{ км}} = \frac{1.8 \text{ см}}{3600000 \text{ см}} = \frac{18}{36000000} = \frac{18:18}{36000000:18} = \frac{1}{2000000}$$

б) Ответ на вопрос находится составлением пропорции и использованием основного свойства.

36 км ----- 1,8 см

100 км ----- x см

$$\frac{36}{100} = \frac{1.8}{x} \quad Þ \quad x = \frac{1,8 \cdot 100}{36} = 5 \text{ (см)}$$

Ответ. а) Масштаб карты 1 : 2 000 000.

б) Длина 100 км дороги на карте равна 5 см.

10. В задаче требуется ответить на вопросы, зная, что для приготовления 60 штук долмы используется 600 г фарша и 120 г риса.

Решение задачи

Ответы на вопросы даются путем составления пропорции и ее решения.

а) 120 г риса -------------60 долмы

300 г риса ------------ x штук долмы

$$\frac{120}{300} = \frac{60}{x} \quad Þ \quad x = 150$$

600 г мяса--------------- 60 долмы

m г мяса ----------------150 долмы

$$\frac{600}{m} = \frac{60}{150} \quad Þ \quad m = 1500 \text{ (г)} = 1,5 \text{ (кг)}$$

б) 600 г мяса ---------------60 долмы

1000 г мяса -------------x долмы

$$\frac{600}{1000} = \frac{60}{x} \quad Þ \quad x = 100$$

120 г риса -------------60 долмы

m г риса ------------100 штук долмы

$$\frac{120}{m} = \frac{60}{100} \quad Þ \quad m = 200 \text{ (г)}$$

Ответ. а) Для приготовления 150 штук долмы используется 300 г риса. Для этого понадобится 1,5 кг мяса.

б) Из 1 кг мяса готовят 100 штук долмы. Для этого понадобится 200 г риса.

11. Отношение количества яблонь и абрикосов 3:2, а отношение количества абрикосовых и вишневых деревьев 4 : 3.

Решение задачи

а) Отношение количества яблонь и абрикосов 3:2. Если имеется 40 абрикосовых деревьев и *x* яблонь, 3:2 = x:40. Отсюда x = 60, то есть количество яблонь равно 60.

Отношение количества абрикосовых и вишневых деревьев составляет 4:3. Пусть количество вишневых деревьев равно у. 4 : 3 = 40 : у Отсюда у = 30, то есть количество вишневых деревьев равно 30.

б) Так как количество яблонь 60, количество вишен 30, а 60:30 = 2:1, то ясно, что отношение количества яблонь и вишен равно 2:1.

Ответ. а) В саду 60 яблонь и 30 вишен; б) Число яблонь и вишен относится как 2:1. Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу различными способами.

К сведению учителя! Целесообразно организовать дискуссию об альтернативных путях решения проблемы. Внимание учеников обращается на то, что отношение 3:2 эквивалентно соотношению 6:4. Итак, по условию задачи количество яблонь, абрикосов и вишен находится в отношении 6 : 4 : 3. Это означает, что количество яблонь и вишен составляет 6:3 или 2:1.

12. По данным задачи сначала определяется, что величины обратно пропорциональны. Чем больше количество насосов, тем быстрее наполняется бассейн. То есть здесь число и время обратно пропорциональны.

Решение задачи

Решается путем составления пропорции с учетом того, что величины обратно пропорциональны.

а) 6 насосов ------------- 24 мин.

9 насосов -----------------x мин.

$\frac{6}{9} = \frac{x}{24}$ Þ x = 16 мин.

б) 6 насосов -------------24 мин.

x насосов --------------36 мин.

$\frac{6}{x} = \frac{36}{24}$ Þ $x = 4$

Ответ. а) 9 насосов наполняют бассейн за 16 минут.

б) необходимо подключить 4 насоса, чтобы наполнить бассейн за 36 минут.

13. В задаче требуется выяснить, скольким коровам хватит оставшегося корма на 24 дня.

Решение задачи

8 коров-------------12 дней

n коров -----------24 дня

$\frac{8}{n} = \frac{24}{12} \rightarrow n = 4$

Ответ. Оставшегося корма хватает на 4 коровы за 24 дня.

14. В задаче требуется определить, верно ли мнение водителя о том, что он сэкономит 40 минут времени, если увеличит скорость, как указано.

Решение задачи

Находится, сколько времени потребуется, чтобы преодолеть расстояние, пройденное со скоростью 70 *км/ч* за 4 часа, со скоростью 80 *км/ч*.

70 *км/ч* -------------4 часа.

80 *км/ч* -----------t часа

$\frac{70}{80} = \frac{t}{4} \rightarrow t = 3{,}5$ часа

Таким образом, сэкономленное время составит 4 часа − 3,5 часа = 0,5 часа = 30 минут.

Ответ. Утверждение о том, что будет сэкономлено 40 минут, неверно.

15. В задаче требуется найти, на сколько дней хватит еды в лагере.

Решение задачи.

а) 120 человек------------15 дней.

180 человек -----------t дней

$\frac{120}{180} = \frac{t}{15} \rightarrow t = 10$ дней

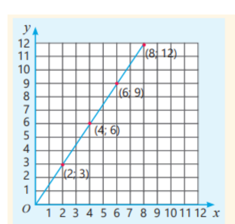
б) 120 человек ------------15 дней.

120 + x человек --------9 дней

$\frac{120}{120+x} = \frac{9}{15} \rightarrow x = 80$ чел.

Ответ. а) Если придут еще 60 человек, еды хватит на 10 дней. б) Если придут еще 80 человек, то еды хватит на 9 дней.

16. В задаче ответы на вопросы даются согласно заданному графику прямо пропорциональной зависимости.



Решение задачи

а) По координатам точек (2; 3), (4; 6), (6; 9), (8; 12) на графике составляется таблица зависимости между x и y:

x	2	4	6	8
y	3	6	9	12

б) Коэффициент пропорциональности находится путем вычисления частного, полученного от деления соответствующих значений: k = $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ $k = 1{,}5$

Записывается формула зависимости: $y = 1{,}5x$

в) По формуле значение y вычисляется по заданным значениям x:

$y = 1{,}5$ при $x = 1$

$y = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ при $x = 3$

$y = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$ при $x = 5$

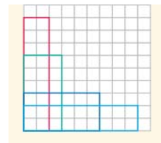
г) $y = 1{,}5 \cdot 12 = 18$ при $x = 12$. А при $y = 24$ из уравнения $24 = 1{,}5x$ находится $x = 16$. Таким образом, точки (12; 18) и (16; 24) расположены на этом графике.

д) В формуле зависимости при x = 3, y = 1,5 · 3 = 4,5 ≠ 5, то есть точки (3; 5) на графике нет.

При x = 7 получается y = 10,5. Итак, точка (7; 10,5) расположена на графике.

17. В задаче требуется по рисунку исследовать изменение длин сторон прямоугольников площадью 18 единичных квадратов, заполнить таблицу и написать формулу соответствующей зависимости.

Решение задачи.



Стороны	Красная	Зеленая	Голубая	Синяя
Ширина (b)	2	3	6	9
Длина (a)	9	6	3	2

а) При увеличении ширины прямоугольника, длина уменьшается и наоборот. Кроме того, ширина и длина меняются, а их произведение остается прежним.

б) Произведение ширины прямоугольника (b) на длину (a) остается постоянным и равно его площади (18): $ab = 18$.

Это можно записать как $b = \frac{18}{a}$ или $a = \frac{18}{b}$.

Проект. Ученикам можно предложить написать и решить задачи, связанные с прямо или обратно пропорциональными зависимостями между величинами в различных ситуациях, и подготовить презентацию с объяснением решения.

ТЕМА 2.8. Выражение отношения в процентах

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет свойства отношения и пропорции. 6-1.5.1. Вычисляет, сколько процентов составляет одна из одноименных величин от другой.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Записывает и применяет отношение в разных формах. • Записывает и упрощает отношение одноименных величин. • Выражает отношение в процентах. • Решает задачи, связанные с процентами, путем составления пропорции. • Решает различные задачи, связанные с процентом.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.bbc.co.uk/bitesize/articles/zsy3qhv#zvscjfr* Задания: *https://nrich.maths.org/1249* *https://video.edu.az/video/9223* *https://www.mathplayground.com/bingo-find-a-percent-of-a-number.html*

Побуждение.

Учитель предлагает ученикам вырезать из бумаги ленту длиной 10 см и раскрасить часть, соответствующую 10% длины ленты. Ученики вычисляют, что 10% полоски ленты длиной 10 см имеют длину 1 см, и раскрашивают соответствующую часть.

Учитель задает ученикам наводящие вопросы: во сколько раз увеличится длина отмеченной соответствующей части, если число, обозначающее проценты, увеличится в 2 или 3 раза? Ученики находят части, равные 20%, 30% и т.д. длины бумажной ленты, отмечают их линией и наблюдают, что во сколько раз увеличивается число, показывающее процент, во столько раз увеличивается длина отмеченной части.

Учитель задает вопрос: можно ли решить задачи, связанные с процентом, путем составления пропорции? Проводится обсуждение с классом.

Исследование-обсуждение

Ученики записывают необходимое отношение как 3 : 75 при условии, что 3 из 75 игрушек, произведенных на фабрике, имеют дефект.

Учитель задает вопрос: в какой форме можно записать и упростить это отношение? Ученики записывают отношение в виде дроби и упрощают его, разделив на 3: $\frac{3}{75} = \frac{3:3}{75:3} = \frac{1}{25}$

Учитель задает наводящий вопрос: как выразить полученную обычную дробь в процентах? Ученики выражают обыкновенную дробь в процентах, записывая ее в виде обыкновенной дроби со знаменателем 100: $\frac{1}{25} = \frac{1 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{4}{100} = 4\%$

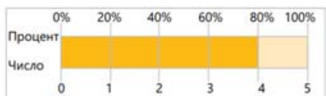
Учитель задает вопрос: какими еще способами можно выразить отношение в процентах? Мнения учеников выслушиваются и обсуждаются.

Изучение **Выражение отношения в процентах**

Различные способы нахождения того, сколько процентов составляет одно из чисел или одноименных величин от другого и их описание с помощью модели показаны на примерах, приведенных в учебнике.

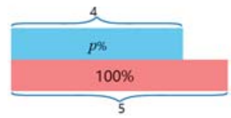
1) Записав отношение в виде обыкновенной дроби, выразив эту обыкновенную дробь в процентах.

$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100} = 80\%$



2) Составив пропорцию

$5 - 100\%$
$4 - p\%$



Целесообразно привести различные примеры на выражение в процентах отношения одноименных величин. Например, каждый ученик записывает отношение ширины парты, за которой он сидит, к длине (и наоборот) и выражает его в процентах и т.д.

Запомни!

Чтобы узнать, сколько процентов составляет число b от числа a, дается формула $p = \frac{b}{a} \cdot 100\%$.

Подчеркивается, что выражение отношения двух чисел в процентах еще называют процентным отношением двух чисел.

Задания

1. Задачи, связанные с нахождением процента одного числа от другого, выполняются по правилу, указанном в примере.

К сведению учителя! В задании ученики находят как процентное отношение 45 к 60, так и процентное отношение 60 к 45. Рекомендуется показать эти процентные отношения ученикам в сравнительном виде.

2. Выполняются задания, связанные с нахождением того, какой процент составляет одна из одноименных величин от другой.

3. Ответы на вопросы даются согласно заданному отношению количества белых и синих шаров в ящике 1:4.

а) Отношение количества белых шаров к количеству синих шаров записывается как $\frac{1}{4}$ и выражается в процентах: $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$.

б) Сначала записывают отношение количества синих шаров к количеству белых шаров, затем выражают его в процентах: $\frac{4}{1} \cdot 100\% = 400\%$

в) Согласно данному отношению, из каждых 5 шаров 1 белый и 4 синих. То есть белые шары составляют $\frac{1}{5}$ всех шаров или $\frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$.

г) $\frac{4}{5}$ шаров или $\frac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$ синие.

4. Находится, сколько процентов составляет одно число (величина) от другого путем составления пропорции в порядке, указанном в примере.

Запомни!

Даются сведения о трех основных видах процентных задач (нахождение процента числа, нахождение числа по его процентам, нахождение процентного отношения двух чисел). Объясняются примеры решения всех трех видов задач с использованием пропорций.

В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы: https://video.edu.az/video/8941

5. Задания по нахождению процента числа (величины), нахождению числа (величины) по его процентам, нахождению процентного отношения двух чисел (величин) выполняются с помощью пропорции.

К сведению учителя! Рекомендуется привести примеры задач, связанных с процентами, в том числе, как найти процентное отношение разными способами. Например, могут быть предложены следующие методы для нахождения того, сколько процентов составляет число 2 от 5.

Приведя к единице:	Записав отношение в виде дроби и выразив в процентах:	Составив уравнение:	Составив пропорцию:
Если число 5 это 100%, То число 1 -20%. Тогда число 2 это 40%.	$\frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\ \%$	$5 \cdot \frac{p}{100} = 2$	$5\ -\ 100\%$ $2\ -\ p\%$

Ложные представления, возникающие у учеников. Ошибки, допускаемые учениками при нахождении процентного отношения одноименных величин:
1) забывает выражать величины в одной и той же единице;
2) допустил ошибку в правильном выражении величин в одной и той же единице;

Сколько процентов составляет 50 г от 5 кг?

Ложное	Верное
$\frac{5}{50} \cdot 100\% = 10\%$	$\frac{50}{5000} \cdot 100\% = 1\%$

3) неправильно записывает предыдущий и следующий член в отношении.
Рекомендуется организовать работу над ошибками, уделить особое внимание этому аспекту на различных примерах.

Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель записывает на доске несколько примеров процентного отношения одноименных величин и предлагает ученикам их решить.
Углубление. Учитель дает ученикам задание написать на доске несколько примеров процентного отношения одноименных величин и решить их разными способами.

Решение задач

6. В задаче требуется найти, какой процент пшеницы был измельчен.
Решение задачи:
Находится процентное отношение массы измельченной пшеницы к массе привезенной пшеницы.

$$\frac{17}{25} \cdot 100\% = 85\%$$

Ответ. 85% пшеницы было измельчено.
7. В задаче требуется найти, какой процент составляет количество прочитанных страниц книги, а также какой процент составляют оставшиеся страницы.
Привлечение. Учитель задает ученикам наводящие вопросы.
Если найдено, какой процент составляют прочитанные страницы книги, то как можно определить, какой процент составляют оставшиеся страницы?
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.
Решение задачи:
240 страниц – 100 %
180 страниц – ⍰% $⍰ = \frac{180}{240} \cdot 100\ \% = 75\ \%$

Находится число оставшихся страниц: 240 –180 = 60. Находится процентное отношение этого количества страниц к количеству страниц книги:

$$\frac{60}{240} \cdot 100\% = 25\%$$

Или, исходя из того, что 100% – 75% = 25%, находится ответ на вопрос пункта б).
Ответ. Прочитано 75% страниц книги и осталось 25%.
8. Требуется ответить на вопросы по диаграмме, приведенной в задаче.
Решение задачи:
Сначала находится число учеников в классе.
2 человека получили оценку «2», 4 человека — «3», 8 человек — «4», 6 человек — «5». Число учеников: 2 + 4 + 8 = 6 = 20

а) 2 человека из 20 получили “2”: $\frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%$
б) 6 человек получили “5”: $\frac{6}{20} \cdot 100\% = 30\%$
в) “4” и “5” получило всего 6 + 8 = 14 человек: $\frac{14}{20} \cdot 100\% = 70\%$
Ответ. 10% учеников получили оценку «2», 30% – «5», 70% – «4» и «5».
9. Обсуждается решение данного примера. Решение пунктов а) и б) выполняется аналогично.

а) В задаче требуется найти, какой процент раствора составляет соль, если 40 г соли смешать с 160 г чистой воды.
Решение задачи:
Сначала находят общую массу раствора: 160 г + 40 г = 200 г.
Затем рассчитывают процентное содержание соли (40 г) в растворе (200 г): $\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$.
Ответ. 20% раствора составляет соль.
Пункт б) решается по тому же принципу.
10. Обсуждается решение данного примера. Решение пунктов а) и б) выполняется аналогично.
б) В задаче требуется узнать, какой процент раствора составляет соль.
Решение задачи:
По данным, в 250 г соленой воды содержится 20% соли. Находится масса соли в растворе: $250 \cdot \frac{20}{200} = 50$ (г)
После добавления 150 г воды находится масса смеси: 250 г + 150 г = 400 г.
Процентное отношение 50 г соли к общей массе раствора, т.е. 400 г, рассчитывают: $\frac{50}{400} \cdot 100\% = 12{,}5\%$.
Ответ. 12,5% раствора составляет соль.
11. В задаче требуется найти, какой процент всех книг составляют книги по математике.
Находится количество книг по математике в первой коробке: $30 \cdot \frac{40}{100} = 12$
Находится количество книг по математике во второй коробке: $20 \cdot \frac{20}{100} = 4$
Находится общее количество книг в двух коробках: 30 = 20 = 50
Находится количество книг по математике в двух коробках: 1 + 4 = 16
Вычисляется процент книг по математике от общего количества книг:
50 – 100 %
16 – x % $\quad\quad$ $x = \frac{16}{50} \cdot 100\% = 32\%$
Ответ. Книги по математике составляют 32% всех книг.
К сведению учителя! Навыки решения задач, связанных с процентом, рекомендуется развивать путем составления пропорций. Это важно для правильной связи тем «Отношения» и «Пропорции» и решения различных процентных задач.
Проект. Ученикам можно предложить написать и решить задачи, связанные с процентными отношениями величин, в различных ситуациях (дома, на прогулке, в магазине, в спорте и т.д.) и подготовить презентацию с объяснением решения.
Формативное оценивание.

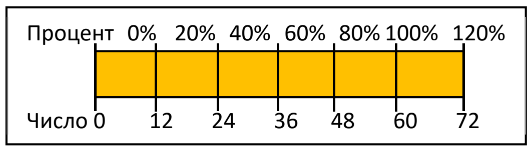
Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Выражает отношение в процентах.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачи, связанные с процентами, путем составления пропорции.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи, связанные с процентом.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 2.9. Выражение изменения величины в процентах

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.4.1. Объясняет свойства отношения и пропорции. 6-1.5.2. Выражает изменение величины в процентах. 6-1.5.3. Решает задачи на простой процентный рост ().
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Записывает и упрощает отношение одноименных величин. • Решает задачи, связанные с процентами, путем составления пропорции. • Выражает изменение величины в процентах. • Решает задачи, связанные с простым процентным ростом.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.ixl.com/math/grade-7/percent-of-change* *https://reviewgamezone.com/game.php?id=4497* *https://www.quia.com/rr/230204.html* *https://jeopardylabs.com/play/percent-increasedecrease* Задания: *https://video.edu.az/video/9419* *http://www.math-play.com/Sales-Tax/Interactive-Sale-Tax-Game_html5.html* *https://www.math-play.com/Simple-Interest/simple-interest-money-game_html5.html* *https://www.quia.com/ba/108800.html*

Побуждение.

Учитель задает классу наводящий вопрос: Если цена величины увеличится или уменьшится на 20%, какой процент от предыдущей цены будет получен? Ученики отвечают, что при увеличении количества на 20 % они получают цену, равную 100 % + 20 % = 120 % от предыдущей цены, а при уменьшении количества на 20 %, то 100 % – 20 % = 80 %. Учитель изображает на доске шкалу-модель и задает вопросы: Если рубашка, цена которой составляла 60 манатов, стала стоить 72 маната, то как объяснить, на сколько выросла цена по модели? Если первоначальная цена снизится с 60 манатов до 36 манатов, на сколько процентов это будет дешевле? Ученики отвечают на вопросы в соответствии с заданной моделью.



Исследование-обсуждение

Население деревни Чичекли 5 лет назад составляло 2000 человек, а по новым данным – 2200 человек.

• Ученики находят прирост населения: 2200 – 2000 = 200 (чел.)

• «Какой процент составляет прирост населения?» Ученики могут ответить на вопрос по-разному: выразив отношение 200 к 2000 в процентах или составив пропорцию. Мнения учеников выслушиваются и обсуждаются.

Изучение Выражение изменения величины в процентах

Отмечается, что иногда удобнее выражать изменение величины в процентах. Выделены этапы решения для выражения изменения величины в процентах:

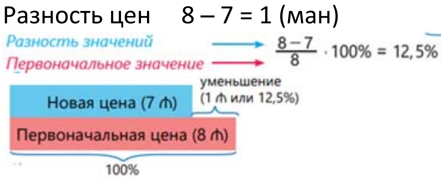
1) найти разницу между следующим и предыдущим значениями, вычитая наименьшее из наибольшего;

2) рассчитать процент полученной разницы к предыдущей цене количества.

Эти шаги поясняются на примерах, приведенных в учебнике.

Начальная цена 8 ман, новая цена 10 ман.
Разность цен   10 – 8 = 2 (ман)

Начальная цена 8 ман, новая цена 7 ман.
Разность цен   8 – 7 = 1 (ман)



Задания

1. Обсуждается пример и его решение. Решения задач осуществляют аналогичным образом, выражая изменение величины в процентах.

в) Высота дерева составила 920 см при первоначальной высоте 8 м. Предыдущее и последующее значения величины выражаются в одних и тех же единицах: 920 см = 9,20 м.
Разница значений находится: 9,20 – 8 = 1,20 (м)
Рассчитывается процент разницы от начальной цены: $\frac{1,20}{8} \cdot 100\% = 15\%$. Итак, высота дерева увеличилась на 15%.

Запомни!

Следует отметить, что также можно использовать пропорцию, чтобы выразить изменение величины в процентах. Обсуждается решение, связанное с выражением изменения цены величины в процентах путем нахождения процента от предыдущей цены и вычисления разницы со 100%.

2. Исследуется решение данного примера. По аналогичному принципу даются ответы на вопросы о выражении изменения величины в процентах с использованием пропорции.
б) Посевная площадь увеличена с 24 га до 31,32 га. На сколько процентов увеличилась площадь?
Решение. Записывается краткое условие задачи.
24 га – 100%
31,2 га – p%
Записывается пропорция и находится неизвестное.
$\frac{24}{31,2} = \frac{100}{p}$
p = 130%
Новое значение величины равна 130% от предыдущего. Итак, значение величины увеличилось на 130% – 100% = 30%.

3. Требуется найти, в каком магазине процент скидки выше.

Цена холодильника в магазине A снижена с 800 манатов до 704 манатов.
800 ₼ – 100%
704 ₼ – p%
Записывается пропорция и находится неизвестное.
$\frac{800}{704} = \frac{100}{p} \quad \Rightarrow \quad p = 88\%$
100% – 88% = 12%
В магазине A скидка была 12%.

Цена холодильника в магазине B снижена с 780 манатов до 702 манатов.
780 ₼ – 100%
702 ₼ – p%
Записывается пропорция и находится неизвестное.
$\frac{780}{702} = \frac{100}{p} \quad \Rightarrow \quad p = 90\%$
100% – 90% = 10%
В магазине B скидка была 10%.

Таким образом, определяется, что в магазине A скидка выше.
В технически оснащенных классах могут быть использованы видеоматериалы: https://video.edu.az/video/9578

К сведению учителя! Иногда ученики приходят к выводу, что если значение величины, например, в 3 раза больше, то величина изменяется на 300%. Целесообразно обсудить соответствующие ситуации с учениками, которые допускают подобные ошибки. Это важно, чтобы избежать подобных ошибок в будущем.
Учеников следует научить, что при выражении изменения значения величины в процентах важно найти разницу: следует найти либо разницу значений и ее процентное отношение к первоначальной цене, либо разницу показателей начального и нового значений в процентах.

Каково процентное изменение, если начальная длина 25 мм, а новая – 3 см?

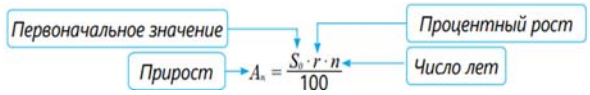
Ложное	Верное
$25 - 3 = 22$	30 – 25 = 5
$\frac{22}{25} \cdot 100\% = 88\%$	$\frac{5}{25} \cdot 100\% = 20\%$

Ложные представления, возникающие у учеников. Найдя разность значений величин, они забывают выразить их в одних и тех же единицах или допускают ошибку в преобразованиях.
На этот момент рекомендуется обратить особое внимание на различных примерах.

Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель записывает на доске несколько примеров процентного изменения величины и предлагает ученикам их решить.
Углубление. Учитель дает ученикам задание написать на доске несколько примеров процентного изменения величины и решить их разными способами.

Изучение **Простой процентный рост**

Обсуждается приведенный в учебнике пример нахождения конечного значения, когда начальное значение величины увеличивается (или уменьшается) на один и тот же процент несколько раз. Результаты обобщаются. Используя процент годового прироста (p%) и количество лет (n), дается формула для расчета прироста величины через n лет.



Объясняется, что формула простого процентного роста используется для нахождения конечного значения путем прибавления увеличения к первоначальной цене.

Конечное значение = Первоначальное значение + Прирост

Подумай!

Если первоначальная сумма каждый год уменьшается на один и тот же процент, обсуждается, как находится конечное значение. Ученики приходят к выводу, что эта сумма будет вычтена из первоначального значения.

Следует отметить, что формула простых процентов используется только тогда, когда первоначальная цена каждый раз увеличивается (или уменьшается) на один и тот же процент (это может быть каждый год, каждый месяц, каждую неделю и т.д.). В других различных ситуациях, например, если количество увеличивается сначала на 10%, а затем на 8%, результаты следует строить согласно заданному условию.

4. Первоначальная сумма – 5000 манатов, годовой процентный рост – 10%.

5. Первоначальная сумма, сумма на счете через необходимое количество лет в соответствии с годовым процентным ростом рассчитывается по аналогичному принципу.

Внимание!

До сведения учеников доводится, что если *r* - процент ежемесячного прироста, а n- количество месяцев, то прирост через n месяцев можно рассчитать по формуле $A_n = \frac{S_0 \cdot r \cdot n}{100}$.

В 6-м задании обсуждается решение данного примера и выполняются аналогичные задания. **К сведению учителя!** Ученики часто сталкиваются с задачами на простой процентный прирост в повседневной жизни. С помощью ролевых игр в классе можно превратить эти навыки в устойчивые привычки. Во время выполнения заданий следует обращать внимание на использование простого процентного прироста.

Деятельность: Симуляция денежного оборота

Определяется, под какой процент банк принимает вклады и выдает кредиты. Роли "клиента" и "банковских сотрудников" распределяются между учениками, им даются инструкции.

Один из сотрудников банка принимает вклады от клиентов, другой составляет таблицу с ежемесячными выплатами в зависимости от суммы вклада. Таким образом, ученики определяют, какой станет сумма вклада через несколько месяцев. Аналогично рассчитываются ежемесячные платежи по выданному кредиту. В конце таблицы вывешиваются на доске и проводится обсуждение с классом.

Решение задач

7. В задаче требуется определить, увеличилась или уменьшилась окончательная цена телевизора по сравнению с первоначальной ценой, если его первоначальная цена составляла 1000 манатов, затем она увеличилась на 20%, а после этого новая цена была уменьшена на 20% и найти процент изменения.

Решение задачи.

Сначала определяется цена после подорожания. Путем обсуждения с учениками определяется, что это равно 120% от первоначальной цены (1000 ман): $1000 \cdot \frac{120}{100} = 1200$ (ман)

Тогда, поскольку действует скидка 20%, цена после скидки находится путем расчета 80% от 1200 манатов: $1200 \cdot \frac{80}{100} = 960$ (ман)

Таким образом, окончательная цена снижается относительно начальной цены. Разница в цене: 1000 – 960 = 40 (ман).

Находится процент разницы цены от первоначальной цены: $\frac{40}{1000} \cdot 100\% = 4\%$

Ответ. Конечная цена телевизора снизилась на 4% по сравнению с первоначальной ценой.

Обсуждение. Проверка правильности ответа осуществляется путём вычисления новой цены телевизора.

8. По условию и диаграмме, приведенным в задаче, требуется найти начальную сумму, вложенную в банк, годовой процентный рост и сколько денег будет на счету через 6 лет.

Решение задачи. На основе диаграммы годовой прирост рассчитывается путем нахождения разницы между суммами денег на счете в конце 1-го и 2-го года (или 2-го и 3-го года): 2900 – 2700 = 200 (манатов).

Первоначальная сумма обозначается x манатов. Соответствующее уравнение записывается и решается:

$x + 200 = 2700 \rightarrow x = 2500$

Таким образом первоначальная сумма 2500 манатов.

Для нахождения годового процентного роста составляется пропорция:

2500 – 100%

200 – p%

$P = \frac{200}{2500} \cdot 100\% = 8\%$

Спустя 6 лет сумму на счету можно узнать разными способами.

1) Так как ежегодный прирост составляет 200 манатов, за 6 лет прирост будет равен 6 · 200 = 1200 ман.

2) В формуле $A_n = \frac{S_0 \cdot r \cdot n}{100}$ записываются значения S_0 = 2500, r = 8%, n = 6: $A_6 = \frac{2500 \cdot 8 \cdot 6}{100}$ = 1200 (ман)

Сумма на счету равна сумме начальной суммы и прироста: 2500 + 1200 = 3700 (ман).

Ответ. Первоначальная сумма — 2500 манатов, годовой процентный прирост — 8%, через 6 лет сумма на счёте составит 3700 манатов.

К сведению учителя! Целесообразно обсудить различные методы решения задач на выражение изменения величины в процентах и сравнить эти решения.

Проект. Ученикам можно поручить подготовить презентации или постеры по теме процентного изменения величин в различных ситуациях, связанных с простым процентным приростом. Для этого желательно привести несколько примеров, например: «Создай банк мечты», «Калькулятор расчёта вклада» и т. п.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Решает задачи, связанные с процентами, путем составления пропорции.	Рабочие листы, учебник, РТ
Выражает изменение величины в процентах.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачи, связанные с простым процентным ростом.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. В учебнике понятия, данные в заключении главы, повторяются с учениками. Учитель напоминает ученикам слова, изученные в разделе. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Отношение, члены отношения, эквивалентные отношения, отношение одноименных величин, отношение разноименных величин, деление величины в данном отношении, пропорция, внешние члены пропорции, средние члены пропорции, основное свойство пропорции, масштаб, прямо пропорциональные величины, прямо пропорциональная зависимость, коэффициент пропорциональности, график прямой пропорциональной зависимости, обратно пропорциональные величины, обратно пропорциональная зависимость, график обратной пропорциональной зависимости, процентное отношение, процентное изменение величины, простой процентный рост.

Информация на первой странице раздела, задание "Попытайтесь!", история математических задач, связанных с повседневной жизнью, обсуждается. Решение исходной задачи обсуждается с классом. Целесообразно написать краткое условие задачи и обсудить с учениками этапы решения задачи. **Практическое задание.** Класс делится на несколько групп. Каждой группе выдаются рабочие листы с таблицами, содержащими данные о количестве дождливых, облачных и ветреных дней в Баку за последнюю неделю или месяц. На основе этих данных ученики составляют вопросы, связанные с нахождением отношений, процентных соотношений и решением задач на проценты. В рамках метода работы «карусель» рабочие листы передаются от группы к группе. Каждая группа отвечает на вопросы, содержащиеся в выданных ей листах. В конце проводится общее обсуждение с классом.

В классах с техническими возможностями можно зайти на сайты прогноза погоды и получить аналогичную информацию по другим городам, а затем составить похожие вопросы.
https://www.timeanddate.com/weather/azerbaijan/baku/ext
https://www.weather-atlas.com/en/azerbaijan

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ.

5. В задаче требуется найти периметр треугольника по заданным отношениям сторон треугольника и длины меньшей стороны.

Решение задачи.

Если длина (в сантиметрах) меньшей стороны треугольника равна a, средней стороны b и большей стороны c, то по условию a : b = 3 : 4 и b : c = 2: 3. Поскольку длина меньшей стороны a = 9 (см), применяя основное свойство пропорции 9 : b = 3 : 4, находим 3b = 9 · 4, откуда b = 12 (см). Тогда b = 12 записывается в равенство b : c = 2 : 3 и 2c = 12 · 3 находится применением основного свойства пропорции 12 : c = 2 : 3, откуда c = 18 (см).

Периметр треугольника: P = 9 + 12 + 18 = 39 (см)

Ответ. Периметр треугольника 39 см.

6. В задаче требуется найти реальные размеры квартиры по плану, приведенному в масштабе 1:400, общую площадь квартиры и сколько составляет периметр на плане, приведенном в масштабе 1:500.

Решение задачи.

а) Сначала стороны квартиры на плане определяются путём подсчёта клеток и с учётом того, что каждая клетка представляет собой квадрат со стороной 5 мм. Затем, на основе масштаба, вычисляются реальные размеры.

Стороны квартиры на плане   Реальные размеры квартиры
6 · 5 мм = 30 мм = 3 см   3 см · 400 = 1200 см
30 мм = 3 см   1200 см = 12 м

Квартира на самом деле представляет собой квадрат со стороной 12 м.

б) По аналогичному правилу находят реальные размеры каждой из комнат и рассчитывают площадь. Комната A на плане имеет квадратную форму со стороной: 4·5 мм = 20 мм = 2 см. Чтобы найти действительные размеры, нужно размеры на плане умножить на 400: 2 см · 400 = 800 см = 8 м. Площадь комнаты A: 8 м · 8 м = 64 м^2.

Помещения B и D имеют прямоугольную форму со сторонами 8 м и 4 м. Площадь: 8 м · 4 м = 32 м^2.

Комната C представляет собой квадрат со стороной 4 м. Площадь: 4 м · 4 м = 16 м^2.

в) Вычисляется общая площадь квартиры: 12 м · 12 м = 144 м^2 или 64 м^2 + 32 м^2 + 16 м^2 + 32 м^2 = 144 м^2.

г) Вычисляется периметр квартиры 4 · 12 м = 48 м. План этой квартиры масштаба 1 : 500 уменьшен в 500 раз. Итак, периметр плана, нарисованного в масштабе 1 : 500, равен 48 м : 500 = 4800 см : 500 = 9,8 см.

7. Если на карте масштаба 1 : 50 000 расстояние между двумя точками составляет 6 см, требуется найти действительное расстояние и то, сколько это расстояние составляет на карте масштаба 1 : 100 000.

Решение задачи.

а) Действительное расстояние между точками (в см) обозначается x. Поскольку отношение расстояния на карте к действительному расстоянию равно 1:50 000, то записывается соответствующая пропорция и находится неизвестное, применяя основное свойство пропорции.

$$\frac{1}{50000} = \frac{6}{x} \quad Þ \quad x = 300000 \text{ (см)} = 3000 \text{ (м)} = 3 \text{(км)}$$

б) На карте масштаба 1:100 000 это расстояние (в см) обозначается y, пишется соответствующая пропорция и находится неизвестное.

$$\frac{1}{100000} = \frac{y}{300000} \quad Þ \quad y = 300000 : 100000 = 3 \text{ (см)}$$

Ответ. Действительное расстояние 3 км. Расстояние на карте 3 см.

8. Находится, составив и решив пропорцию.

в) Пусть масса мешка, 12% которого составляют 6 кг, будет m кг: 12% – 6 кг
100% – m кг $m = \frac{6 \cdot 100}{12} = 50$ (кг)

10. В задаче требуется ответить на вопросы, зная, что из 12 кг глины изготовлено 8 одинаковых маленьких статуй.

Привлечение. Учитель рисует таблицу на доске. Задаются вопросы ученикам. Если количество статуй уменьшится в 8 раз, какова будет масса использованной глины? Если известна масса глины, расходуемой на одну статую, как можно найти массу глины, расходуемую на 2, 4 и 6 статуй? Таблица заполняется ответами на вопросы.

Число статуй	1	2	4	6	8
Глина (кг)					12

Решение задачи.

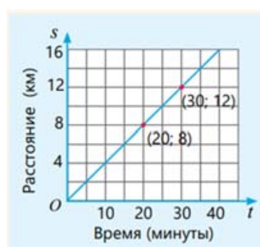
На вопросы отвечают путем составления и решения пропорции.

а) Пусть глины, израсходованной на 6 статуй, будет m кг. б) Пусть n статуй изготовлено из 3 кг глины.

8 статуй – 12 кг   12 кг ----- 8 статуй
6 статуй – m кг Þ $m = \frac{6 \cdot 12}{8} = 9$ (кг)   3 кг ----- n статуй Þ $n = \frac{3 \cdot 8}{12} = 2$

Ответ. а) Из 9 кг глины изготавливают 6 статуй. б) Из 3 кг глины изготовлено 2 статуи.

12. В задаче требуется ответить на вопросы по заданному графику пройденного пути во времени, написать соответствующую формулу и заполнить таблицу.



Решение задачи.

а) По координатам точки (30; 12) на графике определяется, что велосипедист проехал 12 км за полчаса (30 минут).

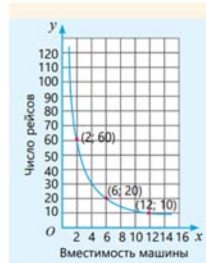
б) По координатам точки (20;8) на графике определяется, что велосипедист преодолевает расстояние 8 км за 20 минут.

в) Коэффициент пропорциональности находится путем вычисления частного, полученного от деления соответствующих величин: k = 12 : 30 = 0,4

Формула зависимости пройденного расстояния (s) от времени (t): s = 0,4t

t	15	25	40
s	6	10	16

г) По формуле вычисляется значение s, соответствующее заданному значению t и заполняется таблица.
s = 0,4 · 15 = 6 (км) при t = 15
s = 0,4 · 25 = 10 (км) при t = 25
s = 0,4 · 40 = 16 (км) при t = 40
14. Ответы на вопросы даются согласно приведенному графику зависимости вместимости машины, используемой для перевозки зерна, от количества рейсов.



а) Согласно точке (12; 10) графика машина вместимостью 12 т должна совершить 10 рейсов для перевозки зерна.
б) По точке (6; 20) на графике определяется, что машина вместимостью 6 т перевозит зерно, совершая 20 рейсов.
в) Произведение соответствующих величин постоянно: 2 · 60 = 6 · 20 = 12 · 10 = 120. Следовательно, коэффициент пропорциональности k = 120. Формула зависимости числа рейсов (y) от вместимости машины (x):

$x \cdot y$ = 120 или у = $\frac{120}{x}$

г) Из этой формулы $y = \frac{120}{8} = 15$, когда х = 8, и $y = \frac{120}{3} = 40$, когда x = 3. Пара (8;15) указывает на то, что машина вместимостью 8 т должна совершить 15 рейсов. По паре (3;40) получается, что машина вместимостью 3 тонны должна совершить 40 рейсов для перевозки зерна.
16. В задаче, зная, что новая цена куртки и ее предыдущая цена находятся в отношении 3:4, требуется найти процент скидки и цену куртки до скидки.
Решение задачи.
а) Если новая цена куртки составляет р% от предыдущей, $p = \frac{3 \cdot 100}{4}$ = 75% находится из пропорции $\frac{p}{100} = \frac{3}{4}$.
Итак, цена снижается на 100% – 75% = 25%.
б) Пусть цена куртки до скидки составит х манатов.
75% – 72 ₼
100% – x ₼ Þ $x = \frac{72 \cdot 100}{75}$ = 96 (₼)
Ответ. а) Цена снижена на 25%. б) Цена до скидки составляла 96 манатов.

17. В задаче цена пальто, проданного за 400 манатов, сначала увеличилась на 15%, затем снизилась на 20%, поэтому требуется найти итоговую цену и на сколько процентов изменилась, увеличилась или уменьшилась, цена.

а) Сначала находится цена (x) после 5% увеличения:
400 ₼ – 100%
x ₼ – 115%
$x = \frac{400 \cdot 115}{100}$ = 460 (₼)

Находится цена (y) после 20% скидки:
100% – 460 ₼
80% – y ₼
$y = \frac{80 \cdot 460}{100}$ = 368 (₼)

Решение задачи.
б) Конечная цена 368 манатов, начальная цена 400 манатов. Цена снизилась на 400 ₼ − 368 ₼ = 32 ₼.
400 ₼ – 100%
368 ₼ – p%
$p = \frac{368 \cdot 100}{400}$ = 92%
Конечная цена составляет 92% от первоначальной цены. Итак, цена снизилась на 100% − 92% = 8%.
Ответ. а) Конечная цена пальто 368 манатов. б) Цена снизилась на 8%.
22. Если в новопостроенном доме отношение количества однокомнатных и двухкомнатных квартир составляет 1:6, а отношение количества двухкомнатных и трехкомнатных квартир — 2:1, то требуется найти отношение количества однокомнатных и трехкомнатных квартир, а также выяснить, сколько из 200 квартир являются трехкомнатными, и какой процент от общего числа составляют двухкомнатные квартиры.

а) Сначала находится значение (х) после 5% увеличения:
400 ₼ – 100%
x ₼ – 115%
$x = \frac{400 \cdot 115}{100}$ = 460 (₼)

Находится значение (у) после скидки 20 %:
100% – 460 ₼
80% – y ₼
$y = \frac{80 \cdot 460}{100}$ = 368 (₼)

Решение задачи.

а) Согласно отношению 1:6, на каждую однокомнатную квартиру соответствует 6 двухкомнатных квартир. Поскольку 2:1 = 6:3, то на каждые 6 двухкомнатных квартир приходится 3 трехкомнатные квартиры. Таким образом, количество однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных квартир можно записать в отношении 1:6:3. Это означает, что на каждую однокомнатную квартиру приходится 6 двухкомнатных и 3 трехкомнатные квартиры. Следовательно, отношение количества однокомнатных и трехкомнатных квартир составляет 1:3.

б) Если количество однокомнатных квартир обозначить x в отношении 1 : 6 : 3, то количество двухкомнатных квартир равно $6x$, а количество трехкомнатных квартир — $3x$. Составляется и решается уравнение:

$x + 6x + 3x = 200$

$10x = 200$

$x = 20$

Число 3-комнатных квартир:

$3x = 3 \cdot 20 = 60$

в) Число 2-комнатных квартир:

$6 \cdot 20 = 120$

200 квартир – 100%

120 квартир – p %

$p = \frac{120 \cdot 100}{200} = 60\%$

Ответ. а) Количество однокомнатных и трехкомнатных квартир относятся как 1:3. б) 60 квартир трехкомнатные.

в) 60% квартир двухкомнатные.

STEAM

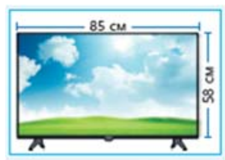
Основным параметром монитора является разрешение и соотношение сторон экрана, информация об изображении на экране подается за счет пикселей.

1. Если ширина телефона с отношением размеров экрана 15:8 равна 8 см, то длина равна 15 см.

Площадь экрана: $8 \cdot 15 = 120$ (см^2).

Если ширина телефона с соотношением экрана 9:4 равна 8 см, то длина находится:

$\frac{9}{4} = \frac{x}{8}$; $x = 18$ (см). Площадь экрана: $18 \cdot 8 = 144$ (см^2).



2. Находится количество пикселей на единицу площади:

Для 1-го телефона: $\frac{1920 \cdot 1080}{120} = 17280$ Для 2-го телефона: $\frac{1920 \cdot 1080}{144} = 14400$

Изображение на 1-м телефоне лучше.

3. С помощью интернета уточняются значения разрешений HD, FHD, 4K, 8K.

- ✓ HD High Definition — это сокращенная форма инициалов «высокое разрешение». Наиболее распространенное разрешение HD — 1920x1080 пикселей. Другими словами, это HD-изображение имеет размеры 1080 пикселей по вертикали и 1920 пикселей по горизонтали.
- ✓ FHD (Full HD) Full High Definition: обычно называется FHD или Full HD. «1080p» или «Full HD» означают одно и то же изображение высокого качества.
- ✓ 4K (Ultra HD) — это более высокий уровень качества изображения 4K, известный как Ultra HD (UHD).
- ✓ Разрешение составляет 3840 x 2160 пикселей. Это более 8 миллионов пикселей в общем изображении, что обеспечивает значительно более высокое качество изображения, чем HD.
- ✓ Разрешение экрана 8K имеет разрешение примерно 8000 пикселей в ширину, в частности, 8K UHD (Ultra High Definition) имеет разрешение 7680 × 4320 пикселей. Термин «8K», по сути, является маркетинговым термином, означающим, что его качество в два раза выше, чем у «4K» предыдущего поколения.

4. С использованием интернета исследуются, как используется соотношение и разрешение экрана при разработке цифровых продуктов и готовится презентация.

3-й РАЗДЕЛ Целые числа

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	72	
Тема 3.1	Целые числа	2	73	53
Тема 3.2	Сравнение и упорядочивание целых чисел	2	76	55
Тема 3.3	Абсолютное значение числа	2	79	57
Тема 3.4	Сложение целых чисел	3	82	59
Тема 3.5	Вычитание целых чисел	3	86	62
	Задачи и примеры	2	89	65
Тема 3.6	Умножение и деление целых чисел	3	91	68
Тема 3.7	Действия над целыми числами	3	95	71
	Обобщающий урок. STEAM. Экстремальная температура и абсолютный ноль	2	100	74
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**23**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики знакомятся с целыми числами, выражением значения величины положительным или отрицательным целым числом, сравнением целых чисел, нахождением их абсолютных значений, действиями над целыми числами, а также правилами нахождения натуральной степени целого числа. Применяя эти правила, над целыми числами совершаются различные действия, решаются задачи.

На что стоит обратить внимание?

Некоторые ученики думают, что противоположным целому числу всегда является отрицательное число. Таким ученикам рекомендуется сообщить, что противоположное отрицательному числу является положительным числом, и дать задания, связанные с нахождением противоположного числа отрицательному числу.

Сравнивая целые числа, ученики допускают ошибки при сравнении отрицательных чисел. Ученикам, допускающим такие ошибки, можно дать задание выполнить сравнение на числовой оси, а затем проверить результат, используя модуль чисел.

Учащиеся умеют находить сумму на числовой оси, отсчитывая вправо, а разность — отсчитывая влево. Целесообразно подчеркнуть, что при сложении целого числа с отрицательным числом результат находится путем отсчета влево, а при вычитании отрицательного числа из целого — путем отсчета вправо.

Некоторые ученики считают, что любая степень отрицательного целого числа является положительным числом. С такими учениками можно обсудить, почему нечетная степень целых чисел является отрицательным числом, и дать им задания на нахождение степени отрицательных целых чисел.

Ученики, выполняющие действия над целыми числами, испытывают трудности в соблюдении правильной последовательности действий. Некоторые ученики неправильно определяют последовательность действий, а некоторые допускают ошибки по невнимательности. Это особенно заметно при выполнении операций с отрицательными числами. С такими учениками важно организовать работу над ошибками. Ученикам, неправильно определившим последовательность действий, целесообразно дать более простые примеры и направить их на то, чтобы они увидели влияние последовательности действий на результат, а затем предложить им выполнить соответствующее задание.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «целое число», «положительное число», «отрицательное число», «противоположное числу», «противоположные числа», «числа одного знака», «числа разных знаков», «абсолютное значение числа», «модуль числа», позволяет оценить, насколько освоены эти понятия.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

«Целое число», «положительное число», «отрицательное число», «противоположные числа», «абсолютное значение числа», «модуль числа»

Необходимые предварительные знания и навыки:

• Натуральные числа, сравнение и упорядочивание натуральных чисел • Степень натуральных чисел
• Сложение, вычитание, умножение, деление натуральных чисел

Междисциплинарная интеграция

Целые числа используются для выражения температуры, доходов и расходов, глубины и высоты. Например, температуре воздуха ниже нуля, финансовые затраты, глубина выражаются отрицательными числами, а температура выше нуля, доход и высота – положительными.

ТЕМА 3.1. Целые числа

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.2.1. Читает и записывает целые числа. 6-1.2.2. Отмечает на числовой оси точку, соответствующую целому числу.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Читает и записывает целые числа. • Отмечает на числовой оси точку, соответствующую целому числу.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/1495* *https://video.edu.az/video/1455* *https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html*

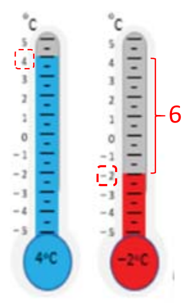
Обсуждение исходной задачи. Обсуждается задача, данная на первой странице раздела. Напоминаются знакомые ученикам плоские фигуры. Ученики знакомятся с заданием «Попытайтесь». Они пытаются выполнить задание, используя свои предыдущие знания. Учитель сообщает ученикам, что они будут выполнять задание на основе знаний, полученных в ходе раздела. Поэтому вычисления можно отложить на конец раздела.

Побуждение.

Учитель рисует на доске таблицу. В таблице указана температура воздуха за одно и то же время в некоторых регионах. Ученики добавляют в таблицу несколько названий регионов. Температура в этих регионах фиксируется в таблице. В технически оснащенных классах температуру в регионах можно определить вместе с ученикам на сайте прогнозов погоды. *http://weather.day.az*

Регионы	Температура
Баку	
Губа	

Исследование-обсуждение

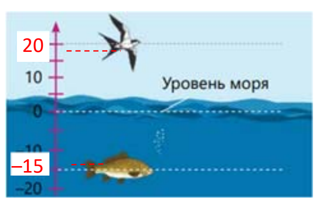


В задании требуется определить, верно или нет мнение Сабины. По показаниям термометра Сабина считает, что температура ночью на 2°C ниже, чем днем. Для проверки правильности ответа ученики могут подчеркнуть, что 4°C минус 2 °C дает 2 °C. Так что мнение Сабины неверно. Ученикам задаются наводящие вопросы:

– Что обозначают числа, изображенные на числовой оси?

– Сколько единиц между этими числами? Как это определить? и т.д.

Изучение Положительные и отрицательные числа



Ученики знакомятся с положительными и отрицательными целыми числами. На изображении показаны примеры положительных и отрицательных чисел, соответствующих высоте и глубине. Ученикам объясняются положительные и отрицательные числа на числовой оси.

До сведения учеников доводится, что ноль не является ни положительным, ни отрицательным целым числом. Ученики знакомятся с понятием противоположных чисел. С классом обсуждается, когда положительные и отрицательные числа пишутся в скобках.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/1455*

Подумай!

Чтобы объяснить, что противоположное число для -3 равно 3, учитель сначала может задать ученикам вопросы о том, что противоположное число для 3 равно -3. По этому же принципу объясняется, что противоположное число для –3 также равно 3.

противоположное числу 3 → –3 противоположное числу –3 → –(–3) = +3 = 3.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/11248*

Задания

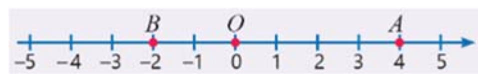
1. Определяются числа, соответствующие утверждениям. В этом случае объясняется значение точки 0.
а) Самолет летит на высоте 1200 м над уровнем моря. → 1200. Здесь точка 0 обозначает уровень моря.
б) Температура воздуха 6°С мороза. → – 6°С. Здесь точка 0 обозначает температуру замерзания воды.
Таким же образом в классе обсуждаются и другие варианты.

2. Выразив доходы и расходы положительными и отрицательными числами, записываются соответствующие числа.

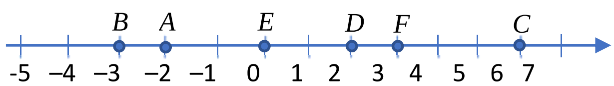
К сведению учителя! Чтобы различать отрицательные целые числа от положительных, целесообразно изучать положительные и отрицательные числа вместе. Ученики могут привести несколько примеров величин, которые в повседневной жизни могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. В каждом примере рекомендуется объяснить, что означают значения этих величин, а также ноль для данных величин.

Запомни!

Ученикам сообщается о координатной прямой и оси координат. Подчеркивается, что началом координат является точка 0 на координатной прямой. Приводятся примеры координат нескольких точек.



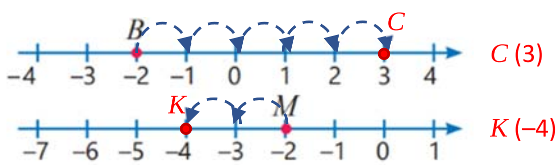
6. В тетради чертят ось координат. На ней отмечают заданные точки.



7. Координаты записываются в соответствующие точки с помощью оси координат.

а) От точки B отсчитываем 5 единиц вправо и отмечаем точку C.

б) От точки M отсчитываем 2 единицы влево и отмечаем точку K.



Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики думают, что противоположным числом может быть только отрицательное число. Например, есть ученики, которые думают, что число противоположное числу -2 также равно -2. Ученикам, допускающим подобные ошибки, целесообразно напомнить, что противоположным отрицательному числу является положительное число, и организовать с ними работу над ошибками.

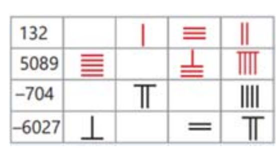
Запомни!

Ученикам предоставляется информация о целых числах, отрицательных и положительных целых числах. Объясняется изображение на числовой оси и показывается несколько примеров.

8. Среди заданных чисел определяются целые числа. Противоположные числа этих чисел записываются. При выполнении задания ученики должны обращать внимание на обыкновенные и десятичные дроби. Подчеркивается, что эти числа не являются целыми числами. Целесообразно выявить учеников, испытывающих трудности и допускающих ошибки при выполнении задания, и организовать с ними работу над ошибками.

Из истории математики

Подчеркивается, что впервые отрицательные числа были использованы в торговых и налоговых расчетах в Китае во II веке до нашей эры. В Китае отрицательные числа обозначались черным цветом, а положительные числа — красным, и с учениками обсуждается несколько связанных с этим примеров.

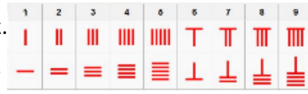


Ученикам может быть предоставлена дополнительная информация о записи положительных и отрицательных чисел в древнем Китае.

Положительные числа

вертик.

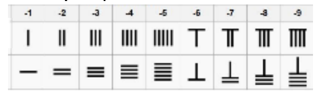
гориз.



Отрицательные числа

вертик.

гориз.



Рекомендуется дать ученикам задание подготовить презентацию, проведя исследование.
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы.
https://youtu.be/uMBHkDiKLlI
Ученикам сообщается, что знак отрицательных чисел впервые был использован итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

К сведению учителя! Ученикам может быть предоставлена дополнительная информация об истории отрицательных чисел.
Потребность в отрицательных целых числах возникла 2000 лет назад. По мере расширения торговли целые числа стали необходимы для двух разных целей: для обозначения кредитов (или доходов) и для обозначения дебетов (или расходов). Около 200 г. до н. э. китайцы считали кредиты красными палочками, а дебет — черными. Точно так же они использовали в своем письме красные и черные цифры. Цветной метод, который применяли китайцы, используется до сих пор. Например, банки часто пишут цифры красным цветом, чтобы указать суммы ниже нуля, и цифры черным цветом, чтобы указать счета выше нуля. Это помогает визуально различать отрицательные и положительные числа.

10. Исходя из того, что число m является целым числом, отличным от 0, с помощью примеров определяется, верны или неверны утверждения.

а) Если m — отрицательное число, то противоположное число будет положительным. Данное утверждение неверно.

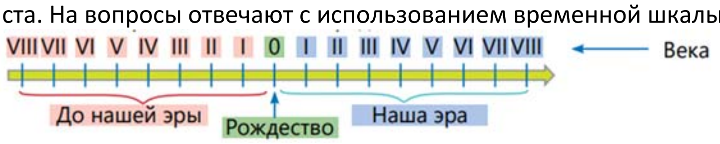
б) Данное утверждение верно.

в) Данное утверждение верно.

Для каждого случая приводятся примеры.

Решение задач

11. На основании григорианскому календаря отмечается, что началом нашей эры принято считать год рождения Иисуса Христа. На вопросы отвечают с использованием временной шкалы.



• Соответствующие целые числа записываются на основе заданной временной шкалы:
3 века до нашей эры → –3.
21 век нашей эры → 21.
• Принимая год рождения за 0, каждый ученик рисует свою собственную временную шкалу, и на этой временной шкале записываются целые числа, соответствующие годам рождения его братьев, сестер и родителей.

12. Требуется определить, какая команда в итоге победит.
Привлечение. Учитель может дать ученикам задание сделать модель числовой оси, нарисовав любую линию на полу или наклеив скотч. Один из учеников стоит на «числовой оси». Ученикам задаются наводящие вопросы: Какое число расположено на 5 единиц левее от числа -5?

Какое число расположено на 5 единиц левее от числа 3? Какое число получится, если отсчитать 4 единицы влево, а затем 2 единицы вправо от числа 2? Как это определить? и т.д.
Решение задачи:
В конце каждой попытки определяется, в какой точке остановились.
1-я попытка. Узел перемещается на 12 единиц вправо, затем на 8 единиц влево.

Ответ. Победит вторая команда.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Читает и записывает целые числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Показывает точку, соответствующую целому числу, на числовой оси.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 3.2. Сравнение целых чисел

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.2.4. Сравнивает и упорядочивает целые числа.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Сравнивает положительные и отрицательные числа. • Сравнивает два отрицательных числа.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/4197* *https://video.edu.az/video/4230* *https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-integers/latest/number-line-integers_all.html* Задание: *https://video.edu.az/video/4153* *https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/fruit-splat-compare/* *https://www.geogebra.org/m/kenkdrhy*

Побуждение.

Учитель вызывает к доске двух учеников. На стол кладутся 5 синих и 5 красных карточек лицевой стороной вниз. Учитель сообщает ученикам, что на синих карточках записаны положительные числа, а на красных — отрицательные. По указанию учителя каждый ученик выбирает подходящую карточку, записывает это число в таблицу и отмечает его на числовой оси.

Ученики	1-я попытка		2- я попытка		3- я попытка	
	Положит. число	Отриц. число	Отриц. число	Положит. число	Отриц. число	Отриц. число
1-й ученик						
2-й ученик						

1	3	6	9	10
−1	−2	−5	−6	−9

Затем учитель задает ученикам наводящие вопросы:

– Какое число из выбранных при 1-й попытке расположено слева на числовой оси? Какое число из выбранных чисел при 2-й попытке расположено справа на числовой оси? Какое число из выбранных чисел при 3-й попытке расположено слева на числовой оси? Как мы можем определить, какое число больше или меньше, исходя из его положения на числовой оси?

Исследование-обсуждение

В таблице приведены показатели температуры воздуха в разных регионах. Чтобы ответить на вопросы, ученики могут определить температуру, соответствующую каждой области на шкале термометра.

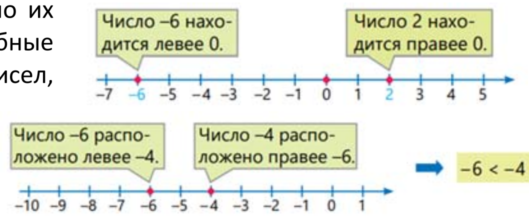
Учитель задает ученикам наводящие вопросы:

– Какие температуры ниже 0? Какая температура выше 0? Какая из двух температур на шкале термометра будет выше: показатель которой расположен выше или ниже? Как это определить?
По такому же принципу можно отметить показатели на термометре для упорядочивания регионов от холодных к жарким. В это время ученики определяют, какие числа меньше, используя правило упорядочивания чисел на числовой оси.

Регион	Температура
Губа	–4
Сальян	2
Баку	0
Балакен	–5

Изучение Сравнение целых чисел

Подчеркивается, что сравнивать целые числа можно по их положению на числовой оси, как натуральные и дробные числа. Отмечается, что на числовой оси одно из двух чисел, расположенное слева от другого, меньше, а число, расположенное справа, больше. Таким же образом можно организовать дискуссию о том, что число, расположенное внизу, меньше, а число, расположенное выше, больше на вертикальной числовой оси.



В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.geogebra.org/m/v5ferhpa

Задания

4. Ученики определяют, какие из утверждений неверны, приводя несколько примеров для каждого утверждения.
а) Отрицательные числа меньше положительных. На примере показано, что это мнение верно. Подводя итог, учитель может подчеркнуть, что любое отрицательное число меньше любого положительного числа, основываясь на том факте, что отрицательные числа находятся слева от нуля, а положительные — справа.
б) Ноль меньше отрицательных чисел. По этому же принципу можно привести примеры, соответствующие этому пункту, и, обобщая, указать на то, что данное утверждение неверно.

Изучение Упорядочивание целых чисел

Подчеркивается, что числовая ось используется для упорядочивания целых чисел. Следует отметить, что целые числа упорядочиваются так же, как и положительные числа.
6. С помощью числовой оси данные числа располагаются в порядке возрастания или убывания. Для этого ученики должны определить положение каждого числа на заданной числовой оси и, основываясь на том, какое число расположено слева, а какое – справа, отсортировать их. Рекомендуется подчеркнуть, что числа будут упорядочиваться путем предположения их положения.
Например, а) положение числа –18 определяется тем, что оно находится между –20 и –10.
а) –18, 50, 48, – 42 $\longrightarrow$ – 42, – 18, 48, 50.

Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики думают, что при сравнении отрицательных чисел число с большим абсолютным значением больше, как и положительные числа. На следующем уроке, когда они познакомятся с абсолютным значением числа, ученики будут проинформированы о правиле его нахождения по абсолютному значению. В этой теме будет полезно объяснить таким ученикам, с помощью примеров на числовой оси, что они ошибаются.
Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель записывает на доске несколько чисел и предлагает ученикам найти среди этих чисел наибольшее или наименьшее число. Ученики объясняют, как они это определили.

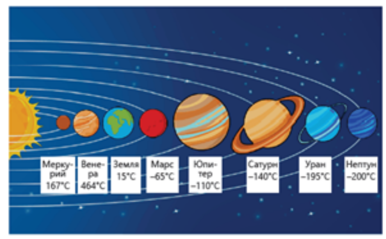
Углубление. Учитель записывает на доске число. К доске приглашаются 2 ученика. Один из учеников называет 2 числа больше этого числа, а другой 2 числа меньше этого числа. Затем ученики расставляют полученные числа в порядке возрастания или убывания.

Практическое задание. Класс делится на 4-5 групп. Рабочие листы раздаются 1-й группе. Ученикам раздаются рабочие листы, на которых в соответствующей строке изображена числовая ось. Ученики определяют точное (1-я и 2-я числовые строки) или приблизительное (3-я и 4-я числовые строки) положение соответствующих целых чисел на числовой оси. Группы передают друг другу рабочие листы по часовой стрелке с помощью учителя. Рабочие листы в виде «карусели» проходят через все остальные группы и в конечном итоге возвращаются к 1-й группе. Учитель крепит рабочий лист к доске, и обсуждает ответы со всем классом.

Рабочий лист можно скачать по этой ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1qwinr8T2w7MI8bhjYRPT4XnzT8ye6-CW/view?usp=sharing

Решение задач

10. На рисунке показана средняя температура планет Солнечной системы.



Решение задачи.
• Находится, на какой планете средняя температура наименьшая.
Нептун: –200 °C
• Находится, на какой планете средняя температура наибольшая.
Венера: 464 °C
• Находится, какой по счету будет Уран, если расположить планеты в порядке возрастания их температур.
Уран будет 2-й планетой.
Ответ. Уран будет 2-й планетой в ряду.

К сведению учителя! Если обратить внимание на рисунок, то видно, что существует закономерность между расстоянием планет от Солнца и температурой. По мере удаления планеты от Солнца температура снижается. Однако на планетах Меркурий и Венера такой закономерности не ожидается. Ученики могут быть проинформированы об этом. Днем температура на поверхности планеты может достигать 430 °C. Поскольку на планете нет атмосферы, которая могла бы удерживать тепло, ночная температура на поверхности может опуститься до -180 °C. Поэтому средняя температура ниже, чем на планете Венера.

11. Требуется найти, кто задумал наименьшее число.
Задание можно выполнить, организовав в классе ролевую игру.
• Находится число, задуманное Сабиной. Наибольшее целое число меньше –7: –8.
• Находится число, задуманное Эльханом. Наименьшее целое число больше –10: –9.
• Числа сравниваются. –8 > –9. Итак, число, задуманное Эльханом, наименьшее.
Ответ. Число, которое задумал Эльхан, наименьшее.

12. В таблице указаны глубины некоторых впадин относительно уровня моря.

Впадины	Глубина ниже уровня моря (м)
Марианская впадина	–11034
Японская впадина	–8046
Филиппинская впадина	–10540
Впадина Тонга	–6500

• Определяется самая глубокая впадина: Марианская впадина.
• Определяется какая впадина глубже Японской впадины: Впадина Тонги. –8046 < –6500.
• Определяется, какие впадины глубже впадины Тонга: Японская, Марианская и Филиппинская впадины.
–6500 < –6500.
• Определяется, между какими двумя впадинами по глубине находится Филиппинская впадина: Марианской и Японская впадины.

Формативное оценивание.

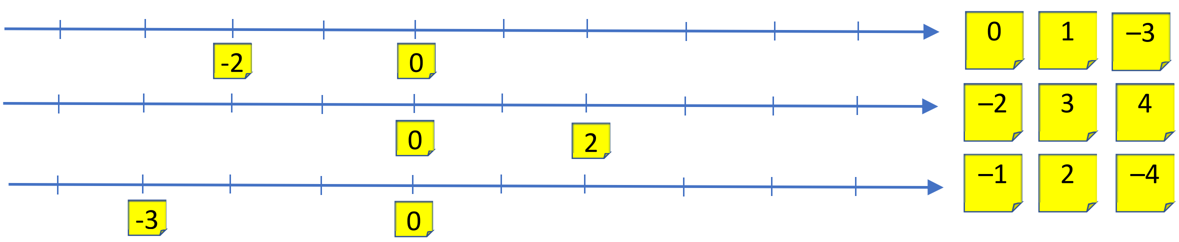
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Сравнивает положительные и отрицательные числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Сравнивает два отрицательных числа.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 3.3. Абсолютное значение числа

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.2.3. Объясняет понятие абсолютного значения (модуля) числа.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит абсолютное значение (модуль) числа. • Сравнивает отрицательные числа по их модулю.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры.
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/5459* *https://video.edu.az/video/8490* *https://video.edu.az/video/1724* *https://video.edu.az/video/8973* *https://www.geogebra.org/m/v52gmczg* *https://www.geogebra.org/m/d7xutfdq* Задание: *https://wordwall.net/resource/10321900/absolute-value*

Побуждение.

Учитель вызывает к доске двух учеников. Ученики стоят на определенном расстоянии. Учитель сообщает, что расстояние между учениками составляет 6 единиц, и что место, где он стоит между ними, является началом координат. Рекомендуется выполнить задание, нарисовав числовую ось на полу и перемещаясь по ней или изобразив ее на доске.



Ученикам задаются вопросы. При ответах на каждый вопрос стикеры наклеиваются в соответствующих координатах.

Если один ученик остановится в точке -2, в какой точке остановится второй ученик? В этом случае какой ученик будет стоять ближе ко мне? На расстоянии скольких единиц от меня находится каждый ученик?

Если один ученик остановится в точке 2, в какой точке остановится второй ученик? В этом случае какой из учеников будет стоять ближе ко мне? На расстоянии скольких единиц от меня будет находится каждый ученик?

Если один ученик остановится на точке -3, в какой точке остановится второй ученик? На расстоянии скольких единиц от меня может находится каждый ученик? Как можно объяснить, что ученики находятся от меня на одинаковом расстоянии?

Исследование-обсуждение

В таблице показано, на сколько манатов каждый год увеличивается или уменьшается цена продукта по сравнению с предыдущим годом. На основе этой информации даются ответы на вопросы.

Года	Изменение цены (ман.)
2019	–10
2020	16
2021	–20
2022	–16
2023	6

• Определяется, в каком году наблюдается наименьшее изменение цен, а в каком году — наибольшее. Чтобы ответить на этот вопрос, ученики должны сначала правильно определить, что подразумевается под минимальным и максимальным изменением цены. Год с наименьшим изменением цен — 2023, а год с наибольшим изменением цен — 2021.

В 2023 году цена выросла на 6 манатов по сравнению с 2022 годом, а в 2021 году снизилась на 20 манатов по сравнению с 2020 годом.

• В 2020 и 2022 годах изменение цены было одинаковым. В 2020 году цена выросла на 16 манатов по сравнению с 2019 годом, а в 2022 году снизилась на 16 манатов по сравнению с 2021 годом.

Изучение **Абсолютное значение числа (модуль числа)**

Ученикам сообщается об абсолютном значении числа и модуле числа. До сведения учеников доводится правило написания модуля и некоторые свойства, связанные с модулем.

• Модуль положительного числа равен самому числу.
• Модуль отрицательного числа равен противополож-ному числу.
• Модуль нуля равен нулю.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы, интерактивные игры:

https://video.edu.az/video/1523
https://phet.colorado.edu/az/simulations/number-line-integers
https://www.mathnook.com/math2/planetary-order-absolute-value.html

Подумай! Чтобы обосновать равенство абсолютных значений противоположных чисел, ученикам можно предложить взять два противоположных числа и найти их модуль. В это время каждый ученик возьмет разные числа и найдет их противоположное число и модуль, и увидит, что полученные числа равны между собой.

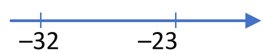
Задания

5. Используя слова “всегда”, “иногда” и “никогда”, определяют, в каких случаях утверждения верны. Примеры приводятся для каждого случая.
а) Модуль отрицательного числа является положительным числом. → Всегда. $|-3| = 3$, $|-8| = 8$. и т. д.
б) Модуль числа больше этого числа. → *Иногда.* $|-3| = 3$, $3 > -3$. $|6| = 6$, $6 = 6$.
Если число отрицательное, его модуль больше самого числа, а если число положительное, его модуль равен самому себе.
в) Модуль положительного числа является отрицательным числом. → *Никогда.* $|-3| = 3$, $|10| = 10$. и т.д.
Модуль положительного числа не может быть отрицательным числом. Ученики также могут использовать определение модуля, чтобы ответить на этот вопрос. Поскольку модуль — это расстояние между числом и 0, а расстояние не является отрицательным числом, модуль положительного числа никогда не может быть отрицательным числом.
г) Модуль числа равен самому числу. → *Иногда*. $|-9| = 9$, $|8| = 8$. Если число положительное, то модуль числа равен самому себе, а если отрицательное, то модуль числа не будет равен самому себе.

Изучение **Сравнение отрицательных целых чисел по модулю**

На примерах ученикам объясняется правило сравнения отрицательных чисел по их модулям. Ученикам можно поручить объяснить это сравнение по изображению на числовой оси.
В конце путем подведения итогов доводится до сведения учеников правило. *Из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше, и больше то, модуль которого меньше*.
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/1724*
8. Данные числа сравниваются по модулю. Правильность нескольких ответов проверяется на числовой оси.

$|-32| = 32$; $|-23| = 23$
$32 > 23$ тогда $-32 < -23$



Поскольку число –32 левее числа –23, то $-32 > -23$

10. Данные числа упорядочиваются в порядке возрастания или убывания.
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы:
https://video.edu.az/video/8490 *https://video.edu.az/video/9147*
11. Среди данных чисел находятся числа, подходящие в пустые клетки. В это время ученики должны обратить внимание, что сравнивают по модулю.

a) |□| < 3: –5 –3 0 2 4
b) |□| ≤ 6: –8 –6 –1 0 2 6
c) |□| > 7: –10 –7 0 4 8 12
d) |□| ≥ 4: –5 –4 –1 0 4 5

12. Находятся два положительных и два отрицательных числа, подходящие в пустые клетки.

a) |□| > 5 Образец: $|-12| > 5$, $|-8| > 5$, $|14| > 5$, $|32| > 5$
b) |□| ≤ 2: $|-2| \leq 2$, $|-1| \leq 2$, $|1| \leq 2$, $|2| \leq 2$

Ложные представления, возникающие у учеников. Как было упомянуто в предыдущей теме, некоторые ученики, сравнивая отрицательные числа, всегда считают, что число с большим абсолютным значением является большим. Целесообразно направить таких учеников на сравнение чисел, используя их абсолютные значения.

Сравнение чисел –30 и –20

$|-30| = 30$ $\quad |-20| = 20$

Ложное	Верное
$30 > 20$	$30 > 20$
тогда	тогда
$-30 > -20$	$-30 < -20$

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько целых двузначных или трехзначных чисел и предлагает ученикам найти среди этих чисел наибольшее или наименьшее число, используя модуль числа.

Углубление. К доске вызывают 3 учеников. Один из учеников называет отрицательное двузначное число. 2-й ученик называет отрицательное целое число, которое меньше или больше этого числа, и записывает на доске соответствующее сравнение. Третий ученик называет одно число среди чисел, названных двумя предыдущими учениками.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/9689*

Решение задач

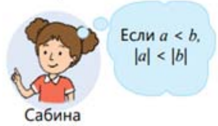
13. Какое из утверждений неверно? Объясняются соответствующие утверждения, подставляя различные целые числа вместо переменных.

a = 4, *b* = –4

Утверждение неверно, если одно из чисел положительное, а другое отрицательное.
Утверждение неверно.

a = 2, b = 2

Если числа равны, то их модули тоже равны.
Утверждение верно.



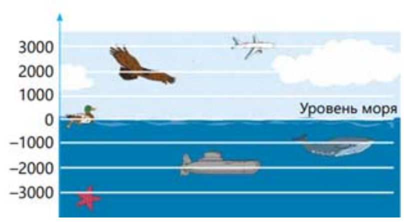
a = 2, b = 3

a = –12, b = 5

Утверждение в некоторых случаях неверно, если одно из чисел положительное, а другое отрицательное.
Утверждение неверно.

Ученики также могут показать, что мнение верно или нет, из определения модуля, используя расстояние на числовой оси.

14. На рисунке показаны положения не которых объектов относительно уровня моря. На вопросы отвечают, используя изображения.



• Чтобы определить, какой из них находится дальше от уровня моря — самолёт или подводная лодка, измеряют расстояние каждого от уровня моря.

Самолет: $|-3000| = 3000$

Подводная лодка: $|-2000| = 2000$

$|-3000| > |-2000|$. Самолет находится дальше уровня моря.

• Определяется объект, находящийся на таком же расстоянии от уровня моря, как и орёл.

Орел: $|-2000| = 2000$

Подводная лодка: $|-2000| = 2000$.

$|-2000| = |2000|$. Подводная лодка находится на таком же расстоянии от уровня моря, как и орел.

• Согласно изображению, утка — это живое существо, плавающее на уровне моря.

• Определяется, между какими объектами находится рыба, плавающая на глубине 1500 м ниже уровня моря.

На глубине 1500 м от уровня моря → -1500. $\quad -2000 < -1500 < -1000$.

Рыба, плавающая на глубине 1500 м ниже уровня моря, будет находиться между дельфином и подводной лодкой.

Формативное оценивание.

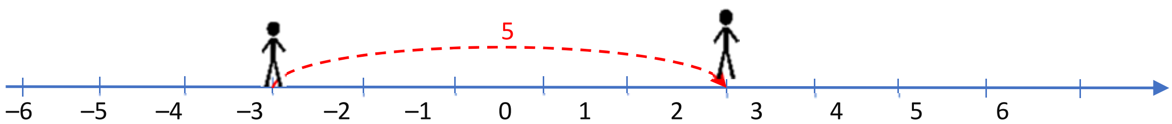
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит абсолютное значение (модуль) числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Сравнивает отрицательные числа по их модулю.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 3.4. Сложение целых чисел

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.3.1. Складывает целые числа. 6-1.3.6. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Складывает отрицательные числа. • Складывает целые числа с разными знаками.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: https://www.math-only-math.com/properties-of-adding-integers.html Задание: *https://www.mathnook.com/math2/bird-line-math-integers.html* *https://www.mathplayground.com/ASB_OrbitIntegers.html* *https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/fruit-splat-addition*

Побуждение.

Учитель вызывает к доске двух учеников. Один из учеников стоит на определенном числе на числовой оси. Задание рекомендуется выполнять, нарисовав на полу числовую ось и передвигаясь по ней, либо изобразив ее на доске. 1-й ученик останавливается на -3. А 2-му ученику надо остановиться в той точке, которой он достиг, отсчитав 5 единиц вправо.

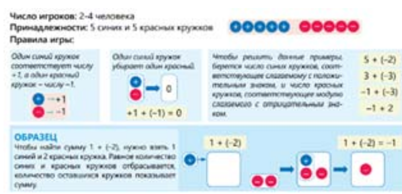


Учитель задает ученикам наводящие вопросы:

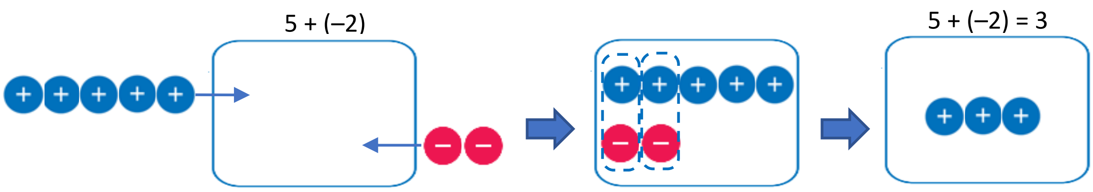
- Как определить точку, достигнутую 2-м учеником путем сложения? Если 1-й ученик остановится в точке -2, в какой точке 2-й ученик остановится, отсчитав 6 единиц вправо? Если 1-й ученик остановится в точке -6, в какой точке 2-й ученик остановится, отсчитав 3 единицы вправо?

Озвучиваются соответствующие каждому случаю ответы и организуется дискуссия.

Исследование-обсуждение



Ученики должны решить соответствующие примеры по правилам данной игры. Для этого берется число синих кружков, соответствующее слагаемому с положительным знаком, и число красных кружков, соответствующее модулю слагаемого с отрицательным знаком. Обсуждается данный пример, в остальных примерах сумма находится по этому же правилу.



Выигрывает тот игрок, который быстрее и правильно решит примеры.

В технически оснащенных классах можно выполнять подобные интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/xukDJvva

Изучение **Сложение отрицательных целых чисел**

С классом обсуждается правило расчета расходов покупателя, потратившего сначала 5 манатов, а затем 3 маната, если расход выражен отрицательным числом. При сложении двух отрицательных чисел отмечают, что сначала складываются модули чисел, а перед ними пишется отрицательный знак. Нахождение суммы путем изображения ее на числовой оси показано на примерах.

Подумай! Чтобы объяснить, что если $a > 0$, $b > 0$, то $a + b = |a + b|$, ученики могут взять два положительных числа и на примере объяснить правильность утверждения. Учитель задает ученикам наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о модуле положительных чисел? Равна ли сумма положительных чисел сумме их модулей?

Поскольку модули положительных чисел равны сами себе, то $a + b = |a + b|$ всегда верно.

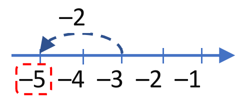
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы, интерактивные задания: *https://video.edu.az/video/1490*

Задания

1. Сумма рассчитывается, используя рисунок. Ученики могут отметить, что кружки на рисунке одного цвета и подсчитывается их общее количество, и что знак, соответствующий этому количеству, является отрицательным, а значит, и сумма равна отрицательному числу.

3. Примеры записываются и решаются с помощью сложения. Правильность ответа проверяется.

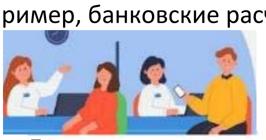
Число, расположенное на 2 единицы левее числа –3: –3 + (–2) = –



Запомни!

С классом обсуждается «Практическое задание», используя кружки, в которых сумма противоположных чисел равна нулю. Нахождение суммы изображается на числовой оси.

К сведению учителя! В повседневной жизни в различных ситуациях мы сталкиваемся с тем, что сумма противоположных чисел равна нулю. Показав ученикам несколько примеров, можно помочь им лучше понять. Рекомендуется организовать ролевые игры, отражающие эти ситуации, с помощью рисунков. Например, банковские расчеты, температура воздуха, глубина ниже уровня моря и т.д.


Банковские расчеты


Температура воздуха


Глубина ниже уровня моря

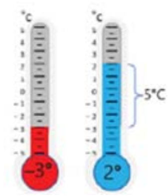
6. Используя то, что сумма противоположных чисел равна 0, находится число, соответствующее пустой клетке.

б) $\square + 21 = 0$
$-21 + 21 = 0$

г) $\square + (-7) = 0$
$7 + (-7) = 0$

д) $\square + |-3| = 0$
$|-3| = 3, \quad -3 + 3 = 0$

Изучение Сложение целых чисел с разными знаками



С учениками обсуждается, как найти температуру воздуха днем. По температурным показателям на изображении ученикам видно, что температура повысилась на 5°C. Записываются подходящие примеры, ученикам показывается, как используются их модули при сложении чисел с разными знаками.

Нахождение суммы чисел разных знаков по изображению на числовой оси обсуждается с классом.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы, интерактивные задания: *https://video.edu.az/video/1539*
https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-operations/latest/number-line-operations_all.html?locale=az

Подумай! Обсуждается, как путем вычислений определить, является ли сумма двух целых чисел положительной, отрицательной или равной 0.

Для любого случая показывается несколько соответствующих примеров.

Целые числа с одинаковыми знаками

✓ 2 + 3 = 5, 5 + 7 = 12 → *Если два целых числа положительные, сумма тоже будет положительной.*

✓ –2 + (–1) = –3, –5 +(–8) = –13 → *Если два целых числа отрицательные, сумма будет отрицательной.*

✓ Целые числа с разными знаками

✓ 2 + (–1) = 1, –5 + 8 = 3 → *Если знак числа с большим модулем положительный, сумма будет положительной.*

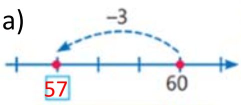
✓ –4 + 2 = –2, –7 + 2 = –5 → *Если знак числа с большим модулем отрицателен, сумма будет отрицательной.*

✓ –3 + 3 = 0, –5 + 5 = 0 → *Сумма противоположных чисел с одинаковыми модулями равна нулю.*

К сведению учителя! Когда числа большие, неудобно находить сумму этих чисел на числовой оси. Для этого классу важно освоить метод нахождения суммы целых чисел по модулю числа. Целесообразно обратить внимание на организацию работы по направлению формирования этих навыков.

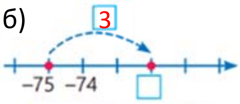
10. По рисункам записываются примеры на сложение. Определяются числа, соответствующие пустой клетке.

а)



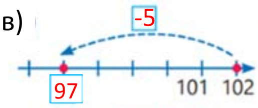
$60 + (-3) = \boxed{57}$

б)



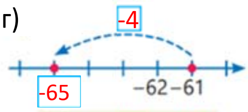
$-75 + \boxed{3} = \boxed{-72}$

в)



$102 + \boxed{-5} = \boxed{97}$

г)



$-61 + \boxed{-4} = \boxed{-65}$

К сведению учителя! До сих пор ученики думали, что сложение означает отсчет вправо или вверх по числовой оси. Но они увидели, что можно считать влево, прибавляя к любому числу отрицательное число. Итак, прибавление отрицательного числа к числу описывается так же, как вычитание из этого числа положительного числа. Подводя итог, рекомендуется ученикам считать влево на числовой оси, когда к числу прибавляется отрицательное число, и вправо, когда прибавляется положительное число.

Запомни!

Подчеркивается, что для целых чисел справедливы свойства сложения. С классом обсуждается пример задания.

11. Сумма находится с помощью свойств сложения. Приведенные примеры заданий обсуждаются с классом, обращая внимание на то, какие свойства используются. Примеры выполняются с использованием этих свойств. Ученикам задается вопрос, какое свойство сложения используется для решения каждого примера.

12. Вычисляется и сравнивается. При выполнении операции сложения внутри модуля подчеркивается, что вычисляется выражение внутри 1-го модуля, а затем находится модуль, так как сначала вычисляется выражение внутри круглых скобок.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель раздает ученикам рабочие листы. Ученики записывают любые два целых числа, сумма которых известна, в пропусках. Изменяя данное число в сумме, ученикам можно дать задания, связанные с нахождением слагаемых при условии, что одно из слагаемых положительно, другое отрицательно, оба отрицательны и т.д.

___ + ___ = –3	___ + ___ = 3
___ + ___ = –3	___ + ___ = 3

Углубление. Учитель раздает ученикам рабочие листы. Ученики записывают в пропуски любые три целых числа, сумма которых известна. Изменяя данное число в сумме, ученикам можно дать задания, связанные с нахождением слагаемых при условии, что одно из слагаемых положительно, два других отрицательны, все три отрицательны и т.д.

___ + ___ + ___ = –1	___ + ___ + ___ = 1
___ + ___ + ___ = –1	___ + ___ + ___ = 1

В технически оснащенных классах можно использовать подобные интерактивные задания:
https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/math-lines/

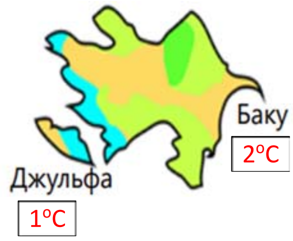
Практическое задание. В классе создаются группы. Создается группа расчетов по банковскому кредиту. Члены группы сидят каждый за партой. Другие ученики (А, В и т.д.) подходят к банковским работникам, сообщают о сумме кредита и платеже, а затем интересуются результатом. Ученики – служащие банка выполняют расчеты, записывают результаты в последние графы и информируют клиентам. Кредитная задолженность выделена красным цветом, а дополнительные платежи – синим.

Клиенты банка	Кредит	Оплаченная сумма	Кредит	Оплаченная сумма	Результат (штук)	Результат(объяснение)
A	100	70	500	300	-230	Есть кредитный долг в размере 230 манатов.
B	200	130	300	400	30	Произведена дополнительная оплата в размере 30 манатов.
C						
D						
...						

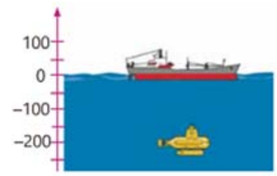
Например, ученики могут сначала привести случай, когда у них есть долг в 2 маната перед другом, а затем, получив дополнительные деньги, продемонстрировать, что этот долг был погашен. По тому же принципу можно сказать, что оба ведут друг к другу по кругу, показывая числа, соответствующие долгу,

отрицательными, а полученный доход – положительными. Проверить, что сумма противоположных чисел равна 0, лучше на практическом задании. В общем случае вниманию учеников предлагаются формулы, связанные с суммой противоположных чисел.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://www.hoodamath.com/games/orbitintegers.html#gsc.tab=0

Решение задач



13. В задаче требуется выяснить, где выше температура воздуха днем: в Баку или Джульфе.
Решение задачи.
• Определяется температура воздуха в Баку днем. $-3 + 4 = 1$ (°C)
• Определяется температура воздуха в Джульфе днем. $-6 + 8 = 2$ (°C)
Ответ. Температура в Джульфе выше.



14. В задаче требуется определить максимальную глубину, на которую опускается батискаф, и высоту палубы корабля над уровнем моря.
Решение задачи.
• Находится, на какую максимальную глубину опускается батискаф.
$-100 + (-200) = -300$.
• Рассчитывается высота палубы корабля над уровнем моря.
$-300 + 310 = 10$ (м).
Ответ. Батискаф опустился на максимальную глубину 300 м. Высота палубы корабля над уровнем моря 10 метров.

Формативное оценивание.

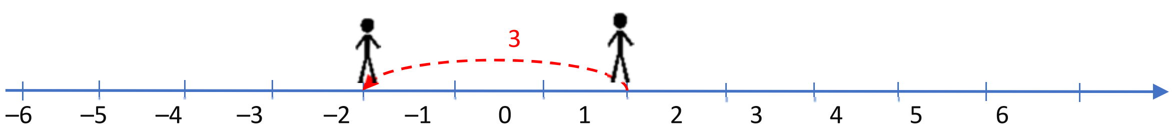
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Складывает отрицательные числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Складывает целые числа с разными знаками.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 3.5. Вычитание целых чисел

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.3.2. Вычитает целые числа. 6-1.3.6. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычитает целые числа. • Находит расстояние между двумя точками на координатной оси.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/xukDJvva* *https://mathsbot.com/activities/negativePatterns* Задание: *https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/fruit-splat-subtraction/* *https://www.education.com/game/treasure-diving-subtracting-integers/* *https://www.mangahigh.com/en-gb/games/minusminers*

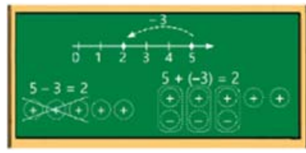
Побуждение

Учитель вызывает к доске двух учеников. Один из учеников стоит на определенном числе на числовой оси. Задание рекомендуется выполнять, нарисовав на полу числовую сось и передвигаясь по ней, либо изобразив ее на доске. 1-й ученик стоит в точке 1. 2-му ученику предлагается остановиться в той точке, которую он достигнет, отсчитав 3 единицы влево.



Учитель задает ученикам наводящие вопросы:
– Как методом вычитания определить точку, куда прибыл 2-й ученик? Если 1-й ученик остановится на -2, в какой точке остановится 2-й ученик, отсчитав 6 единиц влево?
Для каждой ситуации пишутся примеры на вычитание и организуется обсуждение.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/CSdEAaNP

Исследование-обсуждение



На доске требуется объяснить примеры, написанные в соответствии с изображением на числовой оси. Ученики выполнили различные задания, написав примеры сложения, относящиеся к теме "Сложение целых чисел", в соответствии с данным описанием.

• Отсчитать 3 единицы влево от 5 означает вычесть 3 из 5. Записав пример сложения, можно увидеть, что тот же результат получается, когда к числу 5 прибавляется -3.

• Исходя из описаний, представленных на числовой оси, ответ на оба примера можно найти, отсчитав 3 единицы влево от числа 5. Следовательно, 5 – 3 = 5 + (–3).

Изучение Вычитание целых чисел

На примерах объясняется правило нахождения разности двух чисел путем прибавления к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому. Разность можно найти, изобразив на числовой оси.

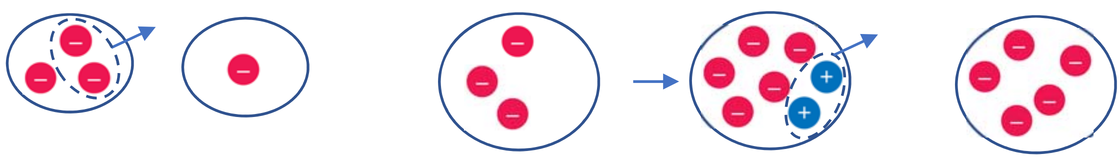
Запомни!

Отмечается, что разность чисел a и b равна сумме числа a и числа, противоположного b. Приводятся примеры. Ученикам также можно задать изобразить примеры на числовой оси. В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/8918*

К сведению учителя! Вычитание целых чисел можно объяснить на модели с цветными кружками:

–3 – (–2) = ? –3 – (–2) = –1

–3 –2 = ? Чтобы вычесть 2 из числа –3 прибавляется 2 пары нулей. –3 –2 = –5



Задания

2. По рисункам записываются примеры на вычитание. Определяются подходящие числа в пустые клетки.

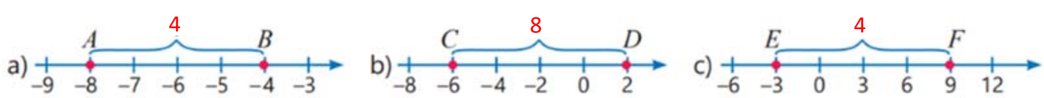
7. Значение выражения находится удобным способом.

a) –2 – 3 – 5 + 3 = –2 + (–3) – 5 + 3 = –2 – 5 = –7

Изучение Расстояние между двумя точками на координатной оси

На примерах объясняется, что расстояние между двумя точками на координатной оси равно разности координат этих точек. Проводится обсуждение по изображению на числовой оси.

8. Находятся координаты точек. Находится расстояние между двумя точками по этим координатам.



A (–8) и B (–4) C (–6) и D (2) E (–3) и F (9)

$AB = |-8-(-4)| = 4$ $CD = |2-(-6)| = 8$ $EF = |9-(-3)| = 12$

10. Определяется, чье мнение неверно, записав данные числа вместо переменных.

Сабина	Эльхан	Айнур
$-2 + 6 = 4$	$-2 - 6 = -8$	$-2 - 6 = -8$
$6 - 2 = 4$	$-(2 - 6) = 4$	$-(2 + 6) = -8$
Мнение верно.	*Мнение неверно.*	*Мнение верно.*

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы:
https://video.edu.az/video/9606 *https://video.edu.az/video/9619*

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель дает ученикам рабочие листы. Ученики записывают в пропуски два любых целых числа, разность которых известна. Изменяя данное число в разности, ученикам можно дать задания, связанные с нахождением слагаемых при условии, что уменьшаемое положительное, вычитаемое отрицательное, оба отрицательные и т.д.

___ + ___ = –2	___ + ___ = 2
___ + ___ = –2	___ + ___ = 2

Углубление. Учитель дает ученикам рабочие листы. Ученики записывают любые три целых числа в пропуски, где известно число в правой части равенства. Изменяя это число, ученикам можно дать задания, связанные с нахождением чисел, соответствующих пропускам, при условии, что эти числа, соответствующие пропускам, являются положительными или отрицательными.

___ + ___ – ___ = 0	___ – ___ + ___ = –1
___ – ___ + ___ = 0	___ + ___ – ___ = –1

Практическое задание. Класс делится на группы. Ученикам дают задания, связанные с нахождением расстояния между двумя точками. В задаче требуется найти одну из координат двух точек или расстояние между этими точками. Ученики находят подходящие числа в пустых клетках и записывают соответствующие примеры. Задание можно выполнять в парах или группах.

Рабочий лист можно скачать по этой ссылке.
https://drive.google.com/file/d/1d1KeF1YLzy5dXeEyKgV0vM4nm4NnmNLu/view?usp=sharing

Решение задач

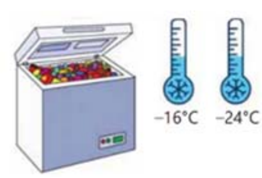
11. В задаче требуется определить расстояние между кратером и очагом вулкана.

Решение задачи.

• Расположение очага вулкана и кратером вулкана выражается отрицательными и положительными числами. Очаг вулкана: –3
Кратер вулкана: 5

• Находится расстояние между очагом и кратером вулкана. $|-3 - 5| = 8$ (км)

Ответ. Расстояние между очагом и кратером вулкана 8 км.



12. В задаче требуется выяснить, увеличилась или уменьшилась температура морозильной камеры и на сколько она изменилась.

Решение задачи.

• Определяется, повысилась или понизилась температура морозильной камеры. $-16 > -24$. Итак, температура морозильной камеры понизилась.

• Определяется, насколько изменяется температура морозильной камеры. $|-16 - (-24)| = 8$ (°C)

Ответ. Температура морозильной камеры изменилась на 8 °C.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Вычитает целые числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит расстояние между двумя точками на координатной оси.	Рабочие листы, учебник, РТ

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

На предыдущих уроках ученики познакомились с понятиями целых чисел, положительных и отрицательных чисел, противоположных чисел, абсолютного значения числа (модуля числа), они изучили правила нахождения выражения значений величин положительным или отрицательным числом, сложения целых чисел, вычитания целых чисел, расстояния между двумя точками на оси координат. На этом уроке ученики будут решать различные задачи и примеры, чтобы закрепить изученные ими правила о целых числах.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/f3petmum
https://www.mathmammoth.com/practice/mystery-picture-integers
https://www.mathplayground.com/ASB_OrbitIntegers.html
https://www.mathgames.com/skill/7.65-add-and-subtract-integers

Решение заданий.

2. Ответы на вопросы основаны на заданных числах.
а) Наибольшее отрицательное число: –1; б) Наименьшее число: –18
в) Разность наибольшего и наименьшего числа: 21 – (–18) = 39.
г) Сумма наибольшего отрицательного и наименьшего положительного числа: –1 + 5 = 4.

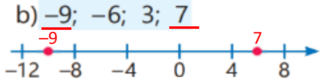
4. Данные числа упорядочиваются.
В порядке возрастания: а) –10, –7, –1,5. В порядке убывания: а) 0, –3, –6, –9.

5. В пустые клетки записываются три подходящих целых числа.

$-4 < \square$	$\square \le 1$	$-1 < \square \le 2$
$-4 < -3$	$-5 \le 1$	$-1 < 1 \le 2$
$-4 < 0$	$-1 \le 1$	$-1 < 0 \le 2$
$-4 < 2$	$0 \le 1$	$-1 < 2 \le 2$

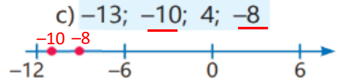
6. Среди чисел в рамке выбираются числа, соответствующие точкам, отмеченным на числовой оси, находится сумма и разность этих чисел.

b) –9; –6; 3; 7



7 + (–9) = –2
7 – (–9) = 16

c) –13; –10; 4; –8



–8 + (–10) = –18
–8 – (–10) = 2

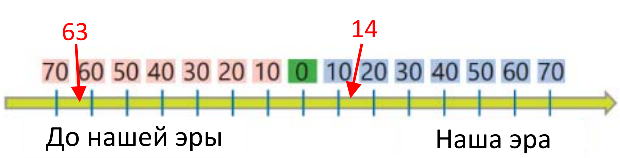
10. Приводятся 3 примера, соответствующие условиям.
а) Два целых положительных числа, разность которых отрицательное число: 2 и 5, 3 и 8, 5 и 12 и т.д. Подчеркивается, что для того, чтобы разность двух положительных чисел была отрицательным числом, уменьшаемое должно быть меньше вычитаемого. По этому же принципу указываются числа, соответствующие другим пунктам, и делается обобщение.

11. Полученное на выходе число вычисляется применением алгоритма к заданным числам.

$x = -1; -1 \le 3$. Поскольку неравенство верно, шаги алгоритма продолжаются в правой части. $10 - |-(-1)| = 9$.

$x = 5; 5 \le 3$. Поскольку неравенство неверно, шаги алгоритма продолжаются в левой части. $5 + (-3) = 2$.

12. По данным о первом римском императоре Октавиане Августе требуется узнать, в каком возрасте он умер.



Год рождения: 63-й год до н.э. → –63
Год его смерти: 14 г. н.э. → 14.
• По данным о первом римском императоре Октавиане Августе определяется, в каком возрасте он умер.
14 – (–63) = 77.
Ответ: Октавиан Август, первый римский император, умер в возрасте 79 лет.

13. Ученики должны определить, в каком из упомянутых мест самая низкая температура, между какими городами будет расположена Шамаха при расположении от холодного к теплому, а также разницу температур в самом холодном и самом теплом месте.
Записывается краткое условие задачи.
Температура воздуха в Баку: 2 °C
Температура воздуха в Балакане: -5 °C
Шамаха – 2 градуса выше Балакена, 3 градуса ниже Губы.
Шамаха –?
Губа –?
Решение задачи.
• Вычисляется температура воздуха в Шамахе. –5 + 2 = –3 (°C)
Вычисляется температура воздуха в Губе. –3 + 3 = 0 (°C)
Определяется, где температура воздуха самая низкая. Балакен: –5 °C
Названия мест расположены от холодного к теплому.
Шамаха расположится между Балакеном и Губой и окажется на 2-м месте в ряду.

–5 °C,	–3 °C,	0 °C,	2°C
Балакен,	Шамаха,	Губа,	Баку

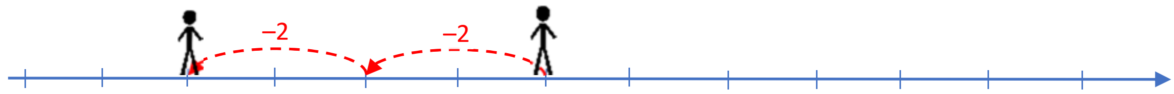
• Определяются температуры в самых теплых и самых холодных местах.
Самое холодное место – Балакен, самое теплое место – Баку. Разница температур. 2– (–5) = 7 (°C).
Ответ. Разница температур в самом теплом и самом холодном местах равна 7 °C.
14. В задаче требуется выразить уровни упомянутых объектов относительно уровня моря отрицательными и положительными числами, а также определить разницу уровней между самой глубокой впадиной и самой высокой вершиной.
Марианская впадина: –11034
Глубина Черного моря: –2210
Высота Эльбруса: 5642
Высота Эвереста: 8848

• Находится разница уровней между вершиной Эльбруса и глубиной Черного моря. 5642 – (–2210) = 7852
• Определяется разница уровней между самой глубокой впадиной и самой высокой вершиной. 8848 – (–11034) = 19882 (м).
Ответ. Разница уровней между самой глубокой впадиной и самой высокой вершиной составляет 19882 метра.

ТЕМА 3.6. Умножение и деление целых чисел

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.3.3 Умножает целые числа. 6-1.3.4 Делит целые числа.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Умножает целые числа. • Делит целые числа.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/10268* *https://video.edu.az/video/9623* Задание: *https://www.mathplayground.com/ASB_IntegerWarp.html* *https://www.explorematihindemand.com/multiplying-integers-games.html* *https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/fruit-splat-multiplication/*

Побуждение.
Учитель вызывает к доске двух учеников. Один из учеников стоит на определенном числе на числовой оси. Задание рекомендуется выполнять, нарисовав на полу числовую ось и передвигаясь по ней, либо изобразив ее на доске. 1-й ученик стоит в точке 0. 2-му ученику предлагается остановиться в той точке, которую он достигнет, отсчитав 2 раза по 2 единицы влево.

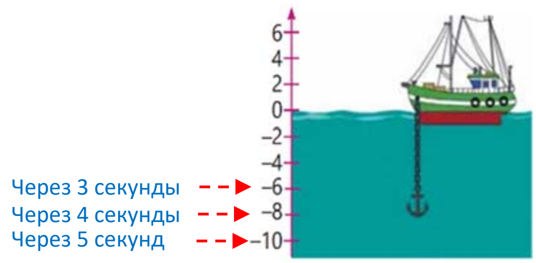


Ученикам задаются наводящие вопросы:
- Как путем повторного сложения определить точку, достигнутую 2-м учеником? Как найти повторное сложение путем умножения? Сколько раз второй ученик пройдет на 2 единицы влево мимо первого ученика, чтобы достичь точки -6? Как это написать с повторным вычитанием? Как найти ответ делением? Озвучиваются соответствующие каждому случаю ответы и организуется дискуссия.

В технически оснащенных классах можно использовать подобные интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/tjkyk2hj

Исследование-обсуждение

Ученики должны определить, на какой глубине относительно уровня моря находится якорь корабля через 3, 4 и 5 секунд после погружения в воду, а также через сколько секунд якорь окажется на глубине 10 м ниже уровня моря.



• Для определения глубины, на которую погружается якорь корабля через 3 секунды, учитель направляет внимание учеников на числовую ось.

• Ученики обсуждают, как с помощью деления целых чисел определить, через сколько секунд якорь будет находиться на глубине 10 м ниже уровня моря. Ученики вспоминают правило деления натуральных чисел, могут найти ответ с помощью многократного вычитания. Итак, $-10 : (-2) = 5$, то есть через 5 секунд якорь окажется на 10 м ниже уровня моря. Правильность ответов можно проверить, используя связь между умножением и делением.

Изучение **Умножение целых чисел с разными знаками**

Ученикам объясняется, что произведение положительного числа и отрицательного числа можно найти, сложив повторно отрицательное число. Пример задания обсуждается в классе.

С учениками обсуждается, как определяется правило умножения целых чисел с разными знаками, находя модуль и ставится знак перед ним. Отмечается, что произведение отрицательного числа на положительное число всегда отрицательно.

Перемножаются модули чисел. $\lvert -4\rvert \cdot \lvert 5\rvert = 4 \cdot 5 = 20$	➡	Ставится знак “–”. $-4 \cdot 5 = -20$

Запомни! Сообщается, что произведение произвольного числа на число -1 равно противоположному этому числу. Приводятся примеры, где одно число положительное, а другое — отрицательное.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы, интерактивные задания:
https://video.edu.az/video/9016
https://www.education.com/game/water-rafting-multiplying-integers/

К сведению учителя! Поскольку для нахождения произведения чисел с разными знаками используются разные методы, ученикам можно объяснить нахождение произведения двух отрицательных целых чисел на основе закономерности. По закономерности для каждого примера произведение получается на 2 единицы больше. Итак, если один из множителей является отрицательным числом, а другой множитель уменьшится, то произведение увеличится. С помощью этого правила можно объяснить, что произведение равно положительному числу, когда оба множителя являются отрицательными числами.

$3 \cdot (-2) = -6$
на 2 ед. больше
$2 \cdot (-2) = -4$
на 2 ед. больше
$1 \cdot (-2) = -2$
на 2 ед. больше
$0 \cdot (-2) = 0$
на 2 ед. больше
$-1 \cdot (-2) = 2$
на 2 ед. больше
$-2 \cdot (-2) = 4$

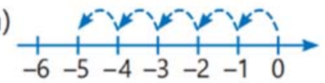
Задания

2. Ответы находятся путем умножения, несколько ответов проверяются повторным сложением.

в) $\underbrace{-8 + (-8) + (-8) + \ldots + (-8) + (-8)}_{12} = 12 \cdot (-8) = -96$

3. Примеры умножения записываются по изображениям, данным на числовой оси. Ответ проверяется повторным сложением.

а)



$-1 + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = 5 \cdot (-1) = -5$

b)

$(-3) + (-3) + (-3) = 3 \cdot (-3) = -9$

4.Какое из утверждений верно, объясняется на примерах.

а) Отмечается, что если один из двух множителей равен -1, то произведение равно числу, противоположному второму множителю. Для подтверждения этого утверждения приводятся примеры. $2 \cdot (-1) = -2$; $-3 \cdot (-1) = 3$. *Мнение верно.*

б) Если каждое из трех чисел одного знака является положительным числом, мнение верно, если отрицательное число, то мнение неверно.

$-2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$. *Мнение неверно.*

в) Если один из двух множителей равен 0, то произведение равно 0. На примере показано, что это мнение также верно. *Мнение верно.*

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/5661*

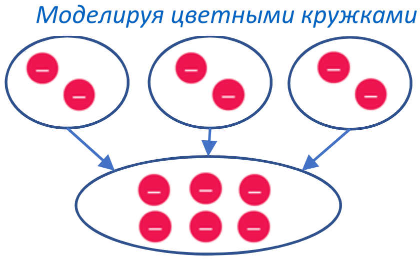
Изучение Умножение целых чисел с одинаковыми знаками

Отмечается, что произведение двух отрицательных чисел равно произведению модулей этих чисел. Приводятся примеры.

Запомни! Показывается и обобщается на примерах, что произведение двух чисел одного знака является положительным, а произведение чисел разных знаков – отрицательным числом.

К сведению учителя! Произведение двух отрицательных чисел можно объяснить ученикам по-разному:

Моделируя цветными кружками



По закономерности

$0 \cdot (-2) = 0$

на 2 ед. меньше

$1 \cdot (-2) = -2$

на 2 ед. меньше

$2 \cdot (-2) = -4$

на 2 ед. меньше

$3 \cdot (-2) = -6$

Ученикам можно дать несколько дополнительных заданий, связанных с поиском произведения с помощью цветных кружков. По закономерности нахождение произведения чисел с разными знаками будет использоваться и для нахождения произведения отрицательных чисел, поэтому целесообразно заранее проинформировать ученикам об этом методе.

Задания

7. Числа, соответствующие пустым клеткам, находятся устно, а ответ проверяется путем подстановки.

$\boxed{3} \cdot (-2) = -6$	$-8 \cdot \boxed{3} = -24$	$\boxed{-5} \cdot (-10) = 50$	$\boxed{-4} \cdot (-4) = 16$
$\boxed{-3} \cdot (-3) = 9$	$\boxed{3} \cdot (-20) = -60$	$-12 \cdot \boxed{0} = 0$	$-14 \cdot \boxed{2} = -28$

Внимание!

Отмечается, что свойства умножения справедливы и для целых чисел. Свойства, приведенные в таблице, анализируются с классом.

Подумай!

Объясняется на примерах то, как нечетное или четное число отрицательных множителей влияет на знак произведения.

9. Определяется, произведение положительное или отрицательное, без проведения расчетов.

$-2 \cdot (-6) = 12$

$-2 \cdot (-6) \cdot 5 = 60$

К сведению учителя! Чтобы определить знак произведения без выполнения вычислений, ученикам следует обратить внимание на знаки множителей. Если количество отрицательных множителей четное, то знак произведения положительный, а если количество отрицательных множителей нечетное, то знак произведения будет отрицательным. Ученикам можно предложить определить, верно ли утверждение, на простых примерах, выполнив вычисления. Используя это правило, ученики могут определить знак без вычислений при нахождении данного произведения.

10. Данные примеры вычисляются устно.

К сведению учителя! При устных вычислениях важно использовать свойства арифметических действий. Например, применяя свойства умножения, можно более эффективно решить пример, данный в задании 10. Таким образом, ученики экономят время, развивая навыки быстрого и устного счета. Целесообразно спросить у учеников, какими свойствами они воспользовались при вычислении.

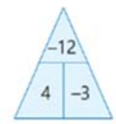
11. Значение выражения вычисляется по заданному значению переменной.

а) $2 \cdot (-3) = -6$ при $m = -3$.

д) $-4 \cdot (-12) = 48$ при $b = -12$.

Изучение Деление целых чисел

На основании свойств умножения и деления находится частное, полученное при делении целых чисел. Пример обсуждается с учениками. Основное внимание уделяется тому, как найти частное, основываясь на связи между умножением и делением.



Запомни!

Частное, полученное от деления двух чисел с одинаковым знаком, является положительным числом, а частное, полученное от деления чисел с разными знаками, является отрицательным числом. Данные утверждения обсуждаются с учениками на примерах.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы, интерактивные задания: *https://video.edu.az/video/10268*
https://www.education.com/game/water-rafting-multiplying-integers/

Внимание!

Отмечается, что свойства операции деления натуральных чисел справедливы и для целых чисел.

13. Решаются уравнения. Для решения уравнений учитель может повторить с учениками правила нахождения неизвестного множителя, делимого и делителя. Ученикам, у которых возникают трудности с нахождением неизвестного, рекомендуется сначала решить простые уравнения, включающие только натуральные числа. Ученики с хорошими навыками решения уравнений могут решать предложенные уравнения. При решении уравнений целесообразно выявлять ошибки и организовывать работу над ошибками.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель раздает ученикам рабочие листы. Если произведение или частное известно, ученики записывают любые два целых числа в пропуски. Изменяя число, данное в произведении или частном, ученикам можно дать задания, связанные с нахождением чисел, соответствующих пропускам, при условии, что числа, соответствующие пропускам, являются положительными или отрицательными.

___ × ___ = –6	___ : ___ = –2
___ × ___ = –6	___ : ___ = –2

Углубление. Учитель раздает ученикам рабочие листы. Ученики записывают в пропуски три произвольных целых числа. Изменяя число, данное в правой части равенства, ученикам можно дать задания, связанные с нахождением чисел, соответствующих пропускам, при условии, что числа, соответствующие пропускам, являются положительными или отрицательными.

___ × ___ × ___ = 3	___ : ___ : ___ = –5
___ : ___ × ___ = 3	___ × ___ : ___ = –5

Решение задач

14. В задаче требуется определить, какой будет температура воздуха через 3 часа и в котором часу температура воздуха достигнет -3 градуса Цельсия.

Решение задачи.

- Определяется, какой будет температура воздуха через 3 часа. $1 + 3 \cdot (-2) = -5$ (°С)
- Определяется в котором часу температура воздуха достигнет -3 °С. Ответ можно найти, составив таблицу.

Время	Полночь	Через 1 час	Через 2 часа
Температура	1 °C	$1 + 1 \cdot (-2) = -1$ (°C)	$1 + 2 \cdot (-2) = -3$ (°C)

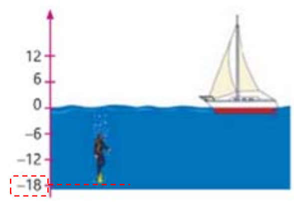
Ответ. Через 3 часа температура воздуха составит -5 °C, а через 2 часа температура воздуха будет -3 °C.

15. Требуется найти, с какой скоростью в метрах в минуту должен подниматься дайвер, чтобы достичь поверхности воды на 1 минуту быстрее.

Решение задачи.

- Определяется уровень дайвера от поверхности воды. $6 \cdot 3 = 18$ (м).

Дайвер находится на глубине 18 метров. Число, соответствующее этому уровню: -18.



Определяется, на сколько метров в минуту должен подняться дайвер, чтобы достичь уровня воды на 1 минуту раньше. $18 : (3 - 1) = 9$ (м).

Дайвер должен подниматься со скоростью 9 метров в минуту, чтобы достичь поверхности воды на 1 минуту раньше. Значит, его скорость должна составлять 9 м/мин.

Ответ. Дайвер должен подниматься со скоростью 9 м/мин, чтобы достичь поверхности воды на 1 минуту быстрее.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Умножает целые числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Делит целые числа.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 3.7. Действия над целыми числами

ПОДСТАНДАРТЫ	6-1.3.5. Находит степень целого числа. 6-1.3.6. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит степень целого числа. • Находит значение числового выражения.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.wikihow.com/Operate-a-Scientific-Calculator* Задание: *https://www.mathplayground.com/ASB_IntegerWarp.html* *https://www.exploremathindemand.com/multiplying-integers-games.html* *https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/fruit-splat-multiplication/*

Побуждение.

Учитель записывает на доске несколько примеров. Ученики приглашаются к доске по двое. Один из учеников решает 1-й пример, а другой – 2-й. Очередь переходит к другим ученикам. Подчеркивается, что в каждом столбце числа остаются неизменными, но меняется место операций.

3 + 1 – 5	–4 + –1 x 2	6 : –3 x 2	5 – –2 x 3
3 – 5 + 1	–4 x 2 + –1	6 x 2 : –3	5 x 3 – –2

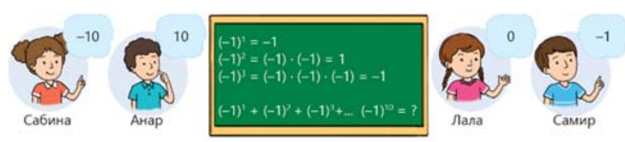
Учитель задает ученикам наводящие вопросы:

– Чем отличаются примеры, написанные в каждом столбце? Почему ответы на 1-й и 3-й примеры не изменились? Почему во 2-м и 4-м столбцах ответы оказались разными? Как это можно объяснить?

Ученикам можно дать разные примеры, меняя цифры. Числа следует выбирать таким образом, чтобы в результате деления получалось целое число.

Исследование-обсуждение

В задании детям задается решить пример, написанный на доске, и выяснить, какие из полученных ответов правильные, обосновать свое мнение и определить правильный ответ.



$(-1)^1 = -1$

$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Когда степень нечетная

Когда степень четная

В первых трех примерах определяется закономерность. По закономерности ученики могут отметить, что каждый следующий пример получается умножением предыдущего примера на -1, согласно чему произведение равно противоположному произведению из предыдущего примера. Внимание учеников можно направить на закономерности между степенью и ответом. Учитель может задать ученикам наводящие вопросы:

– В каком случае произведение было -1, в каком случае произведение было равно 1? Какая связь между степенью числа -1 и полученным ответом? Как согласно этой закономерности определить $(-1)^8$, $(-1)^9$ без расчета? Как найти полученную сумму -1 + 1 + ... + (-1) + 1, используя сумму противоположных чисел?

Чтобы привлечь внимание учеников к степени, можно выделять нечетные степени синим цветом, а четные — красным. Ученики могут записать соответствующие примеры на доске и определить, что мнение Лалы верно.

Изучение Степень целого числа

Как и в натуральных числах, также подчеркивается, что в целых числах произведение одинаковых множителей можно записывать кратко, указывая их степень, и приводятся примеры. Приводятся примеры, когда степень является отрицательным числом, а когда положительным.

При возведении отрицательного числа в степень основание степени записывается в скобках. Приводятся примеры. На основе примеров класс обсуждает, почему результатом является отрицательное число, когда степень является четным числом (и когда нет).

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ $\quad -5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$ $\quad (-5)^2 \neq -5^2$

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://www.mathnook.com/math/math-boxing-absolute-value.html

Задания

3. При заданных значениях a и n вычисляется значение выражения a^n.

4. Без проведения вычислений определяется, является ли значение выражения отрицательным или положительным числом.

6. Вычисляются данные выражения и сравниваются полученные результаты. В этом случае целесообразно обратить внимание учеников на то, является ли степень нечетным или четным числом и следует ли при расчете степени записывать в скобках отрицательное число. Рекомендуется выявить учеников, допускающих ошибки при решении подобных задач, и организовывать работу над ошибками.

7. Находятся ответы на вопросы.

а) Вычисляется 5-я степень наибольшего двузначного числа. $(-10)^5 = -100\,000$.

б) Вычисляется куб наибольшего четырехзначного отрицательного числа. $(-1000)^3 = -1000\,000\,000$.

в) Определяются 2 целых числа, произведение которых равно -5. Это числа -1 и 5 или -5 и 1. В обоих случаях показывается, что 4-я степень суммы равна одному и тому же числу.

$(-1 + 5)^4 = 4^4 = 256$. $\quad (-5 + 1)^4 = (-4)^4 = 256$.

Изучение Порядок действий

Напоминаются вычисления и правила, связанные с выражениями, входящими и не входящими в скобки. Подчеркивается, что в случае наличия модуля выражения вычисления проводятся в соответствии с порядком выполнения действий в скобках. Указывается, какое действие следует выполнить первым, если в числовом выражении присутствует модуль и степень в скобках.

Запомни! Внимание учеников обращается на последовательность вычисления значения выражений, содержащих скобки, модуль и степень.

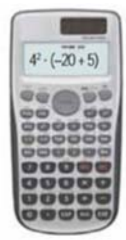
1 Сначала выполняются действия в скобках или модуле.
2 Возведение в степень
3 Умножение и деление (слева направо)
4 Сложение и вычитание (слева направо)

Обсуждается пример, с акцентом на последовательность действий.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://www.sheppardsoftware.com/math/integers/mixed-fruit-splat-game/#google_vignette
8. Значение выражения вычисляется. Одно из заданных утверждений можно выполнить вместе с учениками на доске, а остальные можно задать ученикам выполнить самостоятельно.
10. Скобки расставляются так, чтобы получилось верное равенство.

a) $2 \cdot ((-5) + (-3)) : 1 = -16$ b) $(60 : (-2)^2 + (-1)) \cdot 2 = 28$ c) $-5 - (5^2 : 5 - 7) = -3$

12. Записываются соответствующие числовые выражения и вычисляется их значение.
а) $(-2 + 5)^3 = 27$; б) $(-4)^3 : 8 = -64 : (-8) = 8$; в) $6 - (-8)^2 = 196$; г) $(2 + (-3))^7 = -1$.
К сведению учителя! Иногда ученики сталкиваются с определенными трудностями при решении примеров в несколько действий. Чаще всего это происходит при вычислении сложных выражений, в которых сначала используется сложение или вычитание, а затем умножение или деление. Важно выявить таких учеников и организовать работу над ошибками. Ученикам можно дать задание определить последовательность действий, указанную в примерах заданий в учебнике, а затем выполнить пример в этой последовательности.
13. Значение выражений вычисляется при заданных значениях переменной. Уделяется внимание на то, чтобы ученики правильно определяли последовательность действий.

Изучение Вычисления на научном калькуляторе



Отмечается, что научный калькулятор используется для выполнения более сложных вычислений. Ученикам сообщают о некоторых клавишах научного калькулятора. Объясняется, как данное задание образец решается с помощью калькулятора. В технически оснащенных классах целесообразно использовать научный калькулятор онлайн.

4 | x^y | 2 | * | (| – | 2 | 0 | + | 5 |) | =

14. Расчеты производятся с помощью научного калькулятора.
а) $180 - (-3)^2 - 16^2$

1 | 8 | 0 | : | (| – | 3 |) | x^y | 2 | – | (| – | 1 | 6 |) | x^y | 2 | =

К сведению учителя! В учебнике дана последовательность клавиш для решения примера. Ученики лучше поймут, как решить выражение с помощью калькулятора, если будут следовать этой последовательности, записывая каждое действие на калькуляторе. Ученикам можно сообщить, в какой форме вводится отрицательное число в калькулятор. Использование научного калькулятора необходимо для понимания разницы между вычитанием числа и вычитанием отрицательного числа.

Знак минус на калькуляторе → $\boxed{-}$
Вычитание на калькуляторе → (–)

$\boxed{-}$ | 5 | (–) | $\boxed{-}$ | 6 | =

В некоторых калькуляторах знак минус вводится клавишей +/-. Необходимо обратить внимание на правильность использования этих клавиш в выражениях как с отрицательным числом, так и с операцией вычитания.
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы, объясняющие вычисление некоторых выражений на научном калькуляторе:
https://youtu.be/Gp_pwaZQbGc
15. По значениям a и n проверяется, верно или нет равенство $(-a)^n = -a^n$.

а) $n = 2, a = -2$
$(-(-2))^2 = 4$
$-(-2)^2 = -4$
Неверно.

б) $n = 3, a = -2$
$(-(-2))^3 = 8$
$-(-2)^3 = 8$
Верно.

в) $n = 2, a = 2$
$(-2)^2 = 4$
$-2^2 = -4$
Неверно.

г) $n = 3, a = 2$
$(-2)^3 = -8$
$-2^3 = -8$
Верно.

Решение задач

16. Требуется узнать, какое число задумал Эльхан.
Решение задачи.
• Находится, квадрат какого числа равен 4. -2 и 2.
• На основании того, что при возведении числа в 3-ю степень получается число меньше его самого, определяется, что это число является числом -2. $-2^3 = -8$
Ответ. Эльхан задумал число -2.
Обсуждение. Проверяется, что квадрат числа -2 равен 4 и меньше его куба.

17. Требуется определить, какую ошибку допустила Сабина при расчете на калькуляторе.
Решение задачи.
• Так как Сабина при расчете на калькуляторе не записала в скобках число -5, то после вычисления 4-й степени 5 перед ней ставился знак "-".

(- 5) x^y 4 = $(-5)^4 = 625$

Ответ. Сабине должна была написать -5 в скобках при расчете на калькуляторе.
18. Чтобы найти координаты точек, данных в задаче, необходимо написать выражение и вычислить значение этого выражения.
Привлечение. Учитель вызывает к доске двух учеников. Один из учеников дает команды, а другой становится роботом, который их выполняет. 1-й ученик называет команды. Учитель сообщает 2-му ученику координату начальной точки, он выполняет эти команды, наступая на числовую ось, и озвучивает координату достигнутой точки.
Команды
1 шаг вперед, 3 шага назад
Повтори 2 раза: 1 шаг вперед, 4 шага назад и т.д.
Решение задачи.
• Определяется, что надо пройти из точки A на 2 единицы вперед, на 5 единиц назад и на 3 единицы назад.
2 – 5 = -3.
• Определяется, в какую точку придет робот в 1-й раз.

1 + 2 – 5 = -2 или 1 + (-3) = -2
2 единицы вперед, 5 единиц назад → 3 единицы назад

• При повторении одного и того же движения 3 раза записывается выражение для определения координаты точки, достигнутой роботом, и вычисляется ее значение. $1 + 3 \cdot (2 - 5) = -8$.
Ответ. Робот будет в точке с координатой -6.
К сведению учителя! Иногда ученикам трудно писать соответствующие выражения во время решения задач. Таким ученикам целесообразно дать задание сначала решить задачу по шагам, а затем написать выражение, объединив эти шаги. Таким образом, ученики могут развить способность писать выражения, соответствующие задачам.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит степень целого числа.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит значение числового выражения.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. С учениками повторяются понятия, данные в кратком изложении раздела в учебнике. Слова, изученные в разделе, учитель напоминает ученикам. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и показывают примеры.

Целое число, положительное число, отрицательное число, противоположные числа, числа с одинаковыми знаками, числа с разными знаками, абсолютное значение числа, модуль числа, натуральная степень, расстояние между двумя точками на оси координат.

Информация, представленная на первой странице раздела, и задание «Попытайтесь!» напоминают ученикам, почему используются отрицательные числа и где они встречаются. Решение исходной задачи обсуждается с классом.

Игра “Кто хочет стать миллионером”. Рядом со столом лицевой стороной вниз лежат небольшие листы с отмеченными задачами. Рекомендуется, чтобы задания охватывали навыки, рассматриваемые в разделе. Каждый ученик выбирает 1 задание и за его выполнение получает соответствующий балл. Каждый ученик выбирает 2 рабочих листа и отвечает на вопрос. Ученик, набравший наибольшее количество баллов, объявляется победителем. В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры на подобии игры «Кто хочет стать миллионером?». *https://www.quia.com/rr/41496.html*

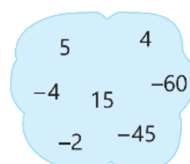
РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Определяются числа, соответствующие пустым клеткам.

$-2 \xrightarrow{\cdot(-5)} 10 \xrightarrow{:(-1)} -10 \xrightarrow{\cdot(-3)^2} -90 \xrightarrow{:3} -30 \xrightarrow{+(-8)} -38$

$-8 \xrightarrow{-(-1)^5} -7 \xrightarrow{\cdot(-2)} 14 \xrightarrow{+(-2)^3} -3 \xrightarrow{\cdot(-6)} -36 \xrightarrow{-2} -38$

4. Из заданных чисел выбираются два подходящих числа.



а) сумма была наибольшей. 5 и 15 → 5 + 15 = 20.
Прибавляется наибольшее число, чтобы сумма была наибольшей.
б) разность была наименьшей. -60 и 15 → -60 – 15 = -75.
Из наименьшего числа вычитают наибольшее, чтобы разность была наименьшей.
в) произведение было наименьшим. -60 и 15 → -60 · 15 = -900
Находится произведение наименьшего отрицательного и наибольшего положительного числа.
г) частное было наибольшим. -60 и –2. → *-60* : *(-2) = 30.*
Наименьшее отрицательное число делится на наибольшее отрицательное число.

К сведению учителя! В заданиях, аналогичных 4-му заданию, иногда у учеников возникают трудности с поиском нужных чисел. Таких учеников можно научить быстрее находить ответ, решая сначала выборочным методом, а затем обобщением.
Иногда ученики допускают ошибки при нахождении чисел, соответствующих случаю, когда произведение является наименьшим, а частное – наибольшим. Они думают, что чтобы произведение было наименьшим, множители должны быть наименьшими числами, а чтобы частное было наибольшим, делимое должен быть наибольшим, а делитель — наименьшим числом. Таким ученикам целесообразно дать задание обращать внимание на знак числа, направить их на поиск ответа по модулю числа. Например, чтобы произведение было наименьшим, можно взять числа с противоположным знаком, модули которых имеют наибольшее произведение, и попросить учеников написать перед ними знак минус.
Рекомендуется попросить учеников, которые нашли соответствующие числа, объяснить, как они нашли ответ, и организовать обсуждение с классом.

5. Определяются утверждения, справедливые для всех целых чисел.
а) Целые числа могут быть как отрицательными, так и положительными числами или нулем. *Мнение неверно.*
б) Произведение двух отрицательных целых чисел равно положительному числу. *Мнение верно.*

6. Решаются заданные уравнения.

К сведению учителя! Иногда ученикам полезно решать уравнения с натуральными числами и запоминать определенные правила, когда отрицательных чисел нет. Итак, ученики сталкиваются с определенными трудностями, когда видят отрицательные числа. Чтобы избежать этой трудности, можно сначала вспомнить правила, решить простые уравнения, а затем перейти к решению уравнений, данных в 6-м задании.

7. Присваивая переменной нулевое, положительное и отрицательное значения, неравенство проверяется для всех 3-х случаев. Определяется, в каком случае это верно, а в каком случае нет.

а) $-|d| > |d|$

$d = 0$; $-|0| > |0|$ *Неверно.*

$d = -1$; $-|-1| > |-1|$ *Неверно.*

$d = 1$; $-|1| > |1|$ *Неверно.*

г) $-|a| < |-a|$

$a = 0$; $-|0| < |0|$ *Верно.*

$a = -1$; $-|-1| < |-1|$ *Верно.*

$a = 1$; $-|1| < |1|$ *Верно.*

9. Сначала сравнение производится без вычислений, затем ответ проверяется вычислением.

К сведению учителя! Чтобы проводить сравнения без выполнения вычислений, ученикам необходимо знать некоторые свойства целых чисел. Ученики знакомы с правилами сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и нахождения абсолютного значения целых чисел. Целесообразно напомнить эти правила по соответствующим заданиям и определить знак данного выражения без вычислений, применяя их. Ответы также проверяются вычислением после сравнения без вычисления.

10. Числа, соответствующие пустым клеткам, находятся, используя связь умножения и деления. В это время ученики могут выразить свое мнение о том, когда используется умножение и когда деление, написать соответствующие примеры и записать число, найденное в соответствующей пустой клетке.

11. Находится среднее арифметическое данных чисел.

К сведению учителя! Иногда ученики думают, что они находят среднее арифметическое, разделив сумму чисел на два. Ученикам, допускающим подобные ошибки, целесообразно напомнить, что среднее арифметическое равно отношению суммы чисел к их числу.

12. На вопросы даются ответы. Подходящие примеры записываются.

а) Находится среднее арифметическое. -1 + (-3) + (-5) : 3 = -3.

б) Находится сумма четырех чисел. -5 · 4 = -20.

4-е число рассчитывается исходя из того, что известны три числа. -20 – (-4 + (-16) + (-35)) = 35.

13. Находят числа, соответствующие точкам, отмеченным на числовой оси. Вычисляется значения выражений.

$-10^2 + ab$

$a = 8$; $b = -14$

$-10^2 + 8 \cdot (-14) = -212$

14. Полученное на выходе число вычисляется применением алгоритма к заданным числам.

$a = 1$; $1 \geq -6$. Поскольку неравенство верно, шаги алгоритма продолжаются в правой части. $(-10^2 + |1|) : 3 = -11$.

$a = -4$; $-4 \leq -6$. Поскольку неравенство неверно, шаги алгоритма продолжаются в левой части. $(-2)^4 - (-4) \cdot 8 = 48$.

15. В задаче требуется найти количество очков, которые набрали Анар и Сабина в каждой попытке, кто в итоге победил и сколько очков набрал победитель.

Решение задачи.

• Результат Анара в каждой попытке можно найти, составив таблицу.

Полож.	Полож.	Полож.	Полож.	Отриц.	Отриц.	Итог
7	7	3	6	-3	-3	17
10	7	3	3	-3	-3	17
7	7	7	7	-3	-8	17

• Проводятся вычисления, чтобы определить в части с какими числами должны попасть две последние стрелы Сабины, чтобы она победила, если в первых 4 попытках Сабина попала в части с числами 7, -3, -3, -3.

7 + (-3) + (-3) + (-3) = -2; -2 + 10 + 10 = 18. 18 > 17.

Ответ. Если последние две стрелы Сабины попадут в части с числами 10 и 10, она выиграет.
16. В задании требуется определить, чье задуманное число наименьшее.
Решение задачи.

• Записывается и решается уравнение, чтобы определить число, которое задумала Айнур.
$x \cdot 2 + 15 = 3 \rightarrow x = -6$.
• Записывается и решается уравнение, чтобы определить число, которое задумал Самир.
$(y - 4) : 3 = -2 \rightarrow y = -2$.
• Числа, задуманные Айнур и Самиром, сравниваются. -3 < -2. Число, которое задумала Айнур, меньше.
• Определяется, на сколько единиц число, задуманное Айнур, меньше числа, задуманного Самиром.
-2 – (-3) = 1.
Ответ. Число, задуманное Айнур, на 1 единицу меньше числа, задуманного Самиром.
17. Решение задачи производится с помощью записи выражения. В задаче требуется определить разницу между уровнями Баку и Амстердама.
Решение задачи.

• Определяется число, обозначающее, на сколько метров ниже уровня моря расположен город Баку. -10 · 3 + 2 = -28.
Город Баку расположен на 28 м ниже уровня моря.
• Определяется, на сколько метров ниже уровня моря расположен Амстердам.
-28 : 14 = -2.
• Амстердам находится на 2 м ниже уровня моря.
• Определяется разница между уровнями Баку и Амстердама.
$|-28 - (-2)|$ = 26 (м).
Ответ. Разница между уровнями Баку и Амстердама равна 26 метрам.

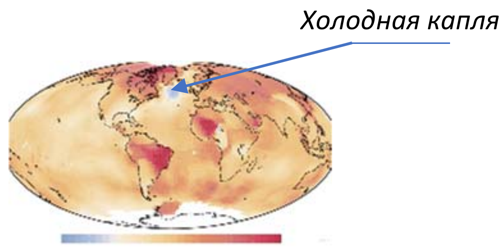
S.T.E.A.M. ***Экстремальные температуры и абсолютный ноль***

Ученикам даются общие сведения о экстремальных температурах и абсолютном нуле. Также даются общие сведения о экстремальных изменениях температуры на нашей планете в результате глобального потепления. Отмечается, что происходит глобальное потепление, когда экстремальные перепады температур поддерживают высокую среднюю температуру во всем мире, что приводит к повышению средней температуры в холодных регионах и таянию ледников. Однако в виде исключения ученикам сообщают, что температура снижается в районе под названием «Холодная капля» в Гренландии.

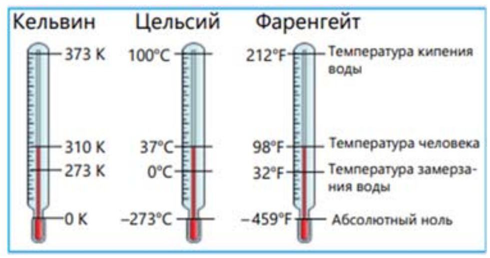
Ссылки можно использовать, чтобы предоставить ученикам дополнительную информацию о “Холодной капле”.

https://www.rte.ie/news/environment/2023/0601/1386813-climate-change-tourism/

https://youtu.be/9VeZT7-T4QU



В научных исследованиях подчеркивается, что по шкале Кельвина измеряются очень низкие температуры. Отмечается, что температура Кельвина называется абсолютным нулем и соответственно является нижним пределом температуры.



1. Согласно изображению записывается формула связи температуры по шкале Цельсия и шкалы Кельвина.

373 – 100 = 273; K – C = 273,

Здесь K означает Кельвин, C означает температуру, выраженную в °C.

2. Собираются общие сведения о так называемой зоне холодной капли и последствиях, которые может вызвать эта зона. Самая низкая температура в этой области указывается в Кельвинах. Информацию также можно получить, проведя исследование в интернете.

https://www.meteorologiaenred.com/az/cold-blob.html

3. Ученикам сообщается о нескольких участках Земли, где зафиксированы самые низкие и самые высокие температуры.

Информация о 10 самых холодных местах мира: *https://ikisahil.az/post/207892-dunyanin-en-soyuq-10-yerifoto*

Информация о 10 самых теплых местах мира: *https://operativmm.az/az/post/dunyanin-en-isti-yerleri-siyahi/3391*

Можно выбрать места, расположенные в первой тройке, и записать в таблицу температуры в этих регионах. Для расширения таблицы рекомендуется использовать информацию, представленную по указанным выше ссылкам.

Самые холодные места в мире		
Места	**Температура(°C)**	**Температура(K)**
Восток-Антарктида	-90	183
Станция Плато - Антарктида	-87	186
Оймякон-Россия	-72	201

Самые теплые места в мире		
Места	**Температура(°C)**	**Температура(K)**
Долина Смерти, Калифорния, США	47	320
Кебили, Тунис	55	328
Митриба, Кувейт	54	327

Рассчитывается разница между самой низкой и самой высокой температурой, и можно прибавить столбец с этой разницей по шкале Цельсия и Кельвина.

4. Учащимся поручается собрать информацию о температуре абсолютного нуля и телах, имеющих температуру, близкую к этому значению во Вселенной. Также предлагается подготовить презентацию на тему «Можно ли достичь абсолютный ноль температуры?» и провести исследование по этому вопросу.

4-й РАЗДЕЛ

Прямоугольная система координат

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	104	
Тема 4.1	Прямоугольная система координат	2	105	78
Тема 4.2	Расстояние в прямоугольной системе координат	3	109	81
Тема 4.3	Симметрия и перемещение в прямоугольной системе координат	3	113	83
	Обобщающий урок. STEAM. “Беспилотные автобусы”	2	117	87
	МСО-3	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**12**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики знакомятся со способами определения координат точки в прямоугольной системе координат, нахождения расстояния между двумя точками в прямоугольной системе координат, а также применения симметрии и перемещения в прямоугольной системе координат. С применением этих правил выполняются различные задания и решаются задачи.

На что стоит обратить внимание?

Некоторым ученикам не составляет труда определить координаты точки на координатной сетке и записать координаты данной точки. Однако при обозначении точки на оси координат по ее координатам ученики затрудняются правильно обозначить точку, так как ошибаются в расположении абсцисс и ординат.

Они считают, что не важно располагать числа по осям координат в системе координат, начиная с начала координат. Это приводит к неправильному расположению чисел и неправильному определению координат точек.

При определении координат точек, расположенных на координатных осях, затрудняются найти, какая координата равна нулю.

Целесообразно определить трудности, с которыми сталкиваются ученики, в координатных осях, организовать работу над ошибками.

Развитие математического языка

Правильное использование понятий *«начало координат», «оси координат», «пара координат», «ось абсцисс», «ось ординат», «декартова система координат», «расстояние», «четверть», «горизонтальная прямая», «вертикальная прямая», «симметрия», «перемещение»* позволяет определить уровень владения этими понятиями и правильно оценить полученные знания.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

“Начало координат», «оси координат», «пара координат», «ось абсцисс», «ось ординат», «декартова система координат», «четверть», «горизонтальная прямая», «вертикальная прямая».

Необходимые предварительные знания и навыки:

- Целые числа и действия над ними.
- Ось координат, расстояние по оси координат.
- Координатная сетка, зеркальное отражение, перемещение

Междисциплинарная интеграция

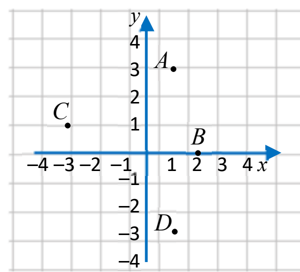
Для определения местоположения объектов при движении самолетов, кораблей, автомобилей используется система координат. Ученикам можно дать задание узнать и исследовать области применения координатной системы. Например, в географии — на картах, в спутниковой навигационной системе, в физике и астрономии — при определении положения небесных тел, в компьютерной графике — при расчёте движений и изменений в анимационных фильмах используется координатная система. Наличие симметрии в человеческом теле имеет большое значение при подготовке и проведении хирургических планов.

ТЕМА 4.1. Прямоугольная система координат

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.5.1. Объясняет прямоугольную систему координат и определяет координаты точки.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет координаты точки, заданной в прямоугольной системе координат. • Определяет местоположение точки, координаты которой заданы, в прямоугольной системе координат.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://www.mathsisfun.com/data/click-coordinate.html* *https://teacher.desmos.com/collection/5da898696bbf930b15993ff0* *https://mrnussbaum.com/stock-the-shelves-practice-online* *https://www.mathplayground.com/rescue_mission/index.html*

Обсуждение исходной задачи. Обсуждается задача, данная на первой странице раздела. Напоминается координатная сетка, координатные оси, координаты точки на координатной сетке. Ученики знакомятся с заданием «Попытайтесь!». Они пытаются выполнить задание, используя свои предыдущие знания. Учитель сообщает ученикам, у которых возникают затруднения, что они могут ответить на некоторые вопросы, основываясь на знаниях, полученных в ходе раздела, и что задание будет снова обсуждено в конце раздела.

Побуждение.



Рабочий лист с изображённой прямоугольной системой координат прикрепляется к доске. Учитель отмечает несколько точек в системе координат и задает вопросы ученикам:

– Каковы координаты данных точек? Как перейти от начала координат к каждой точке? У какой точки обе координаты положительны? Какая точка имеет отрицательную ординату?

Ученики находят координаты соответствующих точек и отвечают на вопросы, выполняя практическую деятельность.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания: *https://www.geogebra.org/m/z7adcdvr*

Исследование-обсуждение

Отмечается, что на рисунке дом Эльхана находится в начале координат.

• Определяется, что Эльхан доберется до школы, когда начнет двигаться от начала координат и переместится на 2 единицы вправо и на 3 единицы вверх.

• Отмечается, как Эльхан может пройти от дома до развлекательного центра, театра или магазина.

Дом — *3 единицы влево, 1 единица вверх* → Развлек. центр

Дом — *2 единицы вправо, 4 единицы вниз* → Театр

Дом — *4 единиц влево, 3 единицы вниз* → Магазин

Координатные оси продлеваются влево и вниз, записываются координаты этих мест.

Развлек. центр: (–3; 1)   Театр: (2; –4)   Магазин: (–4; –3)

В технически оснащенных классах можно использовать подобные интерактивные задания: *https://www.ck12.org/assessment/tools/geometry-tool/plix.html?eId=MAT.ALG.403.01&questionId=543c4ff08e0e081737d77453*

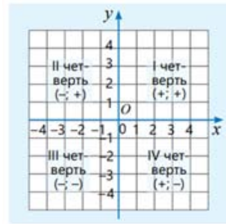
Изучение Прямоугольная система координат

Ученикам сообщается о расположении точки на плоскости, осях координат, проведенных перпендикулярно друг другу, начале координат и прямоугольной системе координат. Подчеркивается, что прямоугольную систему координат еще называют декартовой системой координат. Объясняются координатная плоскость и способ определения координат точки на этой плоскости.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры: *https://www.mathnook.com/math/quadrant-commander.html*

Запомни!

Подчеркивается, что оси координат делят систему координат на 4 части. Ученикам предоставляется информация о четвертях, знаках координат точек в этих четвертях.



Учитель может задавать ученикам наводящие вопросы:

– Каков знак координат точки, расположенной в I, II, III, IV четвертях? Как определить, в какой четверти находится данная точка? В какой четверти абсцисса положительная, а ордината отрицательная?

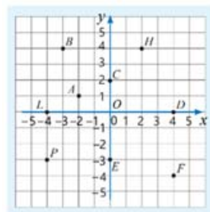
Даются ответы на вопросы и приводятся несколько примеров.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: https://video.edu.az/video/4139

Задания

1. Определяются координаты точек, изображенные в прямоугольной системе координат.

2. Находятся ответы на вопросы.



в) Определяется, какие точки расположены на оси ординат. E (0; –3), C (0; 2)

г) Отмечаются точки, расположенные во II четверти. A (–2; 1), B (–3; 4).

К сведению учителя! Иногда ученики испытывают трудности при решении заданий, где нужно изобразить точки или фигуры в прямоугольной системе координат.

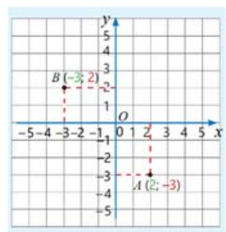
✓ Выбор единичного отрезка на одной оси координат при изображении системы координат

✓ Определение координат точек, отмеченных на осях координат.

✓ Определение, на какой оси координат расположена данная точка, когда одна из ее координат равна нулю

Целесообразно организовать работу в этом направлении с учениками, имеющими трудности в формировании подобных навыков.

Изучение Построение точки по координатам



Ученикам объясняется правило обозначения точки, координаты которой даны в системе координат. Приведенные примеры обсуждаются в классе. Отмечается, что 1-я координата указывает на абсциссу, а 2-я координата указывает на ординату.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры: https://mathsframe.co.uk/en/resources/resource/469/Coordinates-Alien-Attack

Подумай!

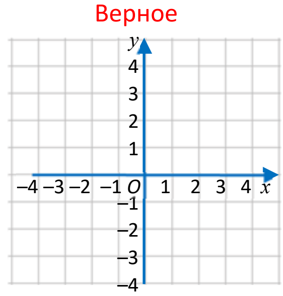
Показывая несколько точек, абсцисса которых равна 0, определяют, что эти точки расположены на оси ординат. По этому же правилу рекомендуется определять, что эти точки расположены на оси абсцисс, показывая несколько точек, ордината которых равна 0. Обобщая, отмечают, что точка, абсцисса которой равна 0, расположена на оси ординат, а точка, ордината которой равна нулю, расположена на оси абсцисс. В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: https://video.edu.az/video/4148

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики допускают ошибки при размещении чисел по осям координат в прямоугольной системе координат. Некоторые ученики считают, что не важно располагать числа, начиная с начала координат. Особенно часто допускается ошибки при размещении отрицательных чисел. Это приводит к неправильному расположению чисел и неправильному определению координат точек. Приводятся примеры наиболее частых ошибок, которые допускают ученики.

Ложное

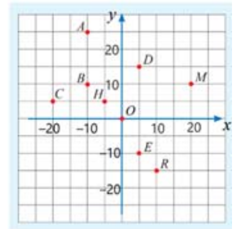
Ложное

Верное



Рабочий лист с прямоугольной системой координат можно скачать по этой ссылке: https://drive.google.com/file/d/1LoYm_wcoTT_2zoTzGnhCRuECsRqNxErt/view?usp=drive_link

4. Выполняются задания.

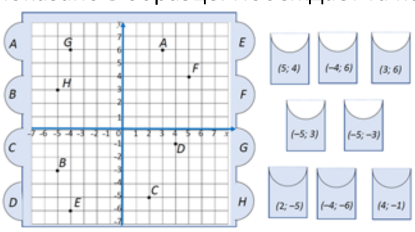


б) Полученное слово определяется путем записи точек, соответствующих заданным координатам.

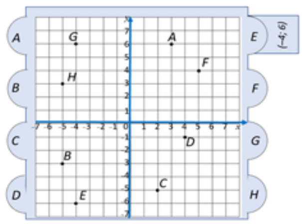
Р	О	М	Б
(10; –15)	(0; 0)	(20; 10)	(–10; 10)

в) Точки, расположенные на прямой, параллельной оси абсцисс:
C (–20; 5) и H (–5; 5), B (–10; 10) и M (20; 10), C (–20; 5) и H (–5; 5)
г) Точки, расположенные на прямой, параллельной оси ординат:
A (–10; 25) и B (–10; 10), D (5; 15) и E (5; –10).

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда при нахождении координат точки в прямоугольной системе координат ученики думают, что на 1-м месте написана ордината. При этом они неправильно отмечают расположение точки. Например, при размещении точки A (–2; 4) в прямоугольной системе координат четверть полученной точки также меняется при изменении абсцисс и ординат. Если абсцисса и ордината различны, этим методом можно объяснить ученикам, что они допустили ошибку.
Игра. Класс делится на несколько групп. На столе разложены карточки с координатами. Ученики определяют каждую точку на пазле, на котором изображена система координат, в соответствии с ее координатами и размещают карточки в соответствующей части, как показано в образце. Побеждает та команда, которая правильно и быстрее разложит все карточки.



Образец

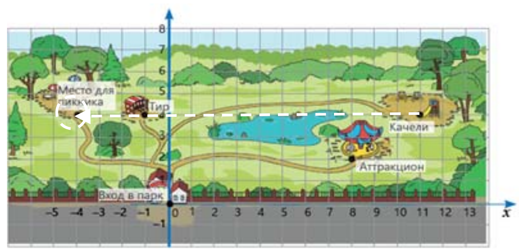


Образец рабочего листа можно скачать по этой ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1iX3Rx3EIBM8UQnQ1iwtHKgwg_05h9zo3/view?usp=sharing

Решение задач

9. Требуется определить, к какой точке придёт Ляля, если от входа в парк она прошла на 4 единицы вверх и на 11 единиц вправо, записать координаты этой точки и ответить на вопросы.

- Координаты входа в парк: (0; 0) Лала прошла 4 единицы вверх и 11 единиц вправо и достигла качелей.
- Когда Лала прошла 15 единиц влево от этой точки, она достигла места для пикника.



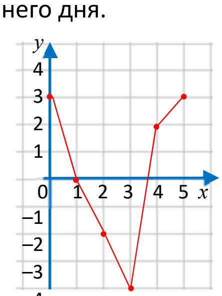
- Лала должна пройти 4 единицы по вертикали и 4 единицы по горизонтали, чтобы добраться до входа в парк.

10. В таблице дана информация о температуре воздуха в ночные часы одного зимнего дня.

- Линейная диаграмма чертится, отмечая координаты.

x (сколько прошло часов после полуночи)	0	1	2	3	4	5
y (температура воздуха, °C)	3	0	–2	–4	2	3

(0; 3) (1; 0) (2; –2)(3; –4) (4; 2) (5; 3)



• Объясняется значение координат точек, отмеченных на линейной диаграмме. Например, (0; 3) показывает, что в полночь температура воздуха была равна 3°C, а (1; 0) указывает, что через 1 час после полуночи температура воздуха стала 0°C.
• По диаграмме температура снижалась до 3 часов ночи, а затем начала повышаться.

Формативное оценивание.

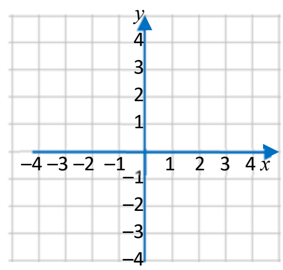
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет координаты точки, заданной в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет местоположение точки, координаты которой заданы, в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 4.2. Расстояние в прямоугольной системе координат

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.5.2. Объясняет понятие расстояния на координатной плоскости.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет расстояние между двумя точками, расположенными на горизонтальной прямой в прямоугольной системе координат. • Определяет расстояние между двумя точками, расположенными на вертикальной прямой в прямоугольной системе координат.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	*Задание: https://www.mathgames.com/skill/6.113-distance-between-two-points* *https://www.baamboozle.com/game/1039044* *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/59c5457c934ec11b65850907*

Побуждение.

К доске прикрепляется рабочий лист с прямоугольной системой координат. Несколько учеников вызываются к доске. Каждый ученик выбирает карточку и отмечает соответствующие точки.



A (4; 0) и B (–1 ; 0) | A (0; –2) B (0; 2) C (4; 0)

C (0; 3) и D (0; 5) | A (0; –1) B (0; 3) C (4; 0) D (8; 0)

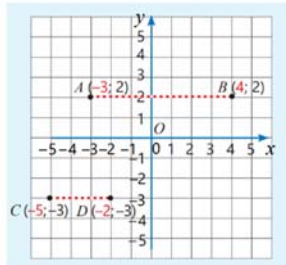
В зависимости от количества точек учитель задает ученикам вопросы:
– Как найти, сколько единиц составляет расстояние между двумя точками? Как найти это расстояние по координатам? Как вычислить площадь треугольника или прямоугольника по расстоянию между двумя точками?
Ученики отвечают на вопросы, выполняя практическую деятельность.
В технически оснащенных классах можно использовать подобные интерактивные задания:
https://www.mathnook.com/math2/find-area-and-perimeter.html

Исследование-обсуждение

Требуется найти, сколько единиц составляет расстояние между точками, отмеченными в прямоугольной системе координат. Внимание учеников направляется на прямоугольную систему координат. В прямоугольной системе координат определяются координаты точек, соответствующие положению заданных объектов.

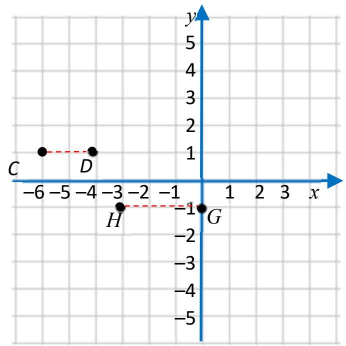
• Чтобы определить расстояние между музеем искусств и площадью Азнефть, ученики обращают внимание на количество единичных квадратов.
Учитель задает ученикам наводящие вопросы:
– В каком направлении можно пройти от музея искусств до площади Азнефть? Сколько единиц надо пройти в этом направлении, чтобы дойти до площади Азнефть?
По этому правилу определяется, сколько единиц составляют расстояния между объектами.
• расстояние между музеем искусств и парком Чемберекенд: 3 единицы
• расстояние между музеем искусств и площадью Азнефть: 4 единицы
• расстояние между национальным музеем ковра и площадью Азнефть: 4 единицы

Изучение Расстояние между точками на горизонтальной прямой



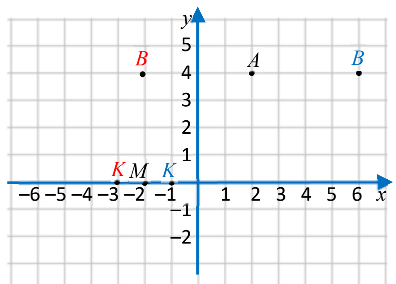
В прямоугольной системе координат отмечают, что ординаты точек, расположенных на прямой, параллельной оси абсцисс, равны.
До сведения учеников доводится, что эти точки расположены на горизонтальной прямой, и на примерах показано правило нахождения расстояния между точками, расположенными на горизонтальной прямой.
В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы:
https://video.edu.az/video/4522

Задания



1. Находится расстояние между точками, отмеченными на прямоугольной системе координат.
2. На прямоугольной системе координат отмечаются точки и находятся расстояние между ними.
б) Находится расстояние между точками G (0; -1) и H (-3; -1):
GH = |0 – (-3)| = 3
в) Находится расстояние между точками C (-6; 1) и D (-4; 1):
CD = |-6 – (-4) = 2

3. Чертится прямоугольная система координат, отмечаются заданные точки. По длине горизонтального отрезка определяются координаты, соответствующие пустым клеткам. Обращается внимание на то, сколько таких случаев возможно.



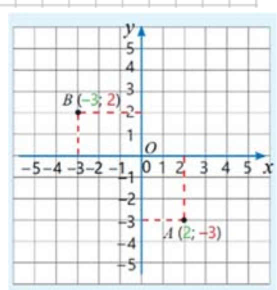
а) $AB = 4$

A (2; 4)	и	B ($\boxed{6}$; 4)
A (2; 4)	и	B ($\boxed{-2}$; 4)

б) $MK = 1$

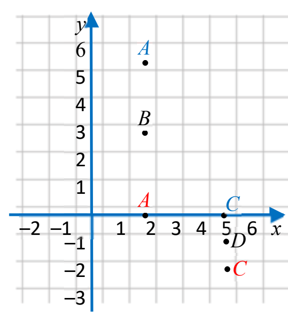
M (–2; 0)	и	K ($\boxed{-1}$; 0)
M (–2; 0)	и	K ($\boxed{-3}$; 0)

Изучение Расстояние между точками на вертикальной прямой



В прямоугольной системе координат отмечают, что абсциссы точек, расположенных на прямой, параллельной оси ординат, равны.
До сведения учеников доводится, что эти точки расположены на вертикальной прямой, и на примерах ученикам показывается принцип нахождения расстояния между точками, расположенными на вертикальной прямой.

6. Чертится прямоугольная система координат, отмечаются заданные точки. По длине вертикального отрезка определяется координата, соответствующая пустой клетке. Определяется, что возможны два таких случая.



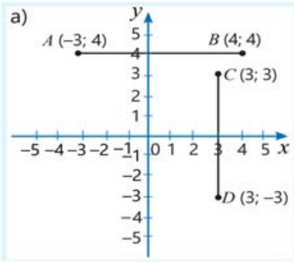
а) $AB = 3$

A (2; $\boxed{6}$)	и	B (2; 3)
A (2; $\boxed{0}$)	и	B (2; 3)

б) $CD = 1$

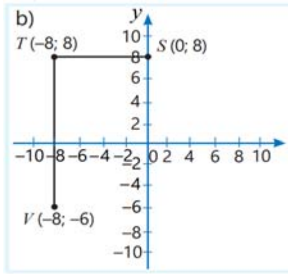
C (5; $\boxed{0}$)	и	D (5; –1)
C (5; $\boxed{-3}$)	и	D (5; –1)

8. Определяются длины данных отрезков.



$AB = |4 - (-3)| = 7$

$CD = |3 - (-3)| = 6$

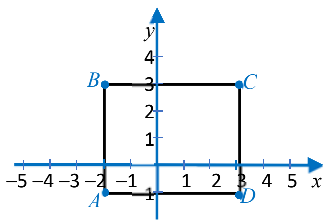


$TS = |0 - (-8)| = 8$

$TV = |8 - (-6)| = 14$

10. Рисуется прямоугольник с вершинами в заданных точках. Находится периметр и площадь прямоугольника.

a) $A\ (-2; -1)$ $B\ (-2; 3)$ $C\ (3; 3)$ $D\ (3; -1)$

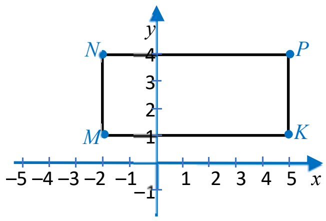


$AB = |3 - (-1)| = 4$

$BC = |3 - (-2)| = 5$

$P = 2 \cdot (5 + 4) = 18$

b) $M\ (-2; 1)$ $N\ (-2; 4)$ $P\ (5; 4)$ $K\ (5; 1)$



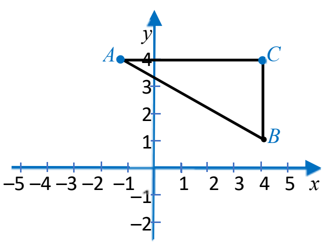
$MN = |4 - 1| = 3$

$NP = |5 - (-2)| = 7$

$P = 2 \cdot (3 + 7) = 20$

11. Рисуется треугольник, вершины которого лежат в заданных точках. Площади этих треугольников вычисляются.

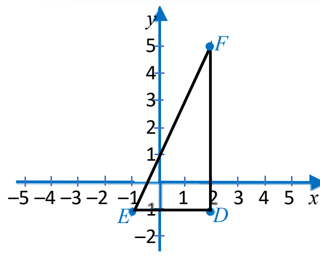
a) $A\ (-1; 4)$ $B\ (4; 1)$ $C\ (4; 4)$



$AC = |4 - (-1)| = 5$

$BC = |4 - 1| = 3$

b) $D\ (2; -1)$ $E\ (-1; -1)$ $F\ (2; 5)$

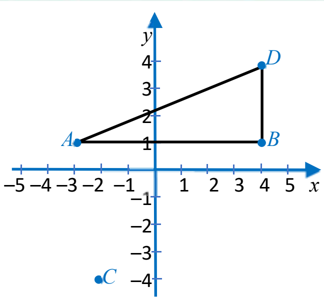


$ED = |2 - (-1)| = 3$

$DF = |5 - (-1)| = 6$

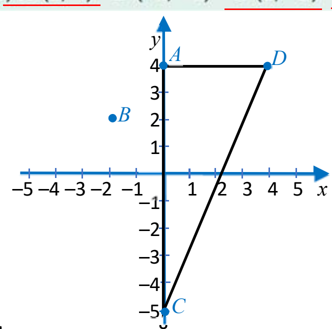
12. Данные точки отмечаются в системе координат. Определяется, какие три из этих точек, при соединении, образуют прямоугольный треугольник. Соединив эти точки, получается прямоугольный треугольник.

a) $A\ (-3; 1)$ $B\ (4; 1)$ $C\ (-2; -4)$ $D\ (4; 4)$



Прямоугольный треугольник получается соединением точек A, B и D.

b) $A\ (0; 4)$ $B\ (-2; -2)$ $C\ (0; -5)$ $D\ (-5; 4)$



Прямоугольный треугольник получается соединением точек A, C и D.

К сведению учителя! Ученики без труда находят расстояние между двумя точками, расположенными на горизонтальных и вертикальных прямых. В дальнейшем станет очевидно, возникают ли у учеников какие-либо затруднения в правильном усвоении этих навыков при нахождении расстояния между двумя произвольными точками. Ученикам можно предложить определить, расположены ли две точки на горизонтальной или вертикальной прямой, не изображая их в системе координат, и найти расстояние между этими точками. Рекомендуется, направить учеников, испытывающих трудности, найти ответ, используя прямоугольную систему координат.

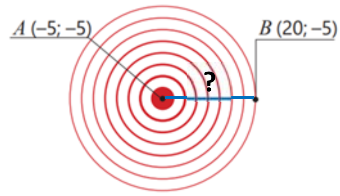
Дифференцированное обучение.

Поддержка. К доске вызывают двух учеников. Учитель сообщает ученикам координаты 2 точек. Ученикам необходимо определить, лежат ли эти точки на горизонтальной или вертикальной прямой, и найти расстояние между ними. Ученики отмечают точки в системе координат и находят расстояние между ними.

Углубление. К доске вызывают двух учеников. Ученикам дают задание назвать координаты двух точек, расположенных на горизонтальной или вертикальной прямой. Ученики отмечают точки в системе координат и находят расстояние между ними.

Решение задач

13. В задаче требуется найти радиус распространения землетрясения, если в системе координат 1 единица равна 20 км.



Решение задачи.

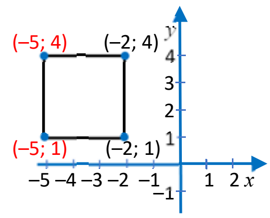
• Радиус рассчитывается путем соединения центра окружности и точки на окружности. Чтобы найти радиус, ученики определяют расстояние между точками A и B.

|20 – (-5)|=25

• Вычисляется радиус распространения землетрясения. 25 · 20 = 500 (км)

Ответ. Радиус распространения землетрясения составляет 500 км.

14. Айнур рисует квадрат, вершины которого расположены во 2-й четверти. Исходя из заданных условий требуется определить координаты других вершин этого квадрата и найти площадь и периметр квадрата.



Решение задачи.

• Точки (-2; 1) и (-2; 4) отмечаются в прямоугольной системе координат.

• Находится расстояние между этими двумя точками. |1 – 4|=3

• Остальные точки определяются исходя из того, что все точки расположены во второй четверти. (-5; 1) и (-5; 4)

• Рисуется квадрат. Вычисляется периметр полученного квадрата. 4 · 3 = 12

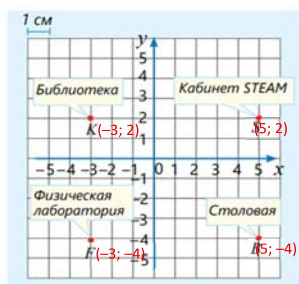
• Вычисляется площадь полученного квадрата. 3 · 3 = 9.

Ответ. Периметр полученного квадрата равен 12, а площадь равна 9.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы:

https://video.edu.az/video/1119

15. Расположение некоторых комнат на первом этаже школы изображается в прямоугольной системе координат. Отмечается, что расположение этих комнат изображено в прямоугольной системе координат масштаба 1 : 1000.



Решение задачи.

• Записываются координаты точек, соответствующих каждой комнате.

Библиотека: K (-3; 2) Кабинет STEAM: S (5; 2)

Физическая лаборатория: F (-3; -4) Столовая: B (5; -4)

• Вычисляется расстояние между библиотекой и кабинетом STEAM. Ответ находится по масштабу.

KS =|5 – (-3) |= 8 8 · 1000 = 8000 (см) = 80 (м).

• Вычисляется расстояние между физической лабораторией и столовой.

FB =|5 – (-3) |= 8 8 · 1000 = 8000 (см) = 80 (м).

• Вычисляется расстояние между физической лабораторией и библиотекой.

KF =|2 – (-4) |= 6 6 · 1000 = 6000 (см) = 60 (м).

• Определяется, на сколько расстояние между физической лабораторией и столовой больше, чем расстояние между лабораторией и библиотекой. 80 – 60 = 20 (м).

Ответ. Расстояние между физической лабораторией и столовой на 20 метров больше, чем расстояние между лабораторией и библиотекой.

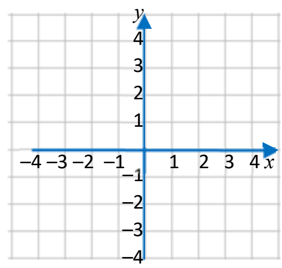
Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет расстояние между двумя точками, расположенными на горизонтальной прямой в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет расстояние между двумя точками, расположенными на вертикальной прямой в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 4.3. Симметрия и перемещение в прямоугольной системе координат

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.5.4. Применяет симметрию относительно координатных осей. 6-3.5.5. Применяет перемещение на координатной плоскости.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет симметрию относительно оси абсцисс в прямоугольной системе координат. • Определяет симметрию относительно оси ординат в прямоугольной системе координат. • Определяет перемещение в прямоугольной системе координат.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	*Задание:* *https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-interactive-middle-school-math-6-for-ccss/section/5.8/primary/lesson/symmetry-on-the-coordinate-plane-msm6-ccss/* *https://www.mathgames.com/skill/6.118-translations-graph-the-image* *https://www.geogebra.org/m/enevrbzt* *https://www.geogebra.org/m/nk2pu45p* *https://www.geogebra.org/m/vvc8vue3* *https://www.geogebra.org/m/chcm7bvx*

Побуждение. К доске крепится рабочий лист с прямоугольной системой координат. Каждой группе дается изображение модели корабля. Корабли должны двигаться согласно заданным условиям. На столе разложены карточки со стартовыми координатами кораблей. Ученики отмечают соответствующие координаты, выбирая карточки.



(0; 2)	(-1; 0)	(-4; -3)	(-3; 4)	(4; -3)
(3; 0)	(-2; 3)	(0; -4)	(-2; –2)	(-3; 1)

Учитель задает ученикам вопросы:

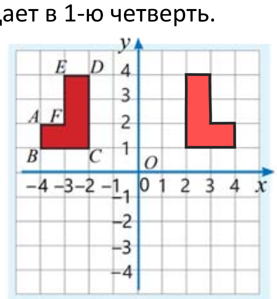
– Если переместить корабль на 1 единицу вправо, в какую точку он попадет? Если переместить корабль на 2 единицы вниз, в какую точку он попадет? Как должен двигаться корабль, чтобы попасть в начало координат? Как можно перейти в точку, симметричную относительно оси абсцисс, для точки, в которой находится корабль?

Ученики могут ответить на вопросы, выполняя задание визуально.

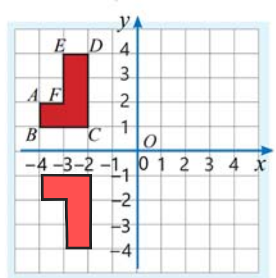
Исследование-обсуждение

В задании требуется определить, в какую четверть попадает зеркальное отражение фигуры, если Анар сложит лист по оси ординат или абсцисс, а также определить координаты вершин фигуры. Ученикам можно поручить нарисовать соответствующую систему координат и фигуру на бумаге в клетку.

• Фигура на рисунке сложена по оси ординат, определяется, что зеркальное отражение попадает в 1-ю четверть.



• Фигура на рисунке сложена по оси абсцисс, определяется, что зеркальное отражение попадает в 3-ю четверть.



Находятся координаты вершин каждой фигуры

Изучение Симметрия в прямоугольной системе координат

Ученикам объясняется способ определения симметричной точки относительно оси абсцисс (ординат) в координатной системе. Приводится несколько примеров.

Относительно оси абсцисс

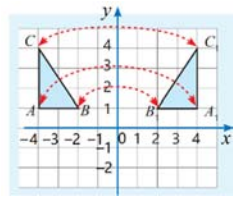
$A\ (-2;\ 3) \rightarrow A_1\ (-2;\ -3)$

Относительно оси ординат

$A\ (-2;\ 3) \rightarrow A_2\ (2;\ 3)$

Точно так же ученикам объясняется, как нарисовать симметричную фигуру относительно осей абсцисс и ординат. Образцы, представленные в учебнике, обсуждаются с учениками.

Запомни!



Фигура, полученная из симметрии относительно оси абсцисс и ординат, конгруэнтна предыдущему рисунку. Ученикам кратко напоминают о конгруэнтных фигурах. Два треугольника называются конгруэнтными, если их можно наложить точно друг на друга.

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/4179*

Подумай!

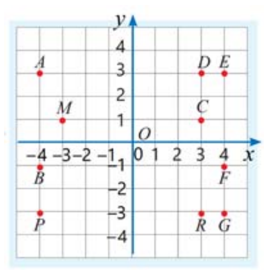
Ученикам задается вопрос, как можно обосновать равенство длин отрезков, симметричных относительно оси координат. Для этого ученики могут подчеркнуть, что данный отрезок имеет ту же длину, что и симметричный отрезок относительно оси координат. Отмечается, что согласно этому правилу, два отрезка одинаковой длины являются конгруэнтными.

Относительно оси абсцисс

Относительно оси ординат

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://www.interactive-maths.com/coordinate-battleship-all-four-quadrants-ggb.html

Задания



1. Даются ответы на вопросы и записываются координаты соответствующих точек.

а) точка симметричная точке A (-4; 3) относительно оси абсцисс: P (-4; -3)

б) точка симметричная точке E (4; 3) относительно оси ординат: A (-4; 3)

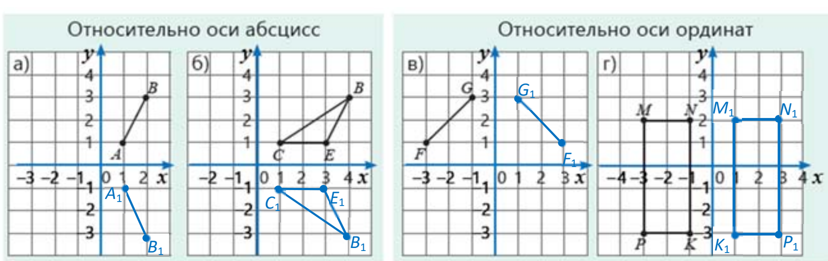
в) точки симметричные относительно оси абсцисс:

A (-4; 3) и P (-4; -3); D (3; 3) и R (3; -3); E (4; 3) и G (4; -3).

г) точки симметричные относительно оси ординат:

A (-4; 3) и E (4; 3); B (-4; 1) и R (4; -1); P (-4; -3) и G (4; -3).

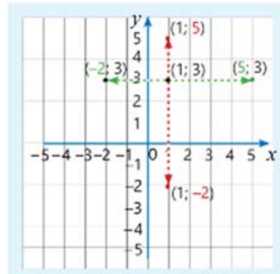
3. Рисуются фигуры, симметричные данным фигурам относительно отмеченной оси координат.



В технически оснащенных классах можно использовать подобные интерактивные задания:
https://www.matific.com/us/en-us/home/maths/episode/quick-on-the-draw-draw-reflections-of-shapes/?grade=grade-6

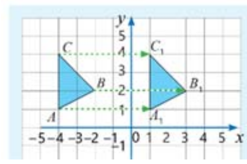
Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики неправильно определяют, какая координата остается постоянной, а какая изменяется при симметрии относительно оси абсцисс или ординат. Целесообразно предложить ученикам, допускающим подобные ошибки, выполнить симметричные преобразования, записав их в системе координат, и определить свои ошибки, сравнивая полученные результаты.

Изучение Перемещение в прямоугольной системе координат



В системе координат подчеркивается, что точка меняет абсциссу в результате перемещения по горизонтальной прямой, а ординату – в результате перемещения по вертикальной прямой. Ученикам объясняются образцы, представленные в учебнике. Ученикам объясняется, как можно построить фигуру, полученную в результате перемещения многоугольника в системе координат, по образцу, представленному в учебнике.

Запомни!

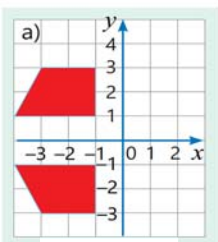


Отмечается, что фигура, полученная в результате перемещения, конгруэнтна исходной фигуре. Отмечается, что треугольники, изображенные на рисунке, конгруэнтны.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-interactive-middle-school-math-6-for-ccss/section/5.8/primary/lesson/symmetry-on-the-coordinate-plane-msm6-ccss/

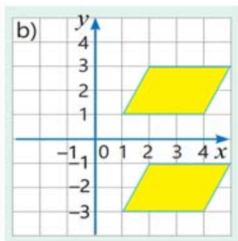
5. При изменении местоположения заданных точек координаты полученных точек записываются и отмечаются в системе координат.

а) на 2 единицы влево	B (1; -2) → B_1 (-1; -2)	C (3; 5) → C_1 (1; 5)	D (-2; -6) → D_1 (-4; -6)
в) на 1 единицу вверх	B (1; -2) → B_1 (1; -1)	C (3; 5) → C_1 (3; 6)	D (-2; -6) → D_1 (-2; -5)

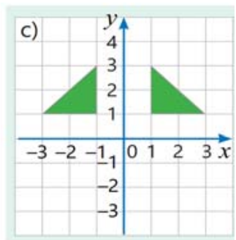
6. Определяется, как одна фигура получается из другой.



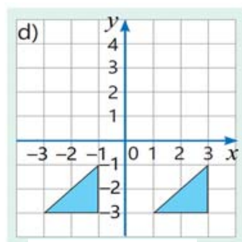
симметрия



перемещение



симметрия



перемещение

В технически оснащенных классах можно использовать подобные интерактивные задания:
https://www.matific.com/us/en-us/home/maths/episode/quick-on-the-draw-draw-translations-of-shapes/?grade=grade-6

7. При изменении положения данной фигуры в системе координат рисуется полученная фигура. Записываются координаты точек, полученных в результате перемещения этой фигуры. С классом обсуждается решение и объяснение примера. Затем выполняются другие задания.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики неправильно определяют, какая координата остается постоянной, а какая изменяется в результате горизонтального или вертикального перемещения. Целесообразно направить учеников, допускающих подобные ошибки, на выполнение задания, отметив в системе координат фигуру, полученную в результате горизонтального или вертикального смещения.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. К доске вызывают двух учеников. Учитель сообщает ученикам координаты точки, а также точки, симметричные относительно осей координат, и дает 2-му ученику задание отметить точки, полученные в результате перемещения. Затем ученики меняются местами и проверяют ответы друг друга.

Углубление. К доске вызывают двух учеников. Один из учеников называет координаты точки и задает другому вопрос о движении по оси координат. Затем очередь переходит к другому ученику. Каждому ученику необходимо обосновать свой ответ, отметить соответствующие точки в системе координат.

Решение задач

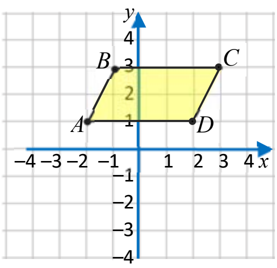
8. Одна из вершин попала в точку (–2; –1) при изменении Лалой положения параллелограмма, описанного в прямоугольной системе координат, в вертикальном направлении. В задаче требуется выяснить, в каком направлении Лала меняет положение фигуры, нарисовать полученную фигуру в системе координат и записать ее в координатах других вершин.

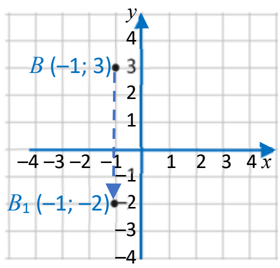
Решение задачи.

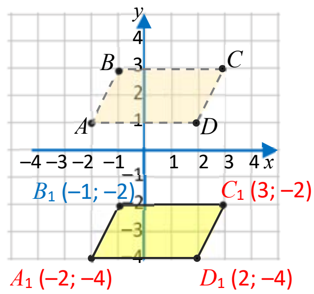
При изменении положения фигуры в вертикальном направлении ее абсцисса не меняется. Значит, абсцисса одной из вершин фигуры будет равна -1. Соответствующая точка определяется как B (-1; 3).

• Фигура переместилась вниз

• При перемещении положения фигуры вниз на 5 единиц по вертикали соответствующая вершина перемещается в точку (-1; -2). Фигура, полученная в результате перемещения, рисуется в системе координат, записываются координаты остальных вершин.

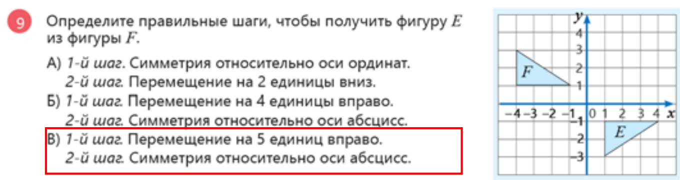






9. Определяются правильные шаги для получения фигуру E из фигуры F. Ученикам предлагается выполнить каждый из предложенных пунктов для выполнения задания.

Ответ. Сместив на 5 единицы вправо фигуру F, можно получить фигуру E, симметричную относительно оси абсцисс.



К сведению учителя! Ученики могут получить фигуру E из фигуры F разными способами. Учитель может задавать ученику наводящие вопросы. Как можно получить фигуру E, используя сначала симметрию? В результате скольких перемещений с наименьшим числом шагов получается фигура E? На основании ответов учеников отмечается, что подходящая фигура получается не менее чем за 2 шага.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет симметрию относительно оси абсцисс в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет симметрию относительно оси ординат в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет перемещение в прямоугольной системе координат.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

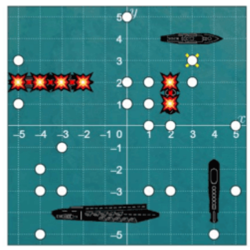
Побуждение. С учениками повторяются понятия, данные в заключении раздела в учебнике. Учитель напоминает ученикам слова, изученные в разделе. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

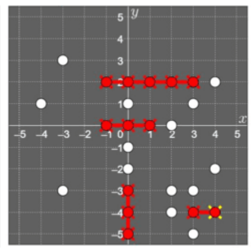
Начало координат, оси координат, пара координат, ось абсцисс (ось x), ось ординат (ось y), декартова система координат, четверть, расстояние между двумя точками, горизонтальная прямая, вертикальная прямая

Информация, приведенная на первой странице раздела, и задание «Попытайтесь!» напоминают ученикам, почему используется система координат и где она находится. Решение исходной задачи обсуждается с классом.

Игра “Морской бой”.

Принадлежности: Бумага в клетку с двумя «полями боя» размером 10 х 10, нарисованными для каждого игрока.





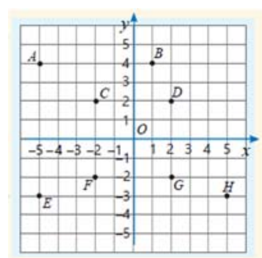
Правила игры:

1. Игроки размещают свои «корабли» на поле «Мой флот», не показывая друг другу. Целесообразно показать ученикам пример.
2. Сначала 1-й игрок «стреляет», называя координаты (например: В4) и отмечая в поле с надписью «Флот противника». Когда выстрел попадает во вражеский корабль, это отмечается перечеркнутыми диагональными линиями, а если не попадает — точкой. 2-й игрок в зависимости от того, попал ли снаряд в цель, отвечает одним из слов: "промахнулся", "поврежден" или "потоплен". Если огонь не поразил корабль противника, ход переходит к другому игроку.
3. Побеждает игрок, полностью «уничтоживший» флот противника.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://www.geogebra.org/m/YgnVY9K8 *https://www.geogebra.org/m/ud9bxr3q*

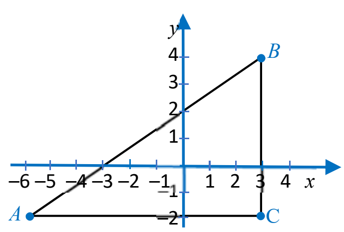
РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

2. По заданным точкам определяются те, которые удовлетворяют условию, и записываются координаты этих точек.



а) Точки, симметричные относительно оси абсцисс:
C (-2; 2) и F (-2; -2), D (2; 2) и G (2; -2)
Точки, симметричные относительно оси ординат:
C (-2;2) и D (2; 2), F (-2; -2) и G (2; -2)
б) Точки, расположенные в 3-й четверти: E (-5; -3) и F (-2; -2).
в) Если точку А переместить на 3 единицы вправо и на 2 единицы вниз, координаты полученной точки будут (-2; 2). Это координаты точки С.
г) Точки, абсциссы которых положительны: B (1; 4) D (2; 2) G (2; -2) H (5; -3).
д) Расстояние между точками С и D и F и G, расположенными на горизонтальной прямой, равно.
CD = |2 – (-2) | = 4; FG = |2 – (-2) | = 4
 Таким же образом равны расстояния между точками С и F и D и G, расположенными на вертикальной прямой. CF = |2 – (-2) | = 4; DG = |2 – (-2) | = 4

4. Рисуется треугольник с вершинами в заданных точках системы координат. Находятся стороны этого треугольника и точки пересечения сторон с координатными осями.

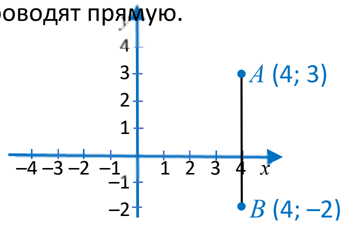


а) A (–6; –2) B (3; 4) C (3; –2)
точки, пересекающие ось абсцисс: (-3; 0) и (3; 0)
точки, пересекающие ось ординат: (0; -2) и (0; 2)

5. Определяются верные утверждения. Объясняется примерами.
а) Ординаты точек, расположенных в 1-й и 2-й четвертях, положительны. *Мнение верно.*
б) Абсциссы точек, расположенных во 2-й и 3-й четвертях, отрицательны. *Мнение верно.*
в) Точки, симметричные расположенным в 3-й четверти точкам, расположены в 1-й четверти. *Мнение неверно.*
Для каждого пункта показывается пример.

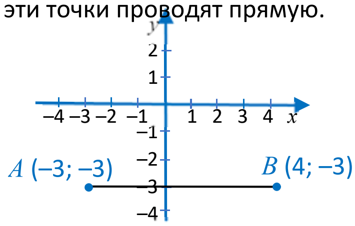
6. Соответствующие точки отмечаются в прямоугольной системе координат и даются ответы на вопросы.

а) Отмечают две точки с абсциссой 4, расположенные в разных четвертях, и через эти точки проводят прямую.



Прямая, проходящая через эти точки, параллельна оси ординат.

б) Отмечают две точки с ординатой -3, расположенные в одних и тех же четвертях, и через эти точки проводят прямую.

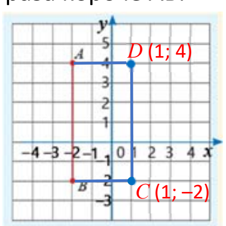


Прямая, проходящая через эти точки, перпендикулярна оси ординат.

К сведению учителя! Для 5-го и 6-го заданий ученики могут привести различные примеры. Целесообразно предложить ученикам выполнить задания в парах, проверить, чтобы ответ был одинаковым для каждого из приведенных примеров.

7. По условию фигура дополняется до двух прямоугольников, записываются координаты двух других вершин прямоугольника, находятся периметр и площадь этого прямоугольника.

а) другая сторона прямоугольника в 2 раза короче AB.



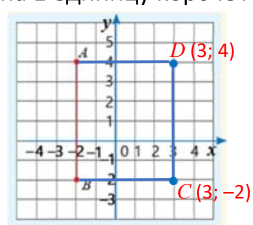
$AB = |4 - (-2)| = 6$

$AD = 6 : 2 = 3$

$P = 2 \cdot (6 + 3) = 18$

$S = 3 \cdot 6 = 18$

б) другая сторона прямоугольника на 1 единицу короче AB.



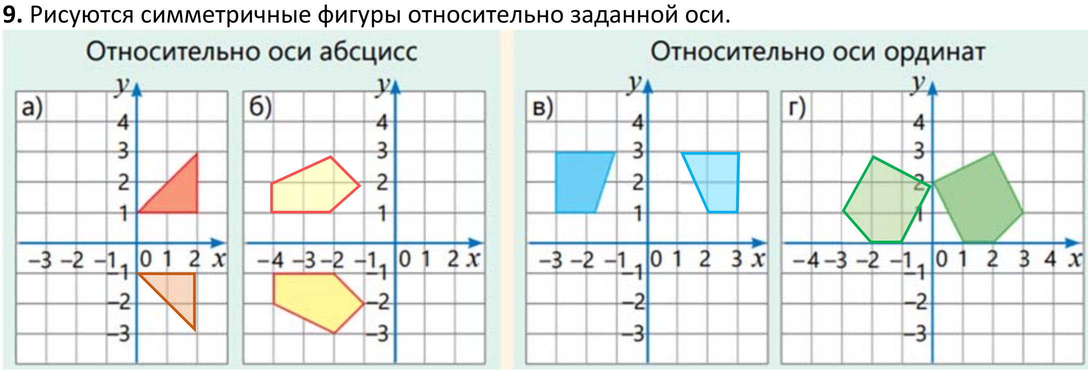
$AB = |4 - (-2)| = 6$

$AD = 6 - 1 = 5$

$P = 2 \cdot (6 + 5) = 22$

$S = 5 \cdot 6 = 30$

9. Рисуются симметричные фигуры относительно заданной оси.

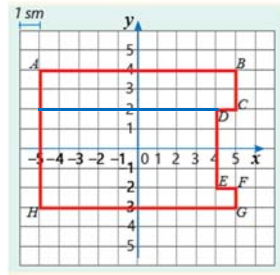


Координаты вершин обеих фигур записываются.

10. Рисуются фигуры, полученные в результате перемещения.

Определяется координаты вершин обеих фигур.

11. План одноэтажной библиотеки в системе координат приведен в масштабе 1:2000.



• Точки, симметричные относительно оси абсцисс:
C (5; 2) и F (5; -2), D (4; 2) и E (4; -2)
Точки, симметричные относительно оси ординат:
A (-5; 4) и B (5; 4), H (-5; -3) и G (5; -3)

• Определяется, сколько метров составляет расстояние от точки D до стены AH. В прямоугольной системе координат из точки G проводят перпендикуляр к стене AH и определяют его длину.

9 · 2000 = 18000 (см) = 180 (м)

S.T.E.A.M. ***Беспилотные автобусы***

Ученикам сообщается, что беспилотные автобусы впервые были введены в эксплуатацию в Шотландии с мая 2023 года. Подчеркивается, что для регулирования работы современных технологий беспилотного вождения используются специальные языки программирования. Ученики уже в средней школе изучают различные языки программирования на уроках цифровых навыков. Одним из таких языков программирования является язык программирования *Scratch*. На языке программирования *Scratch* ученики могут программировать путь, по которому нужно провести определенную линию.

Данные задания выполняются.

1. Проводится исследование, какие языки программирования используются для управления движением беспилотных автобусов, а также как работают навигационные системы, такие как GPS и Galileo. Ученикам можно предоставить различные ссылки для более точного проведения этого исследования. Языки программирования, используемые для беспилотных автобусов, зависят от специфических требований и технологий, например: *C++, Python, Java* и т.д. Целесообразно информировать учеников о том, что в старших классах они будут знакомиться с языком программирования Python.

2. Собирается информация о странах, где используются беспилотные автобусы. Ученикам сообщается, что такие автобусы используются в Китае, Сингапуре, Швеции, Японии, США, Германии и др. странах. Ученики могут исследовать, в каких странах и когда проводились испытания беспилотных автобусов, а также с какого времени они были введены в эксплуатацию. Ученикам также сообщается, что это лишь несколько примеров. Развитие беспилотных автобусов является глобальным явлением, и многие страны исследуют свои возможности для повышения эффективности, безопасности и устойчивости транспорта. С учетом этого, статус автономных автомобильных проектов быстро меняется, и после последних обновлений могут быть достижения и в других странах.

3. Разрабатывается проект движения таких автобусов по определенному маршруту в городе Баку. Несколько примеров можно подготовить и показать ученикам.

4. С помощью языка программирования *Scratch* программируется маршрут беспилотных автобусов. Приведенный пример обсуждается с учениками. Указанный маршрут сначала рисуется в тетради, а затем в программе *Scratch*. Для этого можно воспользоваться ссылкой, представленной в учебнике. Для загрузки кода движения рекомендуется использовать указанную ссылку. *https://scratch.mit.edu/ https://scratch.mit.edu/projects/886664550*

Используя готовые коды, можно внести определенные изменения в маршрут беспилотного автобуса и подготовить разные примеры маршрутов.

5-й РАЗДЕЛ Множества и операции над ними

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	6	
Тема 5.1	Множество	2	7	3
Тема 5.2	Операции над множествами	3	11	6
Тема 5.3	Решение задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна	3	16	9
	Обобщающий урок. STEAM. “Поисковые системы”	2	22	12
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**11**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики изучат понятия множества, элемента множества, пустого множества, подмножества, способов задания множества, объединения, пересечения и разности множеств. Также с помощью диаграммы Эйлера-Венна они приобретут навыки решения задач, связанных с множествами.

На что стоит обратить внимание?

В младших классах ученики выполняют задания на выбор и группировку, умеют группировать геометрические фигуры по различным их признакам – цвету, форме, размеру. Они также могут выполнять задания, связанные с определением, к какой группе принадлежит определенная фигура. Понятие множества является одним из основных понятий математики и связано с группировкой и классификацией. Для множеств существуют специальные обозначения (пустое множество, подмножество, принадлежит, не принадлежит, объединение, пересечение, разность и т.д.) Основное внимание следует уделить не на запоминание этих знаков, а развитию у учеников навыков выполнять заданий, основанных на деятельности связи и представления.

Выполнение заданий, связанных с объединением, пересечением и разностью множеств, развивает у ученика не только логическое мышление, но и навыки решения задач с помощью построения диаграммы, исследования и представления информации.

Следует учитывать, что у учеников могут быть ложные представления, сформированные ранее. Например, некоторые ученики думают, что:

- элемент не может образовывать множество;
- элемент одного множества не может быть элементом другого множества;
- повторяющиеся элементы считаются разными;
- два множества с одинаковым количеством элементов равны.

Также некоторые ученики испытывают затруднения и допускают ошибки, особенно при определении разности множеств. С такими учениками целесообразно организовать работу над ошибками.

Развитие математического языка

Правильное определение таких понятий, как «множество», «элемент множества», «подмножество», «равные множества», «пустое множество», «принадлежит», «не принадлежит», «диаграмма Эйлера-Венна», «объединение множеств», «пересечение множеств», «разность множеств» позволяет определить уровень усвоения этих понятий и правильно оценить полученные знания.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Множество, элемент множества, принадлежит, не принадлежит, пустое множество, конечное множество, бесконечное множество, подмножество, равные множества, объединение множеств, пересечение множеств, разность множеств, дополнение множества, диаграмма Эйлера-Венна и т.д.

Необходимые предварительные знания и навыки:

- Делители и кратные числа
- Процент, отношение, пропорция
- Представление закономерностей
- Действия над целыми числами

Междисциплинарная интеграция

Во многих ситуациях, встречающихся в повседневной жизни, широко используется понятие большинства. Натуральные числа, целые числа являются элементами бесконечного множества. Ученики будут применять то, что они изучают в этом разделе, при выполнении различных классификаций на уроках дисциплины Природа.

ТЕМА 5.1. Множество

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.4.1. Объясняет понятие множества.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Понимает и представляет понятие множества как совокупность объектов. • Определяет пустое множество как множество, не имеющее элементов. • Показывает примеры конечных и бесконечных множеств. • Объясняет формы задания множеств. • Записывает множество, равное данному множеству. • Объясняет понятие подмножества, записывает подмножества данного множества.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://youtu.be/l3-A0O42Lyo* *https://youtu.be/BydchiZ8t6o* *https://youtu.be/l3-A0O42Lyo* *https://youtu.be/LumU80IN748* *https://youtu.be/BydchiZ8t6o* *https://youtu.be/DfFBEnwmx80* *https://youtu.be/_9Wvu-R04go* *https://youtu.be/BhFgcf0VSYc* *https://youtu.be/KoS1y8xridY* Задание: *http://www.shodor.org/interactivate/activities/ShapeSorter/*

Побуждение.

Приводит примеры множеств из реальной жизни. Например, множество парт или множество стульев в классе. Что можно сказать о количестве элементов, входящих в множество?

Ответ учеников может быть следующим: множество парт в классе состоит из конечного числа элементов.

Учитель обращается к классу с вопросом: А что можно сказать о количестве элементов множества натуральных чисел?

Исследование-обсуждение

Ученики понимают, что живые существа, изображенные на рисунке сгруппированы по признакам того, что они являются водными животными.

• Ученики добавляют в эту группу разные живые существа. Например, рыба хек и т.д.

Учитель задает вопрос: имеются ли живые существа, не относящиеся к данной группе?

• Ученики перечисляют различные живые существа, не принадлежащих к этой группе.

Изучение Множество

Сообщается, что под понятием множества в математике понимают совокупность объектов, обладающих определенным свойством. Приводятся примеры из реальной жизни. Отмечается, что множества обозначаются заглавной буквой, в частном случае множество натуральных чисел обозначается буквой N, а множество целых чисел — буквой Z. Объясняется понятие элемента множества. На доске записываются символы «принадлежит» ($\in$), «не принадлежит» ($\notin$).

Число 5 принадлежит множеству натуральных чисел:	$5 \in N$
Число –5 не принадлежит множеству натуральных чисел:	$-5 \notin N$

Подчеркивается, что множество может иметь только один элемент. Множество без каких-либо элементов называется пустым множеством. Объясняются понятия конечного и бесконечного множества и приводятся примеры каждого из них.

Подумай!

С учениками обсуждается вопрос о том, можно ли назвать **пустым множество**, у которого элемент только число 0. Ученики приходят к выводу, что это множество не пусто, поскольку у него есть один элемент. Рекомендуется привести разные примеры пустого множества. Относительно пустого множества можно предоставить интересную информацию о сочинении для фортепиано американского композитора Джона Кейджа. В этой композиции музыкант в течение 4 минут и 33 секунд, или 273 секунд (при температуре примерно −273 °С прекращается всякое молекулярное движение), спокойно сидит без какого-либо музыкального звука.

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/BhFgcf0VSYc*

Задания

3. Определяет, принадлежит ли элемент данному множеству, и показывает верные записи.
4. Сначала находятся делители числа 36. Затем определяются верные записи о том, что входит ли данное число в множество делителей числа 36.
5. Принадлежность данного числа к множеству натуральных чисел или множеству целых чисел записывается с помощью соответствующего знака. Например, $23 \in N$, $0{,}2 \notin N$.

К сведению учителя! Иногда ученики забывают, что каждое натуральное число также является целым числом, или думают, что такие числа, как 3,5, являются целыми числами. Если ученики затрудняются ответить на подобные вопросы, целесообразно обсудить с ними, как было выбрано подходящее выражение. Это важно, чтобы избежать подобных ошибок в будущем.

Изучение Способы задания множеств

Конечное множество, особенно когда число его элементов невелико, удобно задавать путем перечисления его элементов, другими словами, списком. Например, множество однозначных простых чисел: {2, 3, 5,7}. Если число его элементов велико или бесконечно, при записи множества с помощью фигурных скобок отмечается, что используются три точки, и приводятся примеры. Например, множество двузначных чисел: {10, 11, 12, ..., 99}, множество натуральных чисел больше 100: {101, 102, 103, ...}.
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/LumU80IN748*

Запомни! Подчеркивается, что каждый элемент множества указывается только один раз. Отмечается, что элементы можно записывать в произвольном порядке, а множества, составленные из одинаковых элементов, называются **равными множествами**.
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/UClsMpLG_mg*
6. Определяются числа, соответствующие данному условию, и записываются с помощью фигурных скобок, перечисляя элементы искомого множества. Находится количество элементов.
7. Среди заданных множеств определяются равные. Например, B = {5, 25} и F = {25, 5} равные множества.
9. На основании равенства данных множеств определяются элементы, соответствующие пустой клетке.

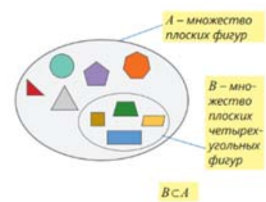
Запомни! Подчеркивают, что иногда элементы множества обозначаются буквами. При этом отмечается, что используются строчные буквы.
11. Записывается множество букв, использованных в записи заданного слова, и находится количество элементов этого множества.

Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики могут испытывать трудности с определением равных множеств. Некоторые ученики могут ошибочно прийти к выводу, что множества с одинаковым количеством элементов равны. В подобных случаях целесообразно выполнить задания на запись нескольких множеств, равных данному набору.

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, a\}$, $C = \{a, b, d\}$
Какие из множеств равны?

Ложное	Верное
$A = C$	$A = B$

Изучение Подмножество



Приводятся примеры на подмножества из реальной жизни. Например, множество отличников в классе является подмножеством всех учеников в этом классе. Или множество плоских четырехугольников является подмножеством множества плоских фигур.
Подмножество записывается с помощью соответствующего символа ($\subset$). Приводятся примеры, в которых удобно изобразить подмножество с помощью диаграммы Эйлера-Венна. Подчеркивается, что изображение кружков диаграммы большими или маленькими, не связано с количеством элементов множества, а размер имеет условный характер.
Отмечается, что пустое множество является подмножеством каждого множества.
Для любого множества A: $\varnothing \subset A$.
Подчеркивается также, что каждое множество является своим подмножеством: $A \subset A$.

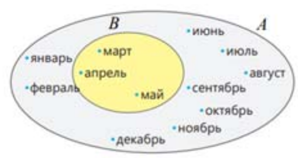
К сведению учителя! Рекомендуется с помощью диаграммы Эйлера-Венна объяснить, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, то есть $N \subset Z$. Ученикам задается вопрос: является ли множество простых чисел подмножеством множества нечетных чисел?
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/_9Wvu-R04go*

12. По диаграмме Эйлера-Венна записывается, какое множество является подмножеством другого.
14. Определяются подмножества и равные множества. Подмножества и равные множества записываются с помощью соответствующих знаков.
15. Подмножества данного множества записываются соответственно образцу.
16. Различные двухэлементные подмножества множества $A = \{a, b, c, d\}$: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$. У множества $A = \{a, b, c, d\}$ четыре элемента. Поскольку каждое множество является подмножеством самого себя, четырехэлементное подмножество этого множества является оно само: $\{a, b, c, d\}$.
Записывается несколько множеств, подмножеством которых является A. Например: $B = \{a, b, c, d, e\}$ или $D = \{a, b, c, d, e, s\}$

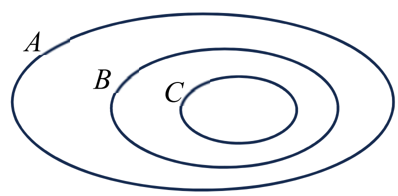
Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель записывает множество на доске и дает ученикам задание написать несколько подмножеств данного множества.
Углубление. Учитель записывает множество на доске. Дает ученикам задание написать все подмножества этого множества и объяснить, как они это сделали.
Чтобы повысить активность учеников и сделать урок интереснее, ученикам раздаются карточки с написанными на них разными множествами. Каждый ученик записывает на своей карточке подмножества множества.
Ученики самостоятельно выполняют предложенные задания в аналогичной форме.

Решение задач

17. Множество национальных музыкальных инструментов, данное в задаче, делится на такие подмножества, как A = {тар, кяманча, саз}, B = {нагара, деф}, C = {балабан}.
18. В задаче требуется записать множества A и B, изображенные на диаграмме Эйлера-Венна, перечислив их элементы, показать элементы, входящие в оба множества, определить, какое множество является подмножеством другого.



Решение задачи. Сначала оба множества записываются с помощью фигурных скобок, перечисляя их элементы:
A = {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь},
B = {март, апрель, май}.
Март, апрель, май – это элементы обоих множеств. Поскольку каждый элемент B также является элементом A, B является подмножеством A: $B \subset A$.
Решение задач 18 и 19 направлено на развитие у учеников навыков выделять подмножества заданного множества и изображать их на диаграмме Эйлера-Венна.
19. Требуется изобразить множества, данные в задаче, на диаграмме Эйлера-Венна, определить и обосновать, в каком случае подмножество записано правильно.



Решение задачи. A – множество всех учеников школы, B – множество учеников VI класса этой школы, C – множество отличников в этом классе. Здесь каждый отличник одновременно является учеником VI класса, а также учеником школы. Правильное написание: $B \subset A$, $C \subset B$.
К сведению учителя! Основное внимание следует направить на развитие у учеников навыков выполнения заданий, основанных на деятельности связи и представления. Представление подмножеств множества на диаграмме Эйлера-Венна развивает у ученика не только способность к логическому суждению, но и навыки решения, исследования и презентации задач путем построения диаграммы.
Подобные примеры можно показать и на простых задачах. Например, считается целесообразным выслушать мнение учеников и дать соответствующие объяснения тому, как можно изобразить D – множество учеников VII класса школы на схеме в 19-й задаче.
Проект. Ученикам можно предложить написать и объяснить множества и их подмножества, соответствующие различным объектам (растениям, животным и т.д.), а также подготовить презентацию.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Представляет понятие множества как совокупность объектов.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает множество, равное данному множеству.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает подмножества данного множества.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 5.2. Операции над множествами

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.4.2. Выполняет операции над множествами.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит пересечение двух конечных множеств и изображает на диаграмме Эйлера-Венна. • Находит объединение двух конечных множеств и изображает на диаграмме Эйлера-Венна. • Находит разницу двух конечных множеств и изображает на диаграмме Эйлера-Венна. • Объясняет понятие дополнения множества. • Находит количество элементов множества, полученного в результате операции над двумя конечными множествами.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://youtu.be/YEsBbAGqkZw* *https://youtu.be/QZGhmfOrysY* *https://video.edu.az/video/1213* *https://video.edu.az/video/1222* *https://www.geogebra.org/m/HXUFNzJF* *https://www.geogebra.org/m/c4aypbhr* Задание: *https://www.transum.org/Maths/Activity/Venn/?Level=1* *https://www.transum.org/Maths/Activity/Venn/?Level=3* *https://www.tinytap.com/activities/g1qjc/play/venn-diagram* *https://www.mathbrix.com/kindergarten/sorting-by-color-and-value-with-venn-diagrams* *http://www.shodor.org/interactivate/activities/ShapeSorter/* *https://nrich.maths.org/6290*

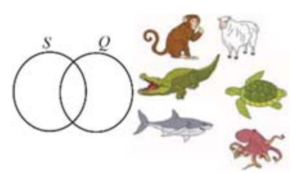
Побуждение

Приводятся примеры операций над множествами из реальной жизни. Например, как можно назвать множество учеников всех классов школы вместе?

Ответ учеников может быть таким: Множество всех учеников в этой школе.

Учитель спрашивает у класса: Если из множества учеников учащихся в 6 классе вычесть множество мальчиков данного класса, какое получится множество?

Исследование-обсуждение Ученики размещают наклейки с изображением различных живых существ в соответствующих частях схемы. Поскольку крокодил и черепаха живут и на суше, и в воде, они понимают, что наклейки с их изображением должны располагаться в общей части схемы.



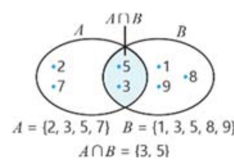
• Ученики записывают необходимые множества, перечисляя их элементы:

S = {рыба, осьминог, крокодил, черепаха}, Q = {обезьяна, овца, крокодил, черепаха},

Учитель задает вопрос: а какие из них обитают только на суше?

• Ученики показывают это в виде множества {обезьяна, овца}.

Изучение **Пересечение множеств**



Объясняется, что пересечением двух множеств называется множество, составленное из всех общих элементов данных множеств. Пересечение множеств обозначается символом ∩ и изображается на диаграмме Эйлера-Венна.

В частном случае на примерах объясняется, что пересечение множеств, не имеющих общего элемента, представляет собой пустое множество. Например, если $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$, то $A \cap B = \varnothing$.

Также на примерах демонстрируется истинность равенства $A \cap A = A$ и $A \cap \varnothing = \varnothing$ для любого множества A. Кроме того, можно вести обсуждение о пересечении множества простых чисел и множества нечетных чисел, а также о пересечении множества простых чисел и множества четных чисел.

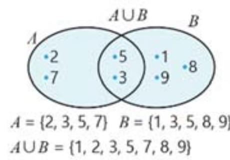
Подумай! Обсуждается, какое множество является пересечением множеств, когда одно из них является подмножеством другого, и приводятся примеры. Например, множество B = {2, 3} является подмножеством множества A = {2, 3, 5, 7} и $A \cap B = B$. Рекомендуется изобразить на диаграмме Эйлера-Венна.

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/YEsBbAGqkZw*

Задания

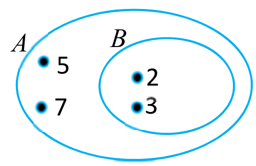
1. По образцу определяются общие элементы данных множеств, записывается их пересечение и изображается на диаграмме Эйлера-Венна. Важно контролировать выполнение данного задания всеми учениками. Следует отметить, что в пунктах упоминаются разные случаи (случай с общим элементом и случай без общего элемента, случай, когда одно является подмножеством другого).
2. В этом задании по заданным множествам C и D требуется записать общее свойство элементов множества C ∩ D. Ученики осознают, что элементы пересечения обладают свойством, общим для обоих данных множеств.
Задания 3 и 4 предназначены для закрепления у учеников привычки определения множества, их элементов и пересечений по диаграмме Эйлера-Венна.
В 5-м задании путем изображения множеств на диаграмме Эйлера-Венна, записывается их пересечение и находится количество элементов в пересечении. В 6-м задании определяется общее свойство чисел на пересечении множеств A и B: каждый элемент в пересечении является делителем как 18, так и 12. При обсуждении в классе делается вывод, что наибольшее из них – НОД (18, 12).
К сведению учителя! При выполнении операций над множествами очень важно, чтобы ученики изображали требуемую операцию на диаграмме Эйлера-Венна. Эти задания важны для развития навыков представления учеников.

Изучение Объединение множеств



Определяется объединение двух множеств и отмечается, что оно обозначается символом ∪. Особо подчеркивается, что общие элементы в объединении пишутся один раз.
Также верность равенств $A \cup A = A$ и $A \cup \varnothing = A$ для любого множества A показывается на примерах с использованием диаграммы Эйлера-Венна.

Подумай! Обсуждается, какое множество является объединением множеств, когда одно из них является подмножеством другого, и приводятся примеры.
Например, множество B = {2, 3} является подмножеством множества A = {2, 3, 5, 7} и A ∪ B = A. Рекомендуется изобразить на диаграмме Эйлера-Венна.



$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://video.edu.az/video/1213*

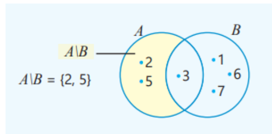
Задания

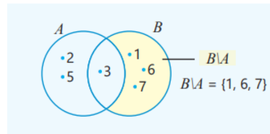
7. Соответственно образцу записывается объединение данных множеств, изображается на диаграмме Эйлера-Венна, определяется количество элементов в объединении. Важно контролировать выполнение данного задания всеми учениками. Следует отметить, что пункты затрагивают разные случаи (случаи с общим элементом и без него, случаи, когда одно является подмножеством другого).
8. Множества A и B, а также множество A∪B записываются согласно диаграмме Эйлера-Венна.
10. По диаграмме Эйлера-Венна определяют, верны или неверны утверждения.
11. Сначала записывается множество четных чисел меньше 30 и обозначается A. Затем множество чисел меньше 30, делящихся на 3, записывается и обозначается B. После с помощью диаграммы Эйлера-Венна записывается объединение этих множеств и определяется количество элементов в объединении.
12. Записываются искомые множества.
Множество нечетных однозначных чисел: $T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
Множество однозначных четных чисел: $C = \{2, 4, 6, 8\}$
Множество однозначных составных чисел: $M = \{4, 6, 8, 9\}$
Затем записываются множества, соответствующие действиям, и находится количество их элементов. Например,
в) $C \cup M = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, число элементов равно 5.
г) $C \cap M = \{6, 8\}$, число элементов равно 2.
Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики могут забыть, что при записи объединения множеств общие элементы записываются один раз. С учениками, допустившими подобные ошибки, считается целесообразным выполнять задания, связанные с объединением и пересечением множеств, следующим образом. Например, если заданы множества A = {1, 2, 3, 4} и B = {3, 4, 5, 6, 7}, их

элементы записываются последовательно вместе и отмечаются вычеркиванием одного из повторяющихся элементов. : 1, 2, 3, 4, 3, 4, ~~5~~, ~~6~~, 7

Отмеченные элементы — это элементы в пересечении множеств, а остальные — элементы в объединении: $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Изучение **Разность множеств**





Понятие разности двух множеств объясняется на примерах, приведенных в учебнике.

На примерах показывается, что $A \setminus A = \varnothing$ и $A \setminus \varnothing = A$ для любого множества A, изображается на диаграмме Эйлера-Венна.

Подумай! С помощью диаграммы Эйлера-Венна на примерах показывается, что объединение множества A\B и множества A ∩ B равно множеству A, а объединение множества B\A и множества A ∩ B равно множеству B.

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/QZGhmfOrysY*

13. Разности A\B и B\A для заданных множеств записываются аналогично образцу.

14. По диаграмме Эйлера-Венна определяются верные или неверные утверждения.

15. На диаграмме Эйлера-Венна определяется, какое множество представляет цветная часть.

В 16 и 17 заданиях искомые множества записываются по диаграмме Эйлера-Венна.

Запомни! Дается краткая информация о дополнении множеств, приводятся примеры.

В 19-м задании ученики записывают дополнение множества B к множеству A, записывая множество A\B и определяя, сколько в нем элементов.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске два множества и предлагает ученикам написать пересечение и объединение данных множеств.

Углубление. Учитель дает ученикам задание написать любые два множества и выполнить над ними различные операции и объяснить, как они это написали.

Чтобы повысить активность учеников и сделать урок интереснее, ученикам раздаются карточки с написанными на них разными множествами. Каждый ученик выполняет необходимые действия над множествами, указанными на имеющейся у него карточке, и изображает на диаграмме Эйлера-Венна.

Решение задач

20. В задаче требуется объяснить смысл операций и найти количество элементов соответствующего множества, обозначив множество продуктов, продаваемых в соответствующих маркетах, A и B.

Решение задачи. Сначала перечисление элементов обоих множеств записывается с помощью фигурных скобок:

A = {мука, рис, соль, сливочное масло, растительное масло, молоко, сыр, яйца, курица, рыба, макароны, вермишель, лапша},

B = {мука, рис, сахар, растительное масло, молоко, йогурт, сыр, яйца, мясо, курица, макароны, гречка, лапша}.

Множество A ∪ B — это множество продуктов, продаваемых в маркетах A или B: {мука, рис, соль, сахар, сливочное масло, растительное масло, молоко, сыр, яйца, курица, мясо, рыба, макароны, вермишель, лапша, гречка}.

В этом множестве 16 элементов, а это значит, что в двух маркетах в общей сложности продается 16 видов продуктов.

Множество A ∩ B — это множество продуктов, продаваемых в обоих маркетах: {мука, рис, растительное масло, молоко, сыр, яйца, курица, макароны, лапша}.

В этом множестве 9 элементов, то есть в обоих маркетах продается 9 видов продуктов.

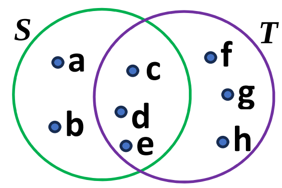
Множество A\B — это множество продуктов, которые продаются в маркете A, но не продаются в маркете B: {соль, масло, рыба, вермишель}.

В этом множестве 5 элементов.

Множество B\A — это множество продуктов, которые продаются в маркете B, но не продаются в маркете A: {сахар, йогурт, мясо, гречка}.

В этом множестве 4 элемента.

К сведению учителя! Выполнение заданий, связанных с объединением, пересечением и разностью множеств, не только развивает способность ученика делать логические суждения, но и развивает навыки решения задач, исследования и представления информации путем построения диаграммы. Поэтому при выполнении операций над множествами рекомендуется всегда иметь в виду их изображение на диаграмме Эйлера-Венна.



Считается целесообразным обсудить решение задачи следующим образом. В диаграмме количество учеников, посещающих шахматный кружок, отмечено буквой S, а количество учеников, посещающих теннисный кружок, отмечено буквой T. Записываются искомые множества, перечислив их элементы, используя данные множества и символы ∩, ∪, \.

- Множество учеников, которые посещают как шахматный, так и теннисный кружки
- Множество учеников, идущих только в шахматный кружок
- Множество учеников, идущих только в теннисный кружок
- Множество учеников, посещающих хотя бы один из кружков

Проект. Ученикам можно предложить написать и объяснить примеры различных множеств (растения, живые существа и т.д.) и операций над ними и подготовить презентацию.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Записывает пересечение двух конечных множеств и находит количество элементов.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает объединение двух конечных множеств и находит количество элементов.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает разность двух конечных множеств и находит количество элементов.	Рабочие листы, учебник, РТ

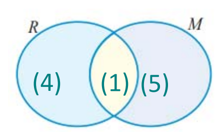
ТЕМА 5.3. Решение задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.4.3. Применяет операции над множествами при решении задач.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет, к какому множеству принадлежит каждая часть диаграммы Эйлера-Венна. • Находит количество элементов, соответствующих каждой части диаграммы Эйлера-Венна. • Решает различные задачи, используя диаграмму Эйлера-Венна.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/c4ekU6Pw#material/AjrfISIT* *https://youtu.be/xwK--rNDI9E* Задание: *https://wordwall.net/resource/2035639/venn-diagrams*

Побуждение.

Приводятся примеры из реальной жизни. Например, Айнур, член клуба любителей природы, ухаживает за животными в одном из уголков своего загородного дома. Из живых существ уголка 2 – водные животные, а 2 — наземные. Как это можно объяснить, если животных всего три? Ответ учеников может быть следующим: Значит, одно из живых существ обитает как в воде, так и на суше. Учитель обращается к классу: Как можно изобразить эту ситуацию на диаграмме Эйлера-Венна? Ученики указывают, к какому множеству принадлежат совпадающие части на диаграмме Эйлера-Венна, и отмечают количество элементов в каждой части.

Исследование-обсуждение



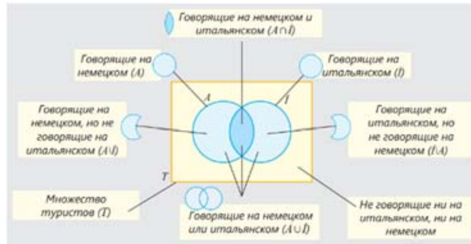
По результатам опроса среди 10 друзей Самира в кружок по рисованию записались 5 человек, а в музыкальный кружок — 6 человек.

• Ученики обосновывают, что общее количество членов кружков отличается от числа участников опроса: некоторые участники опроса записались в оба кружка.

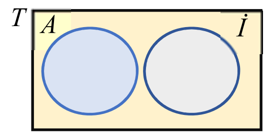
• Ученики обсуждают, опираясь на диаграмму Эйлера-Венна, и приходят к следующему выводу: Число записавшихся в кружки (5 + 6 = 11) на 1 единицу больше числа участников опроса (из 10), поэтому 1 человек записался в оба кружка. Это означает, что пересечение множеств R и M имеет 1 элемент. Обсуждается, какому множеству принадлежат остальные части диаграммы и как найти количество элементов в этих частях.

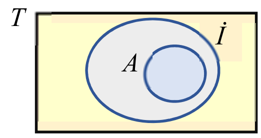
Изучение Решение задач, используя диаграмму Эйлера-Венна

Отмечается, что задачи, связанные с множествами, более наглядно и удобно решать с помощью диаграммы Эйлера-Венна. Обычно при решении задач рассматриваются различные подмножества данного множества, и диаграмма пересечения этих подмножеств объясняется на примере, приведенном в учебнике. Подчеркивается важность правильного определения на диаграмме того, к какому множеству принадлежит каждая часть.



Подумай! Обсуждается, как описывать диаграммы Эйлера-Венна, когда множества A и $İ$ не пересекаются или когда одно является подмножеством другого, выслушиваются мнения учеников и изображаются подходящие диаграммы. Ученики определяют, к какому множеству принадлежит каждая часть на соответствующих диаграммах.

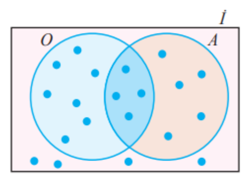




В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения*: https://youtu.be/xwK--rNDI9E*

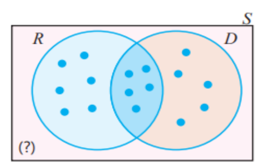
Задания

1. По данной диаграмме определяется, к какому множеству принадлежит каждая часть. Зная, что каждый кружок обозначает одного спортсмена, ответы на вопросы даются путем подсчета кружков в соответствующих частях.



• В соревнованиях по стрельбе из лука приняли участие 11 человек.
• В соревнованиях по верховой езде приняли участие 9 человек.
• В соревнованиях по стрельбе из лука и верховой езде участвуют 4 человека.
• Только 16 человек участвовали в соревнованиях по стрельбе из лука или верховой езде.
• 4 человека не участвовали в соревнованиях ни по стрельбе из лука, ни по верховой езде.
• В соревнованиях приняли участие 20 спортсменов.

2. Ответы на вопросы находятся путем подсчета кружков, соответствующих каждой части диаграммы.



• В кружок по рисованию ходят 11 человек.
• В театральный кружок ходят 10 человек.
• 16 человек посещают хотя бы один из кружков.
• 25 – 16 = 9, то есть 9 человек не ходят ни в один из кружков.

Кроме того, можно поинтересоваться количеством людей, которые ходят и в кружок по рисованию, и в театральный кружок. Ученики могут найти это, посчитав кружки на пересечении множеств R и D. Или найти, вычитая количество элементов в объединении этих множеств из суммы чисел элементов множеств R и D и сравнить результаты

Запомни! Этапы решения задач запоминаются с помощью диаграммы Эйлера-Венна. Образцы решения задач обсуждаются с классом. Рекомендуется уделить особое внимание обсуждению последнего этапа (проверки). В данной задаче ученики должны понимать, что количество элементов в объединении двух множеств можно найти, вычитая количество элементов в общей части из суммы чисел элементов обоих множеств.

К сведению учителя! Правильное рассмотрение данных в задаче может помочь упростить изображение диаграмм Эйлера-Венна. Например, если каждый ученик класса посещает хотя бы один из кружков: театральный (D) или по рисованию (R), то для представления данных задачи с помощью диаграммы Эйлера-Венна достаточно построить пересечение множеств R и D, и в данном случае объединение множеств R и D — это множество учеников в классе.

На этот момент рекомендуется обратить особое внимание при решении задач (№ 3, 4, 7, 10), данных в учебнике. В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/eytMAtzlOq0*

Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики могут допускать ошибки, складывая количество элементов обоих множеств, чтобы найти количество элементов в объединении множеств. В этом случае целесообразно снова рассмотреть примеры нахождения количества элементов в объединении множеств в случае пересечения и при отсутствии пересечения.

Сколько элементов в объединении множеств $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $B = \{e, f, g, h\}$?

Ложное	Верное
Множество A имеет 5 элементов, множество B – 4 элемента, то в объединении $A \cup B$ будет $5 + 4 = 9$ элементов.	*Общий элемент множеств: e и f. Чтобы найти число элементов в объединении, из общего числа вычитается число повторяющихся элементов (2): $5 + 4 - 2 = 7$*

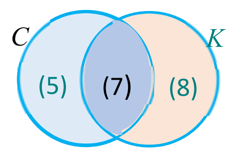
Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель изображает на доске два множества на диаграмме Эйлера-Венна. Записывает количество элементов обоих множеств и количество элементов в пересечении. Ученики находят количество элементов в объединении, обводя элементы множеств.

Углубление. Учитель записывает на доске два множества и дает ученикам задание найти количество элементов в объединении этих множеств и объяснить, как они это нашли.

Решение задач

Решение 3-й и 4-й задач способствует развитию у ученика навыков определения количества элементов в пересечении, объединении и разности заданных множеств, а также их изображения на диаграмме Эйлера-Венна.



3. Согласно данным задачи, на диаграмме Эйлера-Венна требуется найти соответствующие цифры вместо знака?

7 из 12 булок с джемом также и с кунжутом. Итак, количество булок только с джемом:

12 – 7 = 5.

7 из 15 булок с кунжутом также и с джемом. Количество булок только с кунжутом: 15 – 7 = 8.

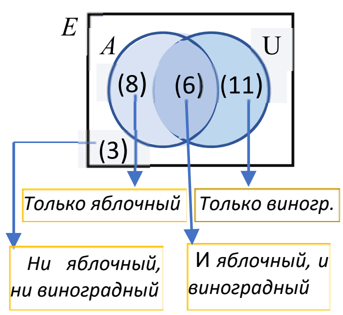
Количество булок в буфете рекомендуется найти разными способами.

Способ 1. Количество булок с джемом и кунжутом + только с джемом + только с кунжутом: 5 + 7 + 8 = 20.

Способ 2. С джемом + с кунжутом – количество булок как с джемом, так и с кунжутом: 12 + 15 – 7 = 20.

По аналогичному принципу решается 4-я задача.

5. По данным задачи требуется выяснить, сколько человек, отправляющихся на экскурсию, не любят ни яблочный, ни виноградный сок.



Решение задачи. Множество, отправляющихся на экскурсию, отмечены буквой E, любители яблочного сока отмечены буквой A, любители виноградного сока отмечены буквой U. Данные множества изображены на диаграмме Эйлера-Венна. На пересечении множеств A и U фиксируется количество людей, которые любят пить и яблочный, и виноградный сок (6).

Количество людей, которые любят только яблочный сок: 14 – 6 = 8.

Количество людей, которые любят только виноградный сок: 17 – 6 = 11.

Найденные числа записывают в соответствующие части диаграммы и вычисляют их сумму:

8 + 6 + 11 = 25.

То есть 25 из 28 учеников любят пить яблочный или виноградный сок,

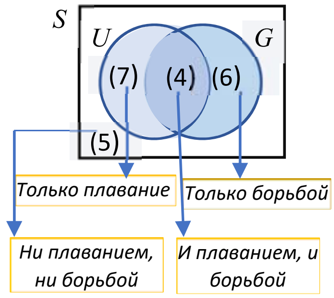
3 человека (28 – 25 = 3) не любят ни яблочный, ни виноградный сок.

Ответ. Три ученика, участвующих в экскурсии, не любят ни яблочный, ни виноградный сок.

6. По данным задачи требуется найти количество учеников в классе.

Решение задачи.

Множество учеников класса обозначено буквой S, занимающиеся плаванием – буквой U, а занимающиеся борьбой – буквой G и изображается на диаграмме Эйлера-Венна.



Количество элементов записано в соответствующих частях. По условию есть 4 человека, которые занимаются и плаванием, и борьбой.

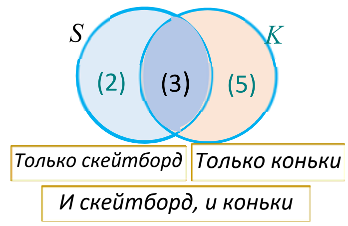
Так, плаванием занимаются всего 11 – 4 = 7 человек, борьбой – всего 10 – 4 = 6 человек. Находим количество людей, занимающихся плаванием или борьбой: 11 + 10 – 4 = 17.

Количество учеников в классе: 17 + 5 = 22

Ответ. В классе 22 ученика.

7. Требуется найти количество детей по данным задачи.

Решение задачи. В диаграмме Эйлера-Венна количество элементов записано в соответствующих частях.



По условию коньки есть у 8 человек.

• Количество детей, имеющих только скейтборды: 10 – 8 = 2,

• Количество детей, имеющих только коньки: 10 – 5 = 5.

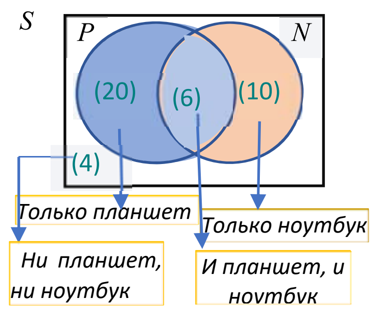
• Число детей, у которых есть и скейтборд, и коньки: 10 – (2 + 5) = 3.

Ответ. У 2 детей только скейтборды, у 5 детей только коньки, у 3 детей и скейтборды, и коньки.

8. По данным задачи отмечают числа, соответствующие частям диаграммы Эйлера-Венна, и отвечают на вопросы.

Решение задачи.

Сначала в соответствующей части фиксируется количество работников, у которых нет ни планшета, ни ноутбука (4). Итак, оставшиеся 40 – 4 = 36 работников имеют планшеты или ноутбуки.



• Число тех, у кого есть ноутбук, но нет планшета: 36 – 16=20.

• Число тех, у кого есть планшет и нет ноутбука: 36 – 26 = 10.

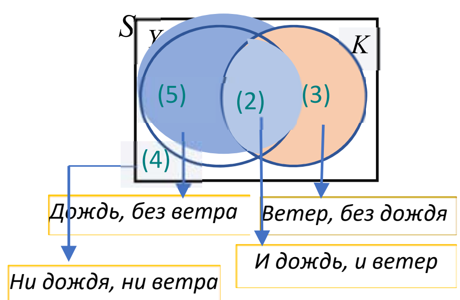
Число тех, у кого есть и планшет, и ноутбук: 36 – (20 + 10) = 6.

Ответ. У 20 работников есть ноутбук, но нет планшета, у 10 работников есть планшет, но нет ноутбука, у 6 человек есть и ноутбук, и планшет.

9. По данным задачи составляется диаграмма Эйлера-Венна и даются ответы на вопросы.

Решение задачи.

Множество дней путешествий обозначено буквой S, дождливые дни – буквой Y, ветреные дни – буквой K и изображается на диаграмме Эйлера-Венна.



По условию, в течение 4 дней не было ни дождя, ни ветра. Количество таких дней (4) указывается в соответствующей части диаграммы.

Значит, оставшиеся 10 дней (14 – 4 = 10) были дождливыми или ветреными.

• Количество дней, когда было и дождливо, и ветрено: 7 + 5 - 10 = 2.

• Количество дождливых, но безветренных дней: 7 - 2 = 5.

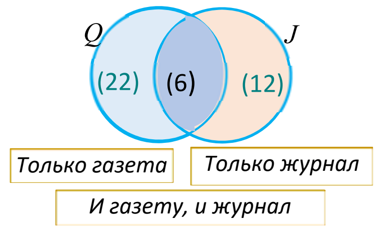
• Количество ветреных, но без дождевых дней: 5 - 2 = 3.

Ответ. За время путешествия 2 дня были дождливыми и ветреными, 10 дней были дождливыми и ветреными, а в 3 из ветреных дней не было дождя.

Из истории математики. Приводятся сведения о работах Кантора, основоположника теории множеств, кругах Эйлера и диаграммах Венна.

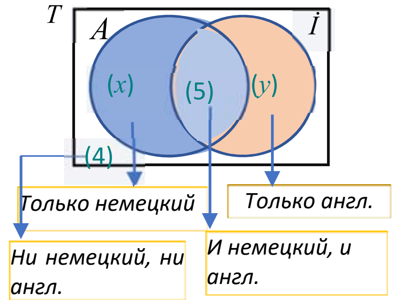
10. По данным задачи составляется диаграмма Эйлера-Венна и даются ответы на вопросы.

Решение задачи.



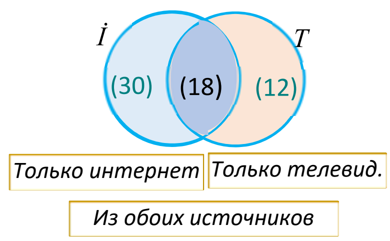
Множество квартир, подписавшихся на газету, обозначается Q, а множество квартир, подписавшихся на журнал, — J. В диаграмме Эйлера-Венна количество элементов записано в соответствующих частях.
Согласно условию, на газету было подписано 28 квартир.
Находится количество квартир, подписанных на журнал: 28 – 10 = 18.
Количество квартир, подписанных только на газету: 40 – 18 = 22.
Количество квартир, подписанных только на журнал: 40 – 28 = 12.
Количество подписчиков как на газету, так и на журнал: 18 – 12 = 6 или 28 – 22 = 6.
Ответ. 6 квартир подписаны как на газету, так и на журнал.

11. По условиям задачи требуется найти, сколько человек в туристической группе знают только один из языков – немецкий или английский.



Решение задачи.
Множество туристов обозначено буквой T, знающих немецкий язык – A, а знающих английский язык – буквой I и изображается на диаграмме Эйлера-Вена. Количество тех, кто не знает ни немецкого, ни английского языка (4), зафиксировано в соответствующей части. Итак, остальные 21 человек (25 – 4 = 21) знают хотя бы один из этих языков. По условию, пятеро из них знают оба языка.
Значит, 21–5=16 человек знают только один из этих языков ($x + y = 16$).
Ответ. В туристической группе 16 человек знают только один язык: немецкий или английский.

12. По данным задачи составляется диаграмма Эйлера-Венна и даются ответы на вопросы.
Решение задачи.

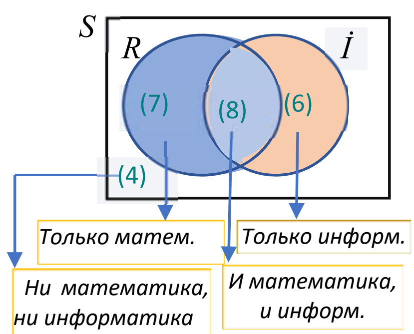


Множество людей, получающих последние новости из Интернета, обозначены знаком I, а тех, кто получает их по телевидению, – знаком T. Изображается пересечение этих множеств.
Согласно результатам опроса, 80% участников, то есть 60·0,80 = 48 человек, получают последние новости из Интернета, а 50%, то есть 60·0,50 = 30 человек, – с телевидения.

- Количество людей, получивших информацию только из Интернета: 60 – 30 = 30
- Количество людей, получивших информацию только по телевидению: 60 – 48 = 12
- Количество людей, получивших информацию из обоих источников: 60 – (30 + 12) = 18

Ответ. 30 человек получают информацию только из Интернета, 12 человек – только по телевидению, 18 человек – из обоих источников.

13. Диаграмма Эйлера-Венна составляется по данным задачи и даются ответы на вопросы.
Решение задачи.



Множество учеников класса отмечены знаком S, принявшие участие в олимпиаде по математике – знаком R, а те, кто участвовал в олимпиаде по информатике, – знаком I.
Согласно условию, в обеих олимпиадах приняли участие 8 человек.
Количество участников (8) как в олимпиадах по математике, так и в олимпиадах по информатике указано в соответствующей части диаграммы.

- Количество участников только по математике: 15 – 8=7.

Сколько процентов от числа учеников в классе (25) составляет количество участников олимпиады по математике (7): $\frac{7}{25} \cdot 100\% = 28\%$

- Количество участников только по информатике: 14 – 8 = 6.

Сколько процентов от числа учеников в классе (25) составляет количество участников олимпиады по информатике (6): $\frac{6}{25} \cdot 100\% = 24\%$

- Количество участников школьной олимпиады: 7+8+6=21. Это составляет $\frac{21}{25} \cdot 100\% = 84\%$ от количества учеников в классе.

4 ученика класса (25 – 21 = 4) не участвовали в данных олимпиадах.

Ответ. В классе 28% учеников участвовали только в олимпиаде по математике, 21% — только в олимпиаде по информатике, а 84% приняли участие в школьной олимпиаде.
К сведению учителя! Основное внимание следует направить на развитие у учеников навыков определять множества, соответствующие определенным частям диаграммы Эйлера-Венна, и количество элементов в этом множестве. Решение задачи с использованием диаграммы Эйлера-Венна развивает у ученика не только способность к логическим рассуждениям, но также навыки исследования и презентации.
Считается целесообразным, чтобы ученики в каждой задаче записывали и указывали, к какому множеству относятся различные части диаграммы Эйлера-Венна.
Проект. Ученикам можно предложить подготовить презентацию о решениях задач с помощью диаграмм Эйлера-Венна для различных ситуаций.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет, к какому множеству принадлежит каждая часть диаграммы Эйлера-Венна.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит количество элементов, соответствующих каждой части диаграммы Эйлера-Венна.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи, используя диаграмму Эйлера-Венна.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. С учениками повторяются понятия, данные в заключении раздела учебника. Слова, изученные в разделе, учитель напоминает ученикам. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и показывают примеры.

Множество, элемент множества, принадлежит, не принадлежит, пустое множество, конечное множество, бесконечное множество, подмножество, равные множества, объединение множеств, пересечение множеств, разность множеств, дополнение множества, диаграмма Эйлера-Венна и т.д.

Напоминается информация, приведенная на первой странице раздела, организация поиска по словам AND, OR, NOT в поисковых системах, основанная на действиях над множествами, а также некоторых моментах, связанных с историей создания и развития теории множеств. Следует отметить, что оператор NOT аналогичен «–», и для поиска перед соответствующим словом ставится «–».

https://support.google.com/websearch/answer/2466433?hl=tr

https://www.govinfo.gov/help/search-operators

Задание «Попытайтесь!», решение исходной задачи обсуждается с классом. Целесообразно написать краткое условие задачи и обсудить с учениками этапы решения задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ.

3. Множество двузначных чисел, в записи которых используются только цифры 1, 2, 3, 4, и у которых цифра в разряде десятков меньше цифры в разряде единиц, обозначается буквой A, а все элементы этого множества записываются с помощью фигурных скобок: A = {12, 13, 14, 23, 24, 34}. Согласно данной записи, даются ответы на вопросы.

● Множество A содержит 6 элементов.

● Из данных чисел элементы, входящие и не входящие в множество A, записываются с помощью соответствующих знаков:

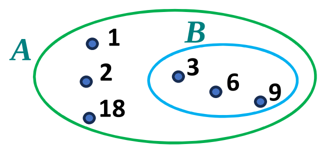
$21 \notin A$, $12 \in A$, $34 \in A$, $32 \notin A$, $13 \in A$

6. Данные множества записываются с помощью фигурных скобок.

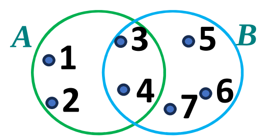
а) Множество делителей 18: A = {1, 2, 3, 6, 9, 18}.

Множество однозначных чисел, делящихся на 3: B = {3, 6, 9}.

Эти множества изображаются на диаграмме Эйлера-Венна, которая объясняет, что множество B является подмножеством A: $B \subset A$



9. Данные множества изображаются на диаграмме Эйлера-Венна. Записываются множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$. Ученики определяют, к какому множеству относится каждая часть на диаграмме.



а) A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6, 7}

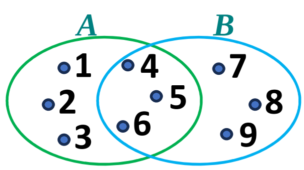
$A \cap B$ = {3, 4}, $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},

$A \backslash B$ = {1, 2}, $B \backslash A$ = {5, 6, 7},

К сведению учителя! При решении 9-го задания рекомендуется еще раз обратить внимание учеников на то, что объединение множества A\B и множества A ∩ B равно множеству A. Ученики проверяют это, записывая объединение множеств {1, 2} и {3, 4}. Кроме того, целесообразно обратиться к классу с таким вопросом: Каково объединение множества B\A и множества A ∩ B? Ученики определяют, что это множество B. Также рекомендуется на основе приведенного примера показать связь между количеством элементов множеств A и B и количеством элементов в объединении и пересечении этих множеств. Ученики на приведенном примере наглядно видят и понимают, что количество элементов в объединении множеств A и B можно найти, вычитая количество элементов их пересечения из суммы числа элементов этих множеств. Эти знания помогают ученикам лучше понять решение задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

10. Элементы искомых множеств по диаграмме Эйлера-Венна записываются с помощью фигурных скобок.

а)



A = {1, 2, 3, 4, 5, 6},

B = {4, 5, 6, 7, 8, 9},

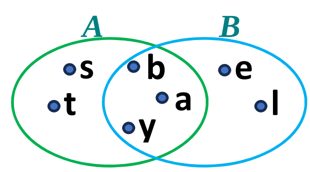
$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},

$A \cap B$ = {4, 5, 6},

$A \backslash B$ = {1, 2, 3},

$B \backslash A$ = {7, 8, 9}.

б)



A = {s, t, b, a, y},

B = {b, a, y, e, l},

$A \cup B$ = {s, t, b, a, y, e, l},

$A \cap B$ = {b, a, y},

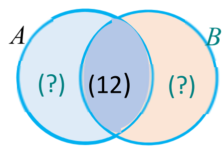
$A \backslash B$ = {s, t},

$B \backslash A$ = {e, l}.

В заданиях 11 и 12 ученики записывают нужные множества, изображают их на диаграмме Эйлера-Венна, определяют, какому множеству принадлежит каждая часть на диаграмме, и таким образом вновь наблюдают связь между суммой чисел элементов двух множеств и количества элементов в их объединении и пересечении.

13. В задаче, зная, что множество A имеет 30 элементов, множество B – 20 элементов, а множество A ∩ B имеет 12 элементов, требуется найти соответствующие числа на диаграмме Эйлера-Венна, заменив знаки «?», и ответить на вопросы.

Решение задачи.



Учитывая, что множество A имеет 30 элементов, 12 из которых являются общими с множеством B на диаграмме. Итак, количество элементов множества A\B: 30 – 12 = 18.

12 из 20 элементов множества B входят в множество A ∩ B, поэтому количество элементов множества B\A: 20 – 12 = 8.

Число элементов множества A ∪ B удобно находить двумя способами.

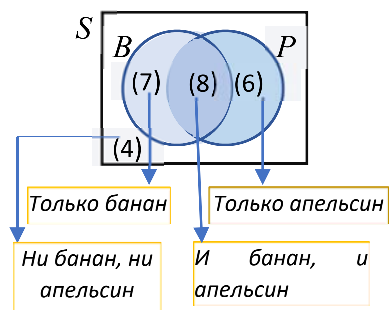
Способ 1. Количество элементов в A, но не в B + количество элементов в B, но не в A + количество элементов в A и B: 18 + 8 + 12 = 38.

Способ 2. Количество элементов множества A + количество элементов множества B – количество элементов в пересечении:

30 + 20 – 12 = 38

Ответ. Число элементов в A, но не в B, равно 18, количество элементов в B, но не в A, равно 8, множество A ∪ B имеет 38 элементов.

14. В задаче требуется ответить на вопросы по данным диаграммы Эйлера-Венна, зная, что множество учеников в классе обозначено S, множество любителей бананов – B, а множество людей, любящих апельсины, – P.

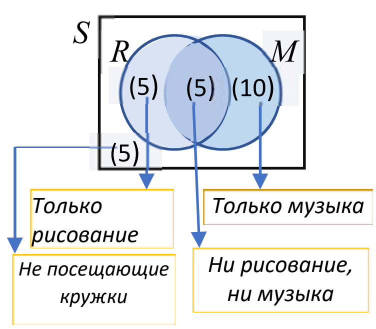


Решение задачи

На диаграмме Эйлера-Венна определяется, к какому множеству относится каждая часть, отмечают на ней, и на основе этого даются ответы на вопросы.

- ● Только бананы любят 7 человек.
- ● 6 учеников любят только апельсины.
- ● Число элементов множества B: 7 + 8 = 15. То есть бананы любят 15 человек.
- ● Число элементов множества P: 6 + 8 = 14. То есть апельсины любят 14 человек.
- ● Количество людей, которые любят бананы или апельсины: 7 + 8 + 6 = 21.
- ● Количество участников опроса: 21 + 4 = 25

15. В задаче, зная, что из 25 учеников в классе (множество S) 20 человек посещают кружки по музыке или рисованию, 15 человек занимаются в музыкальном кружке (множество M), а 10 человек — в кружке по рисованию (множество R), требуется найти соответствующие числа заменив знаки «?» на диаграмме Эйлера-Венна, и ответить на вопросы.



Решение задачи

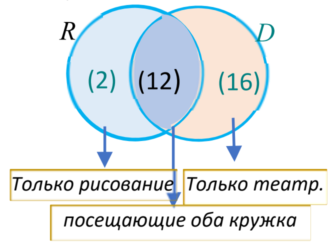
На диаграмме Эйлера-Венна определяется и отмечается, к какому множеству принадлежит каждая часть.

- ● Количество тех, кто не посещает ни музыкальный, ни художественный кружок: 25 - 20 = 5.
- ● Количество тех, кто ходит только в кружок по рисованию: 20 – 15 = 5.
- ● Количество тех, кто ходит только в музыкальный кружок: 20 – 10 = 10.
- ● Количество тех, кто посещает оба кружка: 15 – 10 = 5.

16. По данным задачи требуется найти, какой процент учеников занимается в обоих кружках.

Решение задачи

В кружке по рисованию занимаются 14 учеников. В театральном кружке занимается в 2 раза больше, т.е. 2·14 = 28 человек. Поскольку из 30 учеников 28 ходят в театральный кружок, остальные 2 ходят только в кружок по рисованию. В соответствующей части указывается количество тех, кто ходит только в кружке по рисованию (2).
Количество тех, кто посещает только театральный кружок: 30 – 14 = 16.
Если вычесть количество тех, кто посещает только театральный кружок (16), из числа тех, кто посещает театральный кружок (28), то получится количество людей, посещающих оба кружка: 28 – 15 = 12.
12 из 30 учеников посещают оба кружка. Вычисляется процент учеников, посещающих оба кружка:



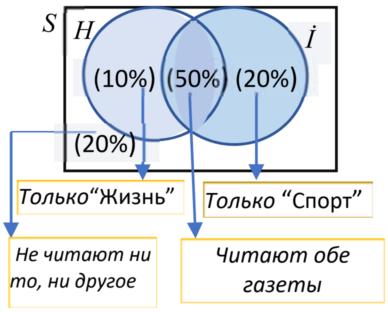
$\frac{12}{30}$·100% = 25%

Ответ. 25% учеников посещают оба кружка.

17. В задаче требуется ответить на вопросы, указав данные на диаграмме Эйлера-Венна.

Решение задачи

Множество жителей города обозначено S, читающих газету «Жизнь» —H, а читающих газету «Спорт» —I, и все это изображается на диаграмме Эйлера-Венна.



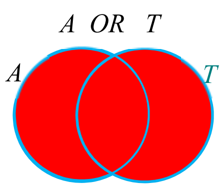
● Примерно 20% жителей не читают ни одну из этих газет.
Так, 80% жителей читают хотя бы одну из этих газет.
● Количество людей, читающих обе газеты (в процентах): 60% + 70% – 80% = 50%.
● Те, кто читает только газету «Спорт»: 70% – 50% = 20%.
● Те, кто читает только газету «Жизнь»: 60% – 50% = 10%

Ответ. 80% горожан читают хотя бы одну из этих газет,
50% читают обе газеты. 10% жителей читают только газету "Жизнь", а 20% – только газету "Спорт".

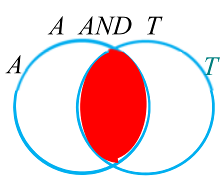
STEAM Поисковые системы

Предоставляется информация о поисковых системах. Отмечается, что логические операции AND (И), OR (ИЛИ), NOT (НЕ) используются для конкретизации поиска в сети Интернет. Подчеркивается, что эти операции соответствуют пересечению, объединению и разности множеств соответственно.

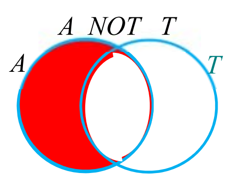
1. Если A – множество текстов со словом «Азербайджан», а T – множество текстов со словом «Туризм», то объясняется результат действия, изображенного на диаграмме Эйлера-Венна.



Поиск множества текстов, в которых есть слова «Азербайджан» или «Туризм».



Поиск множества текстов, в которых есть слова «Азербайджан» и «Туризм».



Поиск множества текстов, в которых есть слово «Азербайджан», но нет слова «Туризм».

Необходимо отметить, что оператор NOT аналогичен знаку «–», и для поиска перед соответствующим словом ставится «–». *https://support.google.com/websearch/answer/2466433?hl=tr*
https://www.govinfo.gov/help/search-operators

2. В компьютере или мобильном телефоне поисковые запросы, занимающие первое место в рейтинге, записываются по очереди. Результаты каждого запроса фиксируются.

3. Собирается информация о первых 5 лучших поисковых системах в мировом рейтинге и о том, как они работают.

6-й РАЗДЕЛ	Выражения с переменной. Уравнение. Неравенство

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	26	
Тема 6.1	Выражения с переменной	2	27	15
Тема 6.2	Раскрытие скобок в математических выражениях	2	31	18
Тема 6.3	Упрощение выражений с переменными	3	34	21
Тема 6.4	Уравнение	3	37	24
Тема 6.5	Решение задач на составление уравнений	3	41	27
Тема 6.6	Неравенства	2	44	30
	Обобщающий урок. STEAM. ““Математическое моделирование”	3	48	32
	МСО-4	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**20**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики научатся записывать и читать выражения с двумя переменными, раскрывать скобки в выражениях с двумя переменными, применять подобные слагаемые и упрощать выражения, вычислять значение выражения при заданных значениях переменных, решать простые уравнения с переменными по обе стороны в множестве целых чисел. Также ученикам будет предоставлена информация о том, как решать задачи путем составления уравнения и находить целые решения простых неравенств методом подбора.

На что стоит обратить внимание?

Ученики затрудняются записывать утверждения, данные словами, в виде выражений с переменными. Это затруднение возникает особенно в случае со скобками. В этом случае можно привести примеры выражений со скобками и без скобок, состоящих из чисел и одинаковых действий, а затем предложить записать переменные вместо соответствующих чисел. Нахождение общего решения задач, связанных со схожими ситуациями, служит мотивацией и подготовкой для формирования и развития у учеников навыков записи выражений с переменными. Поэтому целесообразно уделить особое внимание выполнению заданий, связанных с нахождением общего решения.

Также важно развивать навык записи выражений с переменной, соответствующих условиям задач, изменять содержание условия задачи и учитывать это в выражении. Рекомендуется уделить внимание и навыкам составления новой задачи путем изменения порядка действий в данном выражении.

Решение простых уравнений с неизвестными в обеих частях выполняются путем приведения их к эквивалентному уравнению. При этом важно обосновать смену знака слагаемого, перенесенного из одной части уравнения в другую. При решении задачи путем составления уравнения ученики, составив и решив уравнение в соответствии с заданной ситуацией, находят значение неизвестного и полагают, что ответ всегда равен этому значению. Ученикам, допускающим подобные ошибки, можно предложить решить аналогичные задачи. Формирование этого навыка важно для того, чтобы в дальнейшем не допускать подобных ошибок при решении задач путем составления более сложных уравнений.

Некоторые ученики допускают ошибки при решении неравенств, путая знаки. Это проявляется и при записи утверждений, данных словами, в виде неравенства. Целесообразно организовать работу над ошибками с учениками, которые допускают подобные ошибки.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «постоянная», «коэффициент», «общий множитель», «подобные слагаемые», «приведение подобных слагаемых», «эквивалентные уравнения», «эквивалентность» позволяет оценить, насколько эти понятия усвоены.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Постоянная, коэффициент, общий множитель, подобные слагаемые, приведение подобных слагаемых, эквивалентные уравнения, эквивалентность и т.д.

Необходимые предварительные знания и навыки:

- Выражения с переменной
- Уравнения
- Неравенства
- Действия с обыкновенными и десятичными дробями
- Действия над целыми числами
- Последовательность действий

Междисциплинарная интеграция

Во многих ситуациях, с которыми сталкиваются в повседневной жизни, например, для определения дохода, прибыли или расходов при покупках, для расчета пройденного пути в зависимости от скорости и времени, для вычисления стоимости проезда по пройденному пути и т.д., возникает необходимость записывать словесные высказывания в виде математических выражений, составлять уравнения и решать их. Также при изучении тем по предмету «Природа» ученики будут применять знания и навыки, полученные в этом разделе.

ТЕМА 6.1. Выражения с переменной

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.1.1. Составляет математическое выражение с не более чем двумя переменными. 6-2.1.4. Вычисляет значение выражения при заданных целых значениях переменных.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Составляет математическое выражение без скобок с переменными, соответствующее предложению. • Составляет математическое выражение со скобками с переменными, соответствующее предложению. • Вычисляет значение выражения по значениям переменных.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/4152* *https://video.edu.az/video/4158* *https://youtu.be/IQlblcRgucY* *https://youtu.be/BXHNzUaIRR0* *https://youtu.be/k-KiWkV81fQ* *https://youtu.be/GheEHcAvdKA* *https://youtu.be/XYJSzvgy9zo* *https://phet.colorado.edu/sims/html/expression-exchange/latest/expression-exchange_az.html* Задание: *https://www.k5learning.com/worksheets/math/algebra/grade-5-expressions-2-variables-c.pdf* *https://www.k5learning.com/worksheets/math/algebra/grade-5-expressions-2-variables-d.pdf*

Обсуждение исходной задачи. На первой странице раздела обсуждается задача, представленная под заголовком «Попытайтесь!». Ученики пытаются выполнить задание, используя свои предыдущие знания. Однако, поскольку им пришлось столкнуться с решение уравнения, включающим переменные с обеих сторон, полное решение задания откладывается до конца раздела, а учитель сообщает, что в конце раздела задание будет снова обсуждаться.

Побуждение. Учитель задаёт вопрос классу:

- Какими словами и выражениями мы обозначаем арифметические действия в устной речи? Мнения учеников выслушиваются. Например, для сложения: плюс, больше на, если увеличим и т.д.

Учитель рисует на доске 5 треугольников и 2 четырехугольника и задает вопрос: с помощью какого выражения можно найти сумму сторон фигур на доске? Ученики записывают числовое выражение $5 \cdot 3 + 2 \cdot 4$. Учитель спрашивает: Как вы думаете, какое выражение уместно записать, заменив в этом выражении числа переменными?

Ученики предлагают подходящее выражение в виде $3n + 4m$, учитывая, что может изменяться не количество сторон фигуры, а количество треугольников или четырехугольников.

Общее число сторон 1 треугольника, 1 четырехугольника ➡ $3 \cdot \triangle 1 + 4 \cdot \boxed{1}$

Общее число сторон 2 треугольников, 2 четырехугольников ➡ $3 \cdot \triangle 2 + 4 \cdot \boxed{2}$

Общее число сторон 5 треугольников, 2 четырехугольников ➡ $3 \cdot \triangle 5 + 4 \cdot \boxed{2}$

....

Общее число сторон n треугольников, m четырехугольников ➡ $3 \cdot \triangle n + 4 \cdot \boxed{m}$

Здесь значение выражения меняется в зависимости от значения n и m.
Учитель обращается к классу: добавьте в задачу такие данные, чтобы получилось выражение со скобками. Ответ учеников может быть следующим: например, каждый из 2 человек нарисовал n треугольников и m четырехугольников. Выражение, показывающее количество сторон фигур: $2 \cdot (3n + 4m)$

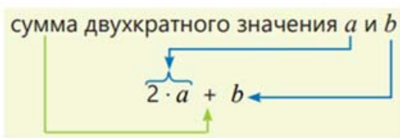
Исследование-обсуждение

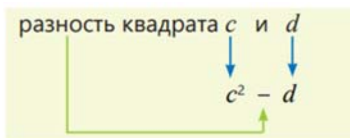
Требуется определить, сколько денег покупатель заплатил за приобретенные продукты и как была рассчитана сумму.
- 1 кг яблок стоит 1,5 маната. Следовательно, за m кг яблок нужно заплатить 1,5m манатов.
- 1 кг груш стоит 2 маната. Следовательно, за n кг груш нужно заплатить 2n манатов.
- Записывается выражение, соответствующее общей сумме, заплаченной за фрукты: $1{,}5m + 2n$
- Покупатель должен заплатить $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ AZN за 3 кг яблок, $2 \cdot 2 = 4$ AZN за 2 кг груш. То есть общая сумма 4,5 маната + 4 маната = 8,5 манатов. Ученики обсуждают, что это также можно найти, подставив 3 вместо m и 2 вместо n в выражении $1{,}5m + 2n$.

Учитель может задать другие значения для m и n. Ученики вычисляют значение выражения при заданных значениях переменных.

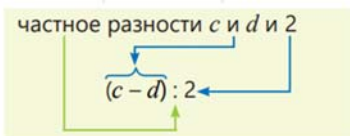
Изучение Выражения с двумя переменными

В некоторых ситуационных задачах, подчеркивается, что несколько величин принимают разные значения. В этом случае эти величины заменяются переменными и записываются выражения с переменными. Отмечается, что в выражение может быть включена степень переменных. Для записи подобных словесных выражений с помощью математических символов, важно обозначить переменную определенной буквой и правильно выбрать соответствующее действие. Примеры, приведенные в учебнике, обсуждаются с учениками.





При записи математических выражений особое внимание уделяется расстановке скобок. Рекомендуется обсудить с учениками несколько различных заданий со скобками.



К сведению учителя! У учеников иногда возникают трудности при записи математических выражений, соответствующих словесному утверждению.

Словами	Образец	Математическое выражение
Сложение Сумма, общее число, больше на, длиннее	на *b* единиц больше, чем 3-кратное значение *a*	$3a + b$
Вычитание Разность, меньше на, короче, легче	меньше *c* на 2-кратное значение *d*	$c - 2d$
Умножение Произведение, двукратное, больше в	3- кратное значение суммы x в квадрате и *y*	$(x^2 + y) \cdot 3$
Деление Частное, меньше в	меньше разности *c и d* в 4 раза	$(c - d) : 4$

Если у учеников возникают трудности с расстановкой скобок, целесообразно обсудить, почему выбрано такое расположение скобок. Это важно, чтобы избежать подобных ошибок в будущем.
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/GheEHcAvdKA*

Задания

1. Задание продолжает формирование и развитие навыков чтения выражений с переменными с использованием таких терминов, как «сумма», «разность», «квадрат», «куб».

2. Словесные утверждения записываются в виде математических выражений. Еще раз отметим, что математические выражения записываются с помощью букв, цифр, скобок и математических операций. При этом необходимо обратить внимание на запись скобок, математических действий, последовательность записи. Если у учеников возникают трудности с расстановкой скобок, целесообразно обсудить, почему выбрана такая расстановка скобок. Это важно для предотвращения подобных ошибок в будущем.
3. В задании вычисляются значения выражения при заданных значениях переменных и заполняется таблица.
Поиск общего решения задач, связанных со схожими ситуациями, служит мотивацией и подготовкой для формирования и развития у учеников навыков записи выражений с переменными. 4-е задание предполагает развитие у учеников этих навыков. Обсуждается представленный образец, по аналогичному принципу записывается выражение с переменными, соответствующее данной ситуации, и вычисляется значение выражения при заданных значениях переменных.
При выполнении задания ученик должен уметь разделить представленные данные на фрагменты, определить, какому фрагменту соответствует каждое действие. Для достижения этого следует задавать наводящие вопросы. Например, в составленном по задаче выражении $2 \cdot (3m + 4n)$, какое условие требует, чтобы сумма $3m + 4n$ была записана в скобках, почему операция внутри скобок является операцией сложения и т.д.
Такие вопросы дают ученикам возможность объяснить условие и решение задачи своими словами.
5. Задачи с выражениями с переменными развивают навыки письма.

Например, задача, соответствующая выражению б) $2a+b$, может быть такой:
Покупатель купил два ящика персиков и один ящик вишен. Сколько килограммов фруктов он купил?
6. Вычисляются и сравниваются значения выражений при заданных значениях переменных.
К сведению учителя! Некоторые ученики могут допускать ошибки при вычислении значений переменных выражений для отрицательных значений переменных. Например, при $a = –4$ и $b = –3$ следует уделить особое внимание вычислению значений таких выражений, как $2a – b$. Ученики должны понимать необходимость использования скобок при записи заданного значения вместо переменной:
$2 \cdot (–4) – (-3) = –8 + 3 = –5$.
Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель записывает на доске выражение с двумя переменными и дает ученикам задание найти значение выражения при заданных значениях переменных.
Углубление. Учитель дает ученикам задание выбрать из заданных значений вместо переменных такую пару, чтобы значение выражения соответствовало заданному условию.

В качестве переменных выбирается такую пару заданных чисел, чтобы значение выражения равнялось заданному числу или удовлетворяло условию.
-2; -1; 0; 1; 2

$a \cdot (b + 1)$ → 1; 0; Положительное; Наибольшее возможное; Наименьшее возможное

Изучение Коэффициент

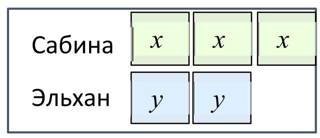
Рассматриваются различные примеры произведения чисел и переменных. В приведенных примерах показаны пропорции и буквенные части. Отмечается, что произведение может иметь несколько числовых множителей, причем в этом случае произведение числовых множителей находится с использованием свойств операции умножения, а буквенные множители записываются после умножения найденного числа. Например, в выражении $2x \cdot (-3y)$ коэффициент равен -6, а буквенная часть – xy: $2x \cdot (-3y) = 2 \cdot (-3)\, xy = -6xy$

Также уделяется внимание записи выражения в виде суммы слагаемых путем замены действия вычитания сложением в математическом выражении. Особенно важно правильно найти коэффициенты слагаемых, входящих в это математическое выражение. На примере, приведенном в учебнике, объясняется, как записать математическое выражение в виде суммы слагаемых, а в слагаемых с переменной показываются коэффициент и буквенная часть. Особо отмечается, что слагаемое, не зависящее от переменной, называется постоянной.

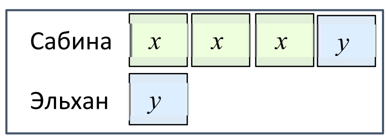
Подумай! С учениками обсуждается, каков коэффициент в выражениях xy и -m. Ученики понимают, что коэффициент в выражениях, записанных как xy = 1·xy и –m = -1·m, равен 1 и -1 соответственно.
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://video.edu.az/video/4969*
7. В 7-м задании ученики находят коэффициент в данных выражениях устно, а в 8-м задании – аналогично приведенному примеру.
9. Данное математическое выражение записывается в виде суммы слагаемых, причем в слагаемых с переменной указываются коэффициент и буквенная часть, отмечается слагаемое без переменной, т.е. постоянная.
10. На вопросы отвечают путем записи выражений с переменной.
а) Автомобиль со скоростью 1 км/ч проезжает 6 км за 6 часов. $\frac{2}{3}$ этого находится: $6a \cdot \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{2}{3} a = 4a$. То есть расстояние между пунктами 4 км.
б) Ручка, стоимость которой до скидки была p манатов, после 20% скидки может быть продана за 80% от прежней цены, т.е. за $0{,}8p$ маната. После скидки рассчитывается сумма, оплаченная покупателем, купившим 8 ручек: $8 \cdot 0{,}8p = 6{,}4p$ (ман.)

Решение задач

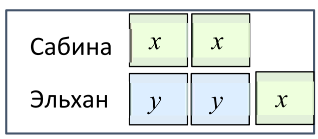
Решаются задачи путем составления выражений с переменной.
11. В задаче требуется найти, сколько стикеров есть у Сабины и Эльхана, а также узнать, сколько наклеек будет у каждого из них, когда один из них отдаст другому определенное количество своих стикеров.



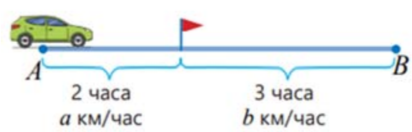
Решение задачи.
Сабина собрала 3 стикера на 3 страницах, по x стикеров на каждой странице, Эльхан собрал $2y$ стикеров на 2 страницах, по y стикеров на каждой странице. Вместе y них есть $3x + 2y$ стикеров.
а) Если Эльхан отдаст Сабине половину от своих $2y$ стикеров, т.е. y стикеров, у него останется y стикеров, а у Сабины станет $3x + y$ стикеров.



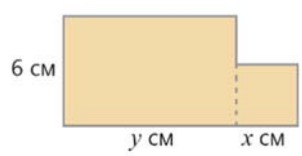
б) Если Сабина отдаст Эльхану $\frac{1}{3}$ от своих $3x$ стикеров, поскольку $3x \cdot \frac{1}{3} = x$, у Эльхана будет $2y + x$ стикеров. У Сабины останется $3x \cdot \frac{2}{3} = 2x$ стикеров.



Ответ. Вместе у них $3x+2y$ стикеров. Если Эльхан отдаст половину стикеров Сабине, у него останется y стикеров, а у Сабины останется $3x + y$ стикеров. Если Сабина отдаст $\frac{1}{3}$ стикеров Эльхану, у Эльхана будет $2y + x$ стикеров, а у Сабины будет $2x$ стикеров.
12. В задаче требуется написать математическое выражение, соответствующее расстоянию между пунктами A и B, вычислить значение этого выражения при $a = 80$ и $b = 70$.



Решение задачи:
• Ученики записывают математическое выражение: $2a + 3b$
• Вычисляется значение этого выражения при $a = 80$ и $b = 70$: $2 \cdot 80 + 3 \cdot 70 = 370$
Ответ. Расстояние между точками A и B равно 370 км.
13. В задаче требуется выразить площадь фигуры, состоящей из прямоугольника и квадрата, через x и y, найти площадь при $x = 4$, $y = 7$ и определить, при каком значении y площадь равна 85 см^2, если $x = 5$



Решение задачи.
• Площадь данной фигуры выражается через x и y. Для этого ученики могут разделить данную фигуру на две. Определяются выражения, соответствующие площади каждой полученной фигуры, и записывается сумма: $x^2 + 6y$

• Вычисляется значение выражения при $x = 4$ и $y = 7$: $4^2 + 6 \cdot 7 = 16 + 42 = 58$ (см^2).

• При $x = 5$ площадь равна 85, а y находится из полученного уравнения: $5^2 + 6y = 85b \rightarrow 6y = 60 \rightarrow y = 10$.

Ответ. Если $x = 5$, то для того, чтобы площадь была равна 85 см^2, y должен быть равен 10.

14. В задаче требуется написать выражение, соответствующее количеству туристов, отправившихся на прогулку по реке на лодках, вычислить значение выражения при $a = 5$, $b = 2$, найти, сколько лодок были трехместными, если на прогулку вышло всего 17 человек.

Решение задачи.

• С учетом того, что все лодки полностью заполнены, записывается математическое выражение, соответствующее числу людей, отправившихся на прогулку на a трехместных и b четырехместных лодках: $3a+4b$

• Вычисляется значение выражения при $a = 5$ и $b = 2$: $3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 23$.

• Обсуждается, сколько из лодок являются трёхместными, если всего на прогулку отправилось 17 человек. Исследуется, какие целые числа можно записать вместо a и b в равенстве $3a + 4b = 17$. Определяется, что значение a должно быть одним числом. При проверке определяется, что $a = 3$ и $b = 2$ — числа, удовлетворяющие данному уравнению.

Ответ. Если на прогулку отправилось всего 17 человек, то 3 из лодок являются трехместными.

15. В задаче требуется найти, сколько денег заплатил покупатель за сумку и ремень со скидкой.

Привлечение. Учитель задает ученикам наводящие вопросы: Если цену товара снизить на 20 %, то какой процент от предыдущей цены составит новая цена? Как это записать в виде десятичной дроби? Ученики понимают, что 100% – 20% = 80%, поэтому новая цена составляет 80% от старой цены, т.е. 0,8.

Решение задачи:

● После скидки на 20% сумка продается за $0{,}8p$ манатов, а ремень со скидкой на 30% – за $0{,}7\ q$ манатов. Записывается выражение, соответствующее сумме денег, которую заплатил покупатель, купивший по одному с каждого товара: $0{,}8p + 0{,}7q$

• При $p = 40$ и $q = 20$ рассчитывается сумма, оплаченная покупателем, купившим сумку и ремень со скидкой: $0{,}8 \cdot 40 + 0{,}7 \cdot 20 = 46$ (манат)

Ответ. Покупатель, приобретающий сумку и ремень со скидкой, должен заплатить 46 манатов.

16. В задаче требуется записать выражение для расчёта стоимости шоколадов в коробке и найти коэффициент в этом выражении.

Решение задачи:

Поскольку цена шоколадных конфет составляет y манатов, цена упаковки, содержащей 8 шоколадных конфет, равна $8y$. Поскольку в коробке 14 упаковок, выражение для расчета цены шоколадных конфет в этой коробке можно записать как $8y \cdot 14$. После упрощения это выражение записывается как 112y, где коэффициент равен 112

Ответ. Цену шоколадных конфет в коробке можно рассчитать с помощью выражения $112y$, коэффициент равен 112.

17. В задаче требуется написать выражение для цены после удвоенной скидки товара, предыдущая цена которого составляла x манатов, и найти коэффициент в записанном выражении.

Решение задачи:

В магазине сначала сделали скидку 25%, затем 20%. Товар, первоначальная стоимость которого составляла x манатов, после скидки в 25% продаётся за 75% от этой суммы, то есть за $0{,}75x$ манатов. Затем сделали вторую скидку в 20%, и окончательная цена товара составляет 80% от $0{,}75x$ манатов: $0{,}75x \cdot 0{,}8 = 0{,}75 \cdot 0{,}8x = 0{,}6x$. Коэффициент полученного выражения равен 0,6.

18. Задачи составляются и решаются по данным выражениям.

К сведению учителя! Для составления задачи, соответствующей данным выражениям, важно развивать навыки чтения, понимания и использования математического языка. Ученики должны сначала прочитать и понять данные выражения, а также определить, какое действие выполняется первым и каким идеям это соответствует в задаче. При чтении данных выражений можно обсуждать с учениками, какие значения получаются при подстановке чисел вместо переменной, а также как изменяется результат при изменении чисел. На простых задачах можно показать аналогичные примеры. Используя методы дифференцированного обучения, можно распределить выражения из задания 18 среди учеников, предложив каждому составить задачу, соответствующую своему выражению, и решить её. Целесообразно вести обмен мнениями, сравнивая различные задачи, записанные в соответствующем выражении.

Рекомендуется также уделить внимание навыкам построения новой задачи путём изменения порядка действий в данном выражении.

Проект. Можно предложить ученикам написать задачу с переменной, соответствующую различным ситуациям (дом, прогулка, магазин, спорт и т.д.), решить её и подготовить презентацию с объяснением решения. Ученикам, испытывающим трудности, можно предоставить изображения, которые помогут создать представление о различных ситуациях.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Составляет математическое выражение без скобок с переменными.	Рабочие листы, учебник, РТ
Составляет математическое выражение с переменными в скобках в соответствии с предложением.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет значение выражения по значениям переменных.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.2. Раскрытие скобок в математических выражениях

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.1.2. Упрощает выражения с двумя переменными. 6-2.1.3. Выводит общий множитель за скобки.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Раскрывает скобки, применяя распределительное свойство умножения. • Выносит общий множитель за скобки, связывая его с распределительным свойством умножения.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/4713* *https://video.edu.az/video/1096* *https://video.edu.az/video/8963* *https://video.edu.az/video/4185* *https://youtu.be/ecbxmp-7hK0* Задание: *https://www.transum.org/software/SW/Starter_of_the_day/Students/Brackets.asp* *https://www.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-expressions-and-variables/cc-6th-distributive-property/e/distributive-property-with-variables* *https://wordwall.net/resource/27506161/distributive-property* *https://wordwall.net/resource/9783956/math/distributive-property* *https://wordwall.net/resource/6495455/distributive-property* *https://wordwall.net/resource/12886394/math/factoring-expressions*

Побуждение. Учитель кладет на стол несколько ручек и тетрадей. Сообщает, что цена ручки составляет 3 маната, а тетради – 2 маната. Затем он дает задание написать выражение для вычисления стоимости упаковки, состоящей из одной ручки и одной тетради. Ученики записывают и вычисляют выражение для стоимости упаковки: 3 + 2 = 5 (манатов). Учитель задает наводящий вопрос: Как найти стоимость двух таких упаковок? Ученики отвечают, что нужно умножить стоимость одной упаковки на 2. Учитель задает наводящий вопрос: Какие еще способы есть для нахождения этой стоимости? Ученики, основываясь на том, что в упаковке две ручки и две тетради, рассчитывают стоимость двух упаковок: 2·3 + 2·2 = 10 (манатов). На доске записывается равенство 2· (3 + 2) = 2·3 + 2·2.

Исследование-обсуждение

Ученики, исходя из того, что до полудня было продано m кг картофеля, а после полудня — n кг, находят, что всего за день было продано $(m+n)$ кг картофеля, и рассчитывают, сколько картофеля осталось из привезенных 150 кг.

● Обсуждается, что выражение может быть записано как $150 – (m + n)$ или $150 – m – n$.

● Для обеих выражений, подставив $m = 97$ и $n = 43$, вычисляется, сколько килограммов картофеля осталось в магазине. Результаты сравниваются.

Изучение Раскрытие скобок в математических выражениях

В учебнике на образцах, объясняется, что значение выражений со скобками можно найти, вычислив значение выражения внутри скобок или раскрывая скобки.
Объясняется на примерах, что при раскрытии скобок со знаком «+» перед ними или без знака, скобки отбрасываются, а слагаемые внутри записываются со своим знаком.

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$12 + (18 + 29) = 12 + 18 + 29 = 59$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$14 + (26 - 43) = 14 + 26 - 43 = -3$$

При раскрытии скобок со знаком "-" перед ними отмечается, что скобки отбрасываются, а слагаемые внутри записываются с противоположным знаком.

$$a - (-b) = a + b$$
$$33 - (-7) = 33 + 7 = 40$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$23 - (3 + 8) = 23 - 3 - 8 = 12$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$
$$17 - (12 - 5) = 17 - 12 + 5 = 10$$

Задания

1. Значение данных числовых выражений вычисляется путем раскрытия скобок. Затем вычисляется путем нахождения значения выражения внутри скобок. Результаты сравниваются. Данный вид заданий положительно влияет на формирование у учеников привычки раскрывать скобки.
2. В данном выражении раскрываются скобки и по возможности производится упрощение. Например:
ж) $17 – (12 – k + m) = 17 – 12 + k – m = 5 + k – m$
3. Скобки раскрываются и вычисляется значение выражения при $x + y = 4$. Например:
г) $(x – 8) – (3 – y) = x – 8 –3 + y = x + y – 8 – 3 = x + y –11 = 4 – 11 = –7$

К сведению учителя! Целесообразно повторно напомнить о переместительном и сочетательном свойствах сложения. Ученики должны понимать, что выражения, полученные в результате упрощения, эквивалентны. Изложение правил и свойств, применяемых на этапах упрощения выражений, важно для формирования математического мышления ученика, развития навыков рассуждения, установления связи, и изложения. Выполнение большого количества заданий на упрощение недостаточно для достижения ожидаемых результатов в развитии логического мышления ученика. Исследование сущности математики, каким бы трудоемким оно ни было, является деятельностью, оказывающей эффективное влияние на успешный результат.
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения:
https://www.geogebra.org/m/bmwnzbsn

Изучение Раскрытие скобок по распределительному свойству умножения

Раскрытие скобок с использованием распределительного свойства умножения демонстрируется на примере, приведенном в учебнике, и объясняется на основе модели.

$$2 \cdot (a + 2b - 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot 2b - 2 \cdot 1 = 2a + 4b - 2$$

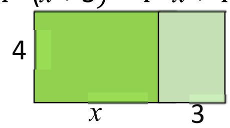
Если перед скобками множитель отрицательный, то подчеркивается, что при применении распределительного свойства слагаемые меняют свои знаки на противоположные:

$$-3 \cdot (x - 3y - 5) = = -3 \cdot (x + (-3y) + (-5)) = -3 \cdot x + (-3) \cdot (-3y) + (-3) \cdot (-5) = -3x + 9y + 15$$

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения:
https://oryxlearning.com/manipulatives/algebra-tiles *https://youtu.be/ecbxmp-7hK0*
https://phet.colorado.edu/sims/html/area-model-algebra/latest/area-model-algebra_az.html
Выполнение заданий, приведенных в учебнике, укрепляет у учеников навыки раскрывать скобок. Формирование этих навыков началось с младших классов.

4. Ученики вычисляют значение заданного числового выражения двумя способами: раскрывая скобки, используя распределительное свойство умножения, и находя значение выражения внутри скобок.
5. Скобки раскрываются аналогично приведенному примеру.

$4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3$



К сведению учителя! С моделью площади ученики знакомы еще с младших классов. Ученикам, испытывающим затруднения, можно привести несколько примеров представления выражений с помощью модели площади. Эквивалентные выражения более очевидны на модели площади. Математически, заменив произведение на сумму или наоборот, сумму на произведение, можно представить в виде разной записи площади.
6. Проверяется правильность равенства. Правильное решение записывается для неправильных равенств. Ошибки устраняются путем записи неправильных равенств в тетрадь. Верное равенство получается изменением выражения, написанного справа. Например, г) $5 \cdot (-x + 3y - 4) = 5x + 15y + 20$ не верно. Верное равенство записывается по распределительному свойству умножения: $5 \cdot (-x + 3y - 4) = -5x + 15y - 20$
7. В пустые клетки вписываются такие числа, чтобы равенство было верным. Например: чтобы равенство в) $6 \cdot (3x - \square\, y) = \square\, x - 12y$ было верно при любых значениях переменных, оно записывается в виде $6 \cdot (3x - 2y) = 18\,x - 12y$.

Ложные представления, возникающие у учеников. При упрощении выражений с использованием свойств умножения, особенно при наличии членов со знаком минус, ученики допускают определенные ошибки: забывают умножить каждое слагаемое внутри скобок на число вне скобок или неправильно пишут знак. Таких учеников можно выявить при решении заданий 5, 6 и 7. Ученики смогут быстрее выявить свои ошибки, определив, что ответ, данный в числовых выражениях, неверен. Чтобы выявить ошибки, ученикам можно дать задание заменить переменную числом или сравнить решение с предыдущим решением, повторно решив пример.

Ложное	Верное
$(x - 8) \cdot (-2) = 2x + 8$	$(x - 8) \cdot (-2) = -2x + 16$
$-3 \cdot (2b - 4) = -6b - 4$	$-3 \cdot (2b - 4) = -6b + 12$

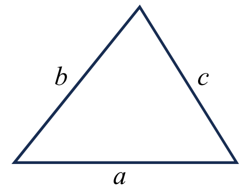
Изучение Вынесение общего множителя за скобки

Отмечается, что если в распределительном свойстве умножения поменять местами правую и левую части равенства, то получается правило вынесения общего множителя за скобки. На примере задания, приведенного в учебнике, с учениками обсуждается вынесение общего множителя за скобки. Учитель объясняет, и ученики понимают, что для этого необходимо найти НОД коэффициентов слагаемых, после чего каждый коэффициент записывается в виде произведения множителей.

$$4x + 6y - 8 = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3y - 2 \cdot 4 = 2 \cdot (2x + 3y - 4)$$

8. Как и в приведенном примере, аналогично общий множитель выносится за скобки.
К сведению учителя! Ученики знают, как найти наибольший общий делитель (НОД). Целесообразно сообщить ученикам, что понятие общего множителя определяется аналогичным образом, привести несколько примеров.
9. Обсуждается, чей ответ верен. Ученики могут определить, какое выражение верное, проверяя, получено ли эквивалентное выражение левой части равенства путем раскрытия скобок в выражении правой части. Или могут показать правильность мнения Эльхана, написав в форме $-3x + 2y = (-1) \cdot 3x + (-1) \cdot (-2y) = (-1) \cdot (3x - 2y) = -(3x - 2y)$.
10. В пустые клетки записываются числа, чтобы равенство было верным при любых значениях переменных.
11. Общий множитель выносится за скобки и вычисляется значение выражения при заданных значениях переменных.
а) $3x + 3y = 3 \cdot (x + y) = 3 \cdot (72 + (-77)) = 3 \cdot (-5) = -15$
12. Общий множитель выносится за скобки и вычисляется значение выражения при $x - 2y = 4$.
в) $-5x + 10y = -5 \cdot (x - 2y) = -5 \cdot 4 = -20$
Дифференцированное обучение.
Поддержка. На доске записывается несколько примеров на вынесение общего множителя за скобки. Ученики выносят общий множитель за скобки.
Углубление. Ученикам дается задание написать несколько примеров вынесения общего множителя за скобки и объяснить решение.

Решение задач



13. Для того чтобы найти длину третьей стороны треугольника по данным в задаче периметру и длине двух сторон, требуется написать выражение и найти числовое значение длины третьей стороны, вычислив значение выражения при заданных значениях переменных.

Решение задачи.

Длину третьей стороны треугольника обозначим с.

По условию периметр равен 30: $a + b + c = 30$

Отсюда выражение для длины третьей стороны записывается как $c = 30 - (a + b)$ или $c = 30 - a - b$.

• Подставив $a = 12$, $b = 10$, находится значение выражений, записанных для c.

$c = 30 - (12 + 10) = 30 - 22 = 8$ или $c = 30 - 12 - 10 = 8$

Ответ. длина третьей стороны треугольника равна 8.

14. В задаче требуется узнать, сколько было получено прибыли от продажи пахлавы и шекербуры и исходя из данных рассчитать прибыль двумя способами.

Решение задачи:

• Чтобы вычислить прибыль от продаж, из общей суммы, полученной от продажи всей пахлавы и шекербуры, вычитается сумма, потраченная на продукты. Записывается соответствующее выражение: $100a + 100b - 109 - 91$. Это выражение заменяется эквивалентным выражением $100a + 100b - 200$, а множитель 100 выносится за скобки: $100 \cdot (a + b - 2)$

• Прибыль находится двумя способами путем вычисления значений выражений при $a = 1{,}50$ и $b = 1{,}10$.

1-й способ: $100 \cdot 1{,}50 + 100 \cdot 1{,}10 - 200 = 150 + 110 - 200 = 60$ (манатов)

2-й способ: $100 \cdot (1{,}50 + 1{,}10 - 2) = 100 \cdot 0{,}60 = 60$ (манатов)

Ответ. Прибыль составляет 60 манатов.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Раскрывает скобки, применяя распределительное свойство умножения.	Рабочие листы, учебник, РТ
Выносит общий множитель за скобки, связывая его с распределительным свойством умножения.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.3. Упрощение выражений с переменными

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.1.2. Упрощает выражения с двумя переменными.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Применяя распределительный закон умножения, раскрывает скобки и приводит подобные слагаемые. • Вычисляет значение выражения при целых значениях переменных.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://youtu.be/g9VIuFYB98g* *https://youtu.be/eNv4fHb7OvU* *https://youtu.be/FiGqyLTjTAQ* Задание: *https://wordwall.net/resource/13630053/maths/simplifying-expressions* *https://wordwall.net/resource/58950/maths/simplifying-algebra-foundation* *https://wordwall.net/resource/74327673/collecting-like-terms* *https://www.transum.org/Maths/Activity/Algebra/Collecting_Like_Terms.asp?Level=2*

Побуждение. Учитель обращается к классу с таким вопросом: Тетрадь стоит a манатов, ручка стоит b манатов. Сколько манатов нужно заплатить за 3 тетради и 2 ручки? Ученики записывают выражение $3a + 2b$. Учитель задает вопрос: как записать выражение, соответствующее общей суммы, если будет куплено еще 2 ручки? Ученики говорят, что в этом случае будет куплено всего 3 тетради и 4 ручки, и поэтому записывают выражение $3a + 4b$, соответствующее оплаченной сумме.

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://youtu.be/FiGqyLTjTAQ*

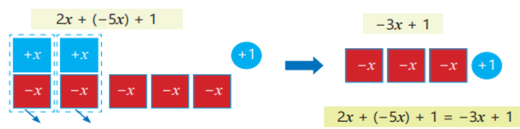
Исследование-обсуждение

Добавив в кувшин 1 стакан молока, ученики пишут выражение, соответствующее количеству молока в кувшине: $2 + m$. Тогда, когда из этого кувшина выльют 2 стакана молока, записывается выражение, соответствующее количеству оставшегося молока: $2 + m - m - m$. В конце в кувшине осталось молока на 1 стакан меньше, чем было вначале.
Итак, в кувшине осталось $2 - m$ литров молока.

$$2 + m - m - m = 2 - m$$

Изучение Подобные слагаемые и их приведение

В выражении с переменной отмечается, что одинаковые слагаемые или слагаемые, отличающиеся только коэффициентами, называются подобными слагаемыми, и приводятся примеры подобных слагаемых. На примере, приведенном в учебнике, поясняется, что сумма подобных слагаемых заменяется одним подобных слагаемым.

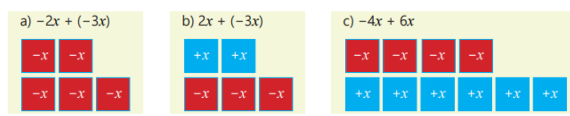


Отмечается, что сумма слагаемых, отличающихся только знаком, равна нулю, например, $2x + (-2x) = 0$.
В общем, обратное значение любого выражения получается путем его умножения на -1. Сумма противоположных выражений равна 0:
$-2x + 4 + (2x - 4) = -2x + 4 + 2x - 4 = (-2x + 2x) + (4 - 4) = 0$

Запомни! Для приведения подобных слагаемых обсуждается, что после умножения их коэффициентов записывается буквенная часть, и это умножение основано на распределительном свойстве. Целесообразно привести несколько примеров.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://oryxlearning.com/manipulatives/algebra-tiles

Задания

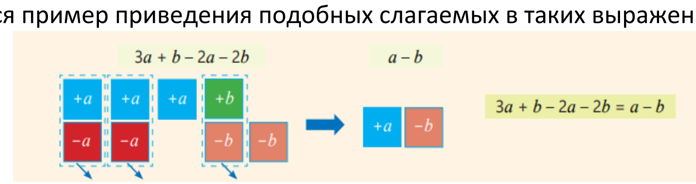
1. Ученики определяют и показывают подобные слагаемые в заданных математических выражениях.
2. Приведение подобных слагаемых производится с помощью рисунка.
а) На изображение всего 5 карт $-x$: $-2x + (-3x) = -5x$
б) Поскольку сумма слагаемых $+x$ и $-x$ равна 0, результатом будет одна $-x$ карта: $2x + (-3x) = -x$
в) Аналогичным методом получается: $-4x + 6x = 2x$



3. По распределительному свойству умножения общий буквенный множитель выносится за скобки и упрощается.
Следует отметить, что в некоторых пунктах необходимо использовать свойства сложения:

$$b - 5 - 3b = b - 3b - 5 = (1 - 3)\,b - 5 = -2b - 5$$

Внимание! Отмечается, что в данном выражении, может быть, несколько групп подобных слагаемых. Приводится пример приведения подобных слагаемых в таких выражениях.



При этом, используя свойства сложения и умножения и вынося за скобки общий буквенный множитель, на примерах объясняется, что подобные слагаемые приводятся.

$$5x + 2 - 3x - 8 = (5 - 3) \cdot x + 2 - 8 = 2x - 6$$
$$4a + 3b - 2a + 5b = (4 - 2) \cdot a + (3 + 5) \cdot b = 2a + 8b$$

4. Подобные слагаемые приводятся с использованием свойств сложения и умножения.
5. В пустые клетки находятся такие числа, чтобы равенство было верным при любых значениях переменных.

6. Данное выражение упрощается и значение выражения вычисляется при заданных значениях переменных.

К сведению учителя! Иногда ученикам трудно определить, какие слагаемые группировать при упрощении выражений. Поэтому рекомендуется подчеркивать подобные слагаемые. При упрощении выражений целесообразно обсудить с
учениками, какое свойство используется, и попросить их обосновать, почему используется это свойство.

Изучение **Упрощение выражений**

С обсуждением рассматривается пример упрощения выражения с помощью применения свойств действий, приведенный в учебнике. Выполняются задания, предложенные в учебнике.

7. Скобки раскрываются на основании свойства распределения умножения аналогично приведенному примеру. Подобные слагаемые отмечаются и приводятся, выражение упрощается.

8. Выражение упрощается и значение выражения вычисляется при заданном значении переменных

К сведению учителя! На что следует обратить внимание при упрощении выражения:

1) применение и представление свойств действий
2) правильный учет знаков при раскрытии скобок
3) правильное соблюдение последовательности действий

Со всем классом можно организовать обсуждение следующих вопросов:

– При упрощении выражений с какой целью используются переместительное и сочетательное свойства сложения? (с целью группировки и приведения подобных слагаемых).

– С какой целью используется распределительное свойство умножения? (при раскрытии скобок или вынесении общего знаменателя за скобки).

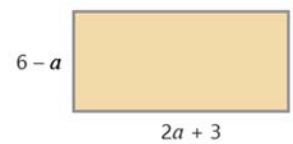
Дифференцированное обучение.

Поддержка. На доске записываются и упрощаются несколько выражений от простого к сложному. Ученики объясняют, какое свойство используется для упрощения.

Углубление. На доске записываются и упрощаются несколько выражений от простого к сложному. Ученики объясняют, какое свойство используется для упрощения, и пишут другое выражение, упрощенное с использованием того же свойства.

Решение задач

9. По данным на рисунке требуется написать выражение для расчета периметра прямоугольника и найти площадь, если периметр равен 24 единицам.



Решение задачи:

• На основе рисунка записывается и упрощается выражение для периметра данного прямоугольника:

$2 \cdot (6 - a) + 2 \cdot (2a + 3) = 12 - 2a + 4a + 6 = 18 + 2a$

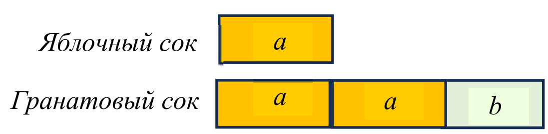
• Периметр прямоугольника 24 единицы: $18 + 2a = 24$. Находится a из полученного уравнения: $a = 3$

Ширина прямоугольника: $6 - a = 6 - 3 = 3$. Длина прямоугольника: $2a + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$.

Площадь прямоугольника: $3 \cdot 9 = 27$ (ед. квадратов).

Ответ. Площадь прямоугольника 27 единичных квадратов.

10. Требуется найти, на сколько гранатовый сок дороже яблочного, написать выражение, соответствующее сумме денег, которую заплатили за купленные соки, и посчитать сумму оплаченных денег.



Решение задачи:

По данным, яблочный сок стоит a манатов, а гранатовый – на b манатов дороже его удвоенного значения.

Цена гранатового сока: $2a + b$ (манатов)

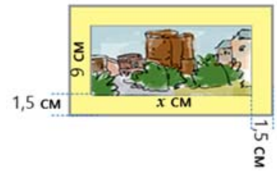
Находится разница в цене соков: $2a + b - a = a + b$. То есть гранатовый сок на $a + b$ манатов дороже яблочного.

• Записывается и упрощается выражение, соответствующее сумме, оплаченной за покупку 3 яблочных соков и 2 гранатовых соков:

$3a + 2 \cdot (2a + b) = 3a + 4a + 2b = 7a + 2b$

• Находится значение выражения при $a = 1{,}70$ и $b = 0{,}30$: $7 \cdot 1{,}70 + 2 \cdot 0{,}30 = 11{,}90 + 0{,}60 = 12{,}50$

Ответ. За купленные соки заплатили 12 манатов 50 гяпиков.



11. В задаче требуется написать выражение для нахождения площади рамки картины и найти длину картины, если площадь рамки 81 см^2.

Решение задачи:

Длина изображения x см, ширина 9 см. Размеры рамки в сантиметрах:
ширина $9 + 2 \cdot 1{,}5 = 12$, длина $x + 2 \cdot 1{,}5 = x + 3$.

- Площадь маленького прямоугольника (картины) вычитается из площади большого прямоугольника, и полученное выражение упрощается:

$$12 \cdot (x + 3) - 9x = 12x + 36 - 9x = 3x + 36$$

- Учитывается, что площадь рамки 81 см^2: $3x + 36 = 81$. Неизвестное находится из полученного уравнения: $x = 15$

Ответ. Длина картины 15 см.

12. Если пройденное расстояние d км, требуется найти, насколько стоимость проезда в час пик превышает стоимость проезда в обычное время.

Решение задачи:

Стоимость проезда за d км в обычное время: $1 + 0{,}30d$

Стоимость проезда за d км в часы пик: $1{,}5 + 0{,}50d$

Разность полученных выражений записывается и упрощается: $1{,}5 + 0{,}50d - (1 + 0{,}30d) = 1{,}50 + 0{,}50d - 1 - 0{,}30d = 0{,}5 + 0{,}2d$

Ответ. При пройденном расстоянии d км стоимость проезда в час пик на $0{,}5 + 0{,}2d$ маната превышает стоимость проезда в обычное время.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Приводит подобные слагаемые.	Рабочие листы, учебник, РТ
Упрощает выражения, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.4. Уравнения

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.2.3. Решает простые уравнения в множестве целых чисел. 6-2.2.4. Использует уравнения и неравенства при решении задач.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Решает простые уравнения, применяя свойства равенства. • Решает уравнение, сводя его к более простому эквивалентному уравнению. • Решает простые уравнения в множестве целых чисел с неизвестными в обеих частях.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, весы
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.bbc.co.uk/bitesize/articles/zhp76rd#zsxg9ty* *https://www.geogebra.org/m/mzhnpmgj* *https://www.geogebra.org/m/nwdeffef* *https://youtu.be/f15zA0PhSek* *https://youtu.be/1c5HY3z4k8M* *https://youtu.be/eZsyV0ISzV8* *https://video.edu.az/video/9769* *https://video.edu.az/video/9359* *https://www.bbc.co.uk/bitesize/articles/zhp76rd#zsxg9ty* Задание: *https://wordwall.net/resource/6062416/math/solving-equations-variables-both-sides*

Побуждение. Весы — удобный инструмент для понимания решения уравнения. Можно принести весы в класс или попросить учеников заранее сделать модель весов. Весы ставятся на стол. Учитель задает классу вопрос: Как определить массу жидкости в полной стеклянной ёмкости, взвесив её на весах один раз, не выливая жидкость? Ученики понимают, что для этого необходимо поставить на другую чашу весов пустую стеклянную емкость. На одну

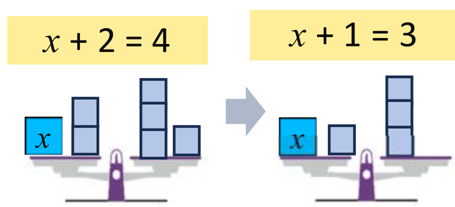
чашу весов ставят полную емкость, в другую – пустую стеклянную емкость. Ученики добавляют гири, чтобы уравновесить весы, и по этим гирям определяют массу жидкости в сосуде.
 В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения:
https://static.bigideasmath.com/protected/content/tools/mrl/interactive_tools/balance_scale/index.html

Исследование-обсуждение Обсуждаются различные способы решения уравнения, записанного по весам, находящимся в равновесии. Здесь масса полной бутылки с соком обозначена как x. В результате сравнения методов решения Анара и Лалы ученики приходят к мнению, что вычитание некоторого числа из обеих частей уравнения и перенос этого числа из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, по сути, одно и то же. По мнению Сабины, если с обеих чаш весов, находящихся в равновесии, убрать по 1 бутылке и по одной гире массой 1 кг, баланс не будет нарушен. А поскольку на одной чаше весов находится одна бутылка, а на другой — гиря массой 1 кг, то масса бутылки с соком равна 1 кг. Ученики обсуждают, как это можно записать в виде решения уравнения.

 В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/fjekqnuh
https://static.bigideasmath.com/protected/content/tools/mrl/interactive_tools/balance_scale/index.html

Изучение Эквивалентные уравнения

Уравнения с одинаковыми корнями называются эквивалентными уравнениями. Рекомендуется привести различные примеры эквивалентных уравнений. На модели весов демонстрируется, что при снятии одинакового груза с обеих чаш весы остаются в равновесии, и уравнения $x + 2 = 4$ и $x + 1 = 3$ являются эквивалентными. Целесообразно написать на доске несколько простых уравнений и попросить учеников решить их и определить эквивалентные. Ученики знают понятие корня уравнения и умеют решать уравнение, используя свойства равенства. На основе этих навыков находятся корни заданных уравнений и определяются эквивалентные уравнения на основе того, совпадают корни или нет.



Внимание! До сведения учеников доводится, что при изменении правой и левой частей уравнения получается уравнение, эквивалентное предыдущему уравнению. Отмечается, что, например, уравнение $5 = x + 3$ можно решить, записав его как $x + 3 = 5$.

Задания

1. Проверяется, является ли заданное число корнем уравнения.
Например, в пункте а) ученики определяют, проверяя, что −4 удовлетворяет обоим уравнениям $x - 6 = 2$ и $2x + 6 = 2 + x$. Таким образом, эти уравнения являются эквивалентными уравнениями. Число -4 не удовлетворяет уравнению $6 = 2 + x$. Ученики могут определить, что корень этого уравнения равен 4. Следовательно, уравнение $6 = 2 + x$ не эквивалентно двум другим уравнениям.
2. В пустую ячейку записывается такое число, чтобы данные уравнения стали эквивалентны.
а) Сначала находится корень уравнения $x + 7 = 4$. Для этого из обеих частей уравнения вычитают число 7 и находят неизвестное: $x = -3$. Значение выражения x + 9 вычисляется путем записи найденного значения вместо неизвестного: 6. Следовательно, если в пустую ячейку записано число 6, корень уравнения $x + 9 = 6$ будет равен -3. То есть уравнения эквивалентны.
Остальные пункты решаются аналогичным образом.

Изучение Решение путем приведения уравнения к эквивалентному уравнению

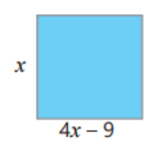
До сведения учеников доводится, что данное уравнение можно решить разными способами, и при этом найденные корни будут одинаковыми. Отмечается, что при добавлении одного и того же числа к обеим частям уравнения или вычитании одного и того же числа из обеих частей корень уравнения не меняется, т.е. получается эквивалентное уравнение. Например, добавление $-x$ к обеим частям уравнения $2x = x + 3$ приводит к эквивалентному уравнению $2x - x = 3$. В уравнении, когда слагаемое из одной части уравнения

переносится в другую сторону с противоположным знаком, эквивалентно исходному уравнению, что демонстрируется с помощью модели весов.
Также объясняется на примере, приведенном в учебнике, что если умножить или разделить обе части уравнения на одно и то же ненулевое число, то полученное уравнение эквивалентно исходному.
В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения:
https://polypad.amplify.com/p/z9qWwp0DYg9Fjw
4. Сначала обсуждается решение данного примера. Решение уравнений выполняется по аналогичному правилу.
К сведению учителя! Решение уравнений разными способами очень важно. Это мотивирует важность выявления у учеников навыков решения уравнений и альтернативных подходов. Данные подходы позволяют не только принять правильное решение, но и оценить принятые решения.

Запомни! Предлагается алгоритм решения уравнений с неизвестными в обеих частях.
1. Выражения в правой и левой частях упрощаются и имеют вид $ax + b = cx + d$.
2. Неизвестные обычно переносятся влево, а числа вправо: $ax - cx = d - b$.
3. Упрощение производится с обеих сторон.
4. Находится корень уравнения и проверяется ответ.
Уравнения решаются по алгоритму, приведенному в следующих заданиях.
7. Представленный образец обсуждается всем классом. Уравнения решаются аналогичным образом. Умение упрощать выражения в правой или левой части уравнения продолжается согласно изученному на предыдущих уроках.
8. Образец обсуждается всем классом. Уравнения решаются с использованием основного свойства пропорции.
К сведению учителя! Рекомендуется обратить внимание на один важный вопрос. Нужно ли записывать и объяснять математические операции на каждом этапе решения уравнения? Это следует рассматривать как важное занятие для формирования математической логики ученика, а также навыков осознанного анализа и презентации. Например, когда ученик решает уравнение $4x + x - 8x = 15$, он может не писать шаг $(4 + 1 - 8)\ x = 15$. Однако ученик должен понимать и уметь объяснить, что группировка и упрощение подобных слагаемых производится по распределительному свойству умножения.
Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики забывают поменять знак при переносе слагаемого из одной части уравнения в другую. Либо они переносят только слагаемое с положительным знаком в другую сторону с отрицательным знаком, а когда делают это для слагаемым с отрицательным знаком, то допускают ошибку. Ученикам, допустившим подобные ошибки, рекомендуется на более простых примерах, основанных на свойствах равенства, привести примеры решения уравнений для обоих случаев, объяснить, почему знак слагаемого меняется на противоположный.
Дифференцированное обучение.
Поддержка. На доске записываются и решаются несколько простых уравнений с переменными с обеих сторон.
Углубление. На доске записываются и решаются несколько уравнений с переменной в скобках с обеих сторон.

Решение задач

9. В задаче требуется найти периметр и площадь квадрата, изображенного на рисунке.



Решение задачи.
Уравнение записывается и решается исходя из того, что стороны квадрата равны:
$4x - 9 = x \iff 4x - x = 9 \iff 3x = 9 \iff x = 3$.
• Сторона квадрата равна 3. Периметр: $4 \cdot 3 = 12$ (ед.) Площадь: $3^2 = 9$ (ед. кв.)
Ответ. Периметр квадрата равен 9 единицам, а площадь – 12 квадратных единиц.
10. Число, задуманное Анаром, обозначается через x. По заданному условию он прибавил к этому числу 4. Умножив полученную сумму на 2, получается 3-х кратное значение. Записывается и решается уравнение:
$(x + 4) \cdot 2 = 3x \iff 3x = (x + 4) \cdot 2 \iff 3x = 2x + 8 \iff 3x - 2x = 8 \iff x = 8$.
Проверка. Если к задуманному числу 8 прибавить 4, то получим 8 + 4 = 12, а если полученную сумму умножить на 2, то получим 12·2=24. 24 — это 3 раза по 8. Значит, задача решена правильно.

Ответ. Число, которое задумал Анар, — 8.

11. По условиям задачи требуется найти, сколько литров молока в кувшине.

Решение задачи.

Если в кувшине x литров молока, то по условию в кувшине будет $4x$ литров молока. Если взять из кувшина 2 литра, то молока останется в 3 раза больше, чем молока в кувшине. Соответствующее записывается и решается уравнение:

$4x - 2 = 3x \iff 4x - 3x = 2 \iff x = 2$

Ответ. В кувшине 2 литра молока.

Формативное оценивание.

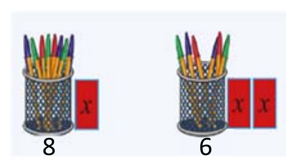
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Решает простые уравнения, применяя свойства равенства.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает уравнение, сводя его к более простому эквивалентному уравнению.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает простые уравнения в множестве целых чисел с неизвестными в обеих частях.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.5. Решение задач составлением уравнений

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.2.4. Использует уравнения и неравенства при решении задач.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Решает задачи, составляя уравнение, содержащее неизвестное с обеих сторон. • Решает задачи, составляя уравнения со скобками.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Решение задачи: *https://video.edu.az/video/12148*

Исследование-обсуждение

Учитель задает ученикам наводящие вопросы:



– Что можно принять за неизвестное для решения задачи путем составления уравнения? Если количество ручек, добавленных в первую карандашницу, равно x, то как можно выразить количество ручек, добавленных во вторую, через x? После сложения ученики определяют, что в первой карандашнице $8 + x$ ручек, а во второй $6 + 2x$ ручек, пишут и решают уравнение $8 + x = 6 + 2x$ при условии, что в обеих карандашницах содержится одинаковое количество ручек. Обсуждается, как можно проверить правильность найденного ответа.

Изучение Решение задач составлением уравнений

Основная цель – выявить способность устанавливать связь между реальной ситуацией и уравнением, а также развивать навык оценивать переменные и числа, данные в уравнении, в контексте ситуации по теме выражения и уравнения с переменными.

Отсутствие соответствующего рисунка может вызвать определенные трудности. Поэтому в учениках стимулируется мотивация к деятельности, связанной с построением уравнений в соответствии с ситуацией и представлением решения задачи с помощью схем и таблиц.

Образец. По условиям задачи, внимание уделяется этапам решения задачи путем составления уравнения, позволяющего найти, сколько футбольных и сколько волейбольных мячей приобретено. Показаны преимущества краткого описания задачи в виде таблицы.

К сведению учителя! При решении задач обращается внимание на то, какую информацию ученик воспринимает как неизвестную. Представление данных в таблице и составление уравнения для решения задачи делает процесс более наглядным.

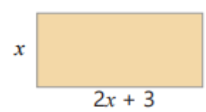
Рекомендуется связывать решение задачи с составлением уравнения в как можно более разнообразных формах представления.
Сопровождение решения задач с составлением уравнений схемами и таблицами позволяет формировать у учеников навыки в более широком спектре. Рекомендуется отдавать предпочтение решению не слишком сложных, средних по уровню задач альтернативными способами.
Слабым в обучении ученикам очень важно правильно подобрать исходную ситуацию. Тем, кто испытывает трудности с записью уравнения к заданной задаче, рекомендуется обращать внимание на этапы решения задачи и составлять письменный план для её решения.

Часто встречающиеся ошибки	Образец	Как можно устранить
При решении текстовых задач неправильное составление уравнения в соответствии с условием.	Например, при составлении уравнения с условием, что возраст Анара в 2 раза больше возраста Самира, записывается равенство, где 2-кратный возраст Анара равен возрасту Самира.	Можно задать вопрос, кто старше, и предложить проверить, соответствует ли составленное уравнение ситуации, подставив вместо переменных числа.

В технически оснащенных классах можно использовать видео пояснения: *https://video.edu.az/video/12148*

Решение задач

1. В задаче требуется найти площадь прямоугольника, если периметр прямоугольника, изображённого на рисунке, равен 36 единицам.



Решение задачи:
Записывается выражение, соответствующее периметру прямоугольника: $2 \cdot (x + 2x + 3)$
Уравнение составлено исходя из условия, что периметр равен 36 единицам: $2(x + 2x + 3) = 36$
Находится корень уравнения: $x = 5$.
Ширина прямоугольника: $x = 5$. Длина прямоугольника: $2{\cdot}5 + 3 = 13$. Площадь прямоугольника: $5 \cdot 13 = 65$.
Ответ. Площадь прямоугольника равна 65 ед. кв.
Обсуждение. Проверяется, что периметр прямоугольника шириной 5 и длиной 13 равен 36.
2. Требуется найти емкость бидона и ведра.
Решение задачи:
Емкость бидона x литров.
Емкость ведра $(x + 4)$ литров.
В 6 бидонах $6x$ литров молока, а в 2 ведрах $2 \cdot (x + 4)$ литров.
По условию молока в 6 бидонах на 4 литра больше, чем в 2 ведрах. Составляется уравнение:

$$6x = 2 \cdot (x + 4) + 4$$

Находится корень уравнения: $x = 3$
Итак, емкость бидона 3 литра. Находится емкость ведра: $3 + 4 = 7$ (литров)
Ответ. Емкость бидона 3 литра, а ведра 7 литров.
Обсуждение. Проверяется, на сколько больше молока в 6 бидонах, чем в 2 ведрах.
3. Требуется найти, сколько стульев и сколько столов было куплено для столовой.
Решение задачи:
Составляется таблица по задаче.

	Число	Цена одного (₼)	Общая цена (₼)
Стол	x	90	$90x$
Стул	$x+15$	40	$40 \cdot (x+15)$

Составляется уравнение по условию:
$90x + 40 \cdot (x + 15) = 1250$
Находится корень уравнения: $x = 5$.
Количество купленных столов: 5 (шт.)
Количество купленных стульев: $5 + 15 = 20$ (шт.)
Ответ. Было куплено 5 столов, 20 стульев.
Обсуждение. Правильность ответа проверяется путем расчета суммы, оплаченной за 5 стульев и 20 стульев.
4. Требуется найти сколько гусей и сколько овец на лугу.

Решение задачи:
Если число овец равно x, то число гусей равно $17 - x$, так как всего голов 17.
Составляется таблица по задаче.

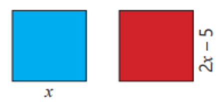
	Число	Кол-во ног
Овцы	x	$4x$
Гуси	$17 - x$	$2\cdot(17 - x)$

Составляется уравнение по условию:
$4x + 2 \cdot (17 - x) = 44$
Находится корень уравнения: $x = 5$.
Число овец: 5.
Число гусей: $17 - 5 = 12$.
Ответ. На лугу 5 овец и 12 гусей.

Образец. Составляется уравнение для определения количества зерна, перевезенного с каждого склада. Уделяется внимание этапам решения задачи. Отмечены преимущества изображения условия задачи на схеме.

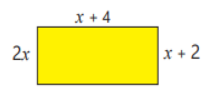
К сведению учителя! Развитие математического языка важно для записи данного утверждения в виде математического выражения. Подробное изложение решения позволяет ученикам понять математическую суть, запомнить и применить полученные знания. Помимо развития навыков соединения математических знаний учеников и перевода его знаний с одного уровня на другой, выполняются задания, предполагающие навыки рисования схематического изображения и составления уравнения для решения задачи и, наоборот, построения задачи по схематическому изображению, а также дают возможность развития навыков иного подхода к одной и той же ситуации. Нецелесообразно переходить к решению очень сложных задач, не убедившись, что ученики усвоили основные правила и приемы. При этом желательно стараться добиться высокого результата.

5. По конгруэнтности квадратов, данных на рисунке, требуется найти площадь и периметр каждого.
Записывается краткое условие задачи.



Сторона синего квадрата: x
Сторона красного квадрата: $2x - 5$
Решение задачи:
Составляется уравнение: $2x - 5 = x$
Находится корень уравнения: $x = 5$
Периметры и площади конгруэнтных квадратов равны.
Периметр: $4 \cdot 5 = 20$.   Площадь: $5^2 = 25$
Ответ. Каждый из квадратов имеет периметр 20 единиц и площадь 25 единичных квадрат.

6. Требуется найти площадь прямоугольника, изображенного на рисунке.
Записывается краткое условие задачи.



Длина прямоугольника: $x + 4$
Ширина прямоугольника: $2x$ или $x + 2$
Решение задачи:
Противоположные стороны прямоугольника равны. Составляется уравнение: $2x = x + 2$
Находится корень уравнения: $x = 2$.
Подставив 2 вместо x, можно найти ширину и длину прямоугольника:
Длина: $2 + 4 = 6$.   Ширина: $2 \cdot 2 = 4$ или $2 + 2 = 4$.
Площадь прямоугольника: $4 \cdot 6 = 24$
Ответ. Площадь прямоугольника 24 единичных квадратов.

Ложные представления, возникающие у учеников. При решении задач с составлением уравнений ученики часто допускают различные ошибки. Устранение этих ошибок важно для дальнейшего развития навыков решения задач с составлением уравнений. Некоторые ученики считают, что решение задачи заключается только в нахождении неизвестного путем решения уравнения. Таких учеников можно попросить быть более внимательными на этапе "Пойми задачу" и сосредоточиться на том, что они должны найти.

Целесообразно выявить учеников, допускающих подобные ошибки при решении задачи 6, и организовать работу над ошибками.

7. Требуется найти цену ручки.
Записывается краткое условие задачи.
Цена ручки: x (манатов)
Самир заплатил: $5 + 2x$
Айнур заплатила: $2 + 4x$
Решение задачи:
Составляется уравнение: $5 + 2x = 2 + 4x$
Находится корень уравнения: $x = 1{,}5$.
Ответ. Цена ручки 1,5 манатов.

8. Требуется найти, через сколько минут после открытия кранов в обоих баках останется одинаковое количество воды. Таблица составляется по условию.

	Объем (л)	Вытекшая за 1 минуту вода (л)	Вода, оставшаяся через x минут(л)
1-й бак	240	6	$240 - 6x$
2- й бак	180	4	$180 - 4x$

Решение задачи:

Составляется уравнение: $240 - 6x = 180 - 4x$

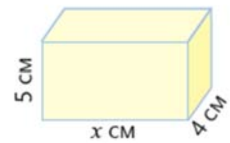
Находится корень уравнения: $x = 30$ (минут).

Ответ. Через 30 минут после открытия в обоих баках осталось одинаковое количество воды.

Обсуждение. Если из бака вместимостью 240 литров каждую минуту вытекает 6 литров воды, то сколько воды останется через 30 минут: $240 - 6 \cdot 30 = 60$ (л). Находится количество воды, оставшейся во втором баке: $180 - 4 \cdot 30 = 60$ (л). Проверяется, что в обоих баках осталось одинаковое количество воды.

9. Требуется найти длину неизвестного ребра кубоида.

Записывается краткое условие задачи.



Длина кубоида: x см

Ширина кубоида: 4 см

Высота кубоида: 5 см

Объем кубоида: $4 \cdot 5 \cdot x$

Площадь поверхности кубоида: $2 \cdot (4x + 5x + 4 \cdot 5)$

Решение задачи:

Составляется уравнение: $20x = 2 \cdot (9x + 20)$

Находится корень уравнения: $x = 20$ (см).

Ответ. Длина неизвестного ребра кубоида 20 см.

Обсуждение. Находится объем и площадь поверхности кубоида, ребра которого равны 4 см, 5 см и 20 см. Проверяется равенство найденных числовых значений объема и поверхности.

10. Требуется найти, сколько километров пути надо проехать, чтобы сумма оплаты за проезд на такси обеих компаний была одинаковой.

Записывается краткое условие задачи.

Такси компании А: первоначальная оплата 2 маната, за каждый километр 0,50 маната, за x километров $0{,}5x$, всего $2 + 0{,}5x$ (манатов).

Такси компании В: первоначальная оплата 3 маната, за каждый километр 0,30 маната, за x км $0{,}3x$, всего $3 + 0{,}3x$ (манатов)

Решение задачи:

Составляется уравнение: $2 + 0{,}5x = 3 + 0{,}3x$

Находится корень уравнения: $x = 5$

Ответ. На расстояние 5 км сумма, оплачиваемая за такси обеих компаний, одинакова.

Обсуждение. Вычисляется сумма, уплаченная за поездку на обеих такси при пройденном расстоянии в 5 км, и проверяется равенство сумм. Обсуждение можно продолжить в следующем направлении: если расстояние больше 5 км, такси какой компании выгоднее использовать? Или, если пройдено меньше 5 км, какое такси выгоднее?

11. Требуется найти, сколько винограда было изначально в ящике и корзине.

Записывается краткое условие задачи.

Изначально в корзине было x кг, а в ящике $3x$ кг винограда.

После того как из ящика взяли 2 кг винограда и добавили в корзину, в корзине стало $(x + 2)$ кг, а в ящике осталось $(3x - 2)$ кг винограда.

Решение задачи:

Составляется уравнение: $3x - 2 = x + 2$

Находится корень уравнения: $x = 2$

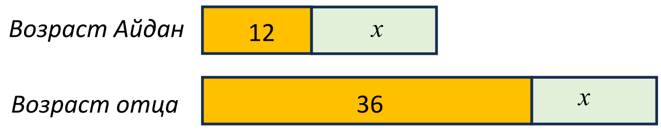
Значит, в корзине оказалось 2 кг, а в ящике — $3 \cdot 2$ кг = 6 кг винограда.

Ответ. Изначально в корзине было 2 кг винограда, а в ящике 6 кг.

Обсуждение. После того как из ящика переложили 2 кг винограда, из оставшихся 6 кг, в корзину, подсчитывают количество винограда в корзине и проверяют равенство результатов.

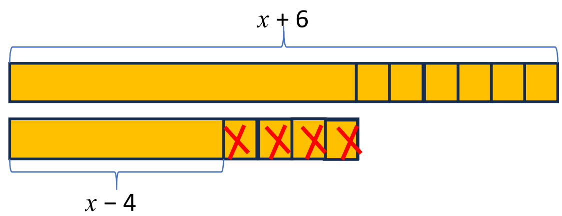
12. Требуется найти, через сколько лет отца будет вдвое старше Айдан.

Записывается краткое условие задачи.
Возраст Айдан через x лет: $12 + x$
Возраст отца через x лет: $36 + x$
Решение задачи:
Составляется уравнение: $36 + x = 2 \cdot (12 + x)$
Находится корень уравнения: $x = 12$.
Ответ. Через 12 лет отец будет вдвое старше Айдан.
Обсуждение. Подсчитывается и сравнивается возраст каждого из них через 12 лет.



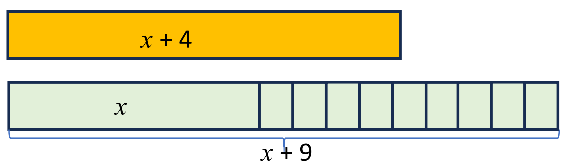
13. Требуется найти массу кошки, овцы и петуха.
Записывается краткое условие задачи.
Масса петуха: x кг
Масса кошки: $(x + 2)$ кг
Масса овцы: $5x$ кг.
Масса овцы и петуха: $5x + x$
Решение задачи:
Составляется уравнение: $5x + x = 3 \cdot (x + 2)$
Находится корень уравнения: $x = 2$
Подставляется $x = 2$ и вычисляются массы. Масса кошки: 2 + 2=4 (кг). Масса овцы: $5 \cdot 2 = 10$ (кг).
Ответ. Масса петуха 2 кг, кошки 4 кг, овцы 10 кг.
Обсуждение. Проверяется, что масса петуха и овцы, вместе взятая в 3 раза больше массы кошки.

14. Требуется найти, сколько книг стояло на каждой полке изначально.
Удобно представить краткое условие задачи в виде схемы.
Решение задачи:
Составляется уравнение: $x + 6 = 2 \cdot (x - 4)$
Находится корень уравнения: $x = 14$



Ответ. Изначально на каждой полке было 14 книг.
Обсуждение. Из каждой из двух полок, на которых по 14 книг, берут 6 книг с одной и 4 книги с другой, после чего вычисляют, сколько книг осталось на каждой полке, и проверяют правильность ответа.

15. Требуется найти, сколько сборников стихов находится в книжном шкафу.
Краткое условие задачи показывается схемой.
Составляется уравнение: $\frac{x+4}{x+9} = \frac{2}{3}$
Находится корень уравнения: $x = 6$
Число сборников стихов: 6 + 4 = 10



Ответ. В шкафу 10 сборников стихов.
Обсуждение. Когда в шкафу лежат 6 сборников рассказов и 10 сборников стихов, и после помещения туда 9 сборников рассказов проверяется, что количество сборников стихов находится в отношении 2 : 3 к количеству сборников рассказов

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Решает задачи, составляя уравнение, содержащее неизвестное с обеих сторон.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачи, составляя уравнения со скобками.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.6. Неравенства

ПОДСТАНДАРТЫ	6-2.2.1. Записывает простое неравенство (включающее целые числа), соответствующее ситуации, описывает ситуацию, соответствующую неравенству. 6-2.2.2. Решает простое неравенство методом подбора. 6-2.2.4. Использует уравнения и неравенства при решении задач.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Записывает неравенство с переменной, соответствующее словесному утверждению. • Изображает решение простых неравенств на числовой оси. • Находит целые решения неравенств с переменной методом подбора.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/ns2xr6na* *https://www.geogebra.org/m/t48PNuJa* *https://www.geogebra.org/m/TbJs2hGs* *https://video.edu.az/video/4469* *https://video.edu.az/video/4532* *https://video.edu.az/video/11256* *https://video.edu.az/video/9876* *https://youtu.be/dTwZ5N126gw* *https://youtu.be/xe6TO45kLL4* Задание: *https://www.geogebra.org/m/ehb88cec* *https://www.geogebra.org/m/vqpw6fm5* *https://www.geogebra.org/m/wv79hecy* *https://www.geogebra.org/m/ehb88cec* *https://www.mathnook.com/math2/number-line-inequalities.html*

Побуждение.

Учитель задает вопрос: по какую сторону оси координат находятся положительные числа от начала координат? Какие числа стоят слева от начала координат? Объясняется значение $a > 0$, $a < 0$, $a \le 0$, $a \ge 0$. Проверяются знания учеников о знаках неравенства.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://www.geogebra.org/m/ns2xr6na

Исследование-обсуждение

Менеджер по продажам магазина получает бонус в размере 30 манатов за каждый проданный в течение месяца кондиционер.

● Ученики подсчитывают бонус в зависимости от количества проданных кондиционеров и составляют таблицу, по которой определяют, что при продаже 6 кондиционеров бонус составит 6·30 манатов = 180 манатов, а при продаже 7 кондиционеров 7·30 = 210 манатов.

Количество проданных кондиционеров	1	2	3	4	5	6	7
Бонус (₼)	30	60	90	120	150	180	210

В ходе обсуждений установлено, что бонус составляет более 200 манатов при продаже 7 и более кондиционеров. Другими словами, чтобы бонус превысил 200 манатов, необходимо продать как минимум 7 кондиционеров.

● Обозначив количество проданных кондиционеров n, записывается неравенство, соответствующее данному утверждению. Бонус, полученный от продажи n кондиционеров, составляет $7n$ и по условиям должен составлять более 200 манатов. Соответствующее неравенство запишется как $7n > 200$

Изучение Решение неравенства на множестве целых чисел

Отмечается, что для решения некоторых задач необходимо искать целые решения неравенства с учетом тех значений, которые может принимать переменная в записанных неравенствах. Например, согласно утверждению «количество стикеров меньше 4», можно написать неравенство n <4, обозначив их количество через n. Целыми решениями этого неравенства могут быть 3, 2, 1 и 0. На примерах, приведенных в учебнике, обсуждаются проверка целых чисел, удовлетворяющих простому неравенству, и

задания, связанные с записью решения на числовой оси. Проверяется, какое из соответствующих числовых неравенств верно, а какое нет, и на основании этого являются ли данные числа решениями неравенства.
Уделяется внимание изображению решения неравенств на числовой оси. Напоминается, что числа справа от данного числа на числовой оси больше этого числа, а числа слева – меньше. При изображении неравенства на числовой оси особо отмечают, что используется маленькая окружность или маленький кружок в зависимости от того, принадлежит число решению или нет.

Все целые числа, расположенные правее числа −2 на числовой оси, являются решениями неравенства x > −2.

Все целые числа, расположенные левее числа −1 на числовой оси, являются решениями неравенства x ≤ −1.

Подумай! Обсуждается, какие целые числа не являются решениями неравенства x ≤ −2. Решение неравенства с этими числами записывается как x> −2.

Задания

1. Определяется числовая ось, соответствующая неравенствам. Обращается внимание на то, отмечена ли на числовой оси правая или левая часть числа −4, принадлежит ли число −4 решению и отмечено ли оно кружком или окружностью соответственно.
2. Находятся три целых числа, удовлетворяющих заданному неравенству. Решение изображается на числовой оси. Показываются два целых числа, не удовлетворяющих неравенству.

В заданиях 3 и 4 находятся наибольшее и наименьшее целые числа, удовлетворяющие заданному неравенству, решение неравенства изображается на числовой оси. Задачи, связанные с нахождением наибольшего и наименьшего значений, удовлетворяющих неравенству, решались ранее. Здесь аналогичные задачи рассматриваются на множестве целых чисел

Изучение Проверка решения неравенства

Отмечается, что решение неравенства – это любое значение переменной, которое преобразует неравенство в истинное числовое неравенство. Чтобы проверить, что данное число является решением неравенства, необходимо вместо переменной записать это число и проверить, верно или нет полученное числовое неравенство. Представленные образцы заданий обсуждаются с учениками.
В 5-м задании из заданных значений переменной путем записи и проверки выбираются те, которые удовлетворяют неравенству.
Представлены исторические сведения, связанные с понятием неравенства. Приведены сведения о первом использовании современных знаков неравенства.
К сведению учителя! С предыдущих классов у учеников начала формироваться навыки записи неравенства с переменной, соответствующее утверждению. Здесь эти навыки развиваются дальше. При обсуждении с учениками примеров, приведенных в учебнике, внимание обращается на значения таких слов, как «меньше», «больше», «не меньше», «не больше» и т.д. Какой математический символ выбран согласно этим словам, обсуждается с учениками.
Рекомендуется сосредоточить внимание на заданиях, связанных с поиском наибольшего или наименьшего целого решения, удовлетворяющего неравенству. Например, чтобы найти наименьшее целое решение неравенства, $n + 30 > 70$, можно предложить ученикам сначала решить уравнение $n + 30 = 70$. Затем целесообразно предложить им проверить, удовлетворяет ли найденное значение, а также целые числа до и после этого значения заданному неравенству, и попросить их высказать свое мнение на основе этих проверок.
Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторым ученикам сложно проверить правильность неравенства, подставив заданное значение переменной, особенно когда эти значения являются отрицательными числами. С этими учениками важно организовать работу над ошибками.

Часто встречающиеся ошибки	Образец	Как можно устранить
Допускает ошибки при записи неравенства и изображении решения на числовой оси.	Например, возникают трудности при определении знаков неравенства, соответствующих предложениям «меньше», «не больше», «не менее».	Целесообразно уделять больше времени написанию и решению неравенств, а также дать им задание рассказать ситуацию, соответствующую данному неравенству.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. На доске записывается несколько неравенств. Ученикам предлагается прочитать эти неравенства, изобразить их на числовой оси и найти несколько решений методом подбора.

Углубление. Одному из учеников предлагается сформулировать мысль для записи неравенства, а другому — написать неравенство соответственно этой мысли, изобразить его на числовой оси и найти несколько решений.

Решение задач

6. Требуется найти с помощью каких неравенств можно выразить количество всех людей на корабле. Поскольку в условии указано, что общая численность не может превышать 175 человек, то это число может быть меньше 175 человек или равно 175.

Поэтому отмечается использование знака ≤, и определяется, что соответствующее неравенство записывается в виде $n + 10 \leq 175$.

Ответ. $n + 10 \leq 175$.

Считается целесообразным обсудить с учениками максимальное количество пассажиров.

7. Переменную обозначают определенной буквой и записывают соответствующее неравенство.

а) Температура воздуха обозначается T. Температура ниже 0°C, то есть меньше 0: $T < 0$

б) Рыбную продукцию следует хранить при температуре не выше -12°C. То есть температура не может превышать -12°C и ее числовое значение должно быть не более -12: T ≤ -12.

в) Длина стороны равнобедренного треугольника с основанием 6 см обозначается через x. Согласно условию, что периметр больше 18 см, записывается неравенство 6 + $2x >$ 18. Целесообразно найти несколько целых чисел, удовлетворяющих этому неравенству. Для этого рекомендуется задавать наводящие вопросы. Например, может ли x = 6? Каково наименьшее целое значение x?

г) Масса пустой корзины 1 кг. Массу корзины с яблоками обозначим через m. Записывается выражение для массы вместе с корзиной: m + 1. По условию общая масса не меньше 9 кг, то есть больше 9 кг или равна 9 кг. Поэтому записывается неравенство m + 1 ≥ 9. Показываются несколько значений, которые может принимать переменная.

8. В соответствии с данным утверждением записывается неравенство T ≥ −15.

На основании того, удовлетворяет ли он неравенству, определяют, что этот комплект нельзя использовать при температуре -20°C. Его можно использовать при температуре воздуха -15°C, -8°C, 0°C, 5°C.

-15 — наименьшее целое число, удовлетворяющее записанному неравенству. То есть использовать данный комплект допустимо при температуре не ниже -15°C.

9. В задаче требуется написать неравенство по количеству наклеек Самира, найти, какому из заданных чисел равно количество его наклеек, определить минимальное количество наклеек, которые он может иметь.

Решение задачи:

• Записывается неравенство по количеству наклеек: $x + 30$ > 70

• Проверяется, какое из заданных чисел удовлетворяет неравенству.

Исходное количество наклеек не может быть 25, поскольку 25 не удовлетворяет неравенству: 25 + 40 <70.

Исходное количество наклеек может быть 50, потому что при 50 неравенство верно: $50 + 30$ > 70

• Корень уравнения x + 30 = 70 равен 40. Число 40 не удовлетворяет неравенству, а число 41 удовлетворяет: 41 + 30 > 70. Значит, количество исходных наклеек может быть не меньше 41.

10. В задаче требуется написать неравенство, соответствующее числу, которое задумала Айнур, чтобы найти наибольшее целое число, которое она могла задумать.

Решение задачи:

• Задуманное число обозначается x. Прибавление 4 к этому числу дает сумму меньше 0: x + 4 <0.

• Находится несколько целых чисел, удовлетворяющих неравенству: -7; -6; -5. Путем проверки устанавливается, что число -4 не является решением неравенства. Значит, наибольшее целое решение равно -5. То есть наибольшее целое число, которое можно рассматривать, может быть равно -5.

11. По условию задачи, требуется написать неравенство по количеству парковочных мест, чтобы найти возможное количество новых парковочных мест.

Решение задачи:

• Число новых парковочных мест обозначается n и записывается соответствующее неравенство: $n + 5 < 9$

• Числа 1, 2, 3 удовлетворяют неравенству. Так, количество новых парковочных мест может быть 1, 2 или 3.

12. Записывается неравенство, соответствующее цене футболки, и находится наибольшее целое решение неравенства. Требуется определить максимальную цену продажи футболки.

Решение задачи:

• Цена футболки обозначается x и записывается соответствующее неравенство: $x < 12{,}50$.

• Наибольшее целое решение — 12.

• Поскольку наименьшая денежная единица равна 1 гяпику, цена продажи может составлять максимум 12 манатов 49 гяпиков.

13. В задаче требуется сформулировать ситуацию, соответствующую данному неравенству, объяснить, что представляет собой переменная, и показать несколько целых чисел, которые может принимать переменная в зависимости от ситуации.

К сведению учителя! Важно развивать математический язык и навыки понимания прочитанного, чтобы решить задачу согласно заданному неравенству. Ученики должны уметь определять, что представляет собой переменная и какие значения она может принимать в подходящей ситуации. Целесообразно организовать обмен мнениями, сравнивая различные задачи, составленные по одному и тому же неравенству.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Записывает неравенство с переменной, соответствующее словесному утверждению.	Рабочие листы, учебник, РТ
Изображает решение простых неравенств на числовой оси.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит целые решения неравенств с переменной методом подбора.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. С учениками повторяются понятия, данные в заключении главы учебника. Слова, изученные в разделе, учитель напоминает ученикам. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Постоянное, коэффициент, буквенная часть, подобные слагаемые, приведение подобных слагаемых, общий множитель, эквивалентные уравнения, эквивалентность

Решение исходной задачи. Напоминается приведенная на первой странице раздела информация и задание «Попытайтесь!», история математических задач, связанных с повседневной жизнью, а также отмечается, что введение буквенных обозначений упрощает моделирование и решение проблем связанных с реальными ситуациями с помощью уравнений и неравенств. Решение исходной задачи обсуждается с классом. Краткое условие задачи состоит в том, что выражения пишутся по сумме, оплаченной за t минут разговора в месяц по каждому тарифу. Подсчитывается и сравнивается сумма, оплачиваемая по каждому тарифу за 100 минут разговора в месяц. Записав равенство выражений, соответствующих суммам, и решив полученное уравнение, определяют, что сумма денег, оплачиваемая по обоим тарифам, будет одинаковой при наличии 150 минут разговоров в месяц. Записав в соответствующее выражение t = 600 и сравнив полученную цену с 50, определяют, что клиент, выбравший 1-й тариф, может разговаривать 600 минут, заплатив 50 манатов. Целесообразно обсудить с учениками, можно ли ответить на вопрос, написав неравенство по заданному условию и определив, удовлетворяет ли этому неравенству число 600.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

11. Напоминается основное свойство пропорции, и уравнения решаются с использованием этого свойства.

в) $\frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{2}$

$2\cdot(x-3) = 1\cdot(x+1)$ *Применяется основное свойство пропорции*

$2x - 6 = x + 1$ *Упрощается*

$2x - x = 1 + 6$ *Находится корень уравнения*

$x = 7$

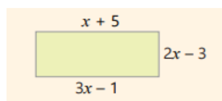
Записывается корень уравнения и проверяется.

$\frac{7-3}{7+1} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ответ. $x = 7$

12. Составив и решив уравнение, отвечают на вопросы.

13. В задаче требуется найти стороны прямоугольника, вычислить его периметр и площадь по данным на рисунке.



Решение задачи.

Исходя из равенства противоположных сторон прямоугольника, записывается уравнение: $3x - 1 = x + 5$

Находится корень уравнения: $x = 3$

Подставляя значение неизвестной, находятся длина и ширина прямоугольника.

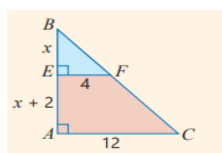
Длина прямоугольника: $x + 5 = 3 + 5 = 8$. Ширина прямоугольника: $2x - 3 = 2\cdot 3 - 3 = 3$.

Периметр и площадь прямоугольника вычисляются по найденным длине и ширине.

Периметр прямоугольника: $2\cdot(8 + 3) = 22$. Площадь прямоугольника: $8\cdot 3 = 24$.

Ответ. Стороны прямоугольника равны 8 и 3 единицам, периметр 22 единицы, площадь 24 ед. кв.

14. В задаче требуется выразить площади треугольников и трапеций через переменные, вычислить площадь трапеции $AEFC$ при заданном значении переменной и узнать, при каком значении переменной площадь трапеции равна 40 единичным квадратам.



Привлечение. Формула площади прямоугольного треугольника, ее вывод напоминаются. Учитель задает вопрос: Как найти площадь трапеции, если в этой задаче известны площади большого и малого прямоугольных треугольников? Ученики приходят к выводу, что для этого необходимо найти разность площадей.

Решение задачи.

• Выражение для площади треугольника EBF записывается и упрощается: $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x = 2x$

Выражение для катета AB треугольника ABC записывается и упрощается: $x + 2 + x = 2x + 2$

Выражение для площади треугольника ABC записывается и упрощается:

$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot(2x + 2) = 6\cdot 2\cdot(x + 1) = 12(x + 1) = 12x + 12$

● Представив ее как разность площадей, площадь трапеции $AEFC$ выражается через x и полученное выражение упрощается: $12x + 12 - 2x = 10x + 12$

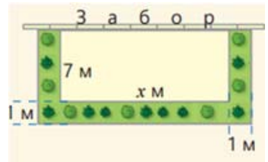
● Вычисляется площадь трапеции при $x = 3$: $10 \cdot 3 + 12 = 42$ (ед. кв.)

● Составляется уравнение, исходя из условия, что площадь трапеции равна 40 ед. кв.: $10x + 12 = 40$

Находится корень уравнения: $x = 2{,}8$

Ответ. Площадь треугольника EBF равна $2x$, площадь треугольника ABC равна $12x + 12$, а площадь трапеции $AEFC$ вычисляется по выражению $10x + 12$. При $x = 3$ площадь трапеции составляет 42 ед. кв., а при значении переменной $x = 2{,}8$ равна 40 ед. кв.

15. В задаче требуется написать выражение с переменной для расчета площади газона, чтобы по заданному значению площади газона найти площадь здания.



Решение задачи.

● По данным на рисунке определяются размеры прямоугольного двора.

Ширина двора: $7 + 1 = 8$ (м). Длина двора: $1 + x + 1 = x + 2$ (м)

Записывается выражение для общей площади двора: $8 \cdot (x + 2)$

Записывается выражение для площади здания: $7x$

Выражение для площади газона записывается и упрощается путем вычитания площади здания из общей площади двора: $8 \cdot (x + 2) - 7x = 8x + 16 - 7x = x + 16$

● Составляется уравнение, исходя из условия, что площадь двора равна 30 м^2: $x + 16 = 30$

Находится корень уравнения: $x = 14$

Площадь здания рассчитывается путем подстановки найденного значения переменной: $7 \cdot 14 = 84$ (м^2)

Ответ. Выражение для площади газона $x+16$, площадь здания 84 м^2.

16. В задаче требуется найти, сколько молока было изначально в каждом бидоне, перелив 5 литров молока из одного бидона с вдвое большим количеством молока в другой, зная, что в обоих бидонах стало одинаковое количество молока.

Решение задачи.

Краткое условие задачи представляется в виде таблицы.

	Исходное молоко (л)	Полученное молоко (л)
1-й бидон	$2x$	$2x - 5$
2-й бидон	x	$x + 5$

Записывается уравнение по условию: $2x - 5 = x + 5$

Находится корень уравнения: $x = 10$

Изначально во втором бидоне было 10 литров,

а в первом $2 \cdot 10$ литров = 20 литров молока.

Ответ. Изначально в бидонах было 10 и 20 литров молока.

17. По данным задачи требуется найти, сколько человек размещается в палатках, и если общее количество мест 22, то сколько палаток пятиместные.

Решение задачи.

● В a трехместных палатках $3a$ места, в b пятиместных палатках $5b$. Выражение для общего количества мест записывается: $3a + 5b$

● Вычисляется общее число мест при $a = 5$, $b = 4$: $3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 35$

● При условии, что общее количество мест равно 22, записывается уравнение: $3a + 5b = 22$

Ведется обсуждение о том, какие натуральные числа удовлетворяют записанному уравнению. Записывая и проверяя поочередно, определяется, что $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$ быть не может. Потому что при подстановке этих значений найденное значение b не является натуральным числом. При $a = 4$ находится $b = 2$. Проверяется, что равенство не выполняется при других значениях переменных. Так, если количество трехместных палаток 4, а количество пятиместных 2, то общее количество мест составит 22.

Ответ. Две палатки пятиместные.

18. В задаче требуется написать выражение, соответствующее сумме, оплаченной за кафельную и керамическую плитки, приобретенные после скидки 20%, и посчитать, сколько манатов было заплачено за приобретенный товар, исходя из приведенных цен за 1 квадратный метр.

Решение задачи.

● При снижении цен на 20% цена 1 м^2 кафельной плитки составит $p - 0{,}2p = 0{,}8p$ манатов, а цена 1 м^2 керамической плитки составит $q - 0{,}2q = 0{,}8q$ манатов.

Выражение, соответствующее деньгам, заплаченным за 10 м^2 кафельной плитки: $10 \cdot 0{,}8p = 8p$

Выражение, соответствующее деньгам, заплаченным за 20 м^2 керамической плитки: $20 \cdot 0{,}8q = 16q$

Выражение, соответствующее общей сумме, оплаченной за приобретенный товар после скидки: $8p + 16q$

● Вычисляется значение выражения при $p = 30$, $q = 18$: $8 \cdot 30 + 16 \cdot 18 = 528$

Ответ. За товары, купленные после скидки, необходимо заплатить 528 манатов.

19. Записываются неравенства в соответствии с утверждениями.
а) Температура обозначается Т. По условию температура не выше -18°C, то есть либо равна, либо ниже -18°C. Подходящее неравенство: $T \leq -18$.
б) Массу сока в стеклянной банке обозначают m. Учитывая, что масса пустой банки 0,4 кг, находится масса с соком: m + 0,4. Подходящее неравенство: $m + 0{,}4 > 9$
в) Если изначальная высота воды в бассейне была h метров, то при ее падении на 0,5 метра уровень воды будет h – 0,5. По условию уровень воды был не более 2,2 м. Подходящее неравенство: $h - 0{,}5 \leq 2{,}2$
21. Если температура воздуха повысится на 4°C, то она составит не менее -2°C. Требуется найти минимальную температуру воздуха, определив по заданным числам подходящую.
Решение задачи.
Температура воздуха обозначается Т. Если температура повысится на 4°C, это будет Т + 4 (°C). По условию температура была не ниже -2°C. Соответствующее неравенство: Т + 4 ≥ -2
Вместо переменной записываются заданные числа и проверяется полученное числовое неравенство.

T	-8	-6	-4	0	2
Значение выражения $T+4$	-4	-2	0	4	6
Подходящее числовое неравенство	-4 ≥ -2 ✗	-2 ≥ -2 ✓	0 ≥ -2 ✓	4 ≥ -2 ✓	6 ≥ -2 ✓

Ответ. Температура воздуха не ниже -6°C.
22. В задаче требуется узнать, сколько рыбок в аквариуме.
Решение задачи.
Составляется таблица по условию.
По условию отношение количества неоновых рыбок к количеству золотых рыбок составляло 4 : 3.

	Изначальное количество	Полученное количество
Золотые рыбки	x	$x + 1$
Неоновые рыбки	$x + 3$	$x + 3$

Записывается уравнение:
$\frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\cdot(x+3) = 4\cdot(x+1) \Rightarrow 3x + 9 = 4x + 4$
Находится корень уравнения: $x = 5$
Количество золотых рыбок: $x + 1 \to 5 + 1 = 6$
Количество неоновых рыбок: $x + 3 \to 5 + 3 = 8$.
Общее количество рыбок в аквариуме: 6 + 8 = 14
Ответ. В аквариуме стало 14 рыбок.
23. В задаче требуется найти массу запаса сухого молока в лагере геологов.
Решение задачи.
По условию задачи, если в день употребить x кг, то сухого молока хватит на 24 дня, если в день употребить на 0,25 кг меньше, т.е. (x – 0,25) кг, то хватит на 36 дней. Итак, выражение для количества сухого молока можно записать как $24x$ или $36 \cdot (x - 0{,}25)$.
Записывается уравнение: $24x = 36 \cdot (x - 0{,}25)$
Находится корень уравнения: $x = 0{,}75$
Если ежедневно потребляется 0,75 кг и хватает на 24 дня, то запас сухого молока составляет
$24 \cdot 0{,}75 = 18$ кг.
Ответ. Масса запаса сухого молока 18 кг.
Обсуждение. Обсуждаются другие способы решения задачи.
Например, пусть масса запаса сухого молока равна x кг.
Если его хватает на 24 дня, то суточное потребление составляет $\frac{x}{24}$ кг.
Чтобы запас молока хватил на 36 дней, суточное потребление должно составлять $\frac{x}{36}$ кг.
На основе разницы в ежедневных расходах составляется уравнение: $\frac{x}{24} - \frac{x}{36} = 0{,}25$
Находится корень уравнения. Он сравнивается с ответом, найденным предыдущим способом.
24. Составляются и решаются различные задачи, связанные с каждым уравнением или неравенством.

Математическое моделирование

Ученики знакомятся с математическими моделями, применяемыми в науки и различных областях жизни.

В частном случае представлена модель роста населения, предложенная Мальтусом. Согласно этой модели, если численность населения равна N_0, отмечается, что численность населения через 1 год можно найти по формуле $N = N_0 + k \cdot N_0$ (где k – коэффициент прироста).

1. Исходя из того, что численность населения Азербайджана в 2022 году составила 10 063 300 человек, а в 2023 году – 10 127 100, эти значения подставляются в уравнение $N = N_0 + k \cdot N_0$: 10 127 100 = 10 063 300 + 10 063 300 · k

Здесь находится коэффициент k: k = 0,0063398686

Найденное значение округляется до тысячных: $k \approx 0{,}006$.

Если рост будет продолжаться с той же скоростью, то численность населения в 2024 году составит:

$N_{2024} = N_{2023} + k \cdot N_{2023}$ = 10 127 100 + 0,006 · 10 127 100 ≈ 10187862 (человек)

Целесообразно предоставить ссылки, которыми могут воспользоваться ученики.

https://youtu.be/r1ywppAJ1xs

https://youtu.be/vVmAb8N5nQY

2. Организуется дискуссия на тему продовольственного кризиса и причин дефицита продовольствия в мире.
3. Собирается информация о Всемирной продовольственной программе ООН и готовится презентация.
4. В интернете проводятся исследования математических моделей и их применения в различных областях.

7-й РАЗДЕЛ — Треугольники

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	52	
Тема 7.1	Медиана, биссектриса и высота треугольника	2	53	35
Тема 7.2	Признаки конгруэнтности треугольника	3	57	38
Тема 7.3	Параллельность прямых	2	64	42
Тема 7.4	Сумма углов треугольника	3	68	45
Тема 7.5	Построение треугольника по трем сторонам	2	72	47
	Обобщающий урок. STEAM. “Геодезические купола”	2	78	50
	МСО-5	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ В РАЗДЕЛЕ	**16**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики познакомятся с медианой, биссектрисой и высотой треугольника, признаками конгруэнтности треугольников, пересечением двух прямых на плоскости с третьей, суммой внутренних углов треугольника, свойством внешнего угла, правилом построения треугольника по трем его сторонам. Применяя эти правила, будут выполняться различные задания.

На что стоит обратить внимание?

Важно обратить внимание на понятия медианы, биссектрисы и высоты в треугольнике, их отличия и навыки, которые будут изучаться в 6 классе, связанные с этими понятиями.

Ученики научатся обосновывать некоторые свойства треугольников, используя признаки эквивалентности треугольников. Ученики, умеющие правильно использовать эти признаки для обоснования, в дальнейшем легко усваивают и признаки сходства.

Дифференциация видов углов, образованных двумя прямыми с секущей, правильное использование признаков параллельности имеет важное значение для формирования у учеников навыков решения задач путем применения этих признаков.

Ученики знакомятся с правилом построения треугольников по двум сторонам и углу между ними, одной стороне и углам, прилежащим к ней. На формирование этого навыка рекомендуется обратить внимание у учеников, испытывающих затруднения, поскольку циркуль используется для построения треугольника по трем сторонам, в отличие от двух других случаев.

В этом разделе ученики узнают, как использовать таблицу обоснования из двух столбцов. В дальнейшем эта таблица будет расширена для доказательства теорем. Поскольку обоснование проводится с использованием знаний, полученных учениками в ходе раздела, целесообразно обратить внимание правильному составлению данной таблицы, а также точности используемых понятий и предложений.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий *“медиана треугольника”, “биссектриса треугольника”, “высота треугольника”, “признаки конгруэнтности”, “секущая”,” соответственные углы”,” внутренние накрест лежащие углы”,” внешние накрест лежащие углы”,” внутренние односторонние углы”, “признаки параллельности”,” внешние односторонние углы”, “внутренний угол треугольника”,” внешний угол треугольника”* дает основу для оценивания того, насколько освоены эти понятия.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

“Высота треугольника”, “медиана треугольника”, “биссектриса треугольника”, “признаки конгруэнтности”, “секущая”,” соответственные углы”,” накрест лежащие углы”,” односторонние углы”, “внутренний угол треугольника”,” внешний угол треугольника”

Необходимые предварительные знания и навыки:

• Свойства смежных и вертикальных углов • Биссектриса угла
• Параллельные и перпендикулярные прямые • Виды треугольников по углам и сторонам
• Построение треугольника по углу между двумя сторонами, одной стороной и двумя смежными углами.

Междисциплинарная интеграция

Плоские фигуры используются в производственных процессах, таких как резка и формование, для создания компонентов и изделий из плоских материалов, таких как металлические листы, пластиковые панели и ткань. Плоские фигуры широко используются для изображения форм рельефа, стран или других географических объектов на картах, а также в архитектурном дизайне и городском планировании.

ТЕМА 7.1. Медиана, биссектриса и высота треугольника

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.2.3. Объясняет понятия медианы, биссектрисы и высоты в треугольнике.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятия медианы в треугольнике. • Объясняет понятия биссектрисы в треугольнике. • Объясняет понятия высоты в треугольнике.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, ножницы, линейка, карты
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://video.edu.az/video/13428* *https://video.edu.az/video/14028* *https://www.geogebra.org/m/k9z2c5ap*

Обсуждение исходной задачи. Обсуждается задача, представленная на первой странице раздела. Ученики могут строить треугольники из одинаковых палочек и сделать модель моста, как показано на рисунке. Знакомятся с заданием «Попытайтесь!». Они пытаются выполнить задание, используя свои предыдущие знания. Учитель сообщает ученикам, у которых возникают проблемы, что они могут решить некоторые вопросы на основе знаний, полученных в ходе раздела, и что задание будет снова обсуждено в конце раздела.

Побуждение. Ученикам дается задание вырезать из бумаги треугольник и назвать его ABC. Ученики группируются по счету 1, 2, 3. Каждый ученик выполняет задание согласно присвоенному ему номеру.

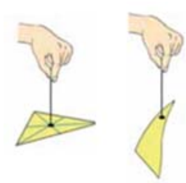
1. Эти ученики находят, как можно показать биссектрисы угла вершины, сложив треугольник.
2. Эти ученики находят середину одной стороны и складывают лист, соединив с этой точкой противоположную вершину.
3. Эти ученики выбирают вершину и проводят перпендикуляр к противоположной стороне. Ученики научились чертить перпендикуляр в 5-м классе. Рекомендуется напомнить правило.

Ученики с номерами 1 и 2 не должны пользоваться линейкой при выполнении заданий. После выполнения задания проверяется правильность с помощью линейки и транспортира.

К каждому заданию учитель может задать наводящие вопросы: – Как можно сложить треугольник, чтобы найти биссектрису угла? Как найти отрезок, соединяющий одну вершину треугольника с серединой противоположной стороны, сложив треугольник? Как можно начертить высоту треугольника?

В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы:
https://youtu.be/xT40JmrPqyk

Исследование-обсуждение

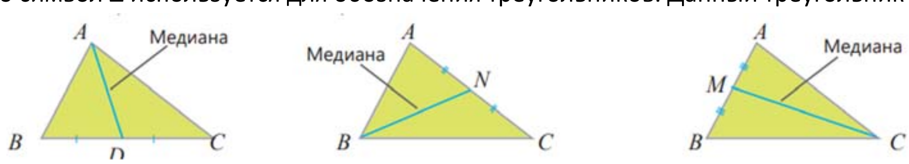


Практическое задание выполняется поэтапно в соответствии с ходом работы. Задание можно выполнить в форме групповой работы. Ученикам можно задать разрезать остроугольные, прямоугольные, тупоугольные треугольники в соответствии с условиями. Ученики наблюдают, как каждый треугольник висит на веревке, и пытаются объяснить, почему он расположен именно так. Ученики увидят, что точка, в которой треугольник свисает с веревки параллельно полу, когда она равноудалена от вершин, и криво, когда она находится близко к одной из вершин и далеко от других.

Задачу можно выполнить не только с веревкой, но и с карандашом. Пытаются удержать каждый треугольник на карандаше так, как показано на рисунке, с учетом указанной точки для каждого треугольника.

Изучение Медианы треугольника

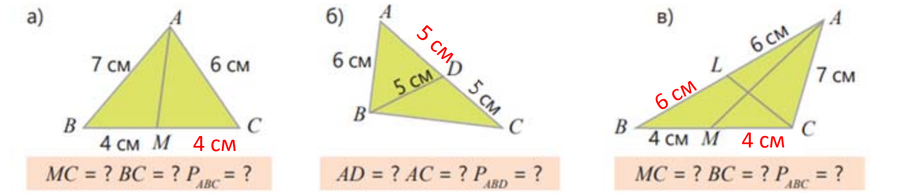
Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой, проведенной из данной вершины треугольника. Ученикам демонстрируются приведенные в учебнике образцы изображений медианы, проведенной из каждой вершины треугольника. Ученикам сообщают, что произвольный треугольник имеет 3 медианы и они пересекаются в 1 точке. Обратите внимание, что символ Δ используется для обозначения треугольников. Данный треугольник называется.



В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/beg3tqv5

Задания

2. Определяются длины отрезков. Вычисляется периметр.

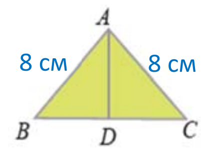


MC = 4 см
$BC = 4 \cdot 2 = 8$ (см)
$P_{ABC} = 7 + 8 + 6 = 21$ (см)

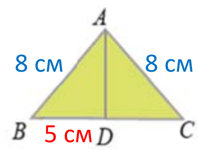
AD = 4 см
$AC = 5 \cdot 2 = 10$ (см)
$P_{ABD} = 5 + 5 + 6 = 16$ (см)

MC = 4 см
$BC = 4 \cdot 2 = 8$ (см)
$P_{ABC} = 12 + 8 + 7 = 27$ (см)

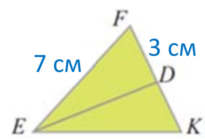
3. Отрезок AD является медианой равнобедренного треугольника ABC. По данной информации на треугольнике отмечаются размеры соответствующих сторон.
Записывается краткое условие задачи.



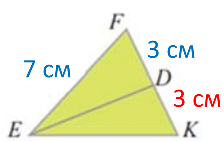
P_{ABC} = 26 см
$AB = AC$ = 8 см
BD – ?
Решение задачи.
• Находится длина отрезка BC. $BC = 26 - 8 \cdot 2 = 10$ (см)
• AD медиана, тогда
$BD = DC$; $BD = 10 : 2 = 5$ (см)
Ответ. Длина отрезка BD равна 5 см.



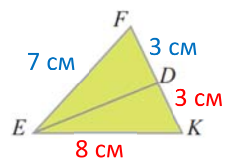
4. В задаче требуется найти, сколько сантиметров составляет сторона EK.
Записывается краткое условие задачи.



P_{EFK} = 21 см; EF = 7 см
FD – короче EF на 4 см
EK – ?
Решение задачи.
• $FD = 7 - 4 = 3$ (см)
• ED медиана, тогда
$FD = DK = 3$ (см)
$FK = 3 \cdot 2 = 6$ (см)

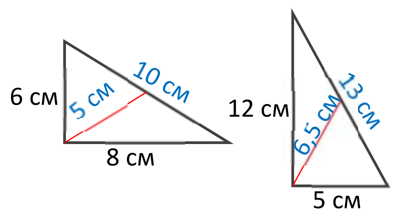


• $EK = 21 - (7 + 6) = 8$ (см)



Ответ. Длина стороны EK 8 см.

5. Ученики чертят в тетради прямоугольный треугольник, находят с помощью линейки медиану треугольника, проведенную из вершины прямого угла, и отношение медианы к гипотенузе. Ученикам можно предложить выполнить задание в парах. Каждая пара может нарисовать в своей тетради прямоугольный треугольник разных размеров и сравнить результаты. По этому правилу в любом прямоугольном треугольнике медиана, проходящая через вершину прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Ученикам, испытывающим трудности, можно показать пример длин катетов и направить их на выполнение задания по рисованию соответствующего треугольника.



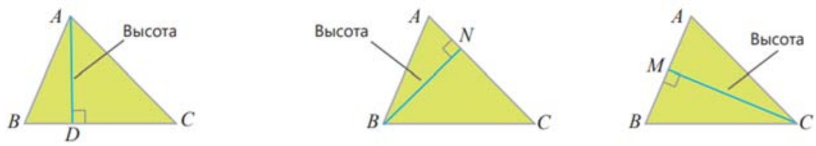
Изучение Биссектрисы треугольника

Отмечается, что биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне

Ученикам демонстрируются данные в учебнике образцы изображений с биссектрисой, проведенной из каждой вершины треугольника. Отмечается, что у произвольного треугольника 3 биссектрисы и они пересекаются в одной точке, и это объясняется на изображении.
Это можно продемонстрировать для различных треугольников в интерактивном режиме в технически оснащенных классах:
https://www.geogebra.org/m/rmzwwqxa
7. Задание можно выполнить в парах. Ученики чертят в тетради тупоугольный треугольник, используя транспортир, чертят биссектрисы этого треугольник и обозначают точку пересечения. Полученные результаты сравниваются.

Изучение **Высоты треугольника**

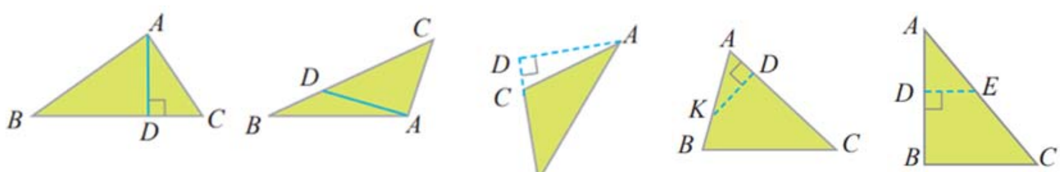
Отмечается, что высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к противоположной стороне треугольника или ее продолжении. Ученикам показывают примеры высот, проведенных из каждой вершины.



Ученикам демонстрируются несколько примеров, связанных с проведением высоты тупоугольного треугольника к продолжению стороны. Подчеркивается, что у произвольного треугольника 3 высоты, и что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в 1 точке.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/chkmn37k

Запомни!

Ученикам дается задание объяснить, что в прямоугольном треугольнике две из высот совпадают с его катетами. Учитель может задать ученикам наводящие вопросы для этого. Ученики чертят прямоугольный треугольник в тетради, обсуждают как можно показать высоты, проведенные из каждой вершины. В результате отмечается, что высота из прямого угла проводится к гипотенузе, а высоты из острых углов совпадают с катетами.
8. Определяется, в каком случае верно изображены высоты треугольника ABC. Ученикам дается задание обосновать, в каком случае высота треугольника ABC указана неверно.



$AD \perp BC$ тогда AD высота.

Отрезок AD не является высотой, так как он не перпендикулярен отрезку BC.

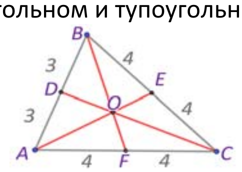
Поскольку $AD \perp BC$ или $AD \perp BD$, отрезок AD является высотой.

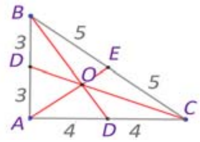
Отрезок KD не проходит через вершину треугольника, поэтому не является высотой.

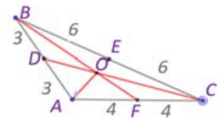
Отрезок DE не проходит через вершину треугольника, поэтому не является высотой.

9. На примерах обосновывается верны мнения или нет. Точка пересечения медиан всех треугольников расположена внутри него. Чтобы показать верность этого мнения, ученики могут ответить, что медианы проводятся к противоположной стороне. Отмечается, что поскольку проводятся к противоположной стороне, точка их пересечений будет расположена внутри. Ученики могут привести примеры на прямоугольном, остроугольном и тупоугольном треугольниках.

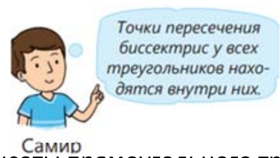
Поскольку медиана треугольника проходит через середину противоположной стороны, то она всегда находится внутри, поэтому отмечается, что точка пересечения тоже будет внутри. Приводятся примеры на прямоугольном, остроугольном и тупоугольном треугольниках.

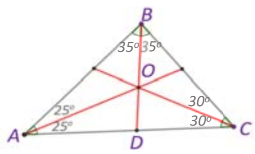


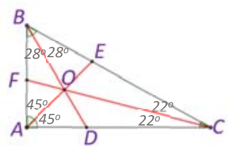


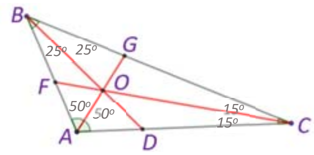


Отмечается, что биссектриса треугольника делит угол вершины пополам, она всегда находится внутри, поэтому отмечается, что точка пересечения также будет внутри. Показываются примеры на прямоугольном, остроугольном и тупоугольном треугольниках.

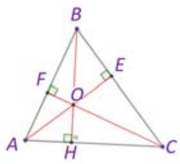


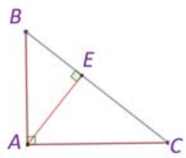


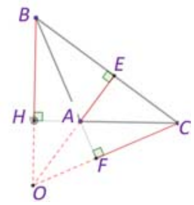




Высоты прямоугольного треугольника пересекаются в вершине прямого угла. В прямоугольном треугольнике, поскольку высота проведена к продолжению противоположной стороны, отмечается, что точка пересечения высот не будет находиться внутри треугольника.







Ответ. Мнения Эльхана и Самира верны, а мнение Айнур неверно.

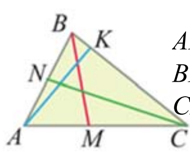
К сведению учителя! Рисунки образцы взяты из представленных ниже ссылок. В технически оснащенных классах можно выполнить задания в программе geogebra.

Пересечение медиан треугольника: *https://www.geogebra.org/m/beg3tqv5*

Пересечение биссектрис треугольника: *https://www.geogebra.org/m/rmzwwqxa*

Пересечение высот треугольника: *https://www.geogebra.org/m/chkmn37k*

10. Чтобы правильно определить высоту, медиану и биссектрису треугольника ABC на рисунке, обращается внимание на изображение.



AK – высота
BM – биссектриса
CN – медиана

• Согласно сравнению BK и KC определяется, что AK не медиана, а по сравнению углов BAK и KAC – что не биссектриса. Тогда AK высота.

• Поскольку длины AM и MC отличны, BM не медиана. Тогда BM биссектриса треугольника.

• Поскольку AK высота, а BM биссектриса, то CN медиана.

Ответ. CN медиана треугольника, BN биссектриса, а AK высота.

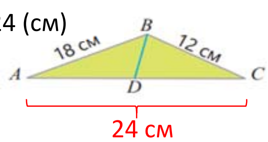
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые определили высоту, медиану и биссектрису треугольника в другой последовательности.

Решение задач

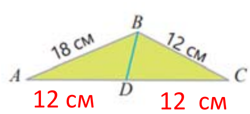
11. В задаче определяется, является ли отрезок BD медианой треугольника ABC.

Решение задачи.

AC = (18 + 12) · 0,8 = 24 (см)



$CB = CD$, поэтому
AD = 24 – 12 = 12 (см)
$AD = CD$, поэтому отрезок BD медиана треугольника ABC.



Ответ. Отрезок BD медиана треугольника ABC.

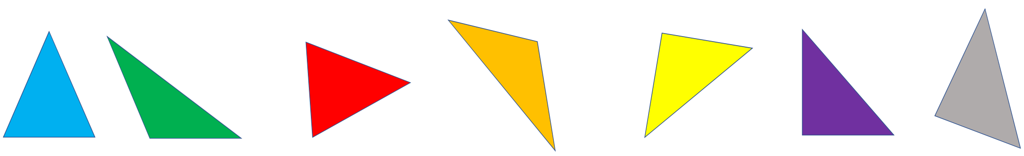
Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет понятия медианы в треугольнике.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет понятия биссектрисы в треугольнике.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет понятия высоты в треугольнике.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 7.2. Признаки конгруэнтности треугольника

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.2.2. Объясняет понятие конгруэнтности треугольников и признаки конгруэнтности.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятие конгруэнтности треугольников. • Определяет, по какому признаку конгруэнтны треугольники. • Объясняет свойства равнобедренного треугольника.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://video.edu.az/video/11435* *https://video.edu.az/video/13581* *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5accb0a8b204b709fe66a08f* *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5eb708fbab4c870c23937f84*

Побуждение.
Учитель рисует на доске несколько треугольников. Дает ученикам задание найти среди этих треугольников равные. Ученикам задаются наводящие вопросы: – Конргруэнтны ли синий и зеленый треугольники? Как вы это определили? Какой треугольник конгруэнтен синему треугольнику? Какой треугольник конгруэнтен зеленому треугольнику?
Ученикам напоминаются знания о конгруэнтных фигурах, изученные в 5-м классе. Проверить, какие конгруэнтные треугольники получаются, можно, вырезав фигурки из цветной бумаги и положив их друг на друга.

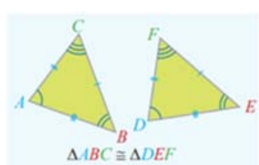


В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.geogebra.org/m/z4bc6czq

Исследование-обсуждение

Задание можно выполнить в парах. Ученики вырезают треугольники заданных размеров. Вырезанные треугольники кладут друг на друга. При этом наблюдают, чтобы вершины и стороны совпадали. Отмечается, что все треугольники с заданными размерами совпадают, поэтому невозможно нарисовать треугольник, который бы не совпадал.

Изучение Конгруэнтность треугольников



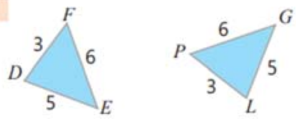
Отмечается, что для того, чтобы два треугольника были конгруэнтными, при наложении они должны полностью совпадать всеми соответствующими элементами (вершины, стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы). Подчеркивается, что в конгруэнтных треугольниках стороны, лежащие напротив равных углов, также равны. Аналогично отмечается, что обратное утверждение также является верным. Ученикам даётся объяснение на основании образца, приведённого в учебнике. Приводятся примеры.

$\angle A \cong \angle D$ $\quad \angle B \cong \angle E$ $\quad \angle C \cong \angle F$
$BC \cong EF$ $\quad AC \cong DF$ $\quad AB \cong DE$

Задания

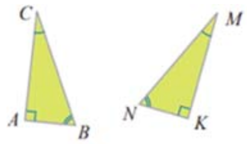
1. На рисунке изображены конгруэнтные треугольники. Записываются конгруэнтные стороны и углы.

a) $\Delta DEF \cong \Delta LGP$



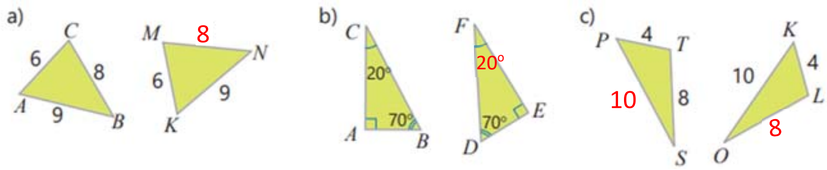
Конгруэнтные стороны	Конгруэнтные углы
$DF \cong LP$	$\angle DEF \cong \angle LGP$
$EF \cong GP$	$\angle EDF \cong \angle GLP$
$DE \cong LG$	$\angle DFE \cong \angle LPG$

b) $\Delta ABC \cong \Delta KNM$



Конгруэнтные стороны	Конгруэнтные углы
$AB \cong KN$	$\angle ACB \cong \angle KMN$
$AC \cong KM$	$\angle ABC \cong \angle KNM$
$BC \cong NM$	$\angle BAC \cong \angle NKM$

2. Треугольники на рисунке конгруэнтны. Отмечаются размеры сторон и углов, соответствующих вопросительному знаку.

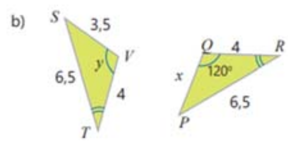


3. Равенство треугольников обозначается знаком ≅. Находится значение неизвестной стороны или угла.

$\Delta ABC \cong \Delta MNK$

$x = 8$

$y = 60°$



$\Delta SVT \cong \Delta PQR$

$x = 3{,}5$

$y = 120°$

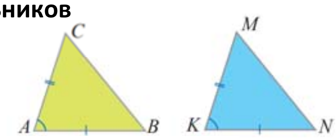
К сведению учителя! Иногда ученики затрудняются определять соответствующие вершины при записи конгруэнтных треугольников. Рекомендуется довести до сведения учеников, что неправильное написание последовательности названий вершин может привести к неправильному определению соответствия. Можно привести учащимся примеры, соответствующие допустимым ошибкам.

Изучение Признаки конгруэнтности треугольников

Ученикам объясняются признаки конгруэнтности треугольников, подчеркивается, что эти признаки позволяют определить конгруэнтность треугольников по трем элементам. Ученикам объясняются 1-й и 2-й признаки равенства треугольников.

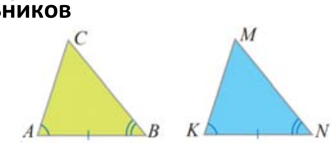
Сторона-угол-сторона (СУС) или I признак конгруэнтности треугольников

Если $AB \cong KN$, $AC \cong KM$, $\angle A \cong \angle K$ то,
$\Delta ABC \cong \Delta KNM$



Угол-сторона-угол (УСУ) или II признак конгруэнтности треугольников

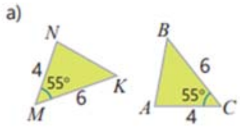
Если $AB \cong KN$, $\angle A \cong \angle K$, $\angle B \cong \angle N$ то,
$\Delta ABC \cong \Delta KNM$



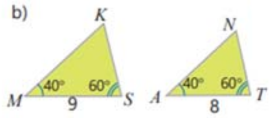
Подумай!

I и II признаки конгруэнтности треугольника обосновываются наложением двух вырезанных треугольников. Ученикам можно дать задание вырезать остроугольные, прямоугольные и тупоугольные треугольники, придав им определенные размеры, и обосновать признаки конгруэнтности, наложив их друг на друга.

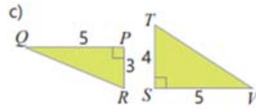
4. Определяется, конгруэнтны или нет треугольники. Ученикам дается задание объяснить, по какому признаку конгруэнтности определяется, как конгруэнтность зависит от длин сторон и градусов углов.



По признаку конгруэнтности треугольников СУС треугольники конгруэнтны.



Эти треугольники не конгруэнтны, поскольку соответствующие стороны не имеют равных длин по знаку УСУ.



По признаку СУС эти треугольники не конгруэнтны, так как длины одной из соответствующих сторон не равны.

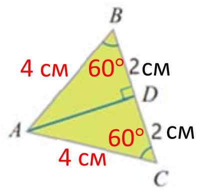
5. Определяется, что данные треугольники конгруэнтны по знаку СУС или УСУ.

а) По признаку УСУ: $\Delta ABC \cong \Delta MKN$ б) По признаку СУС: $\Delta PST \cong \Delta FED$

6. Чтобы доказать, что треугольники ABD и ACD конгруэнтны, необходимо найти угол C и сторону AC. Записывается краткое условие задачи.

AB = 4 см
$\angle B$ = 60°
AC = ?

• AD - общая сторона треугольников ABD и ACD.
• $BD = DC$, $\angle BDA = \angle CDA$ = 90°
• По признаку конгруэнтности треугольников СУС
$\Delta ABD \cong \Delta ACD$



Ответ. AC = 4 см, $\angle C$ = 60°

7. Отрезки AB и CD пересекаются в точке N. По данным на рисунке обосновывается конгруэнтность треугольников, находятся сторона, отмеченная буквой и величина угла. Записывается краткое условие задачи.

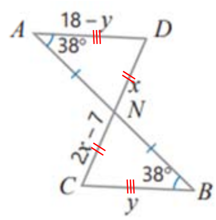
б)
$AN = NB$
$\angle DAN = \angle NBC$ = 38°
$CN = 2x - 7$
$ND = x$
x = ?
y = ?

• *По свойству вертикальных углов*
$\angle AND = \angle BNC$
По признаку конгруэнтности треугольников УСУ
$\Delta AND \cong \Delta BNC$

Соответствующие уравнения записываются и решаются.

$CN = ND \rightarrow 2x - 7 = x$
$2x - x = 7$
$x = 7$

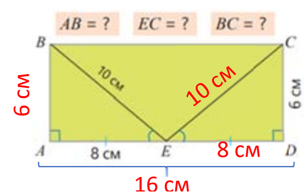
$\angle DAN = \angle NBC \rightarrow$ $y = 18 - y$
$y + y = 18$
$2y = 18$
$y = 9$



Ответ. x = 7, y = 9.

8. Находятся длины требуемых сторон, отмечается какой признак конгруэнтности был использован.

б) $AE \cong ED$, $\angle BEA \cong \angle CED$, $\angle BAE \cong \angle CDE$
По признаку конгруэнтности треугольников УСУ
$\Delta ABE \cong \Delta DCE$
$AB \cong CD \cong$ 6 см
$EC \cong BE \cong$ 10 см
$BC = AE + ED$ = 8 + 8 = 16 (см)

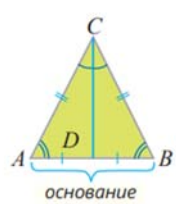


Изучение Свойства равнобедренного треугольника

Ученикам сообщается, что основание не равно боковым сторонам. Некоторые свойства равнобедренных треугольников отмечают с помощью признака конгруэнтности треугольников СУС.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/zmfmgjsa



Подумай! Требуется доказать, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является также высотой. Ученики могут обосновать правильность этого утверждения, основываясь на 2-м свойстве треугольников. По аналогичной схеме строится таблица для обоснования с двумя столбцами. Предположение и обоснование записываются.

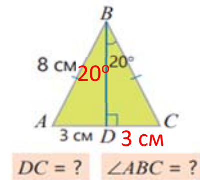
Предположение	Обоснование
1. $AC \cong BC$ и $\angle A \cong \angle B$	1. Дано.
2. $AD \cong DB$	2. CD — медиана треугольника ABC.
3. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$	3. По признаку СУС.
4. $\angle ADC \cong \angle BDC = 90^\circ$	4. В конгруэнтных треугольниках соответсвенные углы равны.
5. $CD \perp AB$	5. Когда смежные углы равны, каждый из них равен 90°.

11. Находятся длина искомой стороны и величина угла.

а) Поскольку BD – высота, проведенная к основанию в равнобедреннеом треугольнике, то она является и медианой, и биссектрисой.

$AD = DC = 3$ см

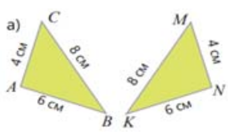
$\angle ABC = 20 \cdot 2 = 40^\circ$



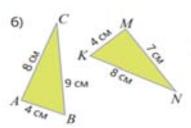
Изучение **III признак конгруэнтности треугольников**

Ученикам сообщается о 3-м признаке конгруэнтности треугольников или сторона-сторона-сторона (ССС). Обсуждается с классом, как обосновать этот признак.

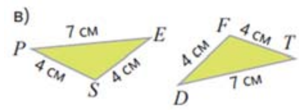
12. Определяется, конгруэнтны ли треугольники, конгруэнтные пишутся со знаком конгруэнтности.



По признаку конгруэнтности треугольников ССС, треугольники конгруэнтны . $\Delta ABC \cong \Delta NKM$



Поскольку соответствующие стороны не конгруэнтны, эти треугольники не конгруэнтны.



По признаку конгруэнтности треугольников ССС, треугольники конгруэнтны. $\Delta PSE \cong \Delta DFT$

13. Отмечается, по какому признаку обосновать конгруэнтность треугольников на рисунке. Находится размер треугольника, обозначенного буквой.

б) $ST = DE,\ TV = EF,\ SV = DF$

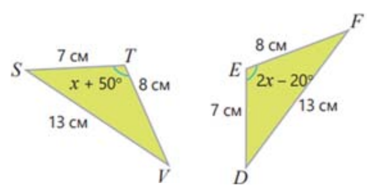
По признаку конгруэнтности треугольников ССС: $\Delta STV \cong \Delta DEF$

Соответствующее уравнение записывается и решается.

$x + 50^\circ = 2x - 20^\circ$

$x = 70^\circ$

$\angle STV = \angle DEF = x + 50^\circ = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$

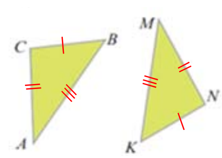


$\angle STV = 120^\circ$ $\angle DEF = 120^\circ$

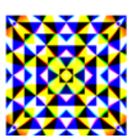
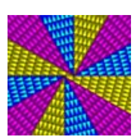
14. Данные треугольники конгруэнтны. Записываются конгруэнтные стороны и углы.

а) $AC \cong MN$ $BC \cong KN$ $AB \cong MK$

$\angle A \cong \angle M$ $\angle C \cong \angle N$ $\angle B \cong \angle K$



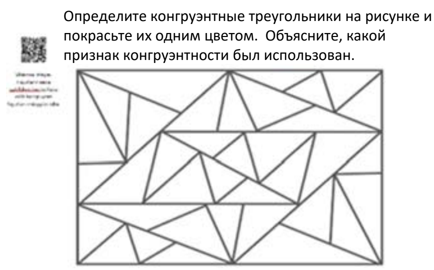
К сведению учителя! Конгруэнтные фигуры используются в различных областях. Например, с помощью конгруэнтных фигур можно создавать интересные изображения с минимальными усилиями. Ученики могут выполнять аналогичные действия на компьютере. Такое занятие помогает соединить искусство и геометрию.

В технически оснащенных классах можно выполнять деятельность по инструкции.

https://nrich.maths.org/4965

Практическое задание. Класс делится на несколько групп. Рабочий лист на рисунке распечатывается и раздается группам. Ученикам предлагается назвать конгруэнтные треугольники, пронумеровать их одинаковыми номерами и раскрасить в один и тот же цвет. Треугольники раскрашиваются в течение заданного времени. Группы обмениваются рабочими листами по часовой стрелке. Группы проверяют рабочие листы друг друга, чтобы убедиться, что они правильно определили конгруэнтные фигуры, затем каждой группе возвращается их рабочий лист. Результаты обсуждаются.

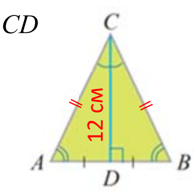


В технически оснащенных классах ученики могут посмотреть, сколько фигур нарисовано, по ссылке, открывающейся при чтении QR-кода. Это поможет ученикам легче находить конгруэнтные треугольники.
Ссылка на видео: *https://youtu.be/5vkOb4kyXGA*
Образец рабочего листа можно скачать по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1rZq5BpclGuI3VteDSP3CE6mIedBv0N9F/view?usp=sharing

15. В задаче отмечается, что отрезок CD является медианой равнобедренного треугольника ABC. Записывается краткое условие задачи.

а) P_{ACD} = 30 см
CD = 12 см
P_{ABC} = ?

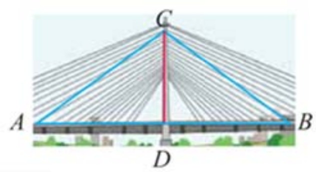
В равнобедренном треугольнике ABC высота к основанию CD также является медианой треугольника.
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$
P_{ACD} = 30 см;
$AC + AD + CD = 30$
$AC + AD + 12 = 30$
$AC + AD = 18$
$P_{ABC} = AC + AB + BC = \underbrace{AC + AD}_{18} + BC = 18 + 18 = 36$ (см)

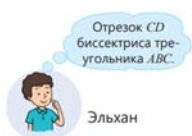


Ответ. а) 36 см

К сведению учителя. Целесообразно обсудить с учениками, что если из суммы периметров двух треугольников, полученных при проведении медианы треугольника, вычесть двойное значение медианы, то получится периметр исходного треугольника. Ученики, знающие это правило, тратят меньше времени на решение подобных задач. Рекомендуется продемонстрировать несколько примеров, чтобы показать справедливость этого правила не только для равнобедренных, но и для любых треугольников.

16. Отмечается, что прямые, отмеченные на подвесном мосту, образуют треугольник. CD — высота этого треугольника. Углы ACD и BCD конгруэнтны. Определяется, чье мнение верны.





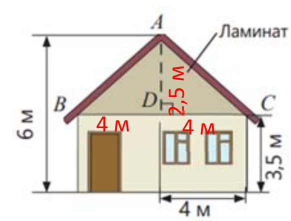
$\angle ACD \cong \angle BCD$
Тогда отрезок CD биссектриса треугольника ABC.
Мнение верно.

Отрезок CD и высота, и биссектриса треугольника ABC. Тогда CD еще и медиана. $AD \cong BD$
Мнение неверно.

Так как отрезок CD и высота, и биссектриса треугольника ABC, то ABC равнобедренный треугольник.
Мнение верно.

Ответ. Мнения Эльхана и Айнур верны. Мнение Самира неверно.

17. Требуется узнать, сколько квадратных метров ламината использует мастер исходя из заданных размеров.
Решение задачи.
Определяются длины отрезков BD, DC и AD.
$AD = 6 - 3{,}5 = 2{,}5$ (м)
$BD = DC = 4$ (м)
$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 4 = 5$ (м^2)
$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}5 = 5$ (м^2)

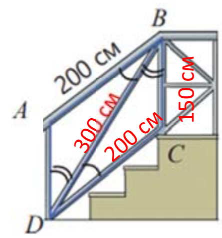


S_{ABC} = 5 + 5 = 10 (м^2)

Ответ. По заданным размерам используется 10 м^2 ламината.

18. В задаче требуется найти по какому признаку конгруэнтности треугольников верно $BC \cong AB$ и каков периметр треугольника DBC.

Решение задачи.



- По признаку УСУ $\Delta ABC \cong \Delta CBD$, тогда $AB \cong DC$.
- Отмечается, что $DB : DC$ = 1,5 : 1 и $DB : DC$ = 2 : 1.

$DB : DC$ = 1,5 : 1 → DB : 200 = 1,5 : 1 → DB = 300 см.

$DB : DC$ = 2 : 1 → 300 : BC = 2 : 1 → BC = 150 см

P_{DBC} = 150 + 300 + 200 = 650 (см).

Ответ. Периметр треугольника DBC равен 650 см.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет понятие конгруэнтности треугольников.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет, по какому признаку конгруэнтны треугольники.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет свойства равнобедренного треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 7.3. Параллельность прямых

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.1.1. Определяет углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, применяет свойства. 6-3.1.2. Определяет углы, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны, и применяет их свойства.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей. • Объясняет признаки параллельности. • Определяет углы, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, бумага в клетку, транспортир
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://youtu.be/gh2XzwIdH7c* *https://youtu.be/yC2J1GkL09U* *https://video.edu.az/video/10165* *https://video.edu.az/video/9764* *https://video.edu.az/video/4537* *https://video.edu.az/video/10137* *https://www.geogebra.org/m/V9uqgE4V* *https://www.transum.org/Maths/Activity/Angle/Chase.asp?Level=1*

Побуждение.

Учитель вызывает к доске 3 учеников. Двум ученикам предлагается провести по одной прямой, а третьему ученику — провести прямую, пересекающую эти прямые. Ученикам задаются вопросы по изображению, нарисованному на доске: Сколько образовалось углов при пересечении этих прямых? Сколько из этих углов острые, а сколько тупые? Есть ли между этими углами прямой угол? К доске вызываются следующие 3 ученика. Двум ученикам дается задание нарисовать параллельные прямые, а третьему ученику — нарисовать прямую линию, пересекающую эти прямые.

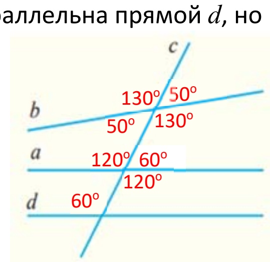
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/hwvnv9sb

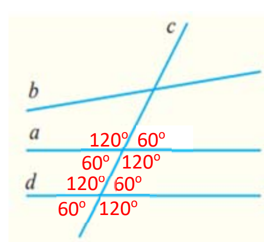
Исследование-обсуждение

На рисунке прямая a параллельна прямой d, но не параллельна прямой b.

- Измеряются 8 углов, образующихся при пересечении прямых b и a с прямой c, и определяются равные и различные углы.



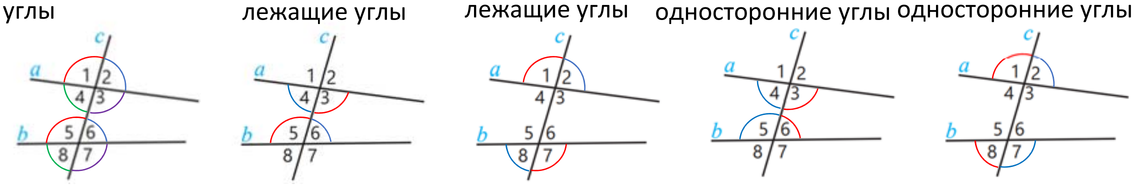
- Измеряются 8 углов, образующихся при пересечении прямых a и d с прямой c, и определяются равные и различные углы.



Изучение Углы, полученные при пересечении двух прямых третьей

Отмечается, что при пересечении прямых a и b с прямой c на плоскости образуется 8 углов. Подчеркивается, что прямая c пересекает прямые a и b. Ученикам говорят о соответственных углах, внутренних накрест лежащих углах, внешних накрест лежащих углах, внутренних односторонних углах и внешних односторонних углах.

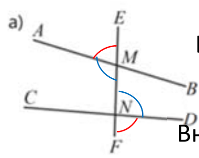
Соответственные углы | Внутренние накрест лежащие углы | Внешние накрест лежащие углы | Внутренние односторонние углы | Внешние односторонние углы



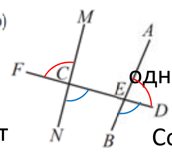
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.geogebra.org/geometry/m6xvwryt

Задания

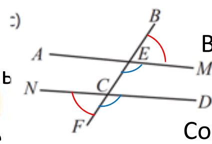
2. Определяется вид углов.

a) 

$\angle AME$ və $\angle FND$
Внешние накрест лежащие углы
$\angle AMN$ və $\angle MND$
Внутренние накрест лежащие углы

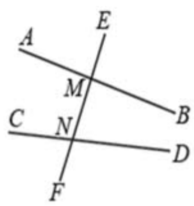
b) 

$\angle MCF$ və $\angle AED$
Внутренние односторонние углы
$\angle NCE$ və $\angle BED$
Соответственные углы

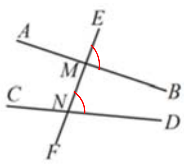
ɔ) 

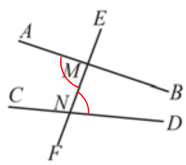
$\angle BEM$ və $\angle NCF$
Внешние накрест лежащие углы
$\angle CEM$ və $\angle FCD$
Соответственные углы

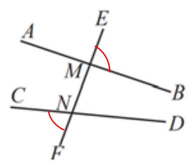
3. Из заданных утверждений определяются верные.

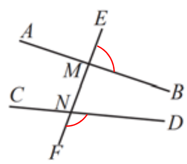


а) $\angle EMB$ и $\angle MND$ соответственные углы.	*Верно.*
б) $\angle AMN$ и $\angle MND$ внутренние односторонние углы.	*Неверно.*
в) $\angle EMB$ и $\angle FNC$ внешние накрест лежащие углы.	*Верно.*
г) $\angle FND$ и $\angle EMB$ соответственные углы.	*Неверно.*


а) *Верно.*


б) *Неверно.*


в) *Верно.*


г) *Неверно.*

Если утверждение неверно, рекомендуется дать ученикам задание определить вид данной пары углов.

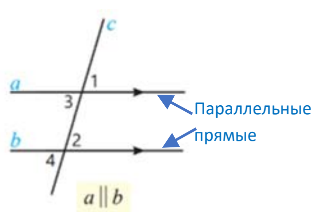
Изучение Углы, образованные пересечением двух параллельных прямых секущей

Ученикам сообщается об углах, образованных пересечением параллельных прямых секущей. Подчеркивается, что соответственные углы, образованные пересечением параллельных прямых секущей, конгруэнтны.

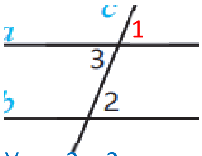
Если $a \parallel b$, *то* $\angle 1 \cong \angle 2$ или $\angle 3 \cong \angle 4$

Отмечается, что верно и обратное этому утверждению.

Если $\angle 1 \cong \angle 2$ или $\angle 3 \cong \angle 4$, то $a \parallel b$



Подумай! Чтобы доказать, что внутренние накрест лежащие углы, образованные пересечением параллельных прямых секущей, конгруэнтны, учитель обозначает угол 3, а вертикальный – цифрой 1. Задавая вопросы ученикам, целесообразно побудить их использовать свойства смежных и вертикальных углов, чтобы доказать, что внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны. Ученики могут обосновать свои ответы, нарисовав в тетради похожее изображение и сделав на нем пометки.



Поскольку 1 и 2 соответственные углы, они конгруэнтны. $\angle 1 \cong \angle 2$

Поскольку 1 и 3 вертикальные углы, они конгруэнтны. $\angle 1 \cong \angle 3$

Тогда $\angle 2 \cong \angle 3$

Углы 2 и 3 — внутренние накрест лежащие углы. Следовательно, конгруэнтны и внутренние поперечные углы, образованные пересечением параллельных прямых секущей.

4. **Практическое задание.** Ученикам можно предложить взять в классе бумагу в клетку и провести прямую, пересекающую ее с двумя одинаковыми прямыми, исходя из количества единиц в заданной на ней форме. Затем с помощью ножниц ученики могут разрезать углы 1 и 2 и показать, что они конгруэнтны.
В технически оснащенных классах можно использовать видеоматериалы:
https://youtu.be/V7kBnLaO9eE

5. Обосновывается, что данные равенства верны. Задание можно выполнить в классе в парах. Один из учеников может обосновать вопрос, а другой сказать, правильный этот ответ или нет.

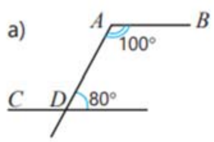
Запомни!

Ученикам сообщаются признаки параллельности, также объясняется, что любой из этих признаков показывает, что данные прямые параллельны.

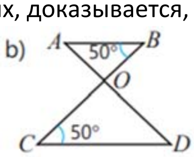
Подумай!

Чтобы обосновать, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой на плоскости, параллельны, используя признак параллельности прямых, можно пронумеровать отмеченные углы. Учитель может задать ученикам наводящие вопросы: Какими углами являются углы 1 и 2, образованные при пересечении двух прямых? Сколько градусов составляют эти углы? Что можно сказать о прямых a и b, исходя из того, что соответственные углы равны? Ученики отмечают, что углы 1 и 2 равны 90°. Если соответственные углы равны по знаку параллельности, то прямые параллельны.

8. Используя признаки параллельности двух прямых, доказывается, что AB ∥ CD.

a) 

Сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
100° + 80° = 180°
Тогда $AB \parallel CD$

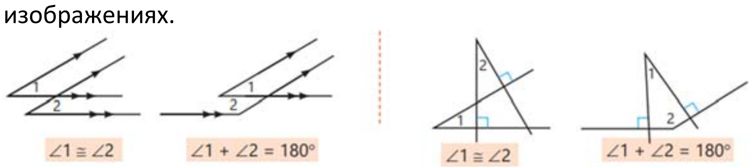
b) 

Внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны.
$\angle B \cong \angle C$,
Тогда $AB \parallel CD$

Аналогичным образом обосновываются и другие пункты.

Изучение Свойства углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

Ученикам сообщаются свойства углов, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны. Целесообразно обсудить с учениками верность этих свойств, используя признаки параллельности на изображениях.

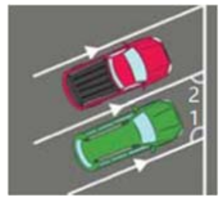


9. По признакам параллельности находятся меры пронумерованных углов. Решение и объяснение задания обсуждаются с учениками по обоим пунктам, и соответственно выполняются остальные задания.

Решение задач

10. Отмечается, что спортсмен, который держит лыжи параллельно, может двигаться быстрее на соревнованиях по лыжным гонкам. Требуется найти, сколько градусов составляет угол 1.
Решение задачи.

Обращается внимание, что $\angle 1$ и 80° угол – внешние односторонние углы. На основании конгруэнтности внешних накрест лежащих углов $\angle 1$ определяется равным 80°.
Ответ. $\angle 1 = 80°$



11. Отмечается, что один из указанных углов в 2 раза больше другого.
Требуется найти градусную меру наибольшего из этих углов.
Задачу можно решить, составив уравнение.
Решение задачи.
• Чтобы решить задачу путем построения уравнения, можно принять меньший угол за x, а большой угол за $2x$. Поскольку $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние односторонние углы, то их сумма равна 180° по признаку параллельности.
$x + 2x = 180°$
$3x = 180°$
$x = 60°$
Больший угол $2x = 60 \cdot 2 = 120°$
Ответ. Наибольший из этих углов равен 120°.
Проект. Ученикам можно поручить провести исследование, связанное с углами, образованными двумя прямыми и секущей, а также привести примеры из повседневной жизни. По результатам работы ученики могут подготовить презентацию. Целесообразно продемонстрировать ученикам дополнительные примеры изображений, связанных с областями, где встречаются такие углы и организовать обсуждение.

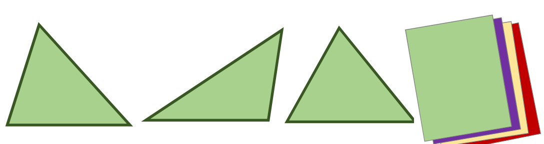
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет признаки параллельности.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет углы, соответствующие стороны которых параллельны или перпендикулярны.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 7.4. Сумма углов треугольника

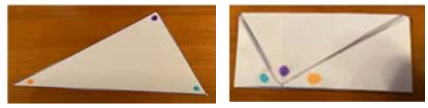
ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.2.1. Применяет свойства внутренних и внешних углов треугольника.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет внутренний и внешний углы треугольника. • Применяет свойства внутренних углов треугольника. • Применяет свойства внешних углов треугольника.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, бумага в клетку, транспортир
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://youtu.be/3cDqETQ3vVI* *https://youtu.be/APX7sh7_PcU* *https://youtu.be/Rex0Rdpma3M* *https://youtu.be/y3ALi3G2FO4* *https://video.edu.az/video/4495* *Игра: https://www.quia.com/rr/402146.html*

Побуждение.



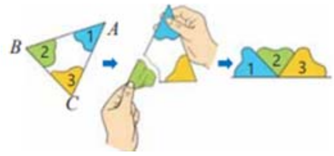
Класс делится на 4-5 групп. Каждой группе дается задание сделать треугольник из цветной бумаги. Ученики измеряют углы треугольников, которые они сделали. К доске вызываются по 2 ученика от каждой группы. Один из учеников демонстрирует сделанный треугольник. Другой ученик записывает измерения углов на доске. Учитель задает классу вопросы. Какую связь вы наблюдаете между углами? Если один из углов неизвестен, можем ли мы найти этот угол? Может ли быть два прямых угла в треугольнике? Выслушиваются мнения учеников и организуется обсуждение.

Создать представление о сумме углов можно, сложив треугольник. Выполним деятельность, видеоматериал можно посмотреть в технически оснащенных классах.
https://youtu.be/-LZ5V0Takq0



Исследование-обсуждение

На листе бумаги рисуется треугольник и ножницами вырезают его по сторонам. Углы этого треугольника вырезаются, и его вершины накладываются друг на друга, как показано на рисунке. После выполнения деятельности ученики определяют, какой угол образуется при соединении углов A, B, C. Это правило дает общее представление о сумме углов любого треугольника.



В технически оснащенных классах можно просмотреть видеоматериал и выполнить задание.
https://youtu.be/57QzBLOEoWU

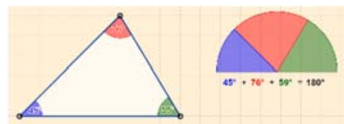
Изучение Сумма внутренних углов треугольника

Угол, образованный двумя сторонами треугольника, называется внутренним углом треугольника, а угол, прилежащий к этому углу, называется внешним углом треугольника. Подчеркивается, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

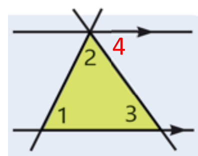
На приведенных изображениях-образцах ученикам показываются внутренние и внешние углы.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания. https://www.geogebra.org/m/ggpwt4pg



Подумай!

Используя свойства углов, образованных пересечением параллельных прямых секущей, обосновывается, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°.
Угол слева от угла 2 обозначается цифрой 4. Учитель задает ученикам наводящие вопросы:



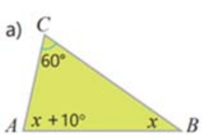
Какими углами являются углы $\angle 4$ и $\angle 3$, образованных пересечением параллельных прямых секущей? Какое свойство внутренних односторонних углов можно использовать по признакам параллельности? Какой угол составит $\angle 1$ с суммой $\angle 2$ и $\angle 3$? Какое свойство можно использовать для признака параллельности внутренних односторонних углов?
Отвечая на вопросы, можно делать пометки в столбчатой таблице обоснования.

Предположение	Обоснование
1. $\angle 1, \angle 2, \angle 3$	1. Внутренние углы треугольника.
2. $\angle 4 \cong \angle 3$	2. По признаку параллельности для внутренних накрест лежащих углов.
3. $\angle 2 + \angle 4 \cong \angle 2 + \angle 3$	3. По признаку параллельности для внутренних односторонних углов.
4. $\angle 2 + \angle 4 + \angle 1 \cong \angle 2 + \angle 3 + \angle 1 = 180^{\circ}$	
5. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$	5. Сумма углов треугольника равна 180°.

Задания

2. Исходя из того, что сумма углов треугольника равна 180°, записывается соответствующее уравнение, после нахождения неизвестного находится мера искомого угла.

a)

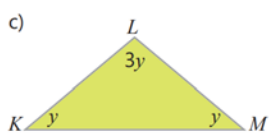


$\angle ABC = ?$

$x + x + 10° + 60° = 180°$
$2x + 70° = 180°$
$2x = 110°$
$x = 55°$

$\angle ABC = x = 55°$

c)

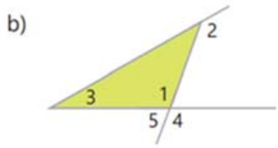


$\angle KLM = ?$

$y + y + 3y = 180°$
$5y = 180°$
$y = 36°$

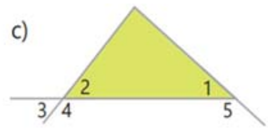
$\angle KLM = 3y = 3 \cdot 36° = 108°$

3. Определяется, какой из пронумерованных углов является внутренним, а какой внешним.



Внутренние углы: $\angle 1,\ \angle 3$

Внешние углы: $\angle 2,\ \angle 5$

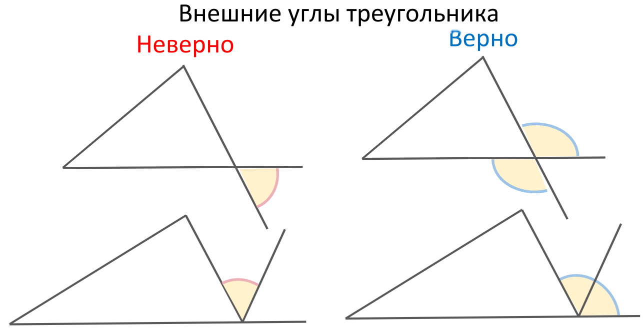


Внутренние углы: $\angle 1,\ \angle 2$

Внешние углы: $\angle 4,\ \angle 5$

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики думают, что угол, вертикальный внутреннему углу треугольника, является внешним углом треугольника. Некоторые ученики считают, что любой угол, вершина которого находится вне треугольника, является внешним углом треугольника. При выполнении 3-го задания можно выявить учеников, допустивших ошибку при нахождении внешнего угла. Этим ученикам рекомендуется напомнить, что внешний угол треугольника — это угол или углы, примыкающие к его внутреннему углу.

Внешние углы треугольника



6. Находятся ответы на вопросы.

а) Углы треугольника: 40°, x, x + 30°

По свойству внутренних углов треугольника:

40 + x + x + 30 = 180°

2x + 70 = 180°

2x = 110°

x = 55°

Находится наибольший угол треугольника. x + 30° = 85°

Наибольший угол треугольника равен 85°.

б) Отмечается, что равнобедренный треугольник имеет один тупой угол и углы отмечаются: x, x, 4x *По свойству внутренних углов треугольника:*

4x + x + x = 180°

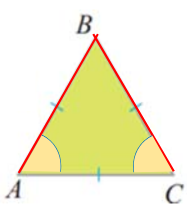
6x = 180°

x = 30°

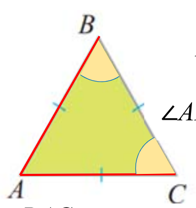
4x = 120°

Углы треугольника равны 30°, 30° и 120°.

7. Свойство равнобедренного треугольника используется для обоснования равенства углов равностороннего треугольника. Поскольку углы, прилежащие к основанию равнобедренного треугольника, конгруэнтны, отсюда следует, что пара углов, прилежащих к каждой стороне, равна.



$AB \cong BC$
тогда
$\angle BAC \cong \angle BCA$

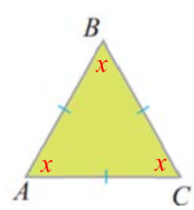


$AB \cong AC$
тогда
$\angle ABC \cong \angle BCA$

$\angle ABC \cong \angle BCA \cong \angle BAC$

Следовательно, все углы равностороннего треугольника равны. Каждый угол равностороннего треугольника обозначается x. По свойству суммы внутренних углов треугольника:

3x = 180° → x = 60°



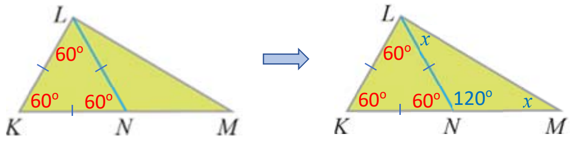
Ответ. Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

9. В треугольнике ΔKLM отмечается, что отрезок LM делит его на равносторонний и равнобедренный треугольники. Требуется найти градусные меры углов треугольника ΔKLM.

Поскольку $\angle LNM$ смежный к $\angle LNK$, градусная мера этого угла будет 180°– 60°=120°. Поскольку треугольник ΔLNM равнобедренный, то углы $\angle NLM$ и $\angle NML$ равны между собой. Обозначая каждый из этих углов через x, записывают и решают соответствующее уравнение, исходя из свойства суммы внутренних углов:

• Поскольку ΔKLN равносторонний треугольник
$\angle LKN = \angle LNK = \angle KLN = 60°$

• $\angle LNK$ и $\angle LNM$ смежные углы.
$\angle LNM = 180° - 60° = 120°$



• Поскольку ΔLNM равнобедренный треугольнико

$\angle NLM = \angle NML$

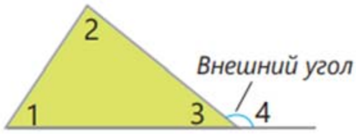
Каждый из этих углов обозначается x. По свойству суммы внутренних углов составляется и решается уравнение:

$x + x + 120 = 180°$
$2x = 60°$
$x = 30°$

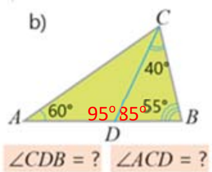
Ответ. Градусные меры углов треугольника ΔKLM равны 30°, 30°, 120°.

Изучение Свойства внешних углов треугольника

Подчеркивается, что внешние углы треугольника равны сумме двух несмежных внутренних углов. Справедливость этого подтверждается с помощью таблицы обоснования, состоящей из двух столбцов, и обсуждается с учениками.



11. Определяются искомые углы.



∠CDB находится по свойству суммы внутренних углов треугольника.

$\angle CDB = 180° - (40° + 55°) = 85°$

∠ACD находится по свойству внешнего угла треугольника.

$\angle ACD = 105° - 60° = 45°$

12. Определяются верные утверждения, приводятся примеры, опровергающие данные утверждения для обоснования ответов.

а) Внешний угол вершины треугольника всегда больше внутреннего угла.
В равнобедренном треугольнике внутренний угол всегда больше внешнего. *Мнение неверно.*

б) Внутренний угол при той же вершине, что и внешний угол треугольника, являются вертикальными углами. Внешний угол и внутренний угол при одной и той же вершине треугольника являются смежными углами. *Мнение неверно.*

в) Только один из внутренних углов треугольника может быть тупым. Если два внутренних угла тупые, то сумма их углов больше 180°. Это противоречит свойству углов треугольников. *Мнение верно.*

г) Внутренние углы равнобедренного треугольника равны между собой. Внутренние углы равностороннего треугольника равны между собой. Приводя несколько примеров равнобедренных треугольников, обосновывается неверность данного утверждения.
Мнение неверно.

Практическое задание. Ученики рисуют и раскрашивают треугольники соответственно образцу. На полученном изображении выбрав несколько треугольников, приводятся примеры правильности внутреннего и внешнего углов треугольника.

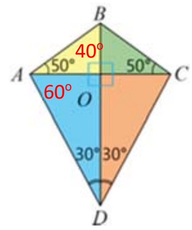
Дифференцированное обучение.

Поддержка. Ученикам раздаются рабочие листы с изображениями треугольников, некоторые углы которых известны. Ученикам дается задание найти внутренние и внешние углы и объяснить, какие свойства они для этого используют.

Углубление. Ученики делятся на пары. Им раздаются рабочие листы с изображением треугольников. Один из учеников отмечает некоторые углы, соответствующие данному типу треугольника. Он спрашивает другого ученика о том, как найти внутренние и внешние углы. Находится ответ на вопрос. Объясняется, как это было найдено. Ученики меняются местами и выполняют задание.

Решение задач

13. Необходимо найти соответствующие углы воздушного змея, сделанного из цветной бумаги.



• Рассматривается треугольник AOB. Так как сумма внутренних углов треугольника равна 180°:

$\angle ABO$ = 180° — (50° + 90°) = 40°

• Рассматривается треугольник CAD. Так как сумма внутренних углов треугольника равна 180°:

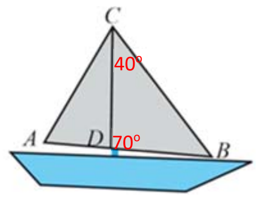
$\angle CAD$ = 180° — (30° + 90°) = 60°

• Требуется найти, на сколько градусов угол $\angle ABC$ больше угла $\angle ADC$. Для этого находится градусная мера углов $\angle ABC$ и $\angle ADC$.

$\angle ABC$ = 180° – (50° + 50°) = 80°
$\angle ADC$ = 30° + 30° = 60°
$\angle ABC - \angle ADC$ = 80° – 60° = 20°

Значит, угол $\angle ABC$ на 20° больше угла $\angle ADC$.

14. Паруса лодки имеют треугольную форму. Угол $\angle ABC$ равен 60°.



а) $\angle ADC$ = 110°

Поскольку углы ∠ADC и ∠CDB — смежные

$\angle CDB$ = 180° – $\angle ADC$ = 180° – 110° = 70°

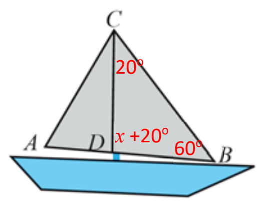
Отмечается, что угол $\angle CDB$ на 20° больше угла $\angle BCD$. Исходя из этого требуется найти градусную меру угла ∠ADC.

$\angle BCD$ = 20°
$\angle CDB$ = x + 20°

По сумме внутренних углов треугольника:

$x + x$ + 20° + 60° = 180°
$2x$ = 100°
x = 50°

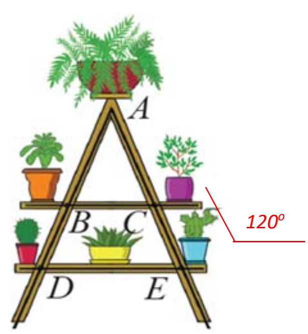
$\angle BCD$ = 50°
$\angle CDB$ = 20°
$\angle ADC$ = 180° – (50° + 70°) = 60°



15. Мастер изготовил полки для горшков, как на рисунке. Необходимо ответить на вопросы согласно условию. Данные в задаче отмечаются.

$BC \parallel DE$
$\angle ABC$ = 60°
$\angle BAC$ – ?
Внешние углы в вершинах E и D – ?

Решение задачи.



• Поскольку $BC \parallel DE$, по свойству углов, образованных параллельными прямыми и секущей, $\angle ACB \cong \angle AED$

Определяется внешний угол в вершине E. 60° · 2 = 120°

По свойству внешних углов треугольника $\angle BAC$ = 120° — 60° = 60°

• Поскольку $BC \parallel DE$, по свойству углов, образованных параллельными прямыми и секущей, $\angle ACB \cong \angle AED$

Внешний угол в вершине E: 120°

Внешний угол в вершине D: 180° — 60° = 120°

Ответ. $\angle BAC$ = 60°, внешние углы в вершинах E и D: 120°

К сведению учителя! Иногда ученики думают, что равенство углов удовлетворяет этому свойству в равнобедренном треугольнике. Ученики могут путать понятия биссектрисы, медианы и высоты треугольника. Целесообразно подчеркнуть, в каком случае все три эти понятия равны друг другу. Рекомендуется отслеживание деятельности учеников в процессе обучения, организация работы над ошибками.

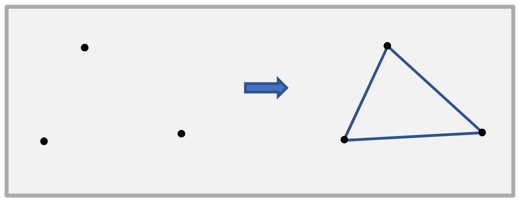
Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет внутренний и внешний углы треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойства внутренних углов треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойства внешних углов треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 7.5. Построение треугольника по трем сторонам

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.2.4. Применяет неравенство треугольника и соотношения между сторонами и углами треугольника. 6-3.3.1. Строит треугольник по длинам трех сторон с помощью линейки и циркуля.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Применяет неравенство треугольника. • Применяет взаимосвязь между сторонами и углами треугольника. • Рисует треугольник с помощью линейки и циркуля по длине трех его сторон.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, палочки, линейка, циркуль
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://video.edu.az/video/9609* *https://nrich.maths.org/5045* *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/59b96baa174ded09890f34c7* *https://www.geogebra.org/m/JT5UmZ8w* Игра: *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/605e2de3a977d3392a0b71b0*

Побуждение.



Учитель отмечает на доске три точки, которые не лежат на прямой линии. Ученикам дается задание нарисовать треугольник, соединив эти точки. Они измеряют и записывают длины сторон этого треугольника. Одно и то же действие можно выполнять несколько раз. По каждому треугольнику учитель задает ученикам вопросы о длинах сторон и углах:

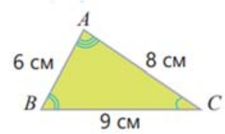
Какова самая длинная сторона треугольника? Каков наибольший угол треугольника? Аналогичные вопросы задаются о наименьшей стороне и наименьшем угле треугольника. Правильность ответов проверяют с помощью линейки и транспортира.

Исследование-обсуждение

Из цветной бумаги вырезаются ленты длиной 5 см, 8 см, 15 см и 20 см и шириной 5 мм. Они соединяются разными способами, образуя треугольники. С учениками обсуждается, сколько треугольников можно составить из этих лент. В полученном треугольнике определяют перед какой стороной наибольший угол, а перед какой стороной наименьший угол.

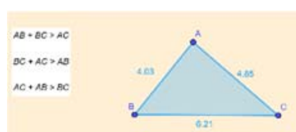
В классе, оснащенном техническими средствами, задание можно выполнить в интерактивном режиме.

Изучение Соотношение между сторонами и углами треугольника



Ученикам сообщается, что в треугольнике напротив большей стороны находится больший угол, а напротив большего угла – большая сторона. Приводятся примеры, целесообразно объяснить пример по рисунку в учебнике. Ученикам дается информация о неравенстве треугольника.

$AB < AC + BC,\ AC < AB + BC,\ BC < AC + AB.$



В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания. *https://www.geogebra.org/classic/gmegvh4w*

Подумай!

Используя соотношения между сторонами и углами треугольника, объясняется, что гипотенуза больше каждого из катетов прямоугольного треугольника. В этом случае учитель может задать ученикам наводящие вопросы: Почему гипотенуза больше катета? Какой угол напротив гипотенузы? Этот угол больше или меньше других углов?

По данным ответам отмечается, что угол напротив гипотенузы больше остальных углов, следовательно, сторона напротив – гипотенуза также больше катетов.

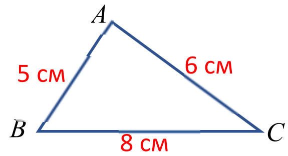
К сведению учителя! При определении, какой угол или сторона больше или меньше, используя соотношение сторон и углов треугольника, целесообразно предложить ученикам найти ответ, нарисовав треугольник и отметив на нем имеющиеся данные.

Задания

2. На вопросы отвечают, используя связи между сторонами и углами.

а) Если в треугольнике ABC $AB < BC < AC$, то наибольший угол этого треугольника равен ABC. Ученикам, испытывающим трудности с поиском ответа, рекомендуется нарисовать треугольник и отметить его на нем.

3. Даются ответы на вопросы.



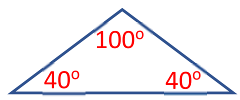
а) Отмечается, что в треугольнике ΔABC AB = 5 см, BC = 8 см, AC = 6 см. Чертится треугольник. Размеры отмечаются.

Определяются наибольший и наименьший углы этого треугольника.

$AB < AC < BC \rightarrow \angle ACB < \angle BCA < \angle BAC$

Наибольший угол — угол $\angle BAC$, наименьший угол — угол $\angle ACB$.

4. Определяется, верное или неверное утверждение.

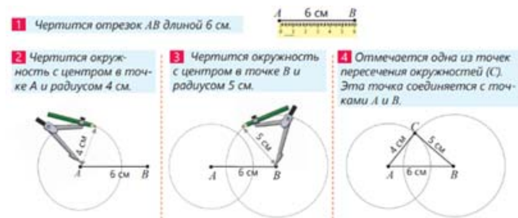


а) Угол, прилежащий к основанию равнобедренного треугольника, равен 40°. Угол при вершине этого треугольника вычисляется по формуле суммы внутренних углов треугольника.

$$180^o - (40^o + 40^o) = 100^o$$

Значит, угол при вершине равен 100°. Сторона, напротив, 100° — это основание. По соотношению сторон и углов треугольника основание больше сторон. *Мнение неверно.*

Изучение Построение треугольника по трем сторонам

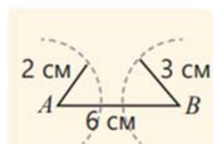


Подчеркивается, что рисование фигур только с помощью линейки и циркуля называется построением фигур в математике. Ученикам объясняется приведенный в учебнике задание образец на построение треугольника по трем его сторонам.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.

https://contrib.pbslearningmedia.org/WGBH/conv20/mgbh-int-linktriangle/index.html

Подумай. Ученикам объясняется, как можно построить треугольник со сторонами 4 см, 5 см и 6 см, начав с построения его меньшей стороны. Это задание целесообразно выполнять вместе с учениками на уроке, у доски или в группах. Оба случая объясняются с помощью рисунков в тетради, и высказывается мнение о конгруэнтных треугольниках.



Внимание. Верность неравенства треугольника можно также показать, построив треугольник. Например, поскольку 6 см > 2 см + 3 см, то из отрезков длиной 2 см, 3 см и 6 см построить треугольник невозможно.

В технически оснащенных классах можно выполнить интерактивную деятельность.

7. Требуется найти наибольший и наименьший углы треугольника ABC.

Данные в задаче отмечаются.

AB = 8 см

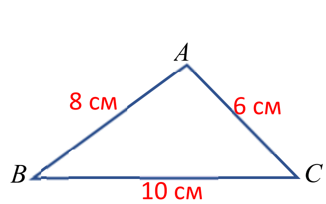
BC – больше на 25%

AC – на 40% меньше, чем BC

Наибольший угол – ?

Наименьший угол – ?

Решение задачи.



- Находятся длины сторон BC и AC.

BC = 8 · 1,25 = 10 см

AC = 10 · 0,6 = 6 см

Треугольник строится схематично и отмечаются размеры.

- Определите наибольший и наименьший угол, используя неравенство треугольников.

$AC < AB < BC \rightarrow \angle B < \angle C < \angle A$

Следовательно, наибольший угол — это угол, противоположный BC, т.е. $\angle A$, а наименьший угол — это угол, противоположный AC, т.е. $\angle B$.

8. Определяется, можно ли построить треугольник с заданными размерами, и в тетради строятся подходящие треугольники.

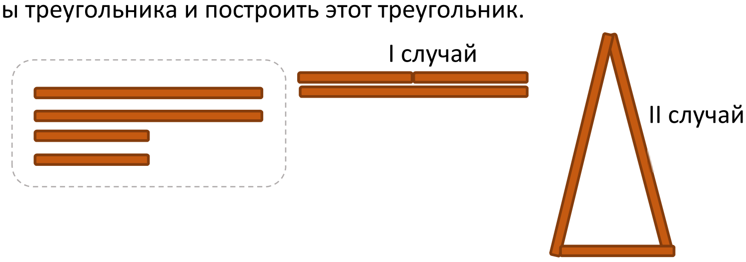
а) Проверяется неравенство треугольника. Можно построить этот треугольник. Треугольник строится в тетради по правилу построения треугольника по трем его сторонам.

б) Построение этого треугольника невозможно в силу неравенства треугольника. Потому что 5 см + 5 см = 10 см. Неравенство треугольника не выполняется. Следовательно, такой треугольник построить невозможно.
в) Меньшую сторону обозначим x, а остальные стороны — $x + 2$ и $x + 4$. Записывается уравнение и решается.
$x + x + 2 + x + 4 = 24 \rightarrow x = 3$
9. Даются ответы на вопросы. Определяется, сколько всего таких треугольников.
а) По неравенству треугольника можно показать, что невозможно построить треугольник со сторонами 2 см и основанием 5 см. Значит, стороны этого равнобедренного треугольника будут равны 5 см, а его основание – 2 см. Периметр этого треугольника вычисляется. $5 + 5 + 2 = 12$ (см).
б) Чтобы построить равнобедренный треугольник со сторонами 3 и 4 см, сначала проверяют неравенство треугольника. Оказывается, таких треугольников два. Периметры треугольников рассчитываются для обоих случаев.
$3 + 3 + 4 = 10$ (см) $4 + 4 + 3 = 11$ (см)
К сведению учителя! Рекомендуется информировать учеников о том, что для треугольника с заданными тремя сторонами существует 3 возможных случая.
1) *Такой треугольник построить невозможно*. Неравенство треугольника не выполняется для данных чисел. Можно посмотреть рубрику «Внимание» в учебнике.
2) *Всего 1 такой треугольник*. В этом случае получается разносторонний или равнобедренный треугольник.
3) *Можно построить два таких треугольника*. В данном случае получаются два равнобедренных треугольника. В качестве примера можно привести пункт б) задания 9.
Когда ученики строят треугольник по трем его сторонам, целесообразно предложить им сначала проверить существование треугольника, стороны которого имеют заданные длины. Это разовьет у учеников навыки решения задач, применяя взаимосвязи между сторонами и углами треугольника.
Дифференцированное обучение.
Поддержка. Ученикам даются длины сторон. Ученики определяют, существуют ли такие треугольники. Задание заключается в объяснении этого с помощью неравенства треугольника и построения. После того, как ученики составят треугольник, они определяют маленький и большой углы.
Углубление. Ученики делятся на пары. Один из учеников называет две длины. Другому ученику предлагается назвать такую длину, чтобы можно было построить треугольник со сторонами данных длин. Затем ученики объясняют это, используя неравенства треугольника и построение. Они определяют маленький и большой углы этих треугольников.

Решение задач

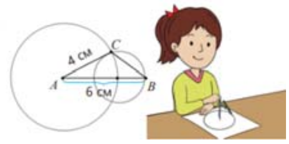
10. Отмечается, что периметр равнобедренного треугольника, одна сторона которого в 2 раза больше другой, равен 10 см. Требуется найти стороны треугольника и построить этот треугольник.

Привлечение. Учитель берет две маленькие и две большие палочки при условии, что большая палочка в два раза больше маленькой. Сначала он показывает ученикам 2 маленькие и 1 большую палочку, затем 1 маленькую и 2 большие палочки и задает вопросы:



Из каких палочек можно построить треугольник? Почему в случае 1 не удалось построить треугольник? Почему в случае 2 можно построить треугольник? Как это можно было определить, не составляя треугольники?
Решение задачи.
Стороны треугольника обозначаются x, $2x$, $2x$ и задача решается составлением уравнения.
$x + 2x + 2x = 10 \rightarrow x = 2$
Стороны определяются. 2 см, 4 см, 4 см. Треугольник строится по размерам, указанным в тетради.
Ответ. 2 см, 4 см, 4 см.

11. Лала хочет построить треугольник, стороны которого равны 6 см, 4 см и 2 см. Изображается, как Лала построила треугольник. Правильно ли она построила треугольник?

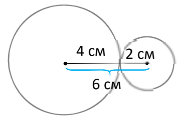


Решение задачи.

С учениками обсуждаются ошибки, допущенные Лалой.

Согласно неравенству треугольника отмечается, что такого треугольника не существует.

Мнение обосновывается построением треугольника по трем его сторонам

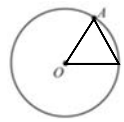


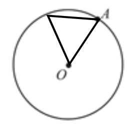
12. Точка A отмечена на окружности с центром в точке O. С помощью циркуля необходимо найти на окружности точку B такую, чтобы получился равносторонний треугольник AOB. Требуется определить, сколько таких точек.

Задавая ученикам наводящие вопросы, можно подвести их к решению задачи. Какой треугольник называется равносторонним? Какие свойства окружности можно использовать для построения равностороннего треугольника? Каково расстояние OA?

Решение задачи.

- Отмечается, что расстояние OA равно радиусу, а угол равностороннего треугольника равен 60°.
- Равносторонний треугольник строится по правилу построения треугольника по углу между двумя сторонами. Ученики определяют, что равносторонний треугольник можно построить двумя способами. Целесообразно привести ученикам примеры обоих случаев.





Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Применяет неравенство треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет взаимосвязь между сторонами и углами треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ
Рисует треугольник с помощью линейки и циркуля по длине трех его сторон.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. С учениками повторяются понятия, приведенные в заключении раздела учебника. Слова, изученные в разделе, учитель напоминает ученикам. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Медиана, биссектриса, высота треугольника, признаки конгруэнтности треугольников, секущая, соответственные углы, накрест лежащие углы, признаки параллельности прямых, внутренние и внешние углы, углы, у которых соответствующие стороны параллельны или перпендикулярны

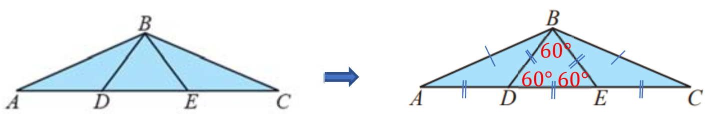
Напоминается информация, представленная на первой странице раздела, и задание «Попытайтесь!». Даются ответы на вопросы о конгруэнтных углах, параллельных прямых и биссектрисе угла в модели моста, составленной из одинаковых палочек. Решение исходной задачи обсуждается с классом. При изготовлении такой модели важна устойчивость. Эти понятия важны для обеспечения устойчивости. Ученикам можно дать задание сделать похожие модели. Можно поделиться с учениками видеоматериалом, связанным с подобной деятельностью, и привести примеры.

https://youtu.be/nu-PIT_XuvM
https://youtu.be/mBHJtWbsiaA
https://www.pbslearningmedia.org/resource/phy03.sci.phys.mfw.bbtrussanim/train-truss-animation/

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. В задании требуется проверить, верно или нет мнение Айнур, обосновать свое мнение. Для этого можно использовать таблицу обоснования из двух столбцов. При заполнении таблицы рекомендуется отмечать на изображении.

Предположение	Обоснование
1. Отрезок BE медиана треугольника BDC, а отрезок BD медиана треугольника ABE.	1. Дано.
2. $DE \cong EC$	2. Отрезок BE — медиана треугольника BDC.
3. $AD \cong DB$	3. Отрезок BE — медиана треугольника BDC.
4. $\angle DBE = \angle BDE = \angle BED = 60°$ $DB = DE = BE$	4. Треугольник BDE – равносторонний треугольник.
5. $\Delta ABD \cong \Delta BEC$	5. По признаку конгруэнтности треугольников ССС



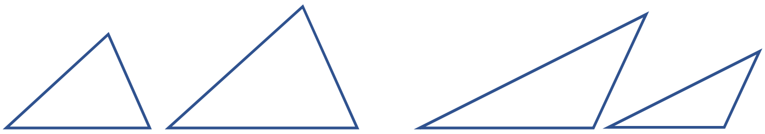
Для обоснования мнения можно использовать и другие признаки конгруэнтности треугольников. Обсуждаются мнения учеников, выполняющих задание другим способом.

2. Определяются верные утверждения. Задачу можно выполнить с помощью метода углов класса. Те, кто считает утверждение верным, идут в 1-й угол класса, те, кто считает – неверным, идут во 2-й угол, а те, кто не определился, идут в 3-й угол. Ученики, собравшиеся в одном углу, обосновывают свои мнения, объясняя их и приводя примеры.

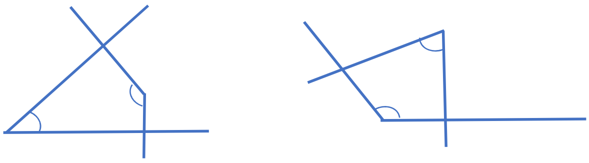
а) Если две разные прямые не пересекаются на плоскости, то эти прямые параллельны. Верность мнения объясняется путем опроса учеников о параллельных прямых и о том, когда прямые параллельны. Приводится несколько примеров параллельных прямых. *Мнение верно.*

б) Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой. *Мнение верно.*

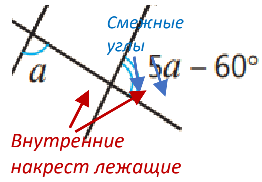
в) Треугольники, соответствующие углы которых равны, могут не быть конгруэнтными. Приводятся примеры треугольников, у которых углы конгруэнтны, но стороны не конгруэнтны. *Мнение верно.*



г) Углы, у которых соответствующие стороны перпендикулярны, равны. Приводятся примеры углов, соответствующие стороны которых перпендикулярны, но не равны. *Мнение неверно.*



3. б) Сумма данных углов равна 180° по свойству смежных углов и внутренних накрест лежащих углов, образованных пересечением двух параллельных прямых секущей. Уравнение записывается и решается.



$$a + 5a - 60° = 180° \quad \rightarrow \quad a = 20°$$

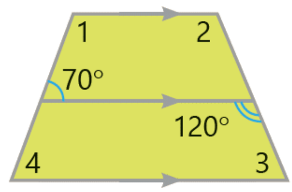
4. Находится градусная мера пронумерованного угла.

в) Угол $\angle 1$ и 70° внутренние односторонние углы. $\angle 1 = 180° - 70° = 110°$

Угол $\angle 2$ и 120° соответственные углы. $\angle 2 = 120°$

Угол $\angle 3$ и 120° внутренние односторонние углы. $\angle 3 = 180° - 120° = 60°$

Угол $\angle 4$ и 70° соответственные углы. $\angle 4 = 70°$



К сведению учителя! При решении 3-го и 4-го заданий у учеников иногда возникают затруднения с определением видов углов. Особенно это заметно при пересечении нескольких прямых. Целесообразно предложить ученикам, испытывающим затруднения, сначала определить вид углов между параллельными прямыми, а затем, исходя из признаков параллельности, написать соответствующее уравнение и вычислить меру угла.

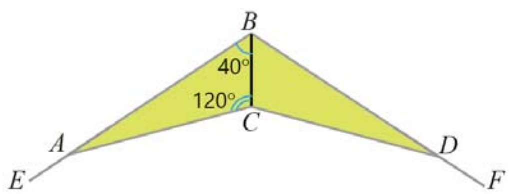
5. ΔABC и ΔDBC конгруэнтны. Требуется найти градусную меру угла $\angle SDF$.

$\angle BAC = 180° - (120° + 40°) = 20°$

Поскольку $\Delta ABC \cong \Delta DBC$:

$\angle BAC \cong \angle CDF = 20°$

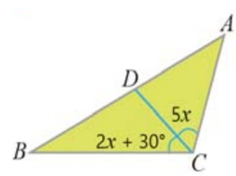
Ответ: $\angle CDF = 20°$.



6. Уравнение составляется с учетом того, что линия, нарисованная на изображениях, является медианой, биссектрисой или высотой, и задача решается.

в) Поскольку CD биссектриса:

$2x + 30° = 5x \rightarrow x = 10°$

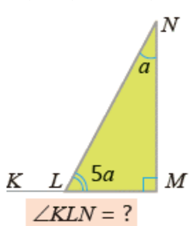


8. Определяются величины требуемых углов в градусах.

б) $a + 5a = 90° \rightarrow a = 15°$

$\angle NLM = 5a = 5 \cdot 15° = 75°$

$\angle KLN = 180° - 75° = 105°$



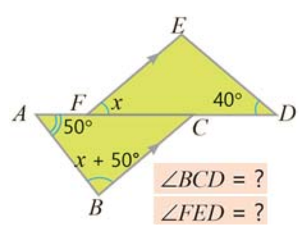
в) Поскольку $FC \parallel BC$: $\angle EFD \cong \angle ACB$

$x + 50° + x + 50° = 180° \rightarrow x = 40°$

По свойству смежных углов

$\angle BCD = 180° - 40° = 140°$

$\angle FED = 50° + 40° = 90°$



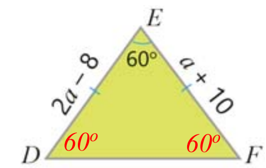
9. Требуется найти меры всех углов и длины сторон треугольника ΔDEF.

$2a - 8 = a + 10 \;\rightarrow\; a = 18$

$DE = 2 \cdot 18 - 8 = 30$; $DE = EF = DF = 30$

$\angle D = \angle F = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$

Ответ. Данный треугольник является равносторонним. Углы этого треугольника равны 60°, а стороны равны 30 единицам.



11. Находятся величины требуемых углов в градусах.

в) Определяется угол $\angle BDA$. $\angle BDA = 180^\circ - (58^\circ + 58^\circ) = 64^\circ$

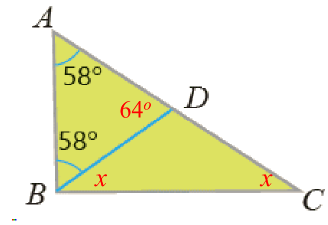
Поскольку BD медиана: $AD = DC = BD$, $\angle DBC = \angle DCB$

На основании свойства внешнего угла треугольника составляется и решается уравнение.

$x + x = 64^\circ \rightarrow x = 32^\circ$

$\angle ABC = 58^\circ + 32^\circ = 90^\circ$

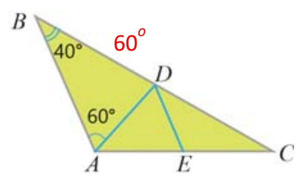
Ответ. $\angle BDA = 64^\circ$ $\angle ABC = 90^\circ$



13. Отмечается, что отрезок AD является биссектрисой треугольника ΔABC, а отрезок DE — биссектрисой треугольника ΔADC. Определяется угол $\angle AED$.

Поскольку отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC:

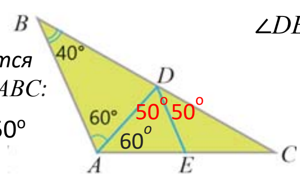
$\angle BAD = \angle DAC = 60^\circ$



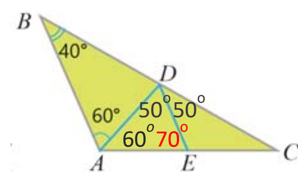
$\angle ADC = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$

Поскольку отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC:

$\angle ADE = \angle EDC = 100^\circ : 2 = 50^\circ$



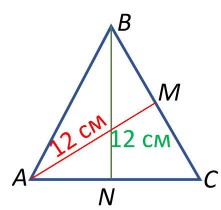
$\angle DEA = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$



14. Даются ответы на вопросы. Ответы обосновываются.

а) Отмечается, что медиана, проведенная из всех вершин равностороннего треугольника ABC, также является высотой треугольника. Значит, длина высоты, проведенной из вершины B, будет равна 12 см.

Ответ. Длина высоты, проведенной из вершины B, равна 12 см.



15. Отмечается, что из точки N, расположенной на биссектрисе угла $\angle BAC$, проведены перпендикуляры NB и NC к сторонам угла.

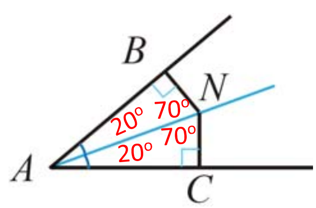
а) $\angle ANC = ?$

$\angle BAN = 20^\circ$

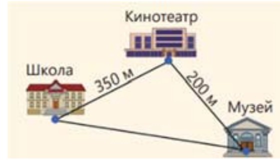
$\angle BNC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

$\angle BNC = \angle ANC = 70^\circ$

Следовательно, угол $\angle ANC$ равен 70°. На другие вопросы отвечают таким же образом.

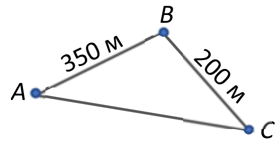


16. Отмечается, что школа находится в 350 м от кинотеатра, а музей – в 200 м от кинотеатра.



Решение задачи:

По неравенству треугольника можно определить расстояние от школы до музея.



$AC < AB + BC$

$AC < 350 + 200$

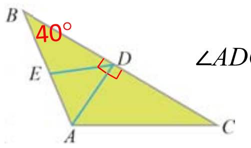
$AC < 500$

550 м	600 м	450 м	150 м

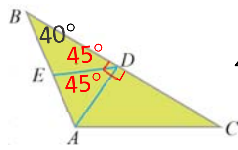
Ответ. 450 м.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

17. Отрезок AD — это высота треугольника ΔABC. Угол $\angle US$ равен 40°. Отрезок DE является биссектрисой треугольника ΔADB. Требуется найти градусную меру угла $\angle DEA$.

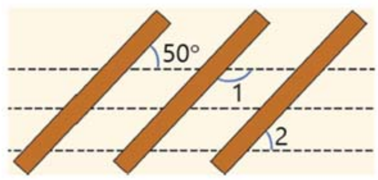


$\angle ADC = \angle ADB = 90°$



$\angle EDB = \angle EDA = 90° : 2 = 45°$

18. На плане указывается расположение 3-х книжных шкафов в библиотеке. Требуется найти градусную меру углов 1 и 2, чтобы данные полки были параллельны. Искомые углы находятся, используя свойства угла, образованного пересечением параллельных прямых секущей.

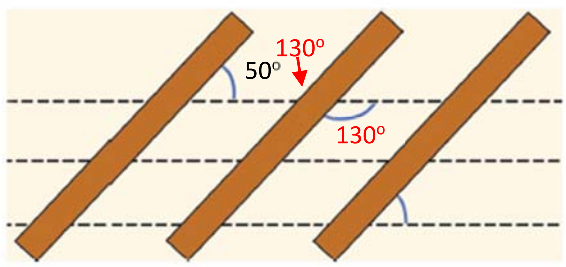


• Находится угол, который односторонний с 50° углом

$180° – 50° = 130°$

• Угол 130° и угол 1 вертикальные углы.

$\angle 1 = 130°$



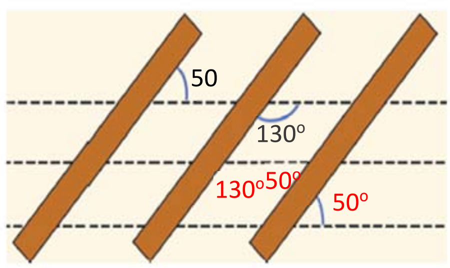
• Угол, соответственный $\angle 1$, определяется. $\angle 1 = 130°$

• Определяется внутренний односторонний угол с этим углом.

$180° – 130° = 50°$

• Найденный угол и угол 2 — это внутренние накрест лежащие углы.

$\angle 2 = 50°$.



Ответ. $\angle 1 = 130°$; $\angle 2 = 50°$.

Геодезические купола

Ученикам сообщается о конструкциях, называемых геодезическими куполами, которые получили широкое распространение из-за их внешнего вида и устойчивости. Отмечается, что в этих куполах элементы треугольников позволяют равномерно распределить вес, что делает их высоко устойчивыми к ураганам, землетрясениям и стихийным бедствиям. Ученикам сообщается, что эти купола широко используются в космических исследованиях. Целесообразно показать ученикам видеопрезентацию по изготовлению геодезических куполов. Ученики собирают информацию о геодезических куполах, которые предлагается использовать для лунной базы.

1. В интернете получают информацию о том, когда были созданы первые геодезические купола.
2. Из картона делаются модели геодезических куполов, исследуется, какие треугольники используются, и объясняются причины этого.

Целесообразно предоставить ссылки, которыми ученики смогут воспользоваться.
https://youtu.be/77PWXZGLMRg
Геодезические купола также можно сделать из пластиковых трубочек и бумаги.
Использование пластиковых трубочек: *https://youtu.be/Gl71iOkeIDo*
Использование бумаги: *https://youtu.be/Ym1388CcwuQ*

3. Готовится презентация о геодезических куполах, их положительных и отрицательных аспектах, а также областях применения.
4. В технически оснащенных классах можно сделать модели геодезических куполов на компьютере и напечатать их на 3D-принтере. Целесообразно продемонстрировать ученикам связанную с этим видеопрезентацию.

Изготовление геодезических куполов с помощью Tinkercad:
https://www.tinkercad.com/things/8aIaXDxyZSl-

8-й РАЗДЕЛ

Площадь и объем геометрических фигур

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	80	
Тема 8.1	Площадь треугольника	2	81	53
Тема 8.2	Площадь параллелограмма и ромба	3	83	55
Тема 8.3	Длина окружности. Площадь круга	3	86	57
	Задачи	2	89	59
Тема 8.4	Площадь поверхности прямой треугольной призмы и цилиндра	3	90	61
Тема 8.5	Объем прямой треугольной призмы и цилиндра	2	93	63
	Обобщающий урок. STEAM. “Поселение на Марсе”	3	96	65
	МСО-6	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**20**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики научатся вычислять площадь треугольника, параллелограмма, ромба, круга, длину круга, площадь поверхности и объем прямой треугольной призмы, цилиндра. Применяя эти правила, будут решать задачи.

На что стоит обратить внимание?

При применении формулы площади треугольника к тупоугольному треугольнику, если провести высоту из вершины острого угла, длина стороны, на которую опущена эта высота, определяется неверно. Целесообразно напомнить ученикам, допускающим подобные ошибки, правила проведения высот в тупоугольном треугольнике и направить их на правильное определение длины стороны, к которой проведена эта высота. Этот навык поможет ученикам правильно определить площадь тупоугольного треугольника.

Некоторые ученики считают, что меньшая высота параллелограмма нарисована к его меньшей стороне, и допускают ошибки при вычислении площади параллелограмма. Таким ученикам можно задать вопросы, связанные с вычислением площади параллелограмма, указывая длины сторон и высот. Рекомендуется обратить внимание учеников на высоту и длину стороны, а также направить их на определение обратной пропорциональности между стороной и высотой, проведенной к этой стороне.

Если ученики испытывают трудности в различении понятий круга и окружности, целесообразно использовать наглядные примеры для объяснения их различий. В этом разделе ученики знакомятся с числом π (пи). Рекомендуется организовать в классе деятельность, связанную с объяснением, почему это число принято за константу. Целесообразно продемонстрировать примеры вычислений с использованием числа π с помощью калькулятора.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий *“площадь треугольника", "меньшая или большая высота параллелограмма", "площадь ромба", "длина окружности", "площадь круга", "число π", " площадь (полной) поверхности прямой призмы", "площадь боковой поверхности прямой призмы", "объем прямой призмы", "боковые грани призмы", "основания призмы", "площадь поверхности цилиндра" и "объем цилиндра"* позволяет оценить, насколько хорошо усвоены эти понятия.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

“Высота параллелограмма", "площадь ромба", "длина окружности", "площадь круга", "число π", "площадь (полной) поверхности прямой призмы", "площадь боковой поверхности прямой призмы", "объем прямой призмы", "боковые грани призмы", "основания призмы", "площадь поверхности цилиндра" и "объем цилиндра"

Необходимые предварительные знания и навыки:

- Треугольник, параллелограмм, ромб
- Медиана, биссектриса и высота треугольника
- Площадь прямоугольника, прямоугольного треугольника
- Площадь поверхности и объем кубоида, прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник

Междисциплинарная интеграция

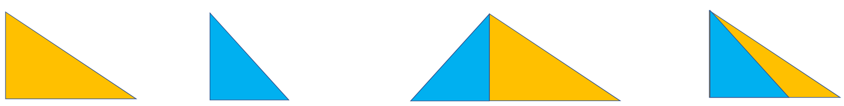
В строительстве, производстве и упаковочных работах широко используются понятия площади и объема. Ученикам приводятся примеры использования понятий площади и объема в повседневной жизни. Например, при покраске стен, укладке пола используется площадь, а при расчете вместимости контейнеров, бассейнов, аквариумов и различных сосудов — объем. Ученикам можно предложить выбрать примеры геометрических фигур в классе и определить, где они используются, и вычислить площадь, площадь поверхности или объем.

ТЕМА 8.1. Площадь треугольника

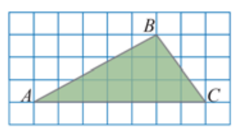
ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.4.3. Вычисляет площадь треугольника.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет площадь треугольника. • Вычисляет высоту или сторону треугольника с известной площадью.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://video.edu.az/video/1116* *https://video.edu.az/video/2032* *https://www.studyladder.com/games/activity/area-of-triangles-13135* *https://www.iknowit.com/lessons/e-area-of-triangles.html* *https://mathkite.com/area-of-a-triangle/* *https://www.transum.org/software/SW/Starter_of_the_day/Students/Area_of_a_Triangle/Quiz.asp* *https://www.mathgames.com/skill/7.18-area-of-triangles-and-trapezoids*

Побуждение.

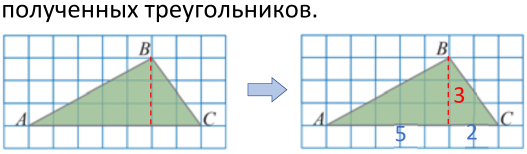
Учитель берет прямоугольные треугольные фигуры, вырезанные из бумаги разного цвета, и предлагает ученикам также вырезать из цветной бумаги два треугольника. Необходимо обратить внимание на то, чтобы один из катетов этих треугольников были равны. Ученикам задаются вопросы, связанные с нахождением площади сначала треугольника, полученного при соединении цветных бумажек равными катетами, а затем тупоугольного треугольника, образованного при наложении их друг на друга. Организуется обсуждение, в ходе которого исследуются методы нахождения площади полученных треугольников.



Исследование-обсуждение



На бумаге в клетку чертится треугольник ABC. Из вершины B этого треугольника проводится перпендикуляр к стороне AC. Получается два прямоугольных треугольника, вспоминается способ нахождения площади прямоугольного треугольника. Площадь треугольника ABC находится путем сложения площадей полученных треугольников.



$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7{,}5$ кв. ед.

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ кв. ед.

$3 + 7{,}5 = 10{,}5$ кв. ед.

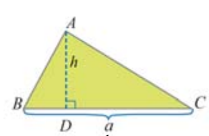
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BD \qquad S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot DC$$

Ученикам задается вопрос, какими еще способами можно найти площадь треугольника ABC. Ученики могут определить площадь треугольника, используя количество клеток или дополнив до прямоугольника.

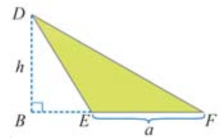
Изучение Площадь треугольника

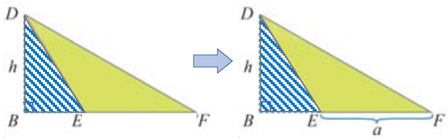
Подчеркивается, что найти площадь треугольника можно, разделив два прямоугольных треугольника или дополнив до прямоугольного треугольника. Пример объясняется ученикам. Отмечается, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

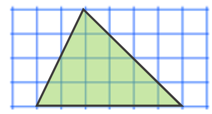
Подумай! Ученикам объясняется, что, найдя разность площадей двух прямоугольных треугольников, по этой формуле также находится и площадь тупоугольного треугольника. Отмечается, что при вычитании площади треугольника BDE из площади треугольника BDF получается площадь треугольника DEF.

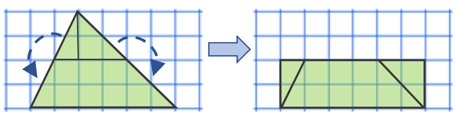




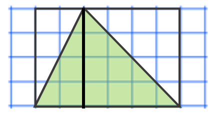
$$S_{DEF} = S_{BFD} - S_{BED}$$
$$S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot h - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (BF - BE) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h$$
$$S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Практическое задание. Чертится треугольник со стороной 6 единиц и высотой 4 единицы. Правильность формулы нахождения площади треугольника показывают, сложив этот треугольник или дополнив его до прямоугольника. Учитель может помочь ученикам получить похожие изображения, направляя их.





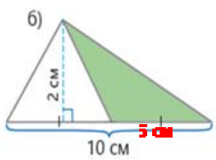
или



Задания

2. Определяется площадь закрашенного треугольника.

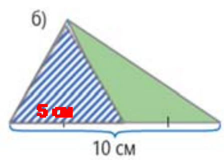
1-й способ. Используя формулу площади треугольника



10 : 2 = 5 (см)

$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ (см^2)

2-й способ. По разности площадей двух треугольников



$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10$ (см^2)

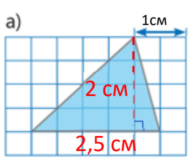
10 : 2 = 5 (см)

$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ (см^2)

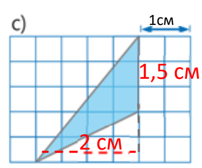
10 – 5 = 5 (см^2)

Обсуждаются методы решения, которыми пользуются ученики, находящие площади треугольников разными способами.

3. Вычисляются площади треугольников. Учитывая, что 2 клетки равны 1 см, определяют сторону треугольника и высоту, проведенную к этой стороне, и вычисляют площадь.



$a = 5 : 2 = 2{,}5$ (см)
$h = 4 : 2 = 2$ (см)
$S = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2 = 2{,}5$ (см^2)



$a = 3 : 2 = 1{,}5$ (см)
$h = 4 : 2 = 2$ (см)
$S = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5$ (см^2)

К сведению учителя!

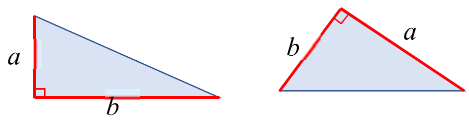
Иногда ученики испытывают трудности с определением высоты треугольника или длины стороны, к которой проведена высота. Из-за этого они допускают ошибки при расчете площади.

Рекомендуется привести учащимся примеры того, как определяются основание и высота.

Например, при нахождении площади прямоугольного треугольника ученики, которым трудно определить сторону и проведенную к ней высоту, затрудняются и с вычислением площади. Рекомендуется привести несколько примеров таких случаев и обсудить, как определяется площадь этих треугольников.

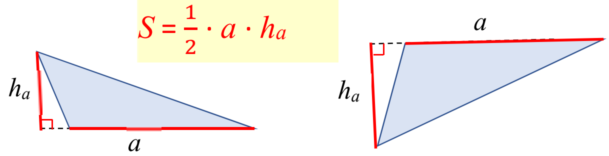
Поскольку катеты прямоугольного треугольника перпендикулярны, его площадь равна половине произведения катетов.

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

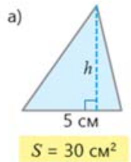


В тупоугольном треугольнике высота, проведенная из острого угла, опирается на продолжение стороны. При этом длина стороны треугольника не меняется, то есть длина продолжения не прибавляется к длине стороны.

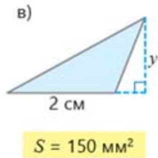
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$



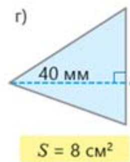
4. По формуле площади треугольника находится длина отрезка, обозначенного буквой.



$a = 5$ см
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = 30$
$h = 12$ (см)



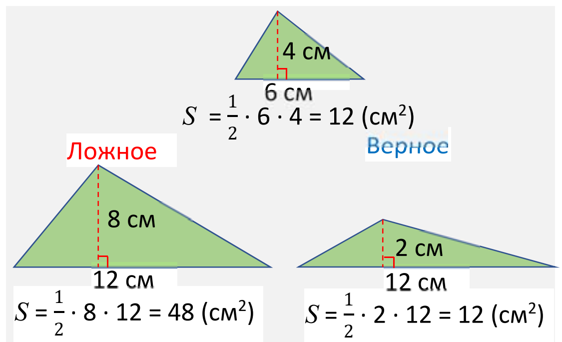
$a = 2$ см $= 20$ мм
$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot y = 150$
$y = 15$ (мм)



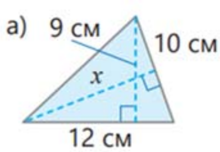
$h = 40$ мм $= 4$ см
$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot d = 8$
$d = 4$ (см)

В технически оснащенных классах можно сыграть в интерактивные игры.
https://www.inchcalculator.com/triangle-height-calculator/

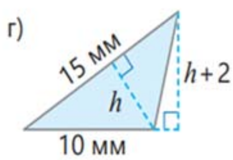
Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики допускают определенные ошибки при нахождении высоты или стороны треугольника, площадь которого известна. Они думают, что, когда высота увеличивается в два раза, сторона тоже увеличивается в два раза, так что площадь не меняется. Ученикам, допускающим подобные ошибки, можно предложить определить, что высота и сторона треугольника, площадь которого известна, обратно пропорциональны, показав и сравнив несколько примеров.



5. По формуле площади треугольника находится длина отрезка, обозначенного буквой.

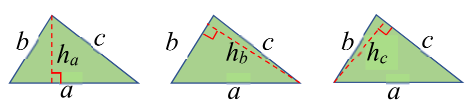


$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x$
$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot$
$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9$
$x = 10{,}8$ (см)



$S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h$
$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (h + 2)$
$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (h + 2) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h$
$h = 4$ (мм)

К сведению учителя! Ученикам предлагается привести примеры, чтобы определить, как меняется площадь треугольника при изменении только высоты или стороны, и как меняется площадь при изменении и стороны, и высоты.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.mathwarehouse.com/geometry/triangles/area/area-of-triangle-applet.php
https://www.inchcalculator.com/triangle-area-calculator/



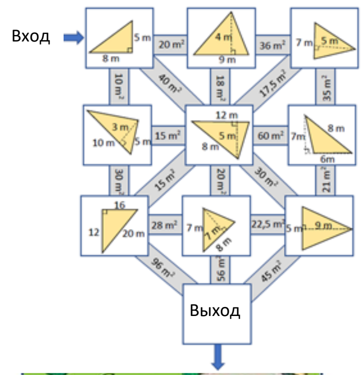
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

Ученики должны выполнить 5-е задание, используя формулу площади треугольника. По формуле площади треугольника целесообразно на примерах показать ученикам, что произведение любой стороны на высоту, проведенную к этой стороне, равно. Используя это правило, ученикам будет легче найти две стороны и высоту другой стороны, если известна высота одной стороны. По тому же правилу, если известны две высоты и сторона, к которой проведена одна из этих высот, можно найти другую сторону.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. На доске чертится несколько треугольников. Отмечается одна сторона треугольников и высота, проведенная к этой стороне. Ученикам дается задание определить треугольники с равными площадями. Ученики находят площади треугольников и объясняют, как они их нашли.

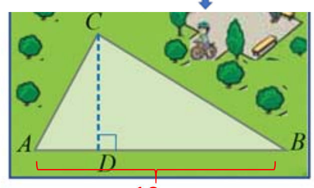
Углубление. К доске вызывают двух учеников. Один из учеников чертит на доске треугольник и отмечает одну из его сторон, и высоту, проведенную к этой стороне. Другой ученик определяет площадь треугольника и чертит еще один треугольник, площадь которого равна площади этого треугольника. Ученики меняются местами, затем действие повторяется. Учитель может задавать наводящие вопросы ученикам, у которых возникают затруднения.
Ученикам с высокими результатами обучения можно также дать задания, в которых необходимо начертить различные формы прямоугольного и тупоугольного треугольника с заданными несколькими сторонами и одной высотой, а затем найти их площадь.



Игра. Класс делится на команды. Каждой группе дается рабочий лист.
Ученики должны за заданное время найти площадь каждого треугольника, начиная с треугольника у входа, и двигаться к выходу в направлении числа, обозначающего площадь. Маршрут можно отметить цветным карандашом. Побеждает та команда, которая первой правильно выполнит задание.
Рабочий лист можно скачать по этой ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1ceazsyx2Vg_4SvNbPS6b2NM9uSjO6XSD/view?usp=drive_link

Решение задач

6. Подготовлен план игровой площадки в парке в форме треугольника, площадь которого известна. Требуется найти расстояние между точками C и D. При этом необходимо определить расстояние, чтобы площадь игровой площадки, изображенной в виде треугольника ABC, увеличилась в 2 раза.



Решение задачи.
• Отмечается, что расстояние между точками C и D – это высота, проведенная к стороне AB в треугольнике ABC. Зная площадь и длину стороны AB, находится высота.
$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = 20 \rightarrow h$ = 4 (м)
Расстояние CD равно 4 м.
• Определяется, что при увеличении высоты треугольника ABC в 2 раза площадь также увеличивается в 2 раза. Значит, если расстояние между точками C и D равно 16 м, площадь увеличится в два раза.
Ответ. Расстояние между точками C и D равно 8 м, а если это расстояние составит 16 м, то площадь игровой площадки, изображенной в виде треугольника ABC, также увеличится в 2 раза.
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

Формативное оценивание.

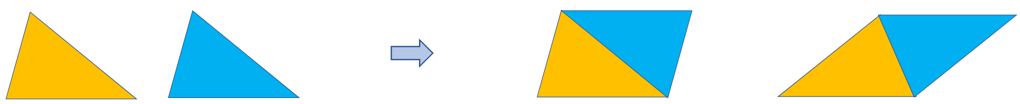
Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Вычисляет площадь треугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет высоту или сторону треугольника с известной площадью.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.2. Площадь параллелограмма и ромба

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.4.2. Вычисляет площадь параллелограмма и ромба.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет площадь параллелограмма. • Вычисляет высоту или сторону параллелограмма с известной площадью.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://www.interactive-maths.com/area-of-a-parallelogram-ggb.html* *https://www.transum.org/Maths/Exercise/Parallelogram/* *https://www.mathgames.com/skill/7.121-area-of-rectangles-and-parallelograms* *https://video.edu.az/video/9430* *https://video.edu.az/video/8456*

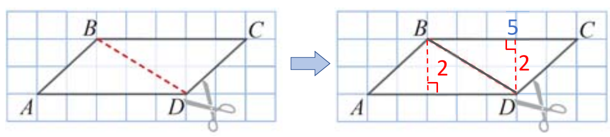
Побуждение.

Учитель берет два конгруэнтных треугольника, вырезанных из цветной бумаги, и дает ученикам задание также вырезать из цветной бумаги два конгруэнтных треугольника. Ученики сначала соединяют эти треугольники по одной из конгруэнтных сторон и обсуждают, какая фигура получилась и как найти площадь, используя площади треугольников.



Исследование-обсуждение

На бумаге в клетку чертят параллелограмм $ABCD$, разрезают его по отрезку BD и находят площади полученных треугольников. С учениками обсуждается, как вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, найдя площадь только одного из этих треугольников.



$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ кв. ед.

$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ кв. ед.

$5 + 5 = 10$ кв. ед.

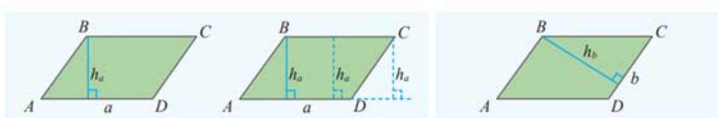
Ученикам можно задать наводящие вопросы: – Конгруэнтны ли полученные треугольники? Как вы это определили? Что можно сказать о площади конгруэнтных треугольников? В результате ученики могут отметить, что площадь параллелограмма $ABCD$ находится путем умножения площади одного из этих треугольников на два. Для этого ученики могут показать правильность изложенной идеи, расположив треугольники вдоль стороны BD.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/jgbekan5

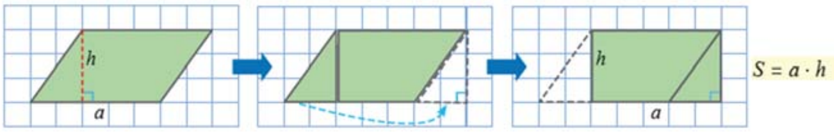
Изучение Площадь параллелограмма

Перпендикуляр, проведенный из любой точки стороны параллелограмма к противоположной стороне или продолжению противоположной стороны, является высотой параллелограмма, это объясняется на примерах. Ученики знакомятся не только с высотой, проведенную к стороне a, но и с высотой, проведенной к стороне b. Можно нарисовать несколько параллелограммов и для каждого провести несколько высот к сторонам a и b.



h_a – высота, проведенная к стороне a h_b – высота, проведенная к стороне b

Если провести высоту параллелограмма и вырезать полученный прямоугольный треугольник, соединить его так, как показано на рисунке, то получается прямоугольник. Показывается формула расчета площади параллелограмма.

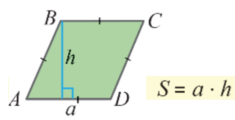


В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.geogebra.org/m/gcfrthzt

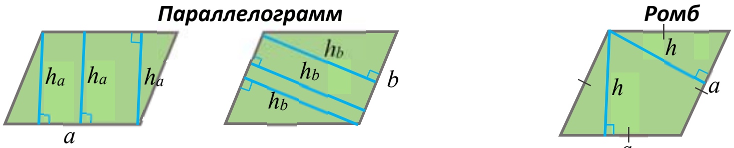
Подумай! На изображении целесообразно продемонстрировать изменение положения вырезанного треугольника и показать, что новый треугольник конгруэнтен предыдущему. Поскольку соответствующие размеры этих треугольников – высота и стороны, к которым проведена высота – также равны, то площади этих треугольников равны. Ученики могут подчеркнуть, что площадь вырезанного треугольника не меняется при изменении его положения, и в результате площадь полученного прямоугольника равна площади параллелограмма.
Отмечается, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведенной к этой стороне. Ученикам предоставляются примеры и формулы, связанные с высотами, проведенными к обеим сторонам параллелограмма.

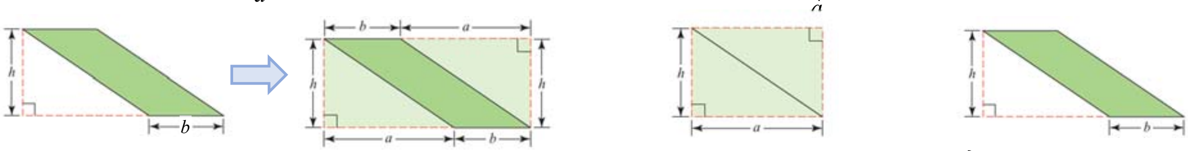
Запомни!

Ученикам объясняется, что ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны, и площадь ромба вычисляется по тому же принципу. В отличие от параллелограмма, поскольку все стороны ромба равны, высоты, проведенные из всех вершин ромба, равны. Поэтому для нахождения площади достаточно записать формулу, умножив сторону на высоту.



К сведению учителя! У учеников иногда возникают трудности с определением высоты параллелограмма и ромба. Это особенно наблюдается, когда высота не проводится вертикально перпендикулярно. Правильное определение высоты важно для нахождения площади. Ученикам можно привести различные примеры высот.





Параллелограмм дополняют до прямоугольника добавлением 2 прямоугольных треугольников. Площадь получившейся фигуры $S_1 = (a + b)\cdot h$

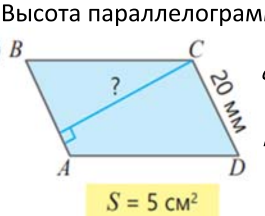
Прямоугольник образуется при соединении прямоугольных треугольников. Площадь этой фигуры $S_2 = a\cdot h$

Площадь параллелограмма получается вычитанием площади маленького прямоугольника из площади большого. $S_1 = (a + b)\cdot h - a\cdot h = b\cdot h$

Бывают такие изображения параллелограммов, при вычислении площади которых дети испытывают трудности. Ученикам можно объяснить, как найти площадь, сложив такие фигуры в прямоугольник.

Задания

2. Высота параллелограмма находится по формуле площади.

б) 

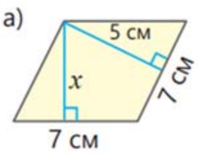
a = 20 мм = 2 см
$2 \cdot h = 5$
h = 2,5 (см)

г) 

a = 25 см
$25 \cdot h = 200$
h = 8 (см)

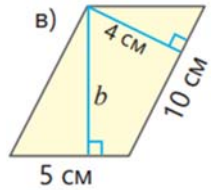
3. Находятся высоты данного параллелограмма, отмеченные буквой.

а)



S = $7x$
S = 7 · 5
$7x$ = 7 · 5
x = 5 (см)

в)



S = $5b$
S = 4 · 10
$5b$ = 4 · 10
b = 8 (см)

4. Дают ответы на вопросы.

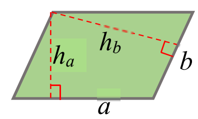
а) Находится высота параллелограмма. $10 \cdot \frac{4}{5} = 8$ (см)

Находится площадь параллелограмма. 8 · 10 = 80 (см^2)

б) Находится сторона ромба. 165 : 11 = 15 (см)

Находится площадь ромба. S = 4 · 15 = 60 (см^2)

К сведению учителя! Ученики должны выполнить 3-е задание, используя формулу площади параллелограмма. По формуле площади параллелограмма целесообразно на примерах показать ученикам, что произведение любой стороны на высоту, проведенную к этой стороне, равно. Используя это правило, ученикам будет легче найти две стороны и высоту, проведенную к одной из сторон, если известна другая высота. По тому же правилу, если известны две высоты и сторона, к которой проведена одна из этих высот, можно найти другую сторону.



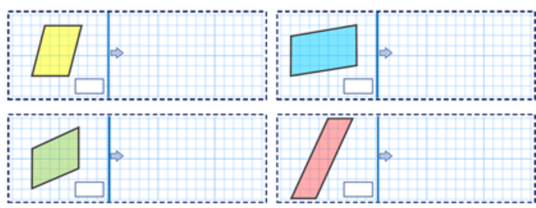
$a \cdot h_a = b \cdot h_b$

Дифференцированное обучение.

Поддержка. На доске чертится несколько параллелограммов. Ученикам дается задание определить параллелограммы с равными площадями. Ученики находят площади параллелограммов и объясняют, как они их нашли.

Углубление. К доске вызывают двух учеников. Один из учеников чертит на доске параллелограмм и отмечает одну из его сторон, высоту, проведенную к этой стороне. Другой ученик определяет площадь параллелограмма и рисует другой параллелограмм, площадь которого равна площади этого параллелограмма. Ученики меняются местами, затем действие повторяется. Учитель может задавать наводящие вопросы ученикам, испытывающим трудности.

Практическое задание. Класс делится на группы. Каждой группе раздается рабочий лист. Ученики за заданное время вычисляют площадь каждого параллелограмма, чертят 1 параллелограмм и 1 треугольник, площадь которого равна площади параллелограмма. Рабочие листы передаются между группами по часовой стрелке. Каждая группа проверяет, правильно ли выполнены задания на закрепленном за ней рабочем листе. Затем каждая группа берет свой рабочий лист и организуется обсуждение.



Рабочий лист можно скачать по этой ссылке:

https://drive.google.com/file/d/1pQwRy4GffIvk2f16hLN_6q8AaC_QJVlV/view?usp=sharing

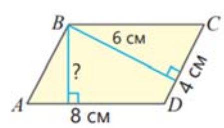
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:

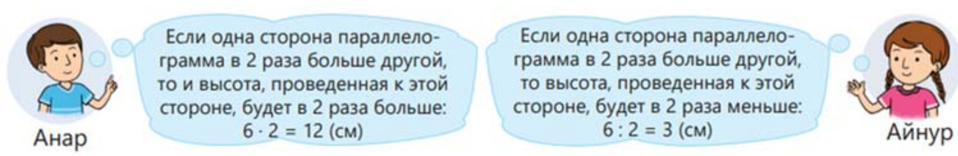
https://www.transum.org/Maths/Exercise/Parallelogram

Решение задач

5. Обсуждается, чье из мнений учеников является правильным. Для выполнения задания учитель может использовать метод углов класса.

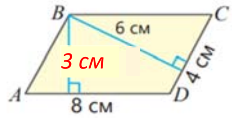
Ученики, согласные с мнением Анара, становятся в один угол, несогласные — во второй угол, а не определившиеся — в третий угол. Согласно этому правилу, тех, кто не согласен с мнением Айнур, можно определить и попросить обосновать свое мнение.





Решение задачи.

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту. Следовательно, чтобы оставаться постоянной, площадь должна быть обратно пропорциональна стороне и высоте. Если сторона параллелограмма в 2 раза больше другой стороны, то высота, проведенная к этой стороне, будет в 2 раза меньше.



$S = 4 \cdot 6 = 24$ (см^2)

$S = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2)

Ответ. Мнение Айнур верное.

Обсуждение. Найдя высоту, можно проверить правильность задачи, найдя площадь по обеим сторонам и высоте и показав, что она постоянна.

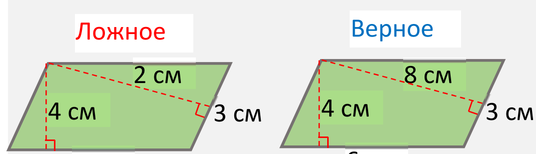
6. Стороны параллелограмма равны 10 см и 12 см, высота меньшей стороны 9 см, другую высоту требуется найти.

Решение задачи.

• Высота параллелограмма находится по формуле площади.

$10 \cdot 9 = 12 \cdot x \rightarrow x = 7{,}5$

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики думают, что, когда говорят о меньшей высоте параллелограмма, эту высоту измеряют по меньшей стороне. Можно привести несколько примеров, призванных развеять подобные заблуждения среди учеников. При изображении на примере становится более очевидно, что меньшая высота проводится к большой стороне, а большая высота — к меньшей стороне. При этом целесообразно объяснить ученикам, что если площадь постоянна, то сторона и высота обратно пропорциональны, и при уменьшении стороны высота увеличивается, или наоборот, при уменьшении высоты сторона увеличивается.



Ложное: $S = 6 \cdot 4 = 48$ (см^2); $S = 3 \cdot 2 = 6$ (см^2)

Верное: $S = 6 \cdot 4 = 48$ (см^2); $S = 3 \cdot 8 = 48$ (см^2)

9. В задаче ученикам требуется найти, сколько минимум плиток в форме ромба потребуется мастеру для укладки на прямоугольную стену.

Решение задачи.

• Вычисляется площадь стены. $3 \cdot 4 = 12$ (м^2)

• Рассчитывается площадь каждой плитки и выражается в квадратных метрах.

$30 \cdot 20 = 600$ (см^2); 600 см^2 $= 0{,}06$ м^2

• Площадь комнаты делится на площадь каждой плитки. $12 : 0{,}06 = 200$

Ответ. Для этого потребуется как минимум 200 плиток.

Обсуждение. Обсуждаются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

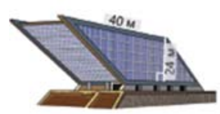
10. На двух гранях здания одинакового размера, имеющих форму параллелограмма, планируется установить стеклянные окна.

• Записывается выражение для расчета суммы расходов на основе заданных измерений.

$40 \cdot 24 \cdot (a + b) = 960(a + b)$

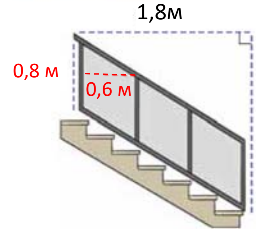
• По заданным значениям a и b рассчитывается сумма расходов.

$960 \cdot (70 + 40) = 105600$ (ман.)



Ответ. Сумма расходов составляет 105600 манатов.

11. К лестнице крепятся три одинаковые панели в форме ромба, как на рисунке. По площади одной из этих панелей требуется найти ее высоту и длину стороны.



Решение задачи.

• Находится высота одной панели. $1{,}8 : 3 = 0{,}6$ (м)

• Находится сторона одной панели. $0{,}48 : 0{,}6 = 0{,}8$ (м^2)

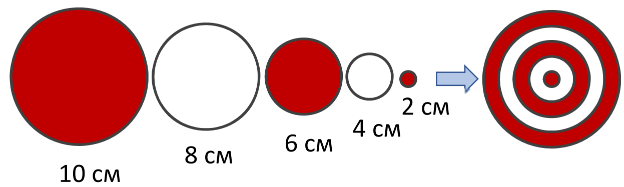
Ответ. Высота одной панели 0,6 м, а сторона 0,8 м^2.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Вычисляет площадь параллелограмма.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет высоту или сторону параллелограмма с известной площадью.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.3. Длина окружности. Площадь круга

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.4.1. Вычисляет длину окружности и площадь круга.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет длину окружности. • Вычисляет площадь круга.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://www.mathgames.com/skill/7.1-circles-calculate-area-radius-circumference* *https://www.mathgames.com/skill/7.146-circles* *https://www.geogebra.org/m/j8bwhc9j* *https://youtu.be/O-cawByg2aA* *https://video.edu.az/video/4457*



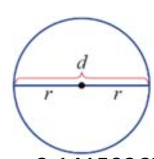
Побуждение. Вырезаются круги заданного радиуса, чтобы получилась доска для стрельбы из лука с круглыми кольцами на ней. Размещая эти круги так, чтобы их центры совпадали, получается мишень для дартса.
Задавая ученикам наводящие вопросы, организуется обсуждение площади белого и красного кругов и длин их кругов: Если на окружность радиусом 10 см положить окружность радиусом 8 см, увеличится или уменьшится площадь, окрашенная в красный цвет? Как определить эту площадь? Какие площади нужно для этого найти? У какой окружности — с радиусом 10 см или 8 см — больше площадь и длина окружности? Для какого круга требуется больше времени, чтобы провести линию по его окружности? Зависит ли это от его длины?
Подчеркивается, что отношение длин окружностей этих кругов к их диаметрам не меняется. Этот коэффициент рассчитывается в задании исследования.

Исследование-обсуждение

Название предмета			
Диаметр (см)			
Длина окружности (см)			
Отношение длины окружности к диаметру			

В классе выбирается несколько предметов цилиндрической формы. По ходу работы, после записи названий предметов, ученики измеряют их диаметр, затем длину окружности и отношение длины окружности к диаметру. В результате находится среднее значение. При выборе предметов учитель может направлять учеников. В то же время выбранные предметы должны быть такими, чтобы их длину окружности и диаметр было легко измерить. К таким предметам относятся пенал цилиндрической формы, часы и т.д. Подобную деятельность можно выполнить, используя вместо нити бумажные полоски. В результате ученики увидят, что полученные числа в строке отношения длины окружности к диаметру близки к 3,14. Таким образом, отношение всегда приблизительно равно 3,14.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://youtu.be/rs8VkFfg0hs

Изучение **Длина окружности**



π = 3,14159265...

Отмечается, что отношение длины окружности к ее диаметру постоянно для всех окружностей и равно одному и тому же числу. Можно подчеркнуть, что ученики наблюдали это и при выполнении исследовательского задания. Это число обозначается греческой буквой π. Ученикам даются краткие сведения о числе π. Ученикам говорят, что в значении π после запятой стоит бесконечное количество цифр. Длина окружности равна произведению диаметра окружности на число π, а также показывается ученикам, как длина окружности рассчитывается в зависимости от диаметра и одновременно от радиуса с помощью формулы. Отмечается, что длина окружности прямо пропорциональна ее диаметру.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.geogebra.org/m/za3dvn3e/
К сведению учителя! В технически оснащенных классах можно продемонстрировать ученикам через онлайн-калькулятор, что при записи числа π в виде десятичной дроби после запятой стоит бесконечное количество цифр. На калькуляторе ученики могут увидеть количество цифр после запятой, вписав в соответствующую ячейку цифры 10, 20, 100 и т.д. *https://onlinetools.com/number/calculate-pi-digits*
Например, если после запятой 20 цифр, число π записывается так: π = 3,14159265358979323846...

Задания

1. По изображениям ученики обращают внимание на то, является ли заданные значения радиусом или диаметром. На основании этого рассчитывают длину окружностей, определяя, какие вычисления провести.

Внимание!

Ученикам демонстрируется, как выполнять вычисления, связанные с числом π, на калькуляторе. Ученики могут выполнять различные расчеты с помощью калькулятора. При этом отмечается, что значение числа пи не вводится и используется кнопка «пи».

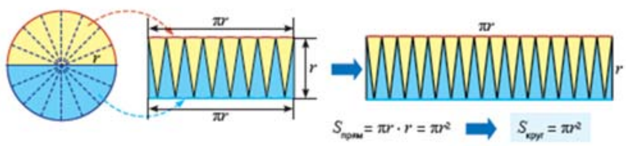
[2] [×] [π] [×] [4] [=] 25,1327412287...

3. На вопросы даются ответы. Ответ необходимо округлить до сотых. Ученики используют калькулятор для выполнения задания.

а) [2] [×] [π] [×] [7] [=] 43,982297.. ≈ 43,98   б) [π] [×] [3] [0] [=] 94,24777...≈ 94,25

Изучение Площадь круга

Отмечается, что фигура, полученная разделением круга на равные части и соединением их так, как показано на рисунке, примерно представляет собой фигуру, близкую к прямоугольнику, и при этом подчеркивается, что площадь полученного прямоугольника равна площади круга. С помощью этого правила ученикам объясняется формула площади круга.



В технически оснащенных классах целесообразно продемонстрировать ученикам деятельность, связанную с этим.

https://www.geogebra.org/m/sdgnevat
https://www.geogebra.org/m/g3UGJzTg

Подумай! Обсуждается, как найти площадь круга по его диаметру. Ученики могут заметить, что радиус равен половине диаметра. В формуле $S = \pi r^2$ записывается $r = \frac{d}{2}$.

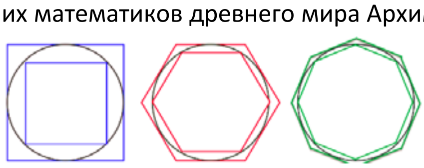
$$S = \pi r^2 = \pi(\frac{d}{2})^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

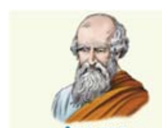
4. Находятся площади кругов по заданным радиусу и диаметру.

Из истории математики. Ученикам представляются древние сведения из истории математики, связанные с числом π. Подчеркивается, что древние вавилоняне находили разные значения числа π, используя площадь круга. Согласно информации об этом значении, ближайшее значение было получено равное 3,125. Ученикам можно привести примеры, встречающиеся в клинописи.

В Древнем Египте это число считалось равным 3,0605.

Первое значение π определил один из величайших математиков древнего мира Архимед (287–212 до н.э.) Он нарисовал один и тот же правильный многоугольник внутри и снаружи круга и заметил, что площадь круга находится между площадями этих многоугольников. По мере изменения количества вершин многоугольников эти многоугольники, нарисованные внутри и снаружи, стали напоминать круг. Таким образом, Архимед показал, что число π находится между 31/7 и 310/71.





Архимед
(287 до н. э. – 212 до н.э.)

К сведению учителя! Ученикам можно предоставить интересную информацию о числе пи.

- ✓ Международный день π отмечается 14 числа 3-го месяца каждого года, то есть 14 марта. Сегодня еще называют Днем математиков.
- ✓ Эйнштейн родился 14 марта 1879 года.

Есть люди, пытающиеся достичь рекорда по запоминанию наибольшего количества цифр числа пи. Подготовлен сайт со списком тех, кто запомнил эти цифры.
https://www.pi-world-ranking-list.com/?page=lists&category=pi&sort=digits

- ✓ Согласно сайту, мировой рекорд принадлежит индийцу Шарме Сурешу Кумару, который в 2015 году назвал 70030 цифр после запятой числа π. Для достижения такого рекорда требуется особая техника памяти.
- ✓ Пишутся рассказы для того, чтобы запомнить цифры числа π. В рассказах слова соответствуют количеству цифр после запятой в числе π.
- ✓ В соответствии с цифрами числа π была написана музыка.

В технически оснащенных классах ученикам можно продемонстрировать видео. В видео можно не только прослушать музыку, но и ознакомиться с интересной информацией.
https://youtu.be/OMq9he-5HUU

В технически оснащенных классах ученикам можно показать видео, которое рассказывает об интересных фактах, связанных с числом π: https://youtu.be/EmjViC8yPUY

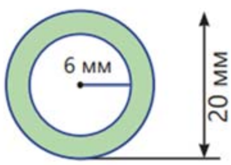
5. Находится площадь закрашенных частей. При расчете используется калькулятор и ответ округляется до сотых.

б) Площадь закрашенного кольца находится путем определения разности площадей двух кругов.

$D_{бол} = 20$ мм

$R_{мал} = 6$ мм

$S = ?$



$R_{бол} = 20 : 2 = 10$ (мм)

$S_{бол} = 100\pi$

$S_{мал} = 36\pi$

$S = 100\pi - 36\pi = 64\pi = 201{,}06$ (мм^2)

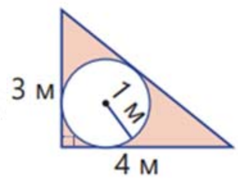
г) Площадь закрашенной части находится путем вычитания площади круга из площади прямоугольного треугольника.

$r = 1$ м

$a = 3$ м

$b = 4$ м

$S = ?$



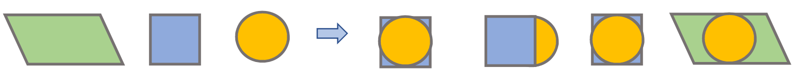
$S_{треугольник} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (м^2)

$S_{круг} = \pi$

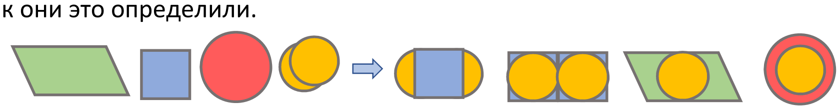
$S = 6 - \pi \approx 2{,}86$ (м^2)

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Ученикам сначала дается задание вырезать фигуры в виде 1 квадрата, 1 параллелограмма и 1 круга. Учитель поручает ученикам составить фигуры, полученные путем размещения вырезанных фигур так, как показано на рисунке, и найти площадь каждой закрашенной фигуры. Ученики объясняют, как они это определили.



Углубление. Ученикам дается задание заранее вырезать фигуры в форме 1 квадрата, 1 параллелограмма и нескольких кругов. Учитель поручает ученикам составить фигуры, полученные путем размещения вырезанных фигур так, как показано на рисунке, и найти площадь каждой закрашенной фигуры. Ученики объясняют, как они это определили.



Игра. Класс делится на 2 или 4 группы. Карты с номерами от 1 до 16 кладутся на стол лицевой стороной вниз. Каждой группе дается 4 или 8 вариантов выбора. Внутри группы ученики выполняют задания согласно числам, указанным на карточке. Победителем объявляется команда, правильно выполнившая наибольшее количество заданий за отведенное время.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.

Рабочий лист можно скачать по этой ссылке:
https://drive.google.com/file/d/155wOZnUq9KxZRY8_Z38GqIQHQAYOraQX/view?usp=sharing

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://wordwall.net/resource/75500547

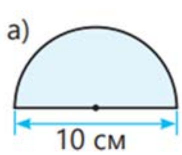
В таком случае ученики из каждой группы по 2 человека приглашаются к доске. Спиннер крутится. Ученики отвечают на выпавший вопрос. Если ответ будет правильным, команда получает 1 балл. По очереди каждая группа отвечает на вопросы. В конце команда, набравшая наибольшее количество очков, объявляется победителем.

Решение задач

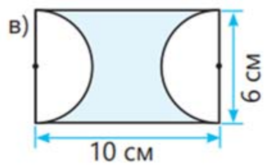
6. Требуется найти, сколько сантиметров проходит колесо велосипеда за один полный оборот.
Привлечение. На каждом из нескольких колес игрушечной машинки разного радиуса отмечена точка.

Учитель дает ученикам задание коснуться пола этой точкой колеса и отметить точку касания. Затем ученики катят колесо по полу вдоль прямой линии. В следующий раз, когда отмеченная на колесе точка коснется пола, они останавливаются и отмечают точку касания. Измеряется расстояние между точками, отмеченными на полу. Учитель спрашивает учеников, как можно посчитать расстояние, пройденное за один период, не катя колесо. Ученики отмечают, что колесо должно пройти расстояние, равное длине его окружности, чтобы сделать один оборот. Ответ проверяется для каждого колеса по формуле длины окружности.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания.
https://www.geogebra.org/m/gqemjfyj
Решение задачи.
• Находится длина окружности колеса.
$2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 28 = 56\pi \approx 176$ (см)
Ответ. Колесо проходит 176 см за один полный оборот.
7. Требуется определить хватит ли купленной краски для того, чтобы дважды покрасить пол круглой беседки.
Решение задачи.
• Рассчитывается площадь пола беседки. $\pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \approx 12{,}566$ (см^2)
• Вычисляется количество краски, необходимое для его двойной покраски. $12{,}566 \cdot 0{,}15 \cdot 2 \approx 3{,}77$ (кг)
• Рассчитывается, сколько краски осталось в избытке. $4 - 3{,}77 = 0{,}23$ (кг)
Ответ. 4 кг краски хватит, чтобы покрасить пол дважды, а 0,23 кг краски останется в избытке.
8. Отмечается, что половина окружности называется полуокружностью, а половина круга – полукругом. Когда мастер вырезает из металлической пластины окрашенные детали с помощью полуокружностей и полукругов, требуется найти площадь вырезанной детали.



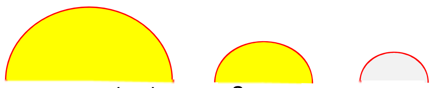
Находится площадь круга, а площадь полукруга вычисляется поделив ее пополам.
$\frac{\pi d^2}{4} = 25\pi$ (см^2)
$25\pi : 2 = 12{,}5\pi$ (см^2)



Из площади прямоугольника вычитают площадь 2-х полукругов, т.е. 1 круга.
$10 \cdot 6 = 60$ (см^2)
$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 6^2}{4} = 9\pi$ (см^2)
$60 - 9\pi = 31{,}73$ (см^2)

К сведению учителя! Ученики испытывают трудности с нахождением периметра или площади фигур, составленных из нескольких фигур. Целесообразно наблюдать за деятельностью учеников, направлять их к поиску ответа шаг за шагом, задавая наводящие вопросы ученикам, испытывающим трудности.

Ученикам, легко справившимся с заданием, можно предложить вычислить площадь деталей одного цвета, дав относительно сложные рисунки, соответствующие образцу.
Решение задачи можно найти по ссылке:
https://youtu.be/dFdQzB8MuTk
9. Требуется найти общую длину линий, нарисованных красным цветом, и площадь закрашенной части на изображении бута, нарисованной Гюльсум на компьютере.



6 + 8 = 14 (см)   8 см   6 см

• Определяется, что эта фигура нарисована с помощью кругов диаметром 6 см, 8 см и 14 см.
• Находятся длины окружностей, длины полуокружностей определяются путем деления длины каждой окружности пополам.

$\pi \cdot 14 = 42$ (см) $\pi \cdot 8 = 24$ (см) $\pi \cdot 6 = 18$ (см)
42 : 2 = 21 (см)   24 : 2 = 12 (см)   18 : 2 = 9 (см)

• Находится сумма длин полуокружностей.
21 + 12 + 9 = 42 (см)
• Чтобы найти площадь закрашенной части, просуммируйте площадь полукруга диаметром 14 см и площадь полукруга диаметром 8 см и вычтите площадь полукруга с диаметром 6 см.

$\frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 147$ (см^2) $\frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 48$ (см^2) $\frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 27$ (см^2)
147 : 2 = 73,5 (см^2)   48 : 2 = 24 (см^2)   27 : 2 = 13,5 (см^2)

• Находится сумма площади полукруга диаметром 14 см и площади полукруга диаметром 8 см и вычитается площадь полукруга диаметром 6 см.
73,5 + 24 – 13,5 = 84 см^2

Ответ. Общая длина красных линий 24 см, а площадь закрашенной части 84 см^2.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Вычисляет длину окружности.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет площадь круга.	Рабочие листы, учебник, РТ

ЗАДАЧИ

На предыдущих уроках ученики узнали, как найти площадь треугольника, параллелограмма, длину окружности и площадь круга. На этом уроке ученики будут решать различные задачи, применяя изученные правила.

Практическое задание. Ученики устанавливают соответствие, помещая соответствующие карточки в пустые ячейки. Проверяется правильность ответов, организуется обсуждение.

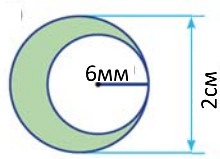
Рабочий лист можно скачать по этой ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1-zFJ5A8RCdDS-G-7BZ4MRbj1c0LhL76N/view?usp=sharing

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://wordwall.net/resource/75497942

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.

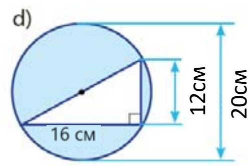
1. Находится площадь закрашенной части. Обращается внимание на данные изображения.

а) Вычитается площадь маленького круга из площади большого круга.



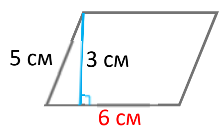
$d_{бол}$ = 2 см = 20 мм
$r_{мал}$ = 6 мм
S = ?
$R_{бол}$ = 20 : 2 = 10 (мм)
$S_{бол} = 100\pi$
$S_{мал} = 36\pi$
$S = 100\pi - 36\pi = 64\pi$ = 200,96 (мм²)

г) Площадь цветной части находится путем вычитания площади круга из площади прямоугольного треугольника.



r = 20 см
a = 16 см
b = 12 см
S = ?
$S_{треугольник} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ (см²)
$S_{круг} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 100\pi = 314$ (см²)
$S = 314 - 96 = 218$ (см²)

2. Площадь параллелограмма с высотой 3 см равна 18 см². Требуется найти периметр, если одна из сторон параллелограмма равна 5 см.

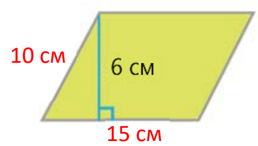


Данные записываются.
h_a = 3 см
b = 5 см
S = 18 см²
P = ?

Решение задачи.
• Находится длина стороны, к которой проведена высота. $3 \cdot a = 18 \rightarrow a = 6$ (см)
• Вычисляется периметр параллелограмма. $P = 2 \cdot (6 + 5) = 2 \cdot 11 = 22$ (см)

Ответ. Периметр параллелограмма равен 22 см.

3.Требуется найти длины сторон параллелограмма.



Данные записываются
$a : b = 3 : 2$
S = 90 см²
h_a = 6 см
a = ? b = ?

Решение задачи.
• Находится длина стороны, к которой проведена высота. $6 \cdot a = 90 \rightarrow a = 15$ (см)
• Находится длина другой стороны параллелограмма. $15 : b = 3 : 2 \rightarrow x = 10$ (см)

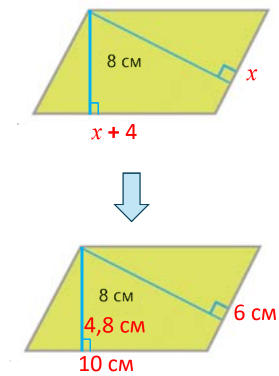
Ответ. Стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см.

Обсуждение. Обсуждаются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

4. В задаче требуется найти другую высоту параллелограмма.

Данные записываются

$a = x$
$b = x + 4$
$P = 32$ см
$h = ?$



Решение задачи.

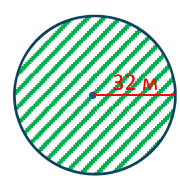
• Составляется уравнение и находятся стороны параллелограмма.
$(x + x + 4) \cdot 2 = 32 \rightarrow x = 6$ (см)
Одна сторона параллелограмма равна 6 см, другая сторона – 10 см.
• На изображении видно, что высота меньшей стороны параллелограмма равна 8 см. По формуле площади параллелограмма находится высота к другой стороне.
$10 \cdot h = 6 \cdot 8 \rightarrow \ h = 4{,}8$ (см)
Ответ. Другая высота параллелограмма равна 4,8 см.

6. Определяются верные и неверные утверждения.
а) Когда радиус увеличивается в два раза, длина окружности также увеличивается в два раза. *Верно.*
б) Высота треугольника, перпендикулярная большей стороне, есть наибольшая высота из этих трех углов. *Неверное*.
в) Если сторону параллелограмма удвоить, то его площадь не изменится при уменьшении его высоты к этой стороне вдвое. *Верно.*
г) Площадь ромба равна половине произведения его стороны на высоту. *Неверное.*

К сведению учителя! Ученики могут обосновать свое мнение, приводя примеры верных и неверных утверждений. При решении подобных заданий можно использовать метод углов класса. Так, ученики, считающие ответ верным, размещаются в одном углу класса, те, кто считает, ответ неверным, – в другом углу, а ученики, которые не определились, – в третьем углу класса. Ученики в каждом углу пытаются обосновать свое мнение. С помощью этого метода, обосновывая свои мысли, ученики могут определить, верны или неверны эти утверждения, рисуя картинки с пометками, или применяя изученные правила. Например, в 6-м задании пункт б) является неверен. Ученики могут объяснить, что утверждение неверно, нарисовав треугольник и показав его, или обратившись к формуле площади.

7. Требуется найти, сколько метров проехал акробат, и сколько оборотов ему нужно сделать, чтобы преодолеть дистанцию 7,5 м.
Решение задачи.
• Длина одного оборота определяется исходя из того, что диаметр колеса моноцикла равен 50 см.
$\pi d = 50\pi = 50 \cdot 3 = 150$ (см)
Определяется расстояние, пройденное за 10 оборотов.
$10 \cdot 150 = 1500$ (см)
• Акробату необходимо найти, сколько раз повернется колесо, чтобы пройти расстояние 7,5 м.
$7{,}5 \text{ m} = 750 \text{ см}; \ \ 750 : 150 = 5.$
Ответ. Если акробат повернет колесо 5 раз, он преодолеет расстояние 7,5 м.

8. Требуется найти площадь центральной части парка в форме круга.
Решение задачи.

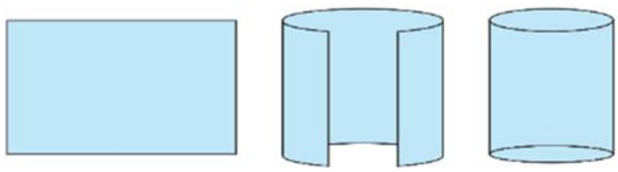


• Вычисляется радиус круга, длина окружности которого дана.
$2\pi r = 200 \ \ \rightarrow \ \ r = 31{,}83 \approx 32$ (м)
• Площадь центральной части парка исчисляется квадратными метрами.
Ответ округляется до единиц. $\pi r^2 \approx 3183$ (m^2)
Ответ. Площадь центральной части парка составляет примерно 3183 $м^2$.

ТЕМА 8.4. Площадь поверхности прямой треугольной призмы и цилиндра

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.6.1. Вычисляет площадь поверхности прямой призмы, в основании которой треугольник или параллелограмм, и цилиндра.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет площадь поверхности прямой призмы. • Вычисляет площадь поверхности цилиндра.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://video.edu.az/video/4809* *https://video.edu.az/video/5521* *https://www.quia.com/quiz/395680.html?AP_rand=2005094485* *https://www.geogebra.org/m/rCxXxFhE* *https://www.geogebra.org/m/mj9e7sny* *https://www.geogebra.org/m/nberhmpe*

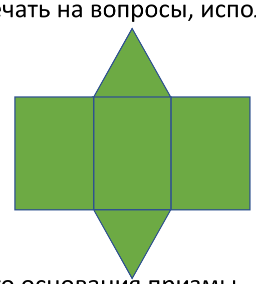
Побуждение. В 5 классе ученики познакомились с призмой, в основании которой прямоугольный треугольник. Ученикам можно дать задание сделать модель прямой призмы с треугольным основанием. В классе ученики делают фигуру в виде цилиндра, складывая бумагу прямоугольной формы и склеивают его края. Учитель задает ученикам наводящие вопросы о основаниях и боковых поверхностях полученных фигур.

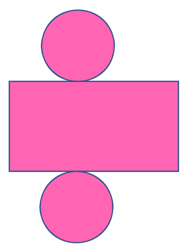


В технически оснащенных классах можно использовать видео материалы.
https://youtu.be/x7xL1W-vUvk

Исследование-обсуждение

В задании требуется выяснить, какой фигурой являются основания цилиндра, как можно составить боковую поверхность цилиндра, используя фигуры прямоугольной формы, какие фигуры являются основаниями и боковыми гранями призмы.
Для выполнения задания подобные фигуры можно сделать на уроке из цветной бумаги. При этом ученикам будет легче отвечать на вопросы, используя развертки своих фигур.





• Отмечается, что основания призмы представляют собой треугольники, а стороны — прямоугольники.

• Отмечается, что основания цилиндра представляют собой круги.
• Площадь боковой поверхности ученики делают в классе, используя прямоугольные фигуры.

В технически оснащенных классах ученики могут выполнить задание с помощью видеоинструкции.
https://youtu.be/caHvS5OIp2E

Изучение Площадь полной поверхности прямой призмы

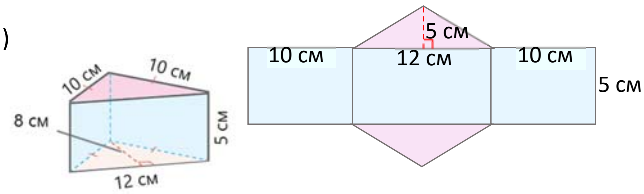
Отмечается, что площадь полной поверхности прямой призмы равна сумме площадей ее оснований и боковых граней. На примере задачи ученикам показывается, как найти площадь поверхности прямой призмы, в основании которой треугольник.

$$S_{полн} = 2 \cdot S_{осн} + S_{бок}$$

Задания

2. Находится площадь полной поверхности прямой треугольной призмы. Ученикам, у которых возникают трудности, можно предложить определять грани по развертке призмы.

а)



Площадь боковой поверхности призмы

$S_{бок} = 10 \cdot 5 + 12 \cdot 5 + 10 \cdot 5 = 160$ (см^2)

Площадь оснований призмы

$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$ (см^2)

$S = S_{бок} + 2S_{осн} = 220$ (см^2)

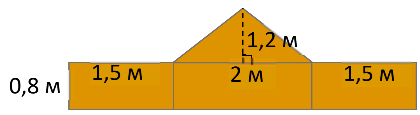
4. Для хранения дров было подготовлено место в виде прямой треугольной призмы, одно из оснований и боковые грани которой были сделаны из досок. Определяется, сколько квадратных метров досок для этого понадобилось. Ученики находят и складывают площади подходящих поверхностей.

$\frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 2 = 1{,}2$ (м^2)

$1{,}5 \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ (м^2)

$1{,}5 \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ (м^2)

$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$ (м^2)



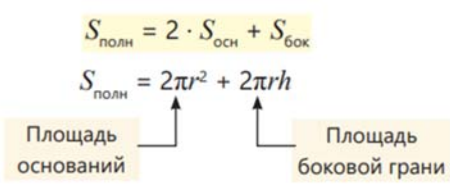
Складываются площади найденных поверхностей. $1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}6 = 5{,}2$ (м^2)

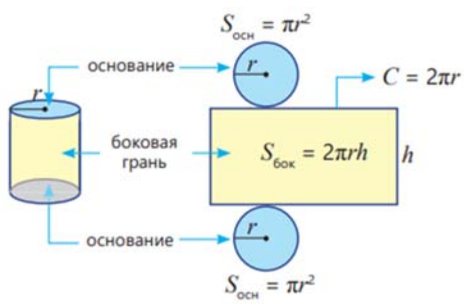
Ответ. Для этого нужно 5,2 м^2 досок.

Обсуждение. Для решения задачи ученики также могли найти площадь всей поверхности данной фигуры и вычесть площадь одной грани для определения ответа. Обсуждаются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

Изучение Площадь поверхности цилиндра

Подчеркивается, что объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

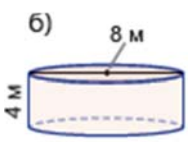




К сведению учителя! Иногда ученики затрудняются определить площадь поверхности фигуры в форме цилиндра. Таким ученикам целесообразно напомнить о развертке цилиндра и дать по ней задание вычислить площади боковой поверхности и оснований.

6. Находится площадь полной поверхности цилиндра.

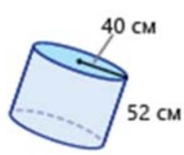
б)



$S_{полн} = 2\pi r^2 h + 2\pi rh =$

$= 384 + 96 = 480$ (м^2)

в)



$S_{полн} = 2\pi r^2 h + 2\pi rh =$

$= 499200 + 12480 = 511680$ (см^2)

Дифференцированное обучение.

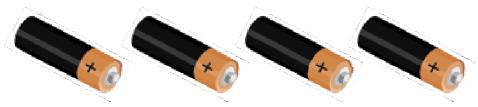
Поддержка. На доске рисуется несколько фигур в виде цилиндров или призм. Ученикам предлагается найти площадь поверхности каждой фигуры. Ученики объясняют, как они нашли ответ.

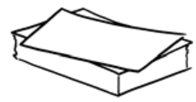
Углубление. К доске вызывают двух учеников. Один из учеников рисует на доске несколько фигур в виде цилиндров или призм. Другой ученик рисует фигуру, площадь поверхности которой может быть меньше или больше площади поверхности нарисованной фигуры, и отмечает размеры. Ответ проверяется вычислением.

Решение задач

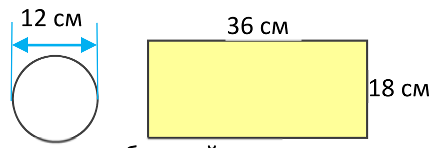
7. Требуется найти, у скольких банок можно обклеить боковую поверхность бумагой, у которой длина 2 м, а ширина равна высоте банки.

Привлечение. На стол кладут цветную бумагу, чтобы обернуть несколько батареек одинакового размера в форме цилиндра. Учитель задает ученикам вопросы: Сколько бумаги нужно, чтобы покрыть боковую часть батарейки? Как это найти? Сколько бумаги нужно, чтобы закрыть боковые стороны батареек? Учитель берет заранее подготовленную бумагу и спрашивает, у скольких батареек можно обклеить боковую поверхность бумагой. Организовывается обсуждение, даются ответы на вопросы.





Решение задачи.



• Отмечается, что диаметр основания банки составляет 12 см. Найдена длина основания.

$\pi d = \pi \cdot 12 \approx 36$ (см)

• Находится, у скольких банок можно обклеить боковую поверхность бумагой, у которой длина 2 м, а ширина равна высоте банки.

2 м = 200 см; 200 : 36 ≈ 5,56

Ответ. Бумага длиной 2 м, ширина которой равна высоте банки, покрывает боковую поверхность 5 банок.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Вычисляет площадь поверхности прямой призмы.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет площадь поверхности цилиндра.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.5. Объем прямой треугольной призмы и цилиндра

ПОДСТАНДАРТЫ	6-3.6.2. Вычисляет объем прямой призмы и цилиндра.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет объем прямой призмы. • Вычисляет объем цилиндра.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, цветная бумага, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://www.transum.org/Maths/Exercise/Cylinder* *https://www.omnicalculator.com/math/cylinder-volume* *https://www.geogebra.org/m/jd2nxxd4* *https://www.geogebra.org/m/bze9vgtg* *https://www.geogebra.org/m/ZzhsxXbY*

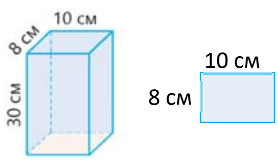
Побуждение.

Берется несколько стеклянных емкостей в форме цилиндра и кубоида. В одну из этих емкостей наливают вода и обращают внимание, какой объем она вмещает и насколько она высока. Затем такое же количество воды наливают в одну из остальных емкостей. Проводится аналогичное наблюдение. Результаты обсуждаются.

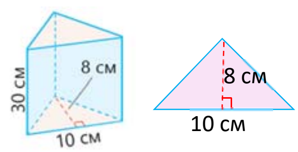
Исследование-обсуждение

На рисунке изображены сосуды в форме кубоида, прямой треугольной призмы и цилиндра. Отмечается, что их высоты равны.

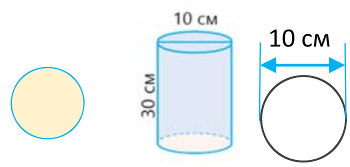
• Чтобы узнать, какой из этих сосудов имеет наибольшую площадь основания, напоминается какую фигуру представляет собой основание каждого сосуда, определяются и сравниваются площади оснований.



$S_{осн} = 8 \cdot 10 = 80$ (см^2)



$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$ (см^2)



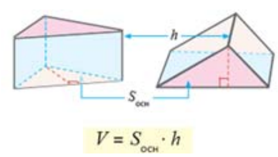
$S_{осн} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 75$(см^2)

Основание сосуда в форме цилиндра определяется как наибольшее.

• Поскольку высота постоянна, следует отметить, что емкость сосуда варьируется в зависимости от площади основания. Подчеркивается, что при увеличении площади основания увеличивается и емкость сосуда.

• Подчеркивается, что при наполнении сосудов водой исходя из их емкости можно определить, в каком сосуде больше воды. Задавая наводящие вопросы, учитель напоминает ученикам правило нахождения объема кубоида и призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник. В обобщенном виде говорят, что объем каждого сосуда можно найти, умножив площадь основания на высоту.

Изучение Объем прямой треугольной призмы

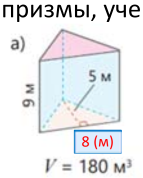


Подчеркивается, что объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту. На примере, приведенном в учебнике, ученикам объясняется объем прямой призмы, основанием которой является треугольник.

Задания

2. Объем призмы записан снизу, находится измерение, соответствующее пустой клетке. Используя объем призмы, ученики определяют измерение, соответствующее пустой клетке.

а)

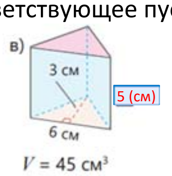


$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot a \cdot 9 = 180$

$22{,}5a = 180$

$a = 8$ (м)

в)

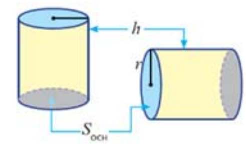


$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot h = 45$

$9h = 45$

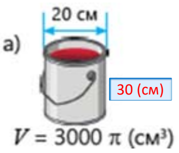
$h = 5$ (см)

Изучение Объем цилиндра



$V = S_{осн} \cdot h$ или $V = \pi r^2 \cdot h$

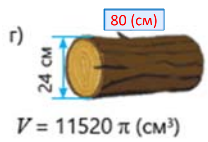
Отмечается, что объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Ученикам объясняется пример, приведенный в учебнике.
4. Ниже указан объём цилиндра. Требуется найти высоту этого цилиндра. Используя формулу объема цилиндра, ученики определяют высоту.

а) 

$\frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot h = 3000\pi$

$100 \cdot h = 3000$

$h = 30$ (см)

г) 

$\frac{\pi \cdot 24^2}{4} \cdot h = 11520\pi$

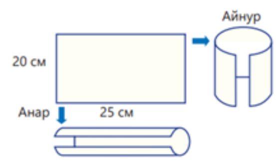
$144 \cdot h = 11520$

$h = 80$ (см)

Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу разными способами.
Дифференцированное обучение.
Поддержка. На доске рисуется несколько фигур в виде цилиндра или призмы. Ученикам дается задание найти объем каждой фигуры. Ученики объясняют, как они нашли ответ.
Углубление. К доске вызывают двух учеников. Один из учеников рисует на доске несколько фигур в виде цилиндра или призмы. Другой ученик рисует фигуру, объем которой может быть меньше или больше объема нарисованной фигуры, и отмечает размеры. Ответ проверяется вычислением.

Решение задач

5. В задаче требуется найти, кто изготовил цилиндр большего объема, если Анар и Айнур сложили бумагу в форме прямоугольника в виде цилиндра, и какой формы должна быть бумага, чтобы объем обоих цилиндров был одинаковым. Ученики могут использовать калькулятор для вычислений при решении задачи.



Решение задачи.
• Находится объем цилиндров, изготовленных детьми.

Отмечают высоту цилиндра, изготовленного Анаром, находят радиус основания, а затем его объем.

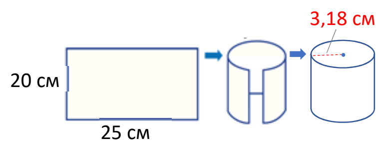
$h = 25$ см

$l = 2\pi r = 20$ см

$r = l : 2\pi \approx 3{,}18$ (см)

$V = \pi r^2 \cdot 25 \approx 796$ (см²)

Отмечают высоту цилиндра, изготовленного Айнур, радиус основания, а затем находят объем.



$h = 25$ см

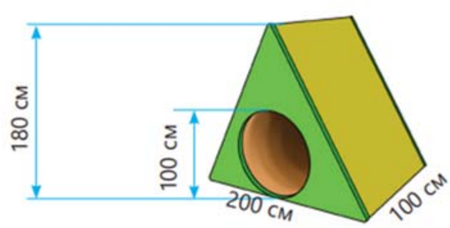
$l = 2\pi r = 25$ см

$r = l : 2\pi \approx 3{,}98$ (см)

$V = \pi r^2 \cdot 20 \approx 995$ (см²)

Объем цилиндра, изготовленного Айнур, больше.
• Если длина и высота бумажного основания равны, объемы равны. Для этого бумага должна быть квадратной.
Ответ. Объем цилиндра, изготовленного Айнур, больше. Если бумага квадратная, то объем обоих цилиндров будет одинаковым.

6. В парке развлечений для детей оборудована деревянная игровая площадка в форме прямой треугольной призмы. Требуется найти объем части, покрытой деревом.



Решение задачи.
• Находится объем прямой треугольной призмы.
$V = \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 200 \cdot 100 = 1800000$ (см³); 1800000 см³ =1,8 м³
• Находится объем цилиндра.
$V = \frac{\pi \cdot 100^2}{4} \cdot 100 = 750000$ (см³); 750000 см³ = 0,75 м³
Чтобы найти объем части, покрытой деревом, объем цилиндра вычитается из объема прямой треугольной призмы.
1,8 — 0,75 = 1,05 m³
Ответ. Объем части, покрытой деревом, равен 1,05 м³.
Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Вычисляет объем прямой призмы.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет объем цилиндра.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. С учениками повторяются понятия, приведенные в заключении раздела учебника. Слова, изученные в разделе, учитель напоминает ученикам. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Площадь треугольника, площадь параллелограмма, площадь ромба, окружность, круг, радиус, диаметр, число π, длина окружности, площадь круга, прямая треугольная призма, площадь поверхности прямой призмы, объем правой призмы, цилиндр, площадь поверхности цилиндра, объем цилиндра.

На первой странице раздела представлена информация и задание «Попытайтесь!», где нужно ответить на вопросы о том, какой из трёх бассейнов — в форме кубоида, прямой треугольной призмы и цилиндра — вмещает больше воды и для какого бассейна требуется больше кафеля. Решение исходной задачи обсуждается с классом.

Игра. Класс делится на команды. Ученикам предлагается судоку, состоящее из слов, упомянутых в разделе. Ученики называют 8 понятий. После того как каждое понятие найдено, предоставляется информация о нем, приводятся примеры.

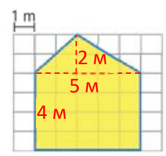
Н	Ш	Н	Г	Й	Ш	Р	В	П
Р	Ю	Ю	Ц	Ц	Д	Г	Д	Л
Т	А	М	Ж	Н	В	П	И	О
И	Е	Д	И	Ш	А	Р	А	Щ
Ъ	К	Л	И	Л	С	И	М	А
Ю	И	Х	Г	У	И	З	Е	Д
Ц	Ф	У	Ю	К	С	М	Т	Ь
Л	Р	Н	З	Х	Ъ	А	Р	Я
К	А	Т	О	О	Б	Ъ	Е	М

Рабочий лист можно скачать по этой ссылке: *https://drive.google.com/file/d/1lWcqgAH-Fbo-QLNyxghiP_TdrcbhByST/view?usp=drive_link*

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания: *https://wordwall.net/resource/75506491*

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Требуется найти площадь закрашенной части.

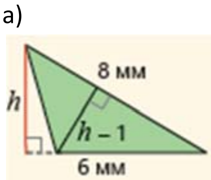


б) Данная фигура делится на треугольники и прямоугольники, а их площади суммируются.

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 25$ (см^2)

2. Требуется найти длину красного отрезка. По формуле площади, составляется уравнение, решив которое, находят длину красного отрезка.

а)



$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (h - 1)$

$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 6$

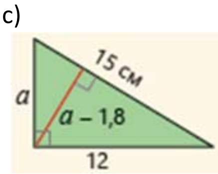
$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (h - 1) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 6$

$8h - 8 = 6h$

$2h = 8$

$h = 4$ (мм)

с)



$S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (a - 1{,}8)$

$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot a$

$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (a - 1{,}8) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot a$

$15a - 27 = 12a$

$3a = 27$

$a = 9$ (см)

$a - 1{,}8 = 9 - 1{,}8 = 7{,}2$ (см)

3. Используя тот факт, что площади параллелограмма и треугольника равны, требуется определить неизвестную высоту.

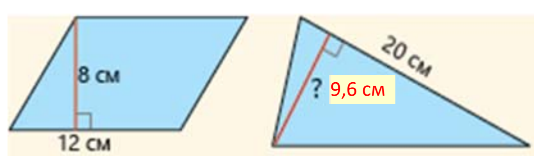
а) $S_{\text{параллелограмм}} = 12 \cdot 8 = 96$

$S_{\text{треугольник}} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot$

$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot h = 96$

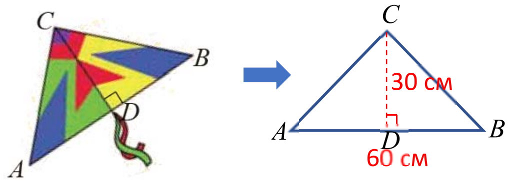
$10h = 96$

$h = 9{,}6$ (см)



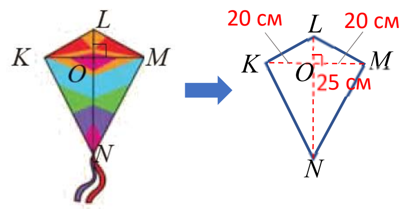
К сведению учителя! При нахождении площади параллелограмма ученики должны учитывать, что им следует вычислить произведение стороны на высоту, а при нахождении площади треугольника — половину произведения стороны на высоту. Иногда ученики допускают определенные ошибки, решая задачи, связанные с площадью как параллелограмма, так и треугольника. Работу над ошибками целесообразно организовать с учениками, допускающими такие ошибки.

Решение задачи.



• Записываются размеры треугольного воздушного змея, сделанного Лалой, и находится его площадь.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30 = 900$ (см^2)



• Воздушный змей, сделанный Сабиной, имеет четырехугольную форму. На рисунке воздушный змей разделен на треугольники. Находятся и складываются площади треугольников, образующих фигуру. В равнобедренном треугольнике высота от вершины до основания также является медианой. Тогда $KO = OM$.

$S_{KLN} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 = 250$ (см^2); $CM_{LN} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 = 250$ (см^2)

$S_{KLMN} = 250 + 250 = 500$ (см^2)

Поэтому площадь воздушного змея, сделанного Лалой, больше.

Площадь воздушного змея, сделанного Лалой, больше площади воздушного змея, сделанного Сабиной.

$900 - 500 = 400$ (см^2)

Ответ. Площадь воздушного змея, сделанного Лалой, на 400 см^2 больше, чем площадь воздушного змея, сделанного Сабиной.

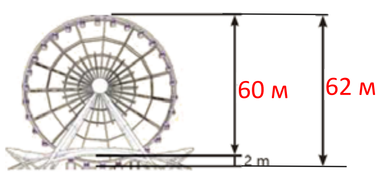
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, которые решают задачу разными способами.

6. В задаче требуется найти, на сколько метров от земли находится самая высокая точка аттракциона «Колесо обозрения», расположенного в Приморском национальном парке, и какое расстояние преодолевают ученики, сидящие в одной из кабин аттракциона, после двух полных оборотов.

Решение задачи.

• Чтобы найти самую высокую точку аттракциона, ученики прибавляют высоту аттракциона к диаметру.

$2 \cdot 30 + 2 = 62$ (м)



• Для определения расстояния, пройденного учениками, сидящими в одной из кабин аттракциона после двух полных оборотов, определяют расстояние, пройденное за один полный оборот, т.е. длину окружности аттракциона, и умножают ее на 2.

$2 \cdot \pi \cdot 30 = 60 \cdot 3 = 180$ (м); $180 \cdot 2 = 360$ (м)

Ответ. Самая высокая точка аттракциона находится на высоте 62 м от земли. Ученики за два полных оборота преодолели расстояние в 360 м.

9. В задаче требуется проверить, верно ли мнение покупателя.

Решение задачи.

• Вычисляется площадь трех пицц диаметром 20 см. $S = \frac{3 \cdot 20^2}{4} \approx 300$ (см^2)

• Вычисляется цена 1 см^2 пиццы. 18 : 300 = 0,06 ман.

• Вычисляется площадь 2 пицц диаметром 30 см. $S = \frac{3 \cdot 30^2}{4} \approx 675$ (см^2)

• Вычисляется цена 1 см^2 пиццы. 12 : 675 ≈ 0,018 manat
Значит, вместо 2 пицц диаметром 30 см выгоднее купить 3 пиццы диаметром 20 см.

Ответ. Мнение покупателя верно.

Обсуждение. Ответ можно проверить, сравнив площадь трех пицц диаметром 20 см с площадью двух пицц диаметром 30 см.

10. Требуется рассчитать примерную площадь стеклянных окон.

При решении задачи ученики используют калькулятор. Важно, чтобы при решении таких задач ученики правильно применяли изученные правила.

Решение задачи.

• Определяется площадь боковой поверхности здания в форме цилиндра.

$2 \cdot \pi \cdot 187 \cdot 22 \approx$ 25 684 (м^2)

• Определяется площадь боковой поверхности здания в виде треугольной призмы. Поскольку его основание представляет собой равносторонний треугольник, площадь его боковой поверхности можно найти следующим образом.

$3 \cdot 56 \cdot 169 =$ 28392 (м^2)

• Определяется площадь боковой поверхности другого здания в форме кубоида. Поскольку основание квадратное, то площадь его боковой поверхности можно найти следующим образом.

$4 \cdot 37 \cdot 154 =$ 22792 (м^2)

• Складываются найденные площади поверхностей. 24 684 + 28392 + 22792 ≈ 75868 (м^2).

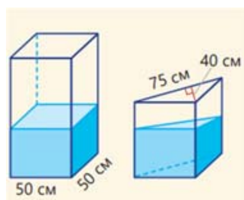
• Вычисляется 80% общего фасада этих зданий. 77033 · 80% ≈ 66694 (м^2).

Ответ. Площадь стеклянных окон составляет примерно 66694 м^2.

11. В задаче требуется определить высоту воды в контейнере в форме прямоугольного параллелепипеда и контейнере в форме прямой треугольной призмы, а также сколько воды находится в каждом контейнере.

Привлечение. Используя в классе контейнеры для воды, можно наполнять один контейнер водой и переливать ее в другой так, чтобы они были одинаковой высоты. На этом этапе можно организовать обсуждение, как определить высоту и количество воды в обоих контейнерах. Целесообразно провести расчёты на основе мнений учеников, чтобы определить высоту и количество воды в каждом сосуде.

Решение задачи.



• Составив уравнение, определяется высота воды в обоих контейнерах.

$\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 40 \cdot h + 50 \cdot 50 \cdot h = 150 \rightarrow h = 37{,}5$ см

• Находится, сколько воды в каждом контейнере.

$50 \cdot 50 \cdot 37{,}5 = 93{,}75$ ($л$)

$\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 40 \cdot 37{,}5 = 56{,}25$ ($л$)

Ответ. Высота воды в обоих контейнерах 37,5 см. В 1-м контейнере 93,75 $л$, а во 2-м 56,25 $л$ воды.

S.T.E.A.M. Поселение на Марсе

Ученикам сообщается, как в 2022 году NASA удалось получить кислород для поддержания жизни на Марсе и что этого кислорода хватило на 10 минут дыхания. Указывается, что на фото изображена модель теплицы, созданной на основе виртуальной реальности для выращивания растений. Ученикам также можно дать задание провести исследование, связанное с такими моделями.

Даются ответы на вопросы.

1. Проводится исследование о сложности процесса получения кислорода, необходимого для жизни на Марсе, и о том, какие работы для этого выполняются. Изучается информация о том, что атмосфера Марса очень разреженная и какими способами в таких условиях добывается кислород.

Экстремофилы

Салатное растение

2. Получается информация о том, какие растения планируется выращивать на Марсе. Исследования показали, что некоторые экстремофилы могут выживать и даже расти в условиях, смоделированных под марсианскую среду. Кроме того, планируется выращивать растения с коротким вегетационным периодом (салат, картофель и др.)

3. На рисунке представлены модели теплиц для выращивания растений с одинаковыми площадями поверхности в форме полуцилиндра и призмы, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник. Требуется найти неизвестный размер второй теплицы. Ученики определяют ответ, производя расчеты по формулам расчета объема и площади цилиндра.

$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 30 \cdot 50 \approx 2355$ (см^2)

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \approx 706{,}5$ (см^2)

$2355 + 706{,}5 = 3061{,}5 \approx 3062$ (см^2)

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \approx 225$ (см^2)

$225 + 2 \cdot 15 \cdot h = 3062$

$h \approx 94$ (см)

4. Требуется определить, какую из двух теплиц с одинаковой площадью поверхности выгоднее построить на Марсе. В качестве ответа на этот вопрос ученики должны прийти к выводу, что, несмотря на равенство площадей поверхностей и меньший расход материала, использование теплицы цилиндрической формы более целесообразно, так как она обладает большим объёмом.

Проводится исследование о том, какие источники энергии используются на Марсе. В итоге ученики готовят презентацию на основе полученных данных и указывают в ней, на какие факторы следует обращать внимание при создании поселения.

9-й РАЗДЕЛ Статистика и вероятность

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	**1**	100	
Тема 9.1	Медиана и мода	2	101	68
Тема 9.2	Случайное событие	2	105	70
Тема 9.3	Вероятность события	3	108	72
Тема 9.4	Представление информации	2	111	174
	Обобщающий урок. STEAM. "Генеалогический ДНК-тест и теория вероятностей"	2	115	
	МСО-7	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**13**		

Краткий обзор раздела

В разделе проверяются полученные в V классе знания о нахождении среднего арифметического данных, а также приобретенные навыки, связанные с представлением информации в виде диаграммы. Изучается нахождение медианы множества данных (в случае четного или нечетного количества множества) и рассматривается нахождение моды множества. Для одного и того же множества данных рассчитываются и сравниваются медиана, мода или среднее арифметическое, чтобы определить, какая из этих характеристик наиболее точно характеризует это множество. Дается информация о событии, рассматриваются его виды, исследуются аналогичные события, изучается формула нахождения вероятности события. Развиваются навыки использования круговой и линейной диаграмм при описании данных, в частности, данные представляются на диаграмме в виде процентов, а на линейной диаграмме находится выражение изменения данных в процентах. Приобретенные навыки применяются при решении прикладных задач.

На что стоит обратить внимание?

Знания учеников о среднем арифметическом не полностью характеризуют некоторые множества данных, и особое внимание уделяется изучению новых понятий, которые могут определить среднее значение. Так, при нахождении медианы множества данных важно учитывать их расположение в порядке возрастания или убывания, а также четность или нечетность их количества. При представлении понятия события следует обращать внимание на различия между невозможным, случайным или достоверным событиями. Следует быть внимательными при различении равновозможных событий. Также при нахождении вероятности события следует учитывать различие возможных и благоприятных событий.

При обработке данных особое внимание следует уделять представлению их процентных значений на круговой диаграмме, а также нахождению значений соответствующих углов в круге. Необходимо использовать практические задания и содержание при нахождении процентного изменения величин по линейной диаграмме.

Развитие математического языка

Правильное объяснение понятий "медиана", "мода", "событие", "случайное событие", "невозможное событие", "достоверное событие", "равновозможные события", "вероятность события", "круговая диаграмма" или "линейная диаграмма" влияет на уровень их усвоения.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

"Медиана", "мода", "событие", "случайное событие", "вероятность".

Необходимые предварительные знания и навыки:

• Нахождение среднего арифметического данных
• Запись множества заданных чисел в порядке возрастания или убывания
• Различать ситуации, наблюдения, эксперименты или результаты тестов
• Чтение информации с диаграмм, их обработка
• Составлять и читать круговые и линейные диаграммы
• Изображать данную информацию на диаграммах

Междисциплинарная интеграция

Множество данных характеризуется медианой и модой. Категориальные данные характеризуются нахождением их моды. Статистические элементы, такие как медиана, мода и среднее арифметическое, широко используются в медицинских, экономических и инженерных системах. Событие и его виды, вероятность события как элементы теории вероятностей находят свое применение в ряде научных областей. В качестве примера можно привести применение теории вероятностей в сфере страхования (в том числе актуарной математики) и ее широкое использование в сфере финансов. Кроме того, элементы теории вероятностей и математической статистики ус45пешно применяются в генной инженерии, очень быстро развивающейся в наше время, при решении задач искусственного интеллекта.

ТЕМА 9.1 Медиана и мода

ПОДСТАНДАРТЫ	6-5.1.2. Находит медиану и моду числовых данных. 6-5.1.3. Выполняет сравнительный анализ, вычисляя медиану, моду и среднее арифметическое двух множеств данных.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит медиану для одного и того же множества данных (если число четное или нечетное). • Находит моду для одного и того же множества данных. • Вычисляет и сравнивает медиану, моду и среднее арифметическое для одного и того же множества данных.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, схемы, иллюстрированные плакаты, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТОРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/14112* *https://video.edu.az/video/1124* *https://video.edu.az/video/8725* *https://video.edu.az/video/1071* *https://www.geogebra.org/m/y4peqgpk* *https://www.geogebra.org/m/tueccwmh* *https://www.geogebra.org/m/qkyxxc8r* *https://www.geogebra.org/m/ubDsmPDh* *https://www.geogebra.org/m/k9nCPbyK* *https://www.geogebra.org/m/uBHVddBd* *https://www.geogebra.org/m/mgxr3gxk* *https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-interactive-middle-school-math-6-for-ccss/section/10.4/primary/lesson/mean-median-mode-and-range-msm6-ccss/* Задание/Игра: *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5cd44acee1482f0c9945bba1* *https://www.geogebra.org/m/p4tsgvbb* *https://www.geogebra.org/m/e5fh7bau* *https://mathsbot.com/manipulatives/averageTiles* *https://www.turtlediary.com/game/mean-median-mode-range.html* *https://www.zapzapmath.com/6th-grade-math-games/mode-median-mean-and-range* *https://www.cokogames.com/calculate-mean-median-mode-and-range/play/* *https://www.primarygames.com/math/mmmrmeanmodemedianandrange/*

Обсуждение исходной задачи. Обсуждается задача, данная на первой странице раздела. Используя полученные в 5-м классе знания о линейной диаграмме и процентах, данные диаграммы обрабатываются и предпринимается попытка их решения. Однако из-за нехватки знаний о моде и понятия случайных событий полное решение задачи оставляется на конец раздела.

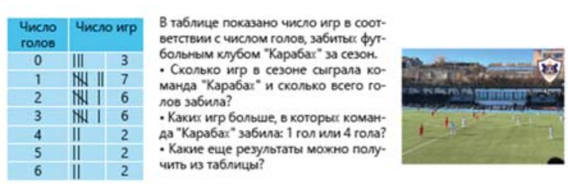
Побуждение. Учитель записывает на доске несколько чисел. Он дает ученикам задание вычислить среднее арифметическое этих чисел.

125, 275, 230, 370, 270, 230 → $(125 + 275 + 230 + 370 + 270 + 230) : 6 =$
$= 1500 : 6 = 250$

Учитель задает детям вопрос: чем полученное число 250 отличается от остальных? Сколько чисел меньше или больше 250? и т.д.

При другом подходе учитель просит каждого из детей записать на доске свой рост. Оказывается, рост детей колеблется от 152 см до 164 см. (В зависимости от класса эти данные могут меняться.) Затем он поручает детям найти среднее арифметическое этих значений роста. Учитель дает задание найти такое число, чтобы половина этих чисел была меньше найденного числа, а другая половина — больше. Учитель просит учеников сравнить это число со средним ростом детей и объяснить причину. То есть учитель дает ученикам подсказку выразить совокупность заданных чисел одним числом.

К сведению учителя! Хотя ученики владеют информацией о среднем арифметическом, иногда они задаются вопросом, почему среднее арифметическое чисел, которые сильно отличаются друг от друга, не всегда корректно характеризует данные. Например, такие вопросы, как: «Насколько верно, что средняя зарплата малого предприятия, где зарплаты сотрудников составляют 200 манатов, 500 манатов и 2000 манатов, составляет 900 манатов?».



Число голов	Число игр	
0	III	3
1	𝍸 II	7
2	𝍸 I	6
3	𝍸 I	6
4	II	2
5	II	2
6	II	2

В таблице показано число игр в соответствии с числом голов, забитых футбольным клубом "Карабах" за сезон.
• Сколько игр в сезоне сыграла команда "Карабах" и сколько всего голов забила?
• Каких игр больше, в которых команда "Карабах" забила: 1 гол или 4 гола?
• Какие еще результаты можно получить из таблицы?

Иногда возникают вопросы, связанные со свойствами множества категориальных данных. Поэтому учитель может предложить детям составить данные по выбранному ими признаку (как в категориальном смысле, так и численно) и спросить их о среднем арифметическом этих данных, а также о том, по какому другому признаку можно различать данные.

Исследование-обсуждение

Ученикам предлагается определить на основе таблицы количество матчей, проведенных футбольным клубом «Карабах» (3 + 7 + 6 + 6 + 2 + 2 + 2), и общее количество забитых голов (3 · 0 + 7 · 1 + 6 · 2 + 6 · 3 + 2 · 4 + 2 · 5 + 2 · 6 = 67). Затем им дается задание определить по таблице, какая игра по количеству забитых голов повторяется больше всего. Определяется, что в 7 матчах было забито 1 гол, в 2 матчах – 4 гола. То есть количество матчей с 1 забитым голом больше. Учеников спрашивают, какие еще выводы они могут сделать. Например, кто-то из них может заметить, что количество матчей с 2 забитыми голами равно количеству матчей с 3 забитыми голами.

Изучение Медиана

С учениками проводится краткий обмен мнениями о темах, с которыми они часто сталкиваются в информационном пространстве. Спрашивают их мнение по вопросам, встречающимся в рекламных опросах, прогнозах погоды и социальных роликах. Например, с помощью таких альтернативных вопросов и утверждений, как «Какова среднемесячная норма осадков?», «В каком месяце года количество выпавших осадков может в два раза превышать количество осадков, выпадающих в другие месяцы?», «Среднестатистическая азербайджанская семья состоит из 4 человек», «Средняя стоимость двухкомнатной квартиры в Баку в 2023 году составила 150 000 AZN, а в 2024 году — 160 000 AZN», проверяются знания о среднем арифметическом, также объясняется, что нахождение среднего арифметического не всегда точно характеризует множество данных. Итак, когда между данными существует большая разница указывается на необходимость использования другого понятия. Так, когда находится среднее арифметическое собранного металлолома некоторыми учениками 6А класса, оказывается, что каждый ученик класса в среднем собрал 5 кг металла. Однако при рассмотрении данных становится очевидным, что количество, собранное одним учеником в 1 кг, другим в 2 кг или третьим в 15 кг, нельзя «сравнить» с 5 кг. Поэтому в таких случаях ищут такое число, с которым можно сравнить заданные числа. Ученикам объясняется, что такое число является медианой. Для этого ученикам предлагается расположить данные числа в порядке возрастания и найти среднее число, то есть число, которое делит эти числа на два множества с одинаковым количеством элементов. Найденное число является медианой.

Если числа в образце расположены в порядке возрастания, число 3 по середине является медианой. Это означает, что количество детей, собравших менее 3 кг металла, равно количеству детей, собравших более 3 кг металла.

Медиана 3

1 2 2 3 4 8 15

Нечетное количество

Чтобы найти медиану чисел 16, 11, 20, 14, 10, 17, эти числа сначала располагаются в порядке возрастания.

10 11 14 16 17 20

Поскольку количество чисел четное, находится среднее арифметическое чисел по середине: 14 и 16.

Медиана (14 + 16) : 2 = 15

10 11 14 16 17 20

Четное количество

К сведению учителя! Ученикам еще раз дается информация о медиане, при нахождении медианы им предлагается расположить числа в порядке убывания или возрастания, при этом указывается, что половина чисел в данном наборе числа меньше медианы, а другая половина больше медианы.

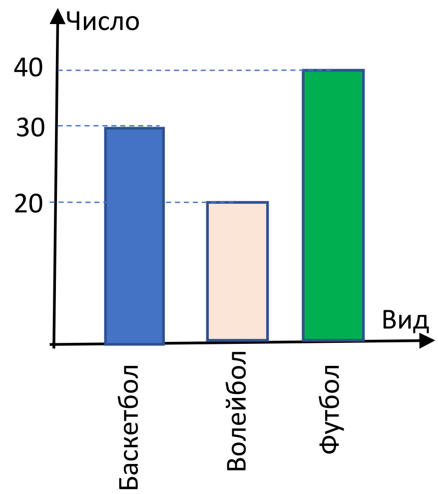
Подумай. Выслушиваются мнения учеников о различии между медианой треугольника и медианой данных чисел, при необходимости вносится корректировка. На этом этапе он дает ученикам задание используя словарь изучить этимологию слова.

Задания

2. Данные числа располагаются в порядке возрастания, и если их количество нечетное, то находится середее число, а если четное, то среднее арифметическое двух чисел, расположенных в центре.

а) Рост баскетболистов расположен в порядке возрастания: 189 см; 190 см; 190 см; 191 см; 192 см; 198 см. Поскольку здесь даны четные числа, за медиану принимается среднее арифметическое двух чисел, расположенных в центре, т.е. (190 + 191): 2 = 190,5 (см) – это медиана.
б) Баллы, набранные учениками на экзамене, расположены в порядке возрастания, и поскольку данные представляют собой нечетное число, то число по середине является медианой: 48; 53; 63; 64; 75; 86; 96. Здесь медиана равна 64.
в) Размеры емкостей, привезенных на базу, расположены в порядке возрастания, а поскольку данные представляют собой четные числа, то среднее арифметическое двух чисел, расположенных в центре, находится как медиана: 1,5 л; 1,8 л; 2,1 л; 2,2 л; 2,4 л; 2,8 л; 3,0 л; 3,1 л; 3,4 л; 3,5 л.
(2,4 + 2,8) : 2 = 2,6 (л).
3. Ученикам предлагается обработать данные диаграммы и найти среднее арифметическое и медиану данных чисел. Требуется сравнение полученных результатов и мнений детей.

- Количество прочитанных Айнур книг наибольшее. Айнур прочитала 6 книг.
- Эльхан не читал ни одной книги.
- Поскольку Айнур прочитала 6 книг, Самир 2, Лала 3, Сабина 1, Анар 5, Эльхан 0, каждый ребенок прочитал в среднем (6 + 2 + 3 + 1 + 0 + 5) : 6 = 2 5/6 книг за время летних каникул. То есть в среднем каждый ребенок может прочитать 2 или 3 книги.
- Располагая данные в порядке возрастания, находится их медиана: 0; 1; 2; 3; 5; 6 Здесь медиана равна (2 + 3) : 2 = 2,5. Это значит, что половина детей прочитала менее 2,5 книг (Самир, Сабина, Эльхан), а другая половина – более 2,5 книг (Айнур, Лала, Анар).



Ложные представления, возникающие у учеников. При обработке статистических данных ученики могут применять понятие медианы в тех случаях, когда в этом нет необходимости. Однако ученики должны знать, что понятие медианы (или среднего значения) применимо только к числовым данным. Категориальные данные не могут быть охарактеризованы медианой или средним арифметическим. Например, на диаграмме показано количество учеников, которые любят баскетбол, волейбол и футбол. Поскольку эти данные являются категориальными, нет необходимости находить их среднее арифметическое или медиану.
Иногда ученики могут считать данные числа одинаковыми на основании совпадения их среднего арифметического и медианы. Однако следует объяснить ученикам, что медиана делит данный набор чисел на два подмножества с одинаковым числом элементов, а среднее арифметическое подходит для характеристики всех чисел, если они не слишком отличаются друг от друга. Поэтому ученикам рекомендуется для нахождения медианы чисел обязательно расположить их либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания и найти медиану. Когда данные представлены в виде диаграммы, гистограммы и т.п., вышеизложенное следует учитывать в процессе их обработки. С учениками ведется работа в этом направлении.

Изучение Мода

В ходе анализа данных также отмечается, какие из них повторяются больше всего. Возникает потребность в величине, понятии, которое используется для характеристики данных преимущественно категориального характера, т.е. данных, не имеющих числового значения (например, различные цвета, предметы, имена и т.д.), которое называется модой. С латыни мода означает мера, правило, образ, и, хотя в ряде областей она имеет разные значения, все значения совпадают с корнем слова. Как указано в изучении, размеры мужской обуви, проданной в магазине в течение дня

39 43 41 40 38 41 42 41

Их мода равна 41. Но в другом примере учитывается, какой цвет автомобилей на парковке повторяется чаще всего. То есть в первом случае это означает, что обуви 41 размера продается больше, а во втором случае – что на парковке припарковано больше красных машин. Здесь, кстати, подчеркивается, что данные имеют несколько мод или вообще не имеют моды.
Запомни. Также важно подчеркнуть, что мода всегда является одним из данных, а среднее и медиана — нет, поскольку мода выбирается, а среднее арифметическое и медиана вычисляются.

Задания

4. Поскольку все данные являются числами, то число или числа, которые повторяются чаще всего, выбираются в качестве моды.

a) 12, 13, 15, 12, 16 — 12

b) 24, 26, 34, 24, 35, 24 — 24

c) 11, 13, 11, 15, 13, 11, 13, 15 — 11 и 13

5. Находят среднее арифметическое, медиану и моду данных. Для удобства данные сначала располагаются в порядке возрастания, затем выполняются известные расчеты.

c) 3, 10, 10, 12, 13, 12

f) 4, 6, 13, 18, 18, 13, 19

в) 3, 10, 10, 12, 12, 13 мода 10 и 12 медиана (10 + 12) : 2 = 11
среднее арифм.: (3 + 10 + 10 + 12 + 12 + 13): 6 = 10

е) 4, 6, 13, 13, 18, 18, 19 мода 13 и 18 медиана 13
среднее арифм.: (4 + 6 + 13 + 13 + 18 + 18 + 19) : 6 = $15\frac{1}{6}$

6. Находят и сравнивают среднее арифметическое, медиану и моду данных чисел.
б) Среди чисел 35, 49, 45, 35, 53, 35 выбирается наиболее повторяющяся мода: мода – 35
Числа 35, 35, 35, 45, 49, 53 записываются в порядке возрастания, а за медиану принимается среднее арифметическое двух чисел по середине: медиана – (35 + 45): 2 = 40
Они складывают числа, делят их на количество и находят среднее арифметическое: (35 + 35 + 35 + 45 + 49 +53) : 6 = 42
Мода данных чисел – наименьшая, а среднее число – наибольшее.

7. В этом задании находится среднего арифметическое, медиана и мода.
а) Рассчитывается средний балл баскетболиста за последние 7 игр: (19 + 24 + 15 + 12 + 23 + 25 + 29) : 7 = 147 : 7 = 21. Средний балл равен 21.
б) Набранные баллы располагаются в порядке возрастания и за медиану принимается число по середине: 12, 15, 19, 23, 24, 25, 29. Медиана ряда данных равна 23.
в) Если в следующей игре будет набрано 34 очка, данные в порядке возрастания будут 12, 15, 19, 23, 24, 25, 29, 34. Отсюда понятно, что нет моды до или после, так как ни одно число не повторяется. Но медиана меняется. Поскольку после 8-й игры количество данных четное, медиана рассчитывается как среднее арифметическое двух чисел по середине: (23 + 24): 2 = 47: 2 = 23,5. Итак, сначала медиана равна 23, затем 23,5.

8. Поскольку среди данных есть неизвестное, необходимо обратиться к определениям. Во всех случаях, поскольку задано числовое значение моды, соответственно находится и значение неизвестного. Затем находится среднее арифметическое данных.
г) 25, b, b, 15, b, 23, b, 5 *мода* 13 Учитывая, что b является наиболее частым и мода также указана как 13, находится b = 13. Затем найденные неизвестные восстанавливаются между данными и находится среднее арифметическое.

25, 13, 13, 15, 13, 23, 13, 5 *мода* 13

(25 + 13 + 13 + 15 + 13 + 23 + 13 + 5) : 8 = 120 : 8 = 15. Среднее арифметическое равно 15.

Дифференцированное обучение.
Поддержка. К доске приглашаются одна девочка и один мальчик, и они записывают на доске цвета, которые нравятся девочкам и мальчикам соответственно. Затем, выяснив моду обеих групп, они определяют цвета, которые нравятся группам.
Углубление. К доске вызывают 3 учеников из трех разных рядов. Они пишут на доске рост учеников из своих рядов. Находят среднее арифметическое, медиану и моду каждого из трех рядов и сравнивают их друг с другом.
Учитель также может давать ученикам различные задания на рабочих листах. Примеры заданий приведены по ссылке.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://quizizz.com/en/mean-median-and-mode-worksheets-class-7

Изучение Сравнение по среднему арифметическому, медиане и моде

При анализе данных очень важно сравнивать среднее арифметическое, медиану и моду данных, чтобы сделать о них общие выводы. Таким образом, когда число повторяющихся элементов среди заданных чисел приближается к числу всех элементов, то мода является значимой, если значения данных существенно не отличаются друг от друга, то – среднее арифметическое, а в остальных случаях медиана.

Компания	Зарплата сотрудников	Среднее арифметическое	Медиана	Мода
A	550 550 550 850 900 1400	800	700	550
B	500 500 700 900 2300	980	700	500

Например, как указано в изучении, в таблице приведены среднее арифметическое, медиана и мода зарплат, получаемых сотрудниками компаний A и B. Это означает, что среднее арифметическое не может отражать среднюю зарплату в компании A, поскольку зарплата многих сотрудников составляет 550 манатов. Следовательно, за среднюю зарплату компании A можно принять 550 манатов. То же самое можно сделать и в отношении компании B, которая более точно отражает медиану зарплаты, установленную в этой компании. В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания: *https://www.geogebra.org/m/jmgakdvy*

Задания

9. Для обоих множеств данных находятся и сравниваются их среднее арифметическое, медиана и мода.

10. Данные о количестве карандашей, тетрадей, ластиков, проданных в магазине школьных принадлежностей, заносятся в таблицу, а затем сравнивают среднее арифметическое, медиану и моду, найденные для каждого предмета.

Товар	Число проданных товаров	Среднее арифм.	Медиана	Мода
Ручка	? 150 200 350 300	230	?	?
Тетрадь	180 120 130 200 ?	?	?	120
Ластик	80 130 150 150 ?	?	140	?

Среднее арифметическое ручек равно 230, а количество равно 5, поэтому количество всех проданных ручек равно 230 · 5 = 1150. Тогда находится количество ручек, проданных в первый день: 1150 – (150 + 200 + 350 + 300) = 1150 – 1000 = 150

Числа располагаются в порядке возрастания: 150, 150, 200, 300, 350

Отсюда мода равна 150, а медиана — 200.

По этому же правилу находятся неизвестные данные для тетради и ластика.

Решение задач

11. В задаче требуется найти массу проданного арбуза, масса которого не задана.

5	5	3		8	9	10	12	5

Решение задачи: Мода данных чисел равна 5. Следовательно, чтобы найти медиану, их можно записать в порядке возрастания как 3, 5, 5, 5, ...

Среднее арифметическое можно предположить, обозначив неизвестное через x.

$(3 + 5 + 5 + 5 + x + 8 + 9 + 10 + 12) : 9 = (57 + x) : 9$

Среднее арифметическое примерно больше 6, поэтому пропущенное число может быть 6 или 15. Если пропущенное число равно 15, данные получаются как 3, 5, 5, 5, 8, 9, 10, 12, 15.

Следовательно, медиана равна 8, а среднее арифметическое равно 8. Однако по последнему результату мода меньше медианы, а медиана меньше среднего арифметического. Получается противоречие. Следовательно, пропущенное число — 6. То есть: 3, 5, 5, 5, 6, 8, 9, 10, 12. Согласно итоговым результатам, мода равна 5, медиана — 6, среднее арифметическое — 7.

Ответ. Пропущенное число — 6.

12. В ходе решения задачи баллы, выставленные судьями для обеих пар, располагаются в порядке возрастания и соответственно находят, и сравнивают среднее арифметическое, медиану и моду.

I МЕСТО	10,0	9,6	9,9	9,6	9,8	10,0
II МЕСТО	9,7	10,0	10,0	9,4	9,5	10,0

Решение задачи: Порядок выставленных баллов паре, занявшей 1 место (в порядке возрастания): 9,6 9,6 9,8 9,9 10,0 10,0

мода	медиана	среднее арифметическое
9,6 и 10,0	(9,8 + 9,9) : 2 = 9,85	(9,6 + 9,6 + 9,8 + 9,9 + 10,0 + 10,0) : 6 = 58,9 : 9 ≈ 9,82

Порядок выставленных баллов паре, занявшей 2 место (в порядке возрастания): 9,4 9,5 9,7 10,0 10,0 10,0

мода	медиана	среднее арифметическое
10,0	(9,7 + 10,0) : 2 = 9,85	(9,4 + 9,5 + 9,7 + 10,0 + 10,0 + 10,0) : 6 = 58,6 : 6 ≈ 9,77

Несмотря на то, что медиана баллов обеих пар одинакова, их моды частично совпадают, однако первая пара в среднем получила от каждого судьи 9,82 балла, а вторая пара — 9,77 балла. Поскольку победа отдается первой паре, отмечается, что за основу берется среднее арифметическое.

Ответ. Победитель определяется на основе среднего арифметического набранных баллов.

14. В задаче требуется сравнительный анализ количества осадков, выпавших в двух городах, на основе данных, представленных на диаграммы.

Решение задачи:

а) Норма осадков для города A составляет 3 мм, а для города B – 1 мм.

б) Среднее количество осадков, выпавших в городе A:

(3 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1) : 6 = 3 (*мм*)

Среднее количество осадков для города B: (3 + 2 + 1 + 4 + 1 + 1): 6 = 2 (*мм*)

в) Показатели для города A в порядке возрастания: 1, 2, 3, 3, 4, 5 медиана 3

Показатели для города B в порядке возрастания: 1, 1, 1, 2, 3, 4 медиана 1

Медиана показателей города A больше медианы показателей города B.

Ответ. а) Город A – 3 *мм*; Город B – 1 *мм*; б) Город A – 3 *мм*; Город B – 2 *мм*; в) Город A – 3 *мм*; Город B – 1 *мм*.

К сведению учителя. Задания такого типа развивают у учеников навыки сравнения, а также увеличивают их способность анализировать два разных набора данных. Навыки нахождения среднего арифметического, медианы и моды помогают детям работать с данными, с которыми они сталкиваются в различных жизненных ситуациях. Подобные задания могут укрепить полученные знания и помочь учащимся закрепить усвоенный материал.

Формативное оценивание.

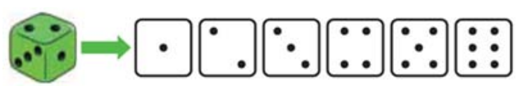
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит среднее арифметическое данных чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит медиану данных чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит моду данных чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Сравнивает медиану, моду и среднее арифметическое данных чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 9.2. Случайное событие

ПОДСТАНДАРТЫ	6-5.2.1. Выражает вероятность наступления события такими словами, как «невозможно», «маловероятно», «скорее всего произойдет», «обязательно произойдет», «вероятность 50%». 6-5.2.2. Высказывает мнение о всех возможных результатах испытания.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Различает события, определяет невозможные, случайные и достоверные события. • Может описывать происходящее такими словами, как «невозможно», «маловероятно», «скорее всего произойдет», «обязательно произойдет». • Понимает, может выбирать, различать равновозможные события.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Игровые кости, карточки с буквами, спиннер, рабочие листы
ЭЛЕКТОРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Задание: *https://www.mathgoodies.com/lessons/vol6/practice_unit6* *https://www.scootle.edu.au/ec/viewing/L212/index.html#* *https://www.scootle.edu.au/ec/viewing/L115/index.html#* *https://www.scootle.edu.au/ec/viewing/L118/index.html#* *https://youtu.be/f0Oqwjrs690* *https://youtu.be/nwauKslmvDU* *https://youtu.be/rlUZXrJGuf8* *https://youtu.be/GRSvzSVLa9g*

Побуждение. Учитель раздает каждому ученику по игральной кости и предлагает бросить ее 6 раз. Дети записывают результат каждого подбрасывания. Затем он спрашивает, у кого на брошенных игральных костях выпадает одинаковое количество очков, у кого выпадает нечетное или четное число, и записывает это на доске. Ученики делятся своими мнениями по поводу записей на доске.
Учитель может задать ученикам наводящие вопросы:
– Возможно ли выпадение 7 очков? Может ли выпасть нечетное число? Может ли выпасть число, большее 6?

Исследование-обсуждение



Учитель предлагает каждому ученику подбросить игральную кость 10 раз с соседом по парте и записать выпавшие числа. Каждый комментирует свои заметки и дает ответы на вопросы.
• Спрашивается, в следующий раз, при подбрасывании игральной кости, возможно ли, чтобы выпавшее число было четным или нечетным?
• Спрашивается, возможно ли, чтобы каждый раз выпадало одно и те же число?
• При броске игральной кости, какие слова можно использовать: «невозможно», «маловероятно», «скорее всего», «обязательно будет»?
Кроме того, ученики иногда могут задавать вопросы о результатах своих наблюдений, экспериментов и испытаний, интересуются тем, какие математические значение имеют выражения, которые они используют в речи, такие как «вероятно», «наверное», «возможно», «невозможно» и т.д. В таких случаях можно задавать ученикам наводящие вопросы об уроках, которые будут изучаться в будущем, а также побуждать их к проведению определенных исследований в этом направлении.

Изучение Случайное событие

Ученики напоминают о событиях, встречающихся в повседневной жизни. Например, спрашивают их мнение о том, что после пятницы наступает суббота. Или их спрашивают, какое число может выпасть на верхней грани при броске игральной кости, какая карта может быть выбрана из пронумерованных или подписанных буквами карт, что происходит при броске монеты и как это следует описывать. Например, учащихся можно спросить: «Как вы оцениваете шанс выпадения числа 6 при броске игральной кости 10 раз?» или «Есть ли вероятность, что при вытягивании одного из 5 белых и 5 черных шариков из мешка, он окажется белым?», таким образом, можно обсудить, с какими исходами можно столкнуться при наступлении события. Затем, развивая процесс дальше, можно задавать учащимся наводящие вопросы, такие как: «Всегда ли выпадет одно и то же число?», «Всегда ли выпадет четное число?», «Будет ли выпадать число больше 7?», это позволит частично определить, как слово «случайность» будет восприниматься в их лексиконе. Или можно попросить каждого ученика написать свое имя на листе бумаги заглавными или строчными буквами, а затем в случайном порядке спросить, что написал каждый, и узнать их мнения. При этом можно также обратить внимание на то, сколько человек написали свое имя только заглавными буквами, сколько только строчными буквами, а сколько использовали оба типа букв, и с какой частотой. В ходе урока напоминаются, какие слова и словосочетания нашего языка используются на этапе введения в тему. Ученики знакомятся с новыми понятиями. Они узнают о событиях и их типах, а также выражают эти понятия словами.

Подумай!

Приводятся примеры, соответствующие выражениям «невозможно», «маловероятно», «скорее всего», «обязательно будет», «может быть, а может и не быть». Например, выпадение 8 очков при подбрасывании игральной кости "невозможно", то, что все ученики в классе родились в феврале, "маловероятно", в классе, где 14 девочек и 5 мальчиков, "скорее всего" старостой будет выбрана девочка, а весеннее равноденствие "обязательно будет".

Задания

1. В ходе выполнения задания рекомендуется разделить класс на три группы и каждой из них дать задание решить по одному пункту задания. При выполнении этих заданий каждая группа может использовать соответствующие материалы, чтобы реально ответить на вопросы:

а) Что извлечение зелёного шара из коробки, содержащей только красные шары, является "невозможным";

б) Что совпадение дня рождения у двух случайно выбранных учеников класса "может быть, а может и не быть";

в) При броске игральной кости приходят к выводу, что выпавшее число на верхней грани "обязательно будет меньше 10".

Побеждает та группа, которая быстрее выполнит задание и даст правильный ответ.

2. Когда стрелка спиннера вращается и останавливается на одной из поровну разделенных частей, исследуется, что это за фигура или какого она цвета. То есть,

а) Событие «Фигура будет красной» «обязательно произойдет»;

б) Событие «Фигура будет желтого цвета» «невозможно»;

в) Событие «Фигура будет квадратом» «может быть, а может и не быть»;

г) Событие «Фигура будет треугольником» оценивается как «может быть, а может и не быть».

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда, когда вращающаяся стрелка останавливается на линии, разделяющей равные части, может рассматриваться учениками как еще один случай. Рекомендуется направить внимание учеников на разделенные равные части. В этом направлении также рекомендуется использовать и другие средства, в том числе какие выражения использовать при оценке события выделения некоторых цветных ячеек в прямоугольнике, разделенном на одинаковые квадраты.

Изучение Равновозможные события

Ученикам вновь напоминают выражения, используемые во время возникновения событий, и объясняют, с каким процентом может произойти то или иное событие. Объясняется вероятность события, рассматриваются равновозможные или одинаково вероятные случаи при подбрасывании монеты или игральной кости. Дополнительно учитель приводит другие примеры и рекомендует ученикам сделать то же самое. Основное внимание уделяется формированию навыков анализа всех возможных ситуаций в любом событии и различать равновозможные или равновероятные события.

К сведению учителя! В дополнение к учебному материалу ученикам можно дать задание исследовать ряд событий с помощью карточек и помочь при его выполнении. Например, можно написать гласные буквы алфавита по одной букве на карточке, перевернуть их и попросить товарища вытянуть любую карточку. В это время могут быть заданы наводящие вопросы, какие вопросы могут задать ученики.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель приглашает 3 ученика к доске и дает одному игральную кость, другому металлическую монету, а третьему набор карт с числами от 1 до 10. Им предлагается исследовать, будет ли одинаковый результат в двух последовательных событиях: подбрасывание игральной кости, подбрасывание монеты и вытягивание какой-либо карты.

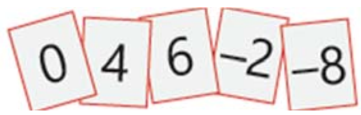
Углубление. Учитель вызывает нескольких учеников к доске. Двум из них дается задание подбросить игральную кость, нескольким — подбросить металлическую монету, а одному — выбрать карту из набора из 10 карт (на каждой карточке написано одно из чисел от 1 до 10), а затем они должны повторить те же действия, и результаты сравниваются.

Задания

3. При выполнении задания обращают внимание на то, что круг спиннера разделен на 6 равных частей и какие цветные части имеют одинаковое количество. Таким образом
в) Поскольку количество синих частей равно количеству желтых частей, события «Стрелка остановится на синей части» и «Стрелка остановится на желтой части» являются равновозможными событиями;
г) Поскольку количество красных частей больше количества серых частей, события "Стрелка остановится на красной части" и "Стрелка остановится на серой части" не являются равновозможными событиями.

Решение задач

4. В задаче, перед тем как исследовать равновозможность событий, считаются шары разных цветов, и принимается во внимание, что события с извлечением шара из равного количества шаров являются равновозможными, а события с извлечением шара из разного количества шаров не являются равновозможными.
Решение задачи:
а) Поскольку количество красных и зеленых шаров одинаково, события «Извлеченный шар красный» и «Извлеченный шар зеленый» являются равновозможными событиями.
б) Поскольку количество черных и синих шаров равно, события «Извлеченный шар черный» и «Извлеченный шар синий» являются равновозможными событиями.
в) Поскольку количество черных шаров больше количества зеленых, то события «Извлеченный шар зеленый» и «Извлеченный шар черный» не являются равновозможными событиями.
Ответ. а) Это равновозможные события; б) Это равновозможные события; в) Это не равновозможные события



5. Обращается внимание на то, что два числа, написанных на картах, являются положительными целыми числами, два отрицательными целыми числами и одно число — 0.
Решение задачи:
• Поскольку количество положительных чисел равно количеству отрицательных, то событие, что открытое число положительное, и событие, что оно отрицательное, равновозможны.
• Поскольку все числа целые, то событие, что открытое на карте число целое, является достоверным событием.
• Поскольку среди данных чисел только одно число, то есть 6, является целым числом, делящимся на 3, то событие, что открытое на карте число является целым числом, делящимся на 3, является случайным событием.
• Поскольку среди данных чисел нет ни одного нечетного числа, то событие, что открытое на карте число окажется нечетным, является невозможным событием.
Ответ. Равновозможные события; достоверное событие; случайное событие; невозможное событие.
Проект. Каждому ученику рекомендуется нарисовать на бумаге круг, разделить его на равные части и раскрасить их разными цветами. Затем им дается задание сравнить события, на какой цвет выпадает игральная кость, если ее подбросить дважды подряд.
Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Различает события, определяет невозможные, случайные и достоверные события.	Рабочие листы, учебник, РТ
Может описывать происходящее такими словами, как «невозмож-но», «маловероятно», «скорее всего», «определенно произойдет».	Рабочие листы, учебник, РТ
Понимает, может выбирать, различать равновозможные события.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 9.3. Вероятность события

ПОДСТАНДАРТЫ	6-5.2.2. Высказывает мнение о всех возможных результатах испытания. 6-5.2.3. Находит вероятность двух равновозможных элементарных событий. 6-5.2.4. Находит вероятность двух равновозможных элементарных событий на основе испытания.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	● По результатам тестирования рассчитывает вероятность элементарного события путем составления таблицы частот. Выражает словами сравнение вероятности наступления двух событий. ● Рассчитывает вероятность события как отношение количества благоприятных случаев к числу возможных случаев. Например, при подбрасывании шестигранной игральной кости вероятность выпадения каждой грани равна $\frac{1}{6}$. Словесное выражение вероятности события связывается с числовой вероятностью.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, спиннеры, мешочки и шарики, игральные кости, монеты.
ЭЛЕКТОРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://mathsframe.co.uk/en/resources/resource/233/probability* *https://mrnussbaum.com/probability-fair-online-game* *https://toytheater.com/climber/* *https://youtu.be/KzfWUEJjG18* *https://youtu.be/UVJvATSDSNA* Задание: *https://www.transum.org/Software/Online_Exercise/Probability/* *https://www.mathgoodies.com/lessons/vol6/intro_probability* *https://www.mathgoodies.com/lessons/vol6/certain_impossible* *https://www.math-exercises.com/probability-and-statistics/probability*

Побуждение. Учитель кладет на стол 20 тетрадей в клетку и 10 в линию с одинаковыми обложками. Затем он дает одному из детей задание взять одну тетрадь при условии, что он каждый раз выберет одну наугад (при условии, что он вернет ее и положит обратно). Учитель задает ученикам вопросы:

- Если ваш товарищ сделает 10 попыток, какую тетрадь он выберет больше всего?
- Как вы думаете, каким примерно будет выбор?

Исследование-обсуждение

Попытки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Вытащенный мячик	🔴	🔴	🟡	🔴	🔴	🟡	🔴	🔴	🔴	🟡	🔴	🔴	🟡	🔴	🔴

Каждый раз, когда Лала пытается вытянуть мяч, он часто оказывается красным. Она объясняет это большим количеством красных мячей в мешке. Ей предлагается вычислить отношение числа случаев, когда вытянутый красный мяч, к общему количеству попыток. Согласно указанному числу, это отношение составляет $\frac{11}{15}$ для красных мячиков и $\frac{4}{15}$ для желтых мячиков. Количество мячиков в мешке не меняется, поскольку каждый раз, когда мяч вынимают, он возвращается в мешок. Таким образом объясняется, что каждый раз, когда вынимают мяч, он красный.

Изучение Относительная частота

Непредсказуемость любого результата объясняется во время изучений событий и поощряется проведение серии экспериментов и испытаний. Также даются начальные теоретические знания о частоте события. На основе таблицы результатов (таблицы частот), связанной с экспериментом Эльхана со спиннером, предоставляется информация о относительной частоте. Объясняется, какую роль относительная частота играет в прогнозировании событий или определении вероятности их наступления. Здесь внимание учеников обращается на сравнение цветных секторов спиннера, а также акцентируется на том, на каком цвете стрелка чаще всего останавливается при каждом вращении.

Результаты испытания	Заметки	Всего
Желтый	卌 卌 卌 卌 卌 |	26
Синий	卌 卌 ||||	14
Всего		40

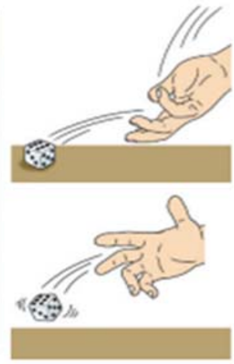
Подумай!

По таблице находится, что относительная частота остановки стрелки на синем цвете при вращении спиннера равна $\frac{14}{40}$. Затем суммируются относительные частоты остановки стрелки на желтом и синем цветах и находится $\frac{26}{40}+\frac{14}{40}=1$. Результат 1 объясняется тем, что стрелка остановилась на одном из двух цветов, или это является достоверным событием.

Задания

2. При броске игральной кости записывают количество каждой выпавшей грани в таблице, а затем находят и записывают в таблицу количество всех случаев. Затем рекомендуется найти относительную частоту каждого события.
Получение 1 при нахождении суммы частот объясняется также вероятностью того, что в случае подбрасывания игральной кости выпадет результат не больше 6.

Результат	Заметки	Всего
⚀	卌 卌 ||||	14
⚁	卌 卌 卌 |||	18
⚂	卌 卌 卌 ||||	19
⚃	卌 卌 卌 卌	20
⚄	卌 卌 |||	13
⚅	卌 卌 卌 |	16
Всего		100



Изучение Вероятность события

Напоминается ученикам, что во время жеребевки для начала шахматной партии используется монета, и что события, которые могут произойти в это время, равновозможны. Затем предоставляется информация о нахождении количества возможных исходов события, а также количества благоприятных исходов, и представляется формула для вычисления теоретической вероятности.

$$P(A)=\frac{\text{Количество благоприятных случаев}}{\text{Количество возможных случаев}}$$

ОБРАЗЕЦ 1. Какова вероятность выпадения грани с цифрой пять при броске игральной кости?

Количество возможных случаев – 6

Количество благоприятных случаев – 1

Событие B: выпадение цифры пять. $P(B)=\frac{1}{6}$ ← *Количество благоприятных случаев* ← *Количество возможных случаев*

Кроме того, ученикам сообщается, что вероятность невозможного события равна 0, вероятность достоверного события — 1, а вероятность случайного события — от 0 до 1. В технически оснащенных классах можно использовать электронные ресурсы. Различные подходы к нахождению вероятности события представлены в данных ссылках: *https://youtu.be/E_3tUrgMDxY https://youtu.be/WTzL7laO_j4 https://youtu.be/4CtXvQySiro https://youtu.be/Z8RUZd13Qrs https://youtu.be/ad00GRc8BLg https://youtu.be/uzkc-qNVoOk https://youtu.be/yUal0JriZtY*

Подумай!

В этой рубрике, обращаясь, к примеру, приведенному в исследовании, находится, какую часть всех мороженых составляет клубничное мороженое, а выражение полученной доли в процентах включает в себя и процент ее вероятности. То есть клубничное мороженое составляет $\frac{1}{5}$ всего мороженого, или 20%. Это означает, что вероятность события равна 20%.

3. В ходе выполнения задания учитель дает краткое объяснение возможных ситуаций для данных событий, и дает задание ответить на вопросы.

а) Так как в классе 25 учеников, то следует отметить, что число возможных случаев равно 25 даже при случайном выборе ученика;

б) Поскольку граней игральной кости всего 6 и каждый раз можно получить очко, записанное от 1 до 6, подчеркивается, что число всех возможных случаев равно 6.

4. При решении задания ученикам предлагается сначала найти количество всех возможных случаев, а затем количество благоприятных случаев.

а) Объясняется, что поскольку в классе 25 учеников, то число возможных случаев равно 25, а количество отличников равно 5, значит, число благоприятных случаев равно 5. То есть вероятность наступления события оказывается равной $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

б) Рекомендуется учитывать, что число всех возможных случаев равно 4 при вращении стрелки спиннера, разделенной на 4 равные части. Тогда по условию, когда стрелка остановится на красной части, учитывается, что число благоприятных случаев равно 1, то есть вероятность наступления события равна $\frac{1}{4}$. Аналогично, когда стрелка останавливается на желтой части, оказывается, что число благоприятных случаев равно 2, а вероятность события $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

К сведению учителя! При определении вероятности события ученики могут делать ошибочные выводы, связанные с устоявшимися представлениями и практическими навыками, связанными с событиями. Например, если в коробке находится равное количество красных, жёлтых и зелёных шаров, и их спрашивают о вероятности того, что случайно вынутый шар окажется красным, зелёным или жёлтым, они могут выбрать свой любимый цвет, не выполняя расчётов. Или могут написать на каждой карточке по натуральному числу от 1 до 20 и дать субъективный ответ на вопрос о том, какое число выпадет, когда они случайно выберут карточку, например, они могут назвать свое любимое число. Или, рассматривая случай, когда при броске игральной кости выпадает 6, результат эксперимента не всегда может быть одинаковым, то есть частота выпадения 6 может отличаться от ее классической вероятности. Иными словами, при определении вероятности наступления событий заметно, что у учеников недостаточно развиты навыки определения и различения возможных и благоприятных случаев. Поэтому необходимо уберечь учеников от ложных представлений и направить их в правильное русло. Рекомендуется, чтобы учителя особо акцентировали внимание учеников на всех возможных и благоприятных случаях, которые могут произойти при подбрасывании монеты, броске игральной кости, вытягивании карты из перемешанной колоды и в других ситуациях.

Из истории математики

Необходимо расширить информацию, представленную в учебнике, и поделиться с учениками более подробными сведениями о возникновении статистики и теории вероятностей. Ученикам предлагается подготовить презентации о выдающихся ученых, достигших больших успехов в этой области.

Решение задач

5. Перед решением задачи детям можно предложить рассортировать все книги на столе, выбрать наугад любую из них и посчитать вероятность наступления события. Затем каждому можно предложить взять книги обратно и приступить к решению задачи. Таким образом, по условию задачи число возможных случаев определяется равным 50 и для каждого случая находится число благоприятных случаев.

Решение задачи:

• Поскольку количество энциклопедий равно 10, вероятность того, что случайно выбранная книга окажется энциклопедией, равна $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$.

• Поскольку число научной литературы равно 17, вероятность того, что случайно выбранная книга является научной литературой, равна $\frac{17}{50}$.

• Поскольку число книг художественной литературы равно 23, вероятность того, что случайно выбранная книга окажется художественной, равна $\frac{23}{50}$.

Ответ. $\frac{1}{5}$; $\frac{17}{50}$; $\frac{23}{50}$

6. При решении задачи ученики должны ещё раз научиться правильно определять количество возможных исходов. Таким образом, каждая из 10 карточек, на которых написаны разные цифры, может оказаться благоприятным событием при случайном выборе.

Решение задачи:

• Вероятность того, что выбранная карта окажется 2, равна $\frac{1}{10}$.

Ответ. $\frac{1}{10}$

Игра. Игра с бумажным стаканом не только повышает интерес учеников к уроку, но и помогает им косвенно познакомиться с экспериментальной вероятностью, они сами могум различать возможные и благоприятные случаи, а также приобретают навыки сравнения полученных результатов с классической вероятностью. Сначала каждый из двух игроков бросает бумажный стаканчик 10 раз и фиксируя в таблице событие, при котором стакан падает на основание. Например, предположим, что у 1-го игрока из 10 попыток стакан падает на основание 8 раз, а у второго игрока — 5 раз. Тогда относительная частота 1-го игрока будет равна 0,8, а 2-го игрока – 0,5. То есть по относительной частоте побеждает 1-й игрок. Но поскольку во время броска стакан может упасть в трех разных положениях (на основание, на горлышко, на бок), вероятность того, что событие произойдет при одном броске составит $\frac{1}{3}$.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит частоту события.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет количество возможных и благоприятных случаев.	Рабочие листы, учебник, РТ
Может применить теоретическую формулу для нахождения вероятности.	Рабочие листы, учебник, РТ

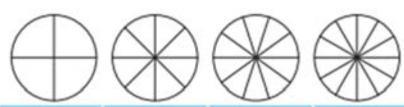
ТЕМА 9.4. Представление информации

ПОДСТАНДАРТЫ	6-5.1.1. Представляет заданные данные в процентах на круговой диаграмме. 6-5.1.4. Выражает увеличение и уменьшение величин, указанных на линейной диаграмме, в процентах.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Анализ предоставленных данных, классификация их по типам, выбор подходящего инструмента (круговая диаграмма, линейная диаграмма, график); • Вычисление градусов секторов круговой диаграммы по данным и разделение круговых секторов с помощью транспортира; • Представление зависящих от времени величин на линейной диаграмме и выражение увеличения или уменьшения изменения величины на линейной диаграмме в процентах.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, листы в клетку, транспортир (для каждого ребенка и для работы на доске), линейка.
ЭЛЕКТОРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://youtu.be/0uCZSBVQn4Q* *https://www.geogebra.org/m/nPf3r8vG* *https://www.geogebra.org/m/KucbsgUj* *https://www.geogebra.org/m/g8eyv8wg* Задание: *https://www.geogebra.org/m/x8XKP54m*

Побуждение. Принеся в класс 100 цветных (красных, синих, зеленых и белых) шариков, учитель предложил каждому из учеников выбрать по 4 шарика одного цвета. Затем он записывает на доске количество учеников, выбравших каждый цвет, и задает ученикам вопросы:

- какой процент всех шаров составляют красные шары?
- какой процент всех шаров составляют синие шары?
- какую часть всех шаров составляют зеленые шары?

Исследование-обсуждение



Лето	Осень	Зима	Весна
200	50	150	100

Определяется общее количество учеников, принявших участие в опросе. Затем по статистике времен года определяется, какую часть от общего числа составляют учащиеся, выбирающие каждое время года. 200 учеников, выбравших лето, составляют $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ от общего числа, ученики, выбравшие осень, составляют $\frac{1}{10}$, выбравшие зиму – $\frac{3}{10}$, а выбравшие весну – $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ от общего числа. Во всех случаях, поскольку знаменатель числа, обозначающего часть, равен 10, правильным считается выбор круга, разделённого на 10 частей.

Изучение Представление в процентах данных на круговой диаграмме

Сначала дается краткая информация о диаграммах и их типах. Подчеркивается, что круговые диаграммы являются более целесообразным способом для сравнения частей целого. Обрабатывается информация о количестве оцененных учеников и определяется, какой процент учеников, получил каждую оценку, и данные записываются в таблицу. Затем в соответствии с процентами вычисляется градусная мера секторов круга. Здесь ученикам напоминают, что полный угол равен 360°, и в то же время проверяется навык представления процента в виде дробей

Результаты оценивания

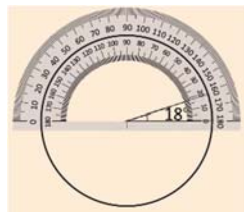
Оценка	Число	%
"2"	2	5
"3"	8	20
"4"	20	50
"5"	10	25
Всего	40	100

"2" $360° \cdot \frac{5}{100} = 18°$ "3" $360° \cdot \frac{20}{100} = 72°$ "4" $360° \cdot \frac{50}{100} = 180°$ "5" $360° \cdot \frac{25}{100} = 90°$

На следующем этапе рисуется круг и с помощью транспортира строятся соответствующие центральные углы (сектора круга) с вершиной в центре круга. В конце соответствующие части закрашиваются по выбору учеников. На закрашенных частях указываются проценты, соответствующие каждому углу, и названия оценок.

Результаты оценивания

Оценка	Число	%	Угол
"2"	2	5	18°
"3"	8	20	72°
"4"	20	50	180°
"5"	10	25	90°
Всего	40	100	360°



Дифференцированное обучение.
Поддержка. К доске приглашаются одна девочка и один мальчик. Им предлагают сектора круга разной градусной меры, вырезанные из кругов одинакового радиуса, и дают задания собрать круг. Например, можно задать собрать круг из секторов круга с одинаковым радиусом с градусными мерами 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 100°, 150°, 200°.
Углубление. Класс делится на 3 группы и дается им одно и то же задание, одновременно можно попросить их найти подходящие данные и составить содержание.

Задания

1. Из таблицы определяется общее количество банковских работников: 32 + 8 + 4 + 16 + 20 = 80. Затем находятся процентные показатели, соответствующие видам транспорта, которыми пользуются сотрудники банка.

Виды транспорта	Число
Общественный транспорт	32
Велосипед	8
Мотоцикл	4
Скутер	16
Личный автомобиль	20

Обществ. транспорт: $\frac{32}{80} \cdot 100\% = 40\%$

Велосипед: $\frac{8}{80} \cdot 100\% = 10\%$ Мотоцикл: $\frac{4}{80} \cdot 100\% = 5\%$ Скутер: $\frac{16}{80} \cdot 100\% = 20\%$

Личный автомобиль: $\frac{20}{80} \cdot 100\% = 25\%$

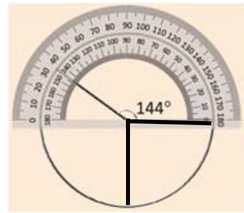
Согласно результатам вычислений, самый высокий процентный показатель приходится на общественный транспорт (желтый цвет), а самый низкий — на мотоцикл. Если расположить виды транспорта в порядке возрастания процентных показателей, получится следующий порядок: мотоцикл, велосипед, скутер, личный автомобиль и общественный транспорт. Соответствующий порядок цветов: зеленый, синий, красный, розовый и желтый. То есть правильный ответ – B. Это задание можно было бы решить, предположив ответ без вычислений процентных показателей. Однако цель задания – напомнить ученикам знания, связанные с диаграммами, реализовать интегративную связь с темой процентов и подготовить плавный переход к следующим заданиям.

2. В задании-образце в таблице приведены данные о количестве мячей в продаже. В образце показаны процентный показатель, соответствующий баскетбольным мячам, и градусная мера соответствующего центрального угла круга. Аналогичным образом находятся процентные показатели и градусные меры углов, соответствующие футбольным и волейбольным мячам:

Разновидности мячей	Число
Баскетбольный	8
Волейбольный	5
Футбольный	7

- Волейбольные мячи: $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ или 25%, $\frac{360°\cdot 25}{100} = 90°$

- Футбольные мячи: $\frac{7}{20} = 0{,}35$ или 35% , $\frac{360°\cdot 35}{100} = 126°$



Затем с помощью транспортира на окружности строятся соответствующие центральные углы.

3. По приведенной в задаче диаграмме находится количество всех любителей музыки: 12 + 8 + 16 + 4 = 40.

Затем находится, какой процент всех членов клуба составляет каждая группа.

Рок: $\frac{12}{40}\cdot 100\% = 30\%$; Эстрада: $\frac{8}{40}\cdot 100\% = 20\%$;

Народная музыка: $\frac{16}{40}\cdot 100\% = 40\%$; Классическая музыка: $\frac{4}{40}\cdot 100\% = 10\%$;

Любители народной музыки и эстрады составляют в общей сложности 40% + 20% = 60%.

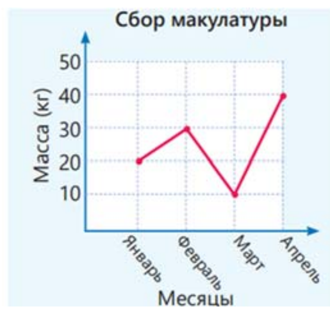
Задание снова включает взаимосвязь между процентами и круговыми диаграммами.

4. Определяется, сколько баллов набрали 10 учеников, участвующих в конкурсе "Знание". По правилу нахождения процента от числа находится: $\frac{10}{100}$ · 20% = 2 человека, набравших 70 баллов; $\frac{10}{100}$ · 30% = 3 человека, набравших 80 баллов; $\frac{10}{100}$ · 40% = 4 человека, набравших 90 баллов; $\frac{10}{100}$ · 10% = 1 человек набрал 100 баллов и заполняется таблица. В задании проверяются знания ученика о процентах, а также исследуется связь между круговой диаграммой и таблицей.

Балл	Число учеников
70	2
80	3
90	4
100	1

Изучение Линейная диаграмма

Сообщается, что для описания изменения величины во времени более удобным является использование линейных диаграмм, а также о возможности наглядно оценить процентное изменение значений величины в разные моменты времени. Затем данные диаграммы анализируются и определяется, сколько кг макулатуры было собрано в каждый месяц. То есть определяется, что в январе было собрано 20 кг макулатуры, в феврале – 30 кг, в марте – 10 кг, в апреле – 40 кг. Для нахождения процентного изменения величины вычисляется, что количество макулатуры, собранной в феврале, на 50% больше, чем в январе, а в марте — на 50% меньше, чем в январе. Учитель может предложить детям альтернативные вопросы. Например, «На сколько процентов больше макулатуры было собрано в апреле по сравнению с январем?», «На сколько процентов меньше макулатуры было собрано в феврале по сравнению с апрелем?».



Подумай!

Как представить информацию о сборе макулатуры на круговой диаграмме?

В этой рубрике, ссылаясь на первичное и вторичное изучение, определяется, какую часть от общего количества собранной макулатуры составляет количество, собранное за каждый месяц, и сколько это в процентах, а также вычисляются соответствующие центральные углы на круговой диаграмме в градусах, составляется и заполняется таблица, с помощью транспортира на круге выделяются соответствующие углы. То есть одновременно закрепляются несколько приобретенных знаний и навыков, создаются условия для того, чтобы ученик мог гибко маневрировать между несколькими темами.

5. В ходе решения задания учитель рекомендует обработать данные схемы, напоминает детям формулу процентного изменения величины и предлагает ответить на вопросы.

- Наибольший рост продаж обуви был в марте: в феврале было продано 40 штук, а в марте – 80.
- Количество проданных в марте пар обуви по сравнению с февралем увеличилось на $\frac{80-40}{40}\cdot 100\% = 100\%$.

- В апреле количество проданной обуви по сравнению с мартом уменьшилось на $\frac{80-60}{80} \cdot 100\% = 25\%$.

  Вот несколько вопросов, которые можно сформулировать по поводу линейной диаграммы:
- Насколько процентов количество проданной в марте обуви больше, чем в январе?
- Насколько процентов количество проданной в мае обуви меньше, чем в марте? И так далее.

6. При решении заданий ученикам рекомендуется сначала определить необходимые данные по диаграмме, а затем с их помощью ответить на вопросы.

- Определяется, что на стадионе было 20 000 болельщиков в 14:40 и 30 000 в 14:50, а по формуле расчета процентного изменения количества находится, что количество болельщиков в 14:50 будет на $\frac{30000-20000}{20000} \cdot 100\% = 50\%$ больше.
- Согласно диаграмме, поскольку в 14:20 на стадионе находится 5000 болельщиков, то количество болельщиков в 14:40 будет на $\frac{20000-5000}{5000} \cdot 100\% = 300\%$ больше.

  Примеры вопросов, которые можно задать по линейной диаграмме:
- На сколько процентов больше количество болельщиков в момент начала игры, чем в 14:40?
- На сколько процентов количество болельщиков в 14:50 больше, чем в 14:30? и так далее.

В задании присутствуют элементы популяризации спорта и социального заказа.

К сведению учителя! При решении заданий, связанных с диаграммами, рекомендуется, по возможности, устанавливать связь между двумя типами диаграмм в рамках одного контента. Кроме того, можно спросить, на какую формулу опираются расчёты, связанные с процентами. Ученикам можно предложить использовать рекомендуемые ресурсы, а также подготовить свои собственные презентации.

Решение задач

7. Перед решением задачи определяется, что на шкале пульса 1 клетка соответствует 10 ударам в минуту, а на шкале времени 1 клетка соответствует 1 минуте.

Решение задачи:

• Через 2 минуты определяется, что пульс Самира составляет 90 уд/мин.

• Поскольку на 7-й минуте пульс составляет 140 уд/мин, а на 3-й минуте — 100 ударов, на 7-й минуте пульс по сравнению с 3-й минутой увеличился на $\frac{140-100}{100} \cdot 100\% = 40\%$.

• Согласно диаграмме, через 12 минут после начала движения пульс Самира начинает стабилизироваться.

• Согласно диаграмме, на 9-й минуте пульс составляет 100, а на 10-й минуте — 70, поэтому на 10-й минуте пульс по сравнению с 9-й минутой уменьшился на $\frac{100-70}{100} \cdot 100\% = 30\%$.

• Увеличение или уменьшение пульса во время движения можно объяснить изменением кровообращения в сосудах. Для получения дополнительной информации ученикам можно порекомендовать провести исследование в интернете.

Ответ. 90; 40%; 12 мин; 30%

8. При решении задачи ученикам рекомендуется сначала определить, сколько единиц составляет одна клетка на каждой шкале (на шкале цен: 1 клетка = 20 условных единиц, на шкале лет: 1 клетка = 1 год), затем, основываясь на диаграмме, проанализировать цены на топливо в разные годы и, используя соответствующие данные, ответить на поставленные вопросы.

Решение задачи:

• Согласно диаграмме, цена на топливо в 2012 году составляла 100 условных единиц, а в 2014 году — 140 условных единиц, поэтому в 2014 году цена будет на $\frac{140-100}{100} \cdot 100\% = 40\%$ выше.

• Согласно диаграмме, цена на топливо в 2010 году составляла 40 условных единиц, а в 2023 году — 80 условных единиц, поэтому в 2010 году цена будет на $\frac{80-40}{80} \cdot 100\% = 50\%$ меньше.

• Согласно диаграмме, цена на топливо в 2012 году составляла 100 условных единиц, и в 2020 году также оставалась 100 условных единиц, то есть цена не изменилась.
Учитель предлагает ученикам составить альтернативные вопросы по диаграмме. В некоторых случаях этот процесс можно превратить в соревнование. Таким образом, можно разделить класс на 2 команды и поручить каждой из них составить вопрос и ответить на вопрос, составленной другой командой.
Ответ. 40%, 50%, не изменилось.

9. В ходе решения задачи ученикам рекомендуется определить, сколько единиц составляет 1 клетка на каждой шкале (на шкале температуры 1 клетка = 5 °C, а шкала времени разделена на конкретные месяцы), а затем, используя данные из диаграммы, ответить на вопросы.

Решение задачи:
• Согласно диаграмме, средняя температура в феврале составляла 10 °C, а в мае — 25 °C, поэтому температура в мае по сравнению с февралем увеличилась на $\frac{25-10}{10} \cdot 100\% = 150\%$.
• Согласно диаграмме, средняя температура в июне составляла 20 °C, а в мае — 25 °C, поэтому температура в июне по сравнению с маем уменьшилась на $\frac{25-20}{25} \cdot 100\% = 20\%$.
Учитель предлагает ученикам составить альтернативные вопросы вокруг линейной диаграмме. Примеры альтернативных вопросов:
• Согласно диаграмме, на сколько процентов средняя температура в апреле снизилась по сравнению с мартом?
• Согласно диаграмме, на сколько процентов средняя температура в июле повысилась по сравнению с июнем?
Ответ. 150%, 20%.

10. В процессе решения задачи будут использованы как правила нахождения числа по его проценту, так и правила нахождения процента от числа, а также будет рассмотрена связь между круговыми и линейными диаграммами.

Решение задачи:
Согласно диаграмме, определяется, что общий процент продажи пирожков во II, III, IV и V дни недели составляет: 20% + 20% + 10% + 40% = 90%.
Затем, исходя из количества и процента пирожков, проданных в первый день, вычисляется общее количество пирожков, проданных за неделю: $\frac{20 \cdot 100}{10} = 200$.

• Согласно диаграмме, во II день продано $\frac{200 \cdot 20}{100} = 40$ пирожков, в III день $\frac{200 \cdot 20}{100} = 40$ пирожков, в IV день $\frac{200 \cdot 10}{100} = 20$ пирожков, в V день $\frac{200 \cdot 40}{100} = 80$ пирожков.
• На основе круговой диаграммы строится линейная диаграмма.
• На основе линейной диаграммы формулируется вопрос. Например: «На сколько процентов количество пирожков, проданных в V день, больше, чем количество пирожков, проданных во II день?»
Ответ на вопрос: В V день продано на $\frac{80-20}{20} \cdot 100\% = 300\%$ больше пирожков, чем во II день.

Формативное оценивание.

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Читает круговую диаграмму и может связать данные с соответствующими центральными углами круга.	Рабочие листы, учебник, РТ
Рисует круг и может по данным на ней построить центральные углы.	Рабочие листы, учебник, РТ
Способен обрабатывать данные линейного графика и находить процентное изменение соответствующих величин.	Рабочие листы, учебник, РТ

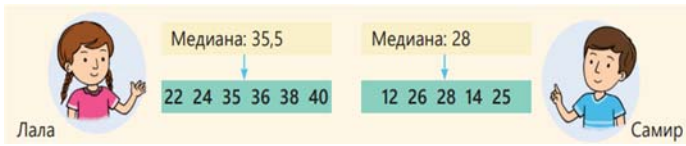
ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. С учениками повторяются понятия, данные в заключении раздела в учебнике. Термины, изученные в разделе, спрашиваются у учеников через фронтальный опрос. Для каждого понятия приводятся примеры, связанные с его содержанием и применением.

Медиана, мода, событие, невозможное событие, достоверное событие, равновозможные события, относительная частота, вероятность события, круговая диаграмма, линейная диаграмма

Решение исходной задачи. Обсуждаются информация, представленная на первой странице раздела, и задание "Попытайтесь!". Напоминаются данные учениками в начале раздела ответы и сравниваются с решением исходной задачи. Ученикам дается краткая информация об элементах статистики и даются задания, связанные с обработкой столбчатых диаграмм и выражением изменения величины в процентах. Ведутся дискуссии о вычислении вероятности события при случайном выборе.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ



1. При решении задачи как Лала, так и Самир проверяют свои знания о медиане. Поскольку количество предложенных Лале данных чётное, согласно известному правилу, медианой является среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине. То есть Лала находит медиану данных как (35 + 36): 2 = 71: 2 = 35,5. Самиру же предложены данные с нечётным количеством элементов, поэтому медианой будет число, стоящее посередине, то есть 28. Таким образом устанавливается, что оба товарища правильно определили медиану предложенных данных.

2. В ходе решения задачи закрепляются навыки и умения, связанные с поиском медианы. Так, учитель должен напомнить детям о том, что применимое правило меняется в зависимости от того, четное или нечетное количество данных, и целесообразнее предложить обсуждение полученного результата.

3. Поскольку в задаче требуется найти моду данных, ученики должны представить наиболее повторяющийся элемент как моду. В данном случае: а) наиболее повторяющаяся геометрическая фигура — это круг, следовательно, мода = круг; б) среди представленных месяцев наиболее часто повторяются **апрель** и **март,** поэтому оба месяца будут модой; в) наиболее повторяющийся цвет — **белый**, следовательно, мода выбирается как белый цвет.

4. В ходе решения задачи ученик проверяет свои знания о средней арифметической и медиане, а также оценивает не только свои навыки вычислений, но и умение проводить сравнения.

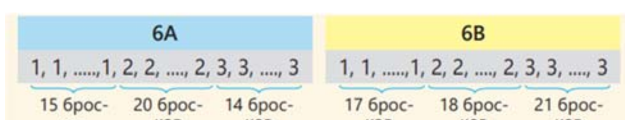
а) Цены на различные компьютеры, выставленные на продажу, упорядочены в порядке возрастания и убывания: 1350 ₼, 1350 ₼, 1420 ₼, 1450 ₼, 3600 ₼

Количество данных равно 5, поэтому медианой будет стоящая посередине цена 1420 ₼.

Затем находится среднее арифметическое этих данных: (1350 + 1350 + 1420 + 1450 + 3600) : 5 = 9170 : 5 = 1834 ₼. Поскольку значение медианы равно 1420 ₼, а среднее арифметическое — 1834 ₼, то можно сделать вывод, что, когда одно из значений существенно отличается от других, среднее арифметическое будет больше медианы.

б) Как и в предыдущем задании, цены на велосипеды в магазине располагаются в порядке возрастания: 120 ₼, 140 ₼, 160 ₼, 180 ₼, 200 ₼, 240 ₼, 3000 ₼. Отсюда 180₼ будут медианой. Затем находится среднее арифметическое: (120 ₼ + 140 ₼ + 160 ₼ + 180 ₼ + 200 ₼ + 240 ₼ + 3000 ₼) : 7 =

$= 4040$ ₼ $: 7 = 577\frac{1}{7}$ ₼.



5. В задаче рассматривается исследование данных одного типа для двух разных классов.

- В 6А классе за 15 бросков начислено 1 балл, за 20 бросков — 2 балла, а за 14 бросков — 3 балла. Это означает, что мода количества баллов, набранных классом 6А, составляет 2 балла.

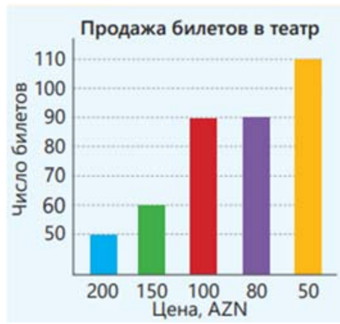
В 6В классе за 17 бросков начислено 1 балл, за 18 бросков – 2 балла, за 21 бросок – 3 балла. Это означает, что мода количества баллов, набранных классом 6В, составляет 3 балла. То есть, в классе 6А чаще всего было набрано 2 балла, а в классе 6Б – 3 баллов.

- В соревновании 6А класс набрал в сумме 15 · 1 + 20 · 2 +14 · 3 = 97 баллов, а 6В класс – 17 · 1 + 18 · 2 +21 · 3 = 116 баллов, поэтому победил класс 6В.

7. В рассмотренном задании ученик повторяет свои знания о понятии событий, учится различать благоприятные и возможные события, а также находит вероятность события.

- Когда всего 8 карт, количество возможных случаев для любого события будет равно 8.
- Поскольку только три карточки красные, число благоприятных случаев для события, что открытая карта будет красной, будет равно 3.
- Поскольку количество благоприятных случаев в событии, что открытая карта окажется красной, равно 3, а общее количество возможных случаев – 8, то вероятность наступления события согласно известной формуле будет равна $\frac{3}{8}$.

8. В ходе решения задачи осуществляется интегративная связь между двумя темами в рамках одной содержательной линии («Статистика. Вероятность») и темой «Проценты», относящейся к содержательной линии «Числа и действия». Информация, представленная на диаграмме, обрабатывается, находится вероятность наступления описываемого события и решается задача, связанная с прцентами. Проверяются приобретенные учениками знания, навыки и привычки, относящиеся ко всем трем темам.



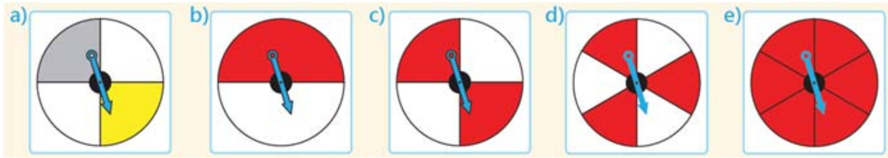
- Так как было продано наименьшее количество билетов стоимостью 200 манатов (50 штук), вероятность того, что зритель купит именно этот билет, является наименьшей (поскольку при расчёте вероятности число благоприятных ислучаев для данного билета меньше, чем для других).
- Так как было продано наибольшее количество билетов стоимостью 50 манатов (110 штук), вероятность того, что зритель купит именно этот билет, является наибольшей (поскольку при расчёте вероятности число благоприятных случаев для данного билета больше, чем для других).
- В случае события, при котором зритель покупает билет стоимостью 100 манатов, количество благоприятных случаев равно 90, а количество возможных случаев равно 200 + 150 + 100 + 80 + 50 = 580. Следовательно, вероятность этого события будет равна $\frac{90}{580} = \frac{9}{58}$.
- Поскольку было продано 110 билетов стоимостью 50 манатов и 50 билетов стоимостью 200 манатов, продажа билетов за 50 манатов превышает продажу билетов за 200 манатов на
- $\frac{110-50}{50} \cdot 100\% = 120\%$,

9. В этом задании затрагиваются все три изученных элемента статистики. Ученик выполняет поиск медианы, демонстрирует навык вычислять среднее арифметическое и показывает навык определения моды.

14 см	15 см	18 см	18 см	17 см	21 см	17 см

- Чтобы найти среднее арифметическое страусиного яйца, находится среднее арифметическое заданных размеров: (14 см + 15 см + 18 см + 18 см + 17 см + 17 см + 21 см) : 7 = $17\frac{1}{17}$ см.
- Чтобы найти медиану заданных чисел, их нужно расположить в порядке возрастания: 14 см, 15 см, 17 см, 17 см, 18 см, 18 см, 21 см. Медианой является число, находящееся в середине, то есть 17 см. Поскольку заданные числа не сильно отличаются друг от друга, их среднее арифметическое и медиана также различаются незначительно.
- По размерам страусиного яйца 14 см, 15 см, 17 см, 17 см, 18 см, 18 см, 21 см, наиболее часто встречающиеся размеры страусиного яйца — это 17 см и 18 см. То есть, за моду этих данных принимаются 17 см и 18 см.

10. В ходе решения задачи для каждого заданного события определяется число возможных случаев и число благоприятных случаев и применяется формула нахождения вероятности. И здесь ученики обрабатывают данные диаграммы и применяют к обработанным данным основные понятия и формулы теории вероятностей.



а) Спиннер разделен на 4 равные части, красной части нет. Следовательно, количество благоприятных случаев равно 0, а количество возможных случаев — 4. При вращении спиннера вероятность того, что стрелка спиннера попадёт на красную часть, равна 0, то есть это невозможное событие.

б) Спиннер разделен на 2 равные части, и одна из них красная. Вероятность того, что стрелка спиннера попадёт на красную часть, равна $\frac{1}{2}$.

в) Спиннер разделен на 4 равные части, 2 из которых красные. Вероятность того, что стрелка спиннера попадёт на красную часть, равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

г) Спиннер разделен на 6 равных частей, 3 из которых красные. Вероятность того, что стрелка спиннера попадёт на красную часть, равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

д) Спиннер разделен на 8 равных частей и все части окрашены в красный цвет. Значит, количество благоприятных случаев равно 8, а количество возможных случаев — 8. При вращении спиннера вероятность того, что его стрелка укажет на красную часть, равна $\frac{8}{8} = 1$, то есть данное событие является достоверным.

11. В ходе решения задачи информация считывается с диаграммы: в январе – 5, в феврале – 4, в марте – 7, в апреле – 3, в мае – 2, в июне – 3, в июле – 6, в августа – 8, в сентябре – 10, в октябре – 6, в ноябре – 5, в декабре – 4 человека празднуют день рождения. Получаем и анализируем эти данные о днях рождения.

- Поскольку в сентябре у 10 человек дни рождения, модой данных будет **сентябрь**.
- Сначала находится общее количество учеников: 5 + 4 + 7 + 3 + 2 + 3 + 6 + 8 + 10 + 6 + 5 + 4 = 63.

Это также количество возможных случаев в рассматриваемом событии. Поскольку в марте родилось 7 учеников, число благоприятных случаев также равно 7. Таким образом, вероятность того, что день рождения случайно выбранного ученика будет в марте, равна $\frac{7}{63} = \frac{1}{9}$.

12 В задаче содержится социальный запрос, связанный с экологическим воспитанием. Кроме того, проверяются знания и навыки учеников, связанные с обработкой данных с помощью заданной диаграммы, связью их между собой, процентами.

- Согласно диаграмме, в мае было собрано в среднем 20 кг, в июне – 50 кг, в июле – 60 кг, в августе – 40 кг пластиковых контейнеров.
- Контейнеров, собранных в июле, будет на $\frac{60-50}{50} \cdot 100\% = 20\%$ больше, чем контейнеров, собранных в июне.
- Поскольку в августе было собрано и сдано 40 кг контейнеров, а в мае — 20 кг, можно утверждать, что в августе было сдано больше контейнеров. В процентном отношении количество сданных контейнеров в августе увеличилось на $\frac{40-20}{20} \cdot 100\% = 100\%$ по сравнению с маем.

13. В ходе решения задачи определяется, какую часть окружности составляет каждый центральный угол и это выражается в процентах.

Футбол: $\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ или 25% Волейбол: $\frac{72^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ или 20%

Баскетбол: $\frac{54^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{3}{20} = 0{,}15$ или 15% Теннис: $\frac{54^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{3}{20} = 0{,}15$ или 15%

Легкая атлетика: $\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ или 25%

- Ученики в основном занимаются футболом (25%) и легкой атлетикой (25%).
- В теннис играют $\frac{60 \cdot 15}{100} = 9$ человек.
- Ученики, которые занимаются футболом и волейболом, составляют 25%+20%=45% от общего числа учеников.
- Учеников, которые занимаются легкой атлетикой и баскетболом, составляют в сумме 25%+15%=40%.
- Количество учеников, занимающихся футболом, равно $\frac{60 \cdot 25}{100} = 15$ человек, поэтому в рассматриваемом событии количество благоприятных случаев – 15, а количество возможных случаев по условию – 60. Тогда по известной формуле, вероятность того, что случайно выбранный ученик будет заниматься футболом, равна $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

S.T.E.A.M.

Эти задания способствуют дальнейшей интеграции знаний учеников в области науки, технологий, инженерии, искусства и математики, развивают их творческий потенциал, стимулируют к исследовательской деятельности, помогают развивать рациональное мышление в нестандартных ситуациях и формируют навыки создания связей между различными областями науки, инженерии и культуры.

1. В Интернете проводится поиск информации о ДНК, которая затем фиксируется в презентации. Кроме того, можно показать анимации и фильмы о ДНК с различных источников, включая платформу YouTube.

2. По условию, при сравнении ДНК двух людей сравниваются 13 различных участков. Поскольку вероятность совпадения двух участков генома двух людей составляет 0,1 · 0,1 = 0,01, то вероятность совпадения всех 13 участков будет вычисляться аналогично: 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 · 0,1 = 0,0000000000001.

3. На основе полученного результата можно объяснить, что при сравнении тестов ДНК двух людей вероятность совпадения обусловлена проверкой большего числа совпадающих участков генома.

BURAXILIŞ MƏLUMATI

Ümumi təhsil müəssisələrinin 6-cı sinifləri üçün
riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin (qrif nömrəsi: 2025-019)
metodik vəsaiti
rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Zaur İsayev**
Günay Hüseynzadə
Məhəmməd Kərimov
Aqşin Abdullayev

Redaktor: **Ayhan Kürşat Erbaş**
İxtisas redaktoru: **İsmayıl Sadıqov**
Tərcümə: **İradə Şıxəliyeva**
Bədii redaktor: **Taleh Məlikov**
Texniki redaktor: **Zeynal İsayev**
Dizayner: **Taleh Məlikov**
Rəssam: **Fərid Quliyev**
Korrektor: **Olqa Kotova**

ISBN 978-9952-8402-2-3

Hesab-nəşriyyat həcmi: 28,8. Fiziki çap vərəqi: 30,75.
Səhifə sayı 246. Formatı: 57x82 1/8. Kəsimdən sonra ölçüsü: 195×275.
Şriftin adı və ölçüsü: Calibri 10-11 pt. Ofset kağızı. Ofset çapı.
Bakı – 2025.

Nəşr məhsulunu hazırlayan:
Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutu (Bakı ş., A.Cəlilov küç., 86).