

1-я часть



МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

7



AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASININ DÖVLƏT HİMNİ

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!

Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

LaVine

1-я часть

Заур Исаев
Магомед Керимов
Гюнай Гусейнзаде
Агшин Абдуллаев

МАТЕМАТИКА

Учебник по предмету математика для 7-х классов
общеобразовательных заведений
(1-я часть)

7

©Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi



Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0International (CC BY-NC-SA 4.0)

Bu nəşr Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International lisenziyası (CC BY-NC-SA 4.0) ilə www.trims.edu.az saytında əlçatandır. Bu nəşrin məzmunundan istifadə edərkən sözügedən lisenziyanın şərtlərini qəbul etmiş olursunuz:

İstinad zamanı nəşrin müəllif(lər)inin adı göstərilməlidir. 

Nəşrdən kommersiya məqsədilə istifadə qadağandır. 

Törəmə nəşrlər orijinal nəşrin lisenziya şərtləri ilə yayılmalıdır. 

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi trm@arti.edu.az və derslik@edu.gov.az elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur.
Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

ПОЗНАКОМИМСЯ С УЧЕБНИКОМ

Предварительная проверка

Повторение знаний и навыков, изученных в младших классах, связанных с материалами, предназначенными для изучения в главе. Можно использовать для диагностического оценивания.

Предварительная проверка

- Определите подыскание числа в пустых клетках.
а) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ б) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ в) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ г) $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$
- Определите данные числа до указанного разряда.
а) 235 б) 12345 в) 67890 г) 123456789
- Определите подыскание цифру в пустую клетку.
а) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ б) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ в) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ г) $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$
- Сравните.
а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{6}{8}$ г) $\frac{4}{5}$ и $\frac{8}{10}$
- Упорядочьте в порядке возрастания.
а) 0,64 б) 0,48 в) 0,15 г) 0,6 в) 0,64 б) 0,48 в) 0,15 г) 0,6
- Упорядочьте в порядке убывания.
а) 0,6 б) 0,48 в) 0,15 г) 0,64 б) 0,48 в) 0,15 г) 0,6
- Вычислите значение выражений.
а) $2,4 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ б) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : 1,3$ в) $(\frac{1}{2} - 0,6) \cdot (4,2 + \frac{1}{3})$ г) $3,8 - \frac{4}{5}$
- Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных.
а) $2x + 6$ при $x = -3$ б) $7 - 3x$ при $x = -4$ в) $4x - 8$ при $x = -2$ г) $9 - x$ при $x = -2$
- Найдите.
а) $\frac{1}{2}$ части от 4,5 см б) массу муки, $\frac{2}{3}$ части которой равны 1,8 кг в) длину стороны квадрата, площадь которого равна $1\frac{1}{2}$ м²
- Решите уравнение.
а) $2x + 1,4 = 3,2$ б) $0,3 \cdot (6x + 7) = -15$ в) $4x + 17 = 7x - 2,5$
- В 12:00 температура воздуха была 3°C. Начав с этого времени к вечеру температура стала понижаться на 2°C каждый час.
а) Сколько градусов составила температура в 14:00 б) Сколько часов температура была 5°C
- Как гибридного автомобиля расходует 50 л. Он расходует 4,8 л топлива на каждые 100 км пути. Какой расход топлива можно считать, если бак заполнен на $\frac{3}{5}$ его объема?

В этой главе изучите

Знания и навыки, которые будут получены на основе тем в главе.

Попытайтесь!

В начале каждой главы дается задача на применение основных идей из этой главы. Не обязательно решать эту задачу. Тем не менее организуется обсуждение стратегии решения задачи и необходимых знаний. Решение этой задачи дано в конце главы.

Первая страница главы

Формируется первоначальное представление о темах, которые будут изучены в главе, и их применении.

Рациональные числа

Для точного выражения значений величин и результатов вычислений используются рациональные числа. Например, при банковских операциях расчеты проводятся с использованием рациональных чисел. В инженерии и инженерных расчетах, в том же при обработке данных с использованием статистических методов рациональные числа позволяют получать более точные результаты.

В этой главе вы узнаете:

- выражать значения величин с использованием рациональных чисел;
- записывать рациональные числа в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби;
- преобразовывать бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь;
- сравнивать и упорядочивать рациональные числа;
- выполнять арифметические операции над рациональными числами;
- использовать рациональные числа при решении задач.

Помните!

В таблице представлена информация об изменении цены 1 грамма золота за несколько лет.

Год	Изменение
2017	1,2
2018	1,2
2019	1,2
2020	1,2
2021	1,2

В 2022 году цена золота снизилась на 1,2 доллара. Какова средняя арифметическая величина изменения цены золота с 2017 по 2022 год?

На сколько процентов изменилась цена 10-граммового золота в 2021 году по сравнению с 2018 годом?

Исследование-обсуждение

Предлагаются задания и вопросы, основанные на предыдущих знаниях. Отвечая на вопросы, вспоминаются предварительные знания по теме. Целью является подготовка к этапам обучения.

Ключевые слова

Новые понятия и слова, которые будут изучены в теме.

Изучение

Объяснение новой темы и понятий.

1.1. Рациональные числа

Исследование-обсуждение

Библиотека и магазин, музей и школа находятся на одинаковом расстоянии от остановки вдоль прямой линии.

а) Как по координате одного из этих объектов найти координату другого?

б) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

в) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

г) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

д) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

е) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

ж) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

з) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

и) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

к) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

л) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

м) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

н) Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?

Математический калейдоскоп

Для повышения интереса к математике в конце каждого раздела предлагаются углубленные и нестандартные задания. Они предназначены для закрепления математических знаний и установления связи с ранее изученными темами.

Задания

Задания на основе примера для самостоятельного решения и закрепления новых знаний.

Подумай!

Вопрос или задание для общего обсуждения с целью расширения новых знаний.

Ложные представления, которые могут возникнуть у учеников по поводу нового материала в теме. Сначала выполняются индивидуально, затем обсуждаются со всем классом.

Математические
правила, которые имеют
особое значение.

Задачи на применение
и закрепление новых
знаний.

Важные знания или навыки по теме.

Темы, понятия и математические термины, изученные в главе, представлены в обобщенном виде через карту понятий.

Интересные факты из истории математики, касающиеся темы.

Обсуждается решение задачи, которая была дана на первой странице главы в разделе "Попытайтесь".

В конце каждой главы дается междисциплинарный проект для выполнения в небольших группах или индивидуально.

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 \quad 5^3 \cdot 5^1 = (5+5) = 5^4$$

ОБРАЗЦЫ	Решение	Объяснение
$25^{\circ} \cdot 5^{\circ} = 125^{\circ}$ $125^{\circ} : 5^{\circ} = 25^{\circ}$	$\frac{25^{\circ} \cdot 5^{\circ}}{125^{\circ} : 5^{\circ}} = \frac{5^{\circ} \cdot 5^{\circ}}{5^{\circ}} = \frac{5^{\circ} \cdot 5^{\circ}}{5^{\circ}} = 5^{\circ} \cdot 1 = 5^{\circ}$	Все степени записываются с основанием 5. Используя свойства степеней, выражение упрощается, и находится его значение.
а) $4^1 \cdot 2^4 = 2^8$ б) $81 \cdot 3^4 = 3^8$ в) $25 \cdot 5^2 = 5^4$	г) $\frac{(-7)^{-4}}{(-7)^{-7}} = (-7)^3$ д) $\frac{9^3}{27^3} = 3^0$ е) $16 \cdot 2^{-2} = 2^2$	
2. Решите уравнения.		
а) $x \cdot 2^3 = 2^5$ б) $x \cdot 3^4 = 3^3$ в) $5^3 \cdot x = 5^4$	г) $x \cdot 5^2 = 5^5$ д) $x \cdot 9^2 = 9^{10}$	ж) $5^2 \cdot 6^2 = x \cdot 6^3$ з) $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

[illegible]

Переместительное свойство	$a + b = b + a$ $4,5 + (-1,6) = -1,6 + 4,5$
Сочетательное свойство	$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ $2,7 + (-1,7) + 1,2 = (2,7 + (-1,7)) + 1,2 = 2,7 + ((-1,7) + 1,2)$

Решение	Используя переместительное и сочетательное свойства сложения, а также то, что сумма противоположных чисел равна нулю, находится сумма.
$1,7 + (-5,4) + 3,1 + (-1,7) =$ $= 1,7 + (-1,7) + (-5,4) + 3,1 =$ $= -5,4 + 3,1 = (-5,4 + 3,1) = -2,3$	
$8,7 + (-8,7) + 1,5 + (-4) =$ $-5,7 + 1,9 + 5,2 + (-3,2)$	$7,6 + (-0,8) + (-8,2) + 0,4 = -2,1 + (-1,7) + 5,3 + (-0,4)$ $3,4 + (-0,8) + 8,3 + 1,2 = 4,7 + 3,8 + (-3,2) + 2,5 + (-1,9)$

- Разность произвольных рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно найти, приведя их к общему знаменателю по правилу вычитания обыкновенных дробей: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$. Например, $\frac{3}{11} - \frac{7}{11} = \frac{3-7}{11} = \frac{-4}{11} = -\frac{4}{11}$. Можно найти, приведя их к общему знаменателю по правилу вычитания обыкновенных дробей: $\frac{3}{11} - \frac{7}{11} = \frac{3 \cdot 1 - 7 \cdot 1}{11 \cdot 1} = \frac{3-7}{11} = -\frac{4}{11}$.
- Разность произвольных рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно найти, приведя их к общему знаменателю по правилу вычитания обыкновенных дробей: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$. Например, $\frac{3}{11} - \frac{7}{11} = \frac{3-7}{11} = -\frac{4}{11}$. Можно найти, приведя их к общему знаменателю по правилу вычитания обыкновенных дробей: $\frac{3}{11} - \frac{7}{11} = \frac{3 \cdot 1 - 7 \cdot 1}{11 \cdot 1} = \frac{3-7}{11} = -\frac{4}{11}$.

а) $\frac{5}{9} - \frac{5}{7}$ б) $\frac{2}{13} - \frac{7}{42}$ в) $\frac{6}{17} - \frac{1}{17}$ г) $\frac{3}{14} - \frac{11}{14}$ д) $\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12}$

6) $\frac{2}{9} - \frac{6}{7}$ ж) $\frac{-2}{13} - \frac{-5}{42}$ з) $\frac{6}{17} - \frac{1}{17}$ и) $\frac{3}{14} - \frac{11}{14}$ й) $\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12}$

Згадай!

$\frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + (-\frac{2}{3}) = \frac{1}{6} + (-\frac{4}{6}) = \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1+(-4)}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

$7,2 - 9,5 = 7,2 + (-9,5) = -(9,5 - 7,2) = -2,3$

Иногда для удобства вычисления, прибавляя к уменьшаемому противоположное слагаемое, можно записать:

$\frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + (-\frac{2}{3})$

х) $\frac{5}{8} - (-\frac{1}{4}) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5+2}{8} = \frac{7}{8}$

а) $3,9 - (-0,5) = 3,9 + 0,5 = 4,4$

ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

7. Вспомогательные задачи.

2. Запишите дроби, разные данными числами, в соответствии с условиями.

а) Дроби с знаменателем 12: $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{12}$

б) Дроби с знаменателем 20: $\frac{2}{20}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{19}{20}$

3. Вставьте подходящие целые числа в пустые клетки.

а) $-0,3 < \frac{\square}{10} < -0,2$

б) $\frac{1}{4} < \frac{\square}{2} < \frac{1}{2}$

4. Упорядочите числа в порядке возрастания. Прочитайте слово по буквам, соответствующее каждому числу.

Задачи и примеры для проверки и закрепления знаний, изученных в главе.

[illegible]

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1	Рациональные числа	7		Раздел 4	Формулы сокращенного умножения	81
	Предварительная проверка	8			Предварительная проверка	82
1.1.	Рациональные числа	9		4.1.	Квадрат суммы и разности	83
1.2.	Представление рационального числа в виде десятичной дроби	13		4.2.	Произведение суммы и разности двух чисел	87
1.3.	Сравнение и упорядочивание	17		4.3.	Куб суммы и разности. Сумма кубов и разность кубов	90
	Задачи и примеры	21			Задачи и примеры	94
1.4.	Сложение и вычитание рациональных чисел	22		4.4.	Разложение многочлена на множители	96
1.5.	Умножение и деление рациональных чисел	26		4.5.	Различные способы разложения многочленов на множители	99
1.6.	Действия над рациональными числами	29			Заключение	101
	Заключение	33			Обобщающие задания	102
	Обобщающие задания	34			STEAM. "Аквариум АкваДом"	104
	STEAM. "Океанология"	36				
Раздел 2	Степень с натуральным показателем и ее свойства	37		Раздел 5	Четырехугольники	105
	Предварительная проверка	38			Предварительная проверка	106
2.1.	Степень с натуральным показателем	39		5.1.	Начальные понятия геометрии	107
2.2.	Умножение и деление степеней	42		5.2.	Четырехугольники	110
2.3.	Степень произведения и дроби	47		5.3.	Параллелограмм	114
2.4.	Вычисление сложного процента	50		5.4.	Виды параллелограммов. Прямоугольник, ромб, квадрат	118
	Заключение	53		5.5.	Свойства средней линии и медиан треугольника	122
	Обобщающие задания	54		5.6.	Трапеция	126
	STEAM. "Музыка и математика: Камертон"	56			Заключение	129
					Обобщающие задания	130
					STEAM. "Арочные конструкции в архитектуре"	132
Раздел 3	Одночлены и многочлены	57			Обобщающие задания за первое полугодие	133
	Предварительная проверка	58			Словарь математических терминов	137
3.1.	Одночлены	59			Ответы	139
3.2.	Многочлены	63				
3.3.	Сложение и вычитание многочленов	66				
	Задачи и примеры	69				
3.4.	Умножение одночлена на многочлен	70				
3.5.	Умножение многочлена на многочлен	73				
	Заключение	77				
	Обобщающие задания	78				
	STEAM. "Возобновляемые источники энергии"	80				

Раздел 1

В этой главе вы научитесь:

- выражать значения величины с использованием рациональных чисел;
- записывать рациональные числа в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби;
- преобразовывать бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь;
- сравнивать и упорядочивать рациональные числа;
- выполнять арифметические операции над рациональными числами;
- использовать рациональные числа при решении задач.

Попытайтесь!

В таблице представлена информация об изменении цены 1 грамма золота за несколько лет.

- Какова средняя арифметическая величина изменения цены золота с 2017 по 2021 год?
- В 2022 году цена золота снизилась на 1,2 маната. Какова средняя арифметическая величина изменения цены золота с 2017 по 2022 год?
- На сколько манатов изменилась цена $10\frac{1}{2}$ граммов золота в 2021 году по сравнению с 2018 годом?



Года	Изменение (м)
2017	+8
2018	-2
2019	+5,5
2020	+1,5
2021	-3

Рациональные числа

Для точного выражения значений величин и результатов вычислений используются рациональные числа. Например, при банковских операциях расчеты проводятся с использованием рациональных чисел.

В измерениях и инженерных работах, в решении финансовых и экономических задач, а также при обработке данных с использованием статистических методов рациональные числа позволяют получать более точные результаты.



Все операции на мировых биржах осуществляются с использованием рациональных чисел.

Предварительная проверка

- 1 Определите подходящие числа в пустых клетках.

а) $\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$

б) $\frac{32}{44} = \frac{8}{\square} = \frac{\square}{33}$

в) $\frac{\square}{7} = \frac{24}{42} = \frac{8}{\square}$

г) $\frac{33}{\square} = \frac{3}{4} = \frac{\square}{12}$

- 2 Округлите данные числа до указанного разряда.

3,273

0,165

12,996

7,534

8,785

0,1999

- 3 Определите подходящую цифру в пустую клетку.

а) $\frac{18}{5} = 3,\square$

б) $\frac{23}{4} = 5,\square5$

в) $\frac{3}{8} = 0,3\square5$

г) $0,6 = \frac{1\square}{20}$

- 4 Сравните.

а) $\frac{8}{15}$ и $\frac{3}{5}$

б) 0,548 и 0,55

в) $\frac{11}{25}$ и 0,47

г) $\frac{27}{40}$ и 0,72

- 5 Упорядочьте.

в порядке возрастания

а) 0,64 $\frac{3}{4}$ 0,48 $\frac{4}{5}$ б) -1 5 0 -6 8

в порядке убывания

а) 0,6 $\frac{2}{3}$ 0,4 $\frac{5}{6}$ б) 3 -9 0 7 -4

- 6 Вычислите значение выражения.

а) $2,4 \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)$

б) $\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{6}\right) : 1,3$

в) $\left(\frac{17}{20} - 0,6\right) \cdot \left(4,2 + \frac{3}{5}\right)$

г) $\frac{3,8 - \frac{4}{5}}{1,5}$

- 7 Вычислите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $2x + 6$ при $x = -3; -7; 1,5$

б) $7 - 3x$ при $x = -4; 5; \frac{2}{3}$

в) $4a - b$ при $a = -2, b = -9$

- 8 Найдите.

а) $\frac{4}{9}$ части от 4,5 см

в) массу муки, $\frac{6}{7}$ части которой равны 1,8 кг

б) 0,3 части от 5,6 кг

г) ёмкость сосуда, 0,8 части которой равны $1\frac{4}{5}$ л

- 9 Решите уравнение.

а) $2x + 1,4 = 3\frac{1}{2} \cdot 1,2$

б) $3 \cdot (6x + 7) = -15$

в) $4x + 17 = 7x - 25$

- 10 В 12:00 температура воздуха была 3°C. Начиная с этого времени к вечеру температура стала понижаться на 2°C каждый час.

- Сколько градусов составляла температура в 14:00?
- Во сколько часов температура стала -5°C?



- 11 Бак гибридного автомобиля вмещает 50 л. Он расходует 4,8 л топлива на каждые 100 км пути. Какое расстояние можно проехать, если бак заполнен на $\frac{3}{25}$ его объема?

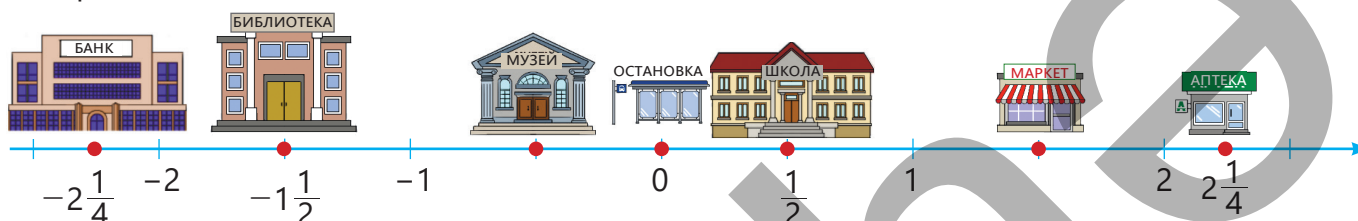


1.1. Рациональные числа

Исследование-обсуждение

Библиотека и магазин, музей и школа находятся на одинаковом расстоянии от остановки вдоль прямой линии.

- Как по координате одного из этих объектов найти координату другого?
- Как можно объяснить, что банк и аптека находятся на одинаковом расстоянии от остановки?



Ключевые слова

- отрицательные числа
- рациональные числа

Изучение Положительные и отрицательные числа

Числа, большие нуля, включая обыкновенные дроби, являются положительными числами.

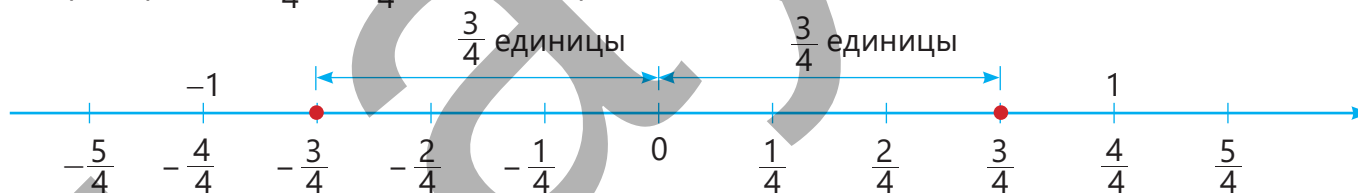
Обычно положительные числа записывают без знака, т.е. $+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; $+\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Если перед дробью поставить знак “-”, то получится новое число. Это число называется **отрицательной дробью**.

Например: $-\frac{3}{4}$. Читается так: минус три четвертых.

- Противоположные числа расположены по разные стороны от нуля на числовой оси на одинаковом расстоянии. Как и целые числа, противоположные дробные числа также отличаются знаком.

Например, числа $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{4}$ являются противоположными числами.



Подумай!

Как, используя числовую ось, можно объяснить то, что $-(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$?

Задания

- 1 Из заданных чисел определите: а) положительные; б) отрицательные числа.

$$-\frac{1}{4}$$

$$+\frac{5}{3}$$

$$-\frac{7}{8}$$

$$\frac{9}{2}$$

$$-0,3$$

$$-(-\frac{5}{11})$$

$$-0,7$$

$$-(-1,2)$$

- 2 В пустые клетки впишите подходящий знак: “+” или “-”.

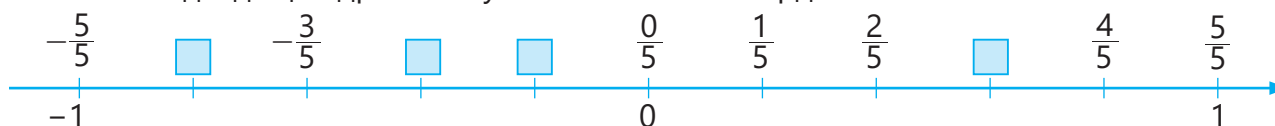
$$-(+\frac{3}{7}) = \square \frac{3}{7}$$

$$-(-3,2) = \square 3,2$$

$$-(-(-1,5)) = \square 1,5$$

$$-(\square \frac{6}{5}) = \frac{6}{5}$$

- 3 Впишите подходящие дроби в пустые клетки на координатной оси.



Изучение Рациональные числа

Числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{a}{b}$, называются **рациональными числами**. Здесь a, b – целые числа и $b \neq 0$.

Например, $\frac{2}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{4}{-7}, \frac{-2}{-9}$ рациональные числа.

Если перед дробью стоит знак "-", его можно записать в числителе или знаменателе дроби.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Можно показать, что десятичные дроби с конечным числом цифр после запятой являются рациональными числами.

$$0,23 = \frac{23}{100}; \quad -1,9 = -1\frac{9}{10} = -\frac{19}{10} = \frac{-19}{10} = \frac{19}{-10}$$

• Если целые числа a и b имеют одинаковый знак, то $\frac{a}{b}$ положительное число: $\frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}$

• Если целые числа a и b имеют разные знаки, то $\frac{a}{b}$ отрицательное число:

$$\frac{-2}{9} = -\frac{2}{9} \quad \frac{2}{-9} = -\frac{2}{9}$$

• Согласно основному свойству дроби, любое рациональное число можно записать в виде несократимой дроби с натуральным числом в знаменателе.

$$\frac{-20}{28} = -\frac{\cancel{4} \cdot (-5)}{\cancel{4} \cdot 7} = -\frac{5}{7} = \frac{-5}{7} \quad \frac{-12}{-18} = \frac{(-\cancel{6}) \cdot 2}{(-\cancel{6}) \cdot 3} = \frac{2}{3}$$



Подумай!

Как можно объяснить, что каждое целое число является рациональным?

- 4 Определите, являются данные рациональные числа положительными или отрицательными, и запишите противоположные им числа.

$$\frac{2}{-5}$$

$$\frac{-1}{-3}$$

$$\frac{-3}{4}$$

$$\frac{-5}{-12}$$

$$\frac{-7}{4}$$

$$\frac{-4}{-15}$$

- 5 Запишите данные рациональные числа в виде несократимых дробей с натуральным числом в знаменателе.

ОБРАЗЕЦ а) $\frac{-30}{-45}$ б) $-0,28$

Решение

$$\text{а) } \frac{-30}{-45} = \frac{2 \cdot (-15)}{3 \cdot (-15)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{б) } -0,28 = \frac{-28}{100} = \frac{\cancel{4} \cdot (-7)}{\cancel{4} \cdot 25} = \frac{-7}{25}$$

Объяснение

Числитель и знаменатель дроби делятся на общий множитель (-15).

Десятичная дробь записывается в виде $\frac{a}{b}$. Числитель и знаменатель делятся на общий делитель (4).

$$\frac{-24}{-32}$$

$$\frac{34}{-51}$$

$$\frac{-50}{-75}$$

$$\frac{28}{-21}$$

$$-0,8$$

$$0,75$$

$$-2,5$$

$$-1,25$$

- 6 Впишите подходящие целые числа в пустые клетки.

$$\frac{-14}{16} = \frac{\square}{8} = -\frac{21}{\square}$$

$$\frac{42}{-28} = \frac{\square}{14} = -\frac{3}{\square}$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{\square}{6} = \frac{16}{\square}$$

$$-\frac{27}{-36} = -\frac{3}{\square} = \frac{\square}{8}$$

- 7 Запишите дроби, равные данным числам.

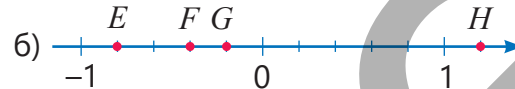
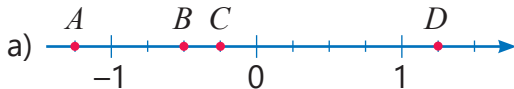
а) Знаменатель которой 18

$$\frac{1}{9} \quad \frac{1}{-6} \quad \frac{-5}{-3} \quad -4$$

б) Знаменатель которой 24

$$\frac{5}{6} \quad \frac{7}{-4} \quad \frac{-17}{-12} \quad -3$$

- 8 Определите координаты точек, отмеченных на координатной прямой.



- 9 На листе в клетку начертите координатную прямую, считая 6 клеток за 1 единицу, и отметьте на ней данные точки.

$$A\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$B\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{6}\right)$$

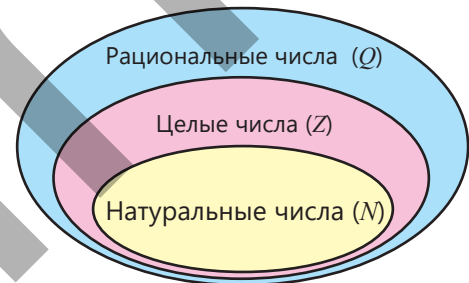
$$D\left(-1\frac{1}{2}\right)$$

$$E\left(-\frac{5}{6}\right)$$



Запомни!

Множество рациональных чисел обозначается буквой Q . Множество натуральных чисел (N) является подмножеством множества целых чисел (Z), а множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел (Q):

$$N \subset Z \subset Q.$$


- 10 Определите, верны ли следующие утверждения, обосновав свой ответ примерами.

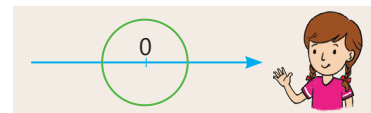
- Каждое натуральное число является рациональным числом.
- Каждое целое число является рациональным.
- Каждое рациональное число является целым.
- Каждое целое число является натуральным.

- 11 Впишите подходящий знак $\in$ или $\notin$ в пустые клетки.

$$5 \square N \quad 5,5 \square N \quad -5 \square Q \quad -2,3 \square Z \quad 0 \square N \quad \frac{1}{5} \square Q \quad -\frac{1}{2} \square Q \quad \frac{1}{5} \square Z \quad -5 \square N$$

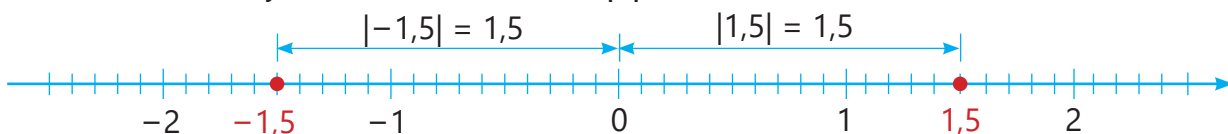
- 12 Сабина нарисовала окружность радиуса r с центром в начале координат. В каких точках, соответствующих координатам, эта окружность пересекает ось координат?

$$r \text{ и } 2r \quad 0 \text{ и } r \quad -r \text{ и } r \quad -r \text{ и } 2r$$



Изучение Модуль рационального числа

Расстояние от точки, соответствующей рациональному числу на координатной прямой, до начала координат называется **абсолютным значением или модулем этого числа**. Абсолютное значение или модуль a записывается как $|a|$.



▶ Поскольку точки, соответствующие противоположным числам, расположены по разные стороны от 0 и на одинаковом расстоянии, их модули равны: $|a| = |-a|$, $a \in \mathbb{Q}$

Например, $|3,2| = |-3,2|$, $\left|\frac{13}{4}\right| = \left|-\frac{13}{4}\right|$



Запомни!

- Модуль числа не может быть отрицательным.
- Модуль нуля равен нулю: $|0| = 0$
- Модуль положительного числа равен самому числу: $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$
- Модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу: $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

13 Найдите модуль заданных чисел.

$\frac{2}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $-\frac{8}{15}$ $+\frac{7}{9}$ $\frac{14}{-5}$ $-\frac{1}{-6}$ $-7,4$ $3,8$ $-0,6$

14 Найдите.

- а) Числа, модуль которых равен 4,2 б) Числа, модуль которых равен $\frac{4}{7}$

15 Сравните.

а) $|-2,3|$ и $|1,8|$ б) $|-5,4|$ и $|-6,7|$ в) $|-0,8|$ и $|0|$ г) $\left|-\frac{3}{4}\right|$ и $\left|\frac{4}{5}\right|$ д) $|-0,01|$ и $|-0,1|$

16 Вычислите.

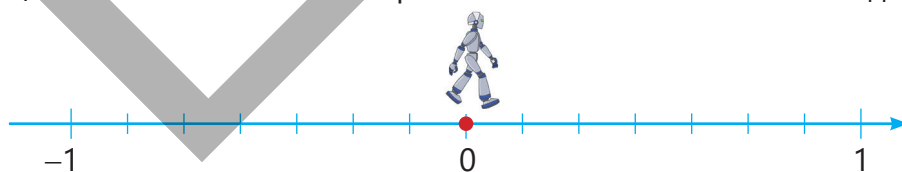
а) $\left|-\frac{1}{6}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right|$ б) $\left|-\frac{7}{8}\right| - \left|\frac{7}{8}\right|$ в) $|-1,2| \cdot |-0,5|$ г) $\left|\frac{7}{16}\right| : \left|-\frac{21}{24}\right|$

Решение задач

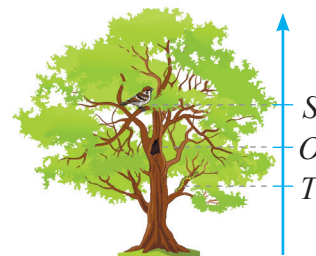
17 Ширину и высоту прямоугольной двери измерили одинаковой палкой. Ширина двери была равна 3 палкам, а высота 7 палкам. Если ширина этой двери 1 м, какова ее высота?

18 Каждый шаг робота равен $\frac{1}{7}$ единицы. Он находится в начальной точке 0.

- а) В какой точке окажется робот после выполнения команды "2 шага вперед"?
б) В какой точке окажется робот после выполнения команды "5 шагов назад"?



19 Дупло на стволе дерева расположено в точке, соответствующей началу координат O на вертикальной оси. Воробей находится в точке, соответствующей $S(1,7)$, а гусеница – в точке, соответствующей $T\left(-1\frac{3}{5}\right)$. Кто находится ближе к дуплу: воробей или гусеница?



1.2. Представление рационального числа в виде десятичной дроби



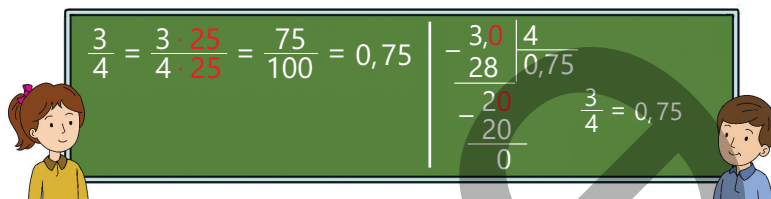
Ключевые слова

- конечная десятичная дробь
- бесконечная периодическая десятичная дробь

Исследование-обсуждение

Лала и Самир записали дробь $\frac{3}{4}$ в виде десятичной дроби.

- Объясните их способы решения.
- Можно ли записать дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной дроби с помощью этих способов? Обоснуйте свое мнение.



Изучение Конечные десятичные дроби

Десятичная дробь с конечным числом цифр после запятой называется **конечной десятичной дробью**. Если знаменатель несократимой дроби не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эту дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби. Например, дробь $\frac{3}{20}$ можно записать в виде конечной десятичной дроби так:

I способ. Преобразование знаменателя в степень числа 10

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15$$

II способ. Деление числителя дроби на знаменатель

$$\frac{3}{20} = 3 : 20 = 0,15$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 20} \\ - 0 \\ \hline 30 \\ - 20 \\ \hline 100 \\ - 100 \\ \hline 0 \end{array}$$



Подумай!

Если знаменатель несократимой дроби имеет простые делители, отличные от 2 и 5, можно ли записать знаменатель этой дроби в виде степени числа 10?

Задания

- 1 Запишите данные дроби в виде десятичных дробей двумя способами.

а) $\frac{21}{25}$

б) $\frac{22}{20}$

в) $\frac{68}{40}$

г) $-\frac{24}{80}$

д) $\frac{9}{40}$

е) $-\frac{34}{200}$

ж) $1\frac{7}{8}$

- 2 Определите, возможно ли записать данные дроби в виде конечных десятичных дробей. Если возможно, запишите дробь в виде конечной десятичной дроби.

ОБРАЗЕЦ а) $\frac{5}{6}$ б) $\frac{9}{12}$

Решение

а) невозможно

б) возможно

$$\frac{9}{12} = \frac{3 \cdot \cancel{3}}{4 \cdot \cancel{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Объяснение

Дробь несократимая. Поскольку один из простых делителей знаменателя равен 3, то это число невозможно записать в виде степени числа 10.

Простой делитель знаменателя дроби, полученной после сокращения, равен 2. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0,75$

$\frac{3}{25}$

$\frac{7}{12}$

$\frac{17}{20}$

$\frac{3}{11}$

$\frac{6}{15}$

$\frac{21}{35}$

$\frac{12}{45}$

Изучение Бесконечные периодические десятичные дроби

Если знаменатель несократимой дроби имеет простые делители, отличных от 2 и 5, то цифра или группа цифр, полученных в частном при делении числителя на знаменатель, повторяется бесконечно. Деление продолжается до тех пор, пока не будет определена повторяющаяся цифра или группа цифр. Число, полученное в частном, называют **бесконечной периодической десятичной дробью**, а повторяющуюся цифру или группу цифр называют **периодом дроби**.

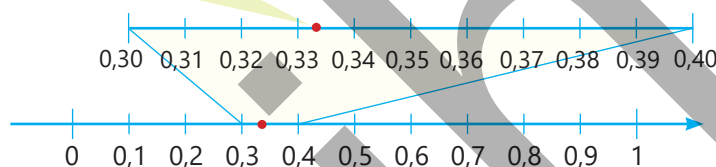
$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 3} \\ 0 \\ \underline{10} \\ 9 \\ \underline{10} \\ 9 \\ \underline{10} \\ 9 \\ \dots \end{array}$$

В числе 0,333... точки в конце означают, что десятичная дробь не конечная. Поскольку число 3 повторяется бесконечно, десятичная дробь в краткой форме записывается как 0,(3) и читается как "ноль целых и три в периоде".



$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$$

Период дроби: 3



• В периодической десятичной дроби период может начинаться не сразу, а через несколько цифр после запятой. Например: $\frac{11}{90} = 0,1(2)$

Число 0,122... записывается как 0,1(2). Читается как "ноль целых одна десятая и два в периоде".

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 90} \\ 0 \\ \underline{110} \\ 90 \\ \underline{200} \\ 180 \\ \underline{200} \\ 180 \\ \underline{200} \\ 180 \\ \dots \end{array}$$

$$\frac{11}{90} = 0,122222... = 0,1(2)$$

Период дроби: 2



3 Найдите период бесконечной периодической десятичной дроби и запишите дробь в краткой форме.

а) 0,777...

б) 0,5222...

в) 2,888...

г) -1,363636...

д) 0,2545454...

4 Запишите бесконечную периодическую десятичную дробь, указав 6 цифр после запятой.

а) 0,(5)

б) 0,3(7)

в) 3,(42)

г) 1,3(82)

д) -0,25(3)

5 Дополните таблицу.

Бесконечная периодическая десятичная дробь	Краткая запись	Целая часть	Цифры до периода	Период	Читается
0,444...	0,(4)	0	нет	4	Ноль целых и четыре в периоде
2,777...					
1,282828...					
0,3666...					
5,12333...					

- 6 Запишите дробь в виде бесконечной периодической десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель.

а) $\frac{2}{9}$

б) $\frac{7}{9}$

в) $-\frac{5}{18}$

г) $\frac{23}{45}$

д) $\frac{40}{3}$

е) $\frac{26}{99}$

ж) $\frac{80}{111}$

- 7 Переведите смешанное число в десятичную дробь.

ОБРАЗЕЦ $4\frac{2}{11}$

Решение	Объяснение
$4\frac{2}{11} = 4 + \frac{2}{11} = 4 + 0,(18) = 4,(18)$	Смешанное число записывается в виде суммы целой и дробной частей. Дробная часть записывается в виде десятичной дроби и складывается с целой частью.

а) $4\frac{7}{16}$

б) $2\frac{17}{90}$

в) $3\frac{11}{18}$

г) $2\frac{5}{11}$

д) $16\frac{13}{45}$

е) $125\frac{1}{9}$



Запомни!

Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Любое целое число или конечную десятичную дробь можно также рассматривать как бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 0.

$5 = 5,0 = 5,000... = 5,(0)$

$2,43 = 2,430 = 2,4300... = 2,43(0)$

- 8 Сравните.

ОБРАЗЕЦ $1,2$ и $1,(2)$

Решение	Объяснение
$1,2 < 1,(2)$	У чисел $1,2$ и $1,(2)$ цифры в разрядах единиц и десятых равны. Сравниваются цифры в разряде сотых.  $1,2 = 1,2000...$ $1,(2) = 1,2222...$ На числовой оси число $1,2$ находится слева от числа $1,(2)$.

а) $0,333...$ и $0,34$

б) $4,2111...$ и $4,21$

в) $6,(7)$ и $6,(72)$

г) $0,4(6)$ и $0,(47)$

- 9 Запишите три бесконечные периодические десятичные дроби, расположенные между данными числами.

а) $3,5$ и $4,5$

б) 2 и 3

в) $0,3$ и $0,4$

г) $0,32$ и $0,33$

д) $2,(1)$ и $2,2(3)$

- 10 Определите верные неравенства.

$0,1444... > 0,14$

$2,2121... < 2,21$

$1,66 < 1,(6) < 1,67$

$4,18 < 4,(18) < 4,(1)$

- 11 Запишите данные рациональные числа в виде десятичных дробей.

- Каким из указанных чисел соответствуют точки, отмеченные на оси координат?

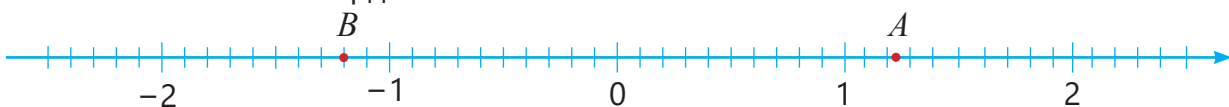
$-\frac{5}{3}$

$\frac{8}{9}$

$-\frac{6}{5}$

$\frac{11}{9}$

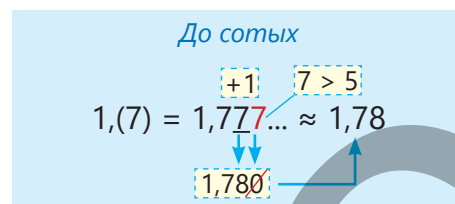
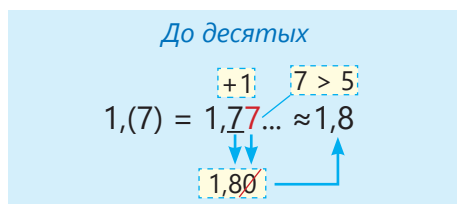
$\frac{4}{3}$



- Определите расположение точек, соответствующих остальным числам, на оси координат.

Изучение Округление бесконечных периодических десятичных дробей

Для округления бесконечных периодических десятичных дробей до требуемого разряда используется общее правило. Например, если число $1,(7)$ округлить до десятых, получится число $1,8$, а если округлить до сотых, то получится $1,78$.



- 12 Округлите данные числа до указанного разряда.

2,7575... 21,666... 0,4848... 18,2121... 0,6111... 1,68383... 104,6222...

- 13 Округлите десятичные дроби до указанного разряда.

а) до десятых: 0,(3) 2,1(3) 3,(5) 3,0(5) 8,2(1) 19,(4)

б) до сотых: 0,(3) 4,(07) 6,(8) 12,(7) 2,6(2) 1,(03)

в) до тысячных: 5,(2) 3,2(4) 4,(1) 1,9(6) 20,(5) 9,(728)

- 14 Запишите в виде десятичной дроби и округлите до сотых.

а) $\frac{7}{90}$ б) $2\frac{17}{90}$ в) $-3\frac{11}{18}$ г) $-\frac{7}{36}$ д) $2\frac{10}{45}$ е) $-5\frac{8}{9}$



- 15 С помощью калькулятора разделите числитель дроби на знаменатель. Определите период дроби. Запишите дробь в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

а) $\frac{13}{90}$ б) $\frac{25}{11}$ в) $-\frac{19}{45}$ г) $-\frac{29}{18}$ д) $\frac{40}{9}$ е) $\frac{5}{111}$ ж) $-\frac{232}{135}$

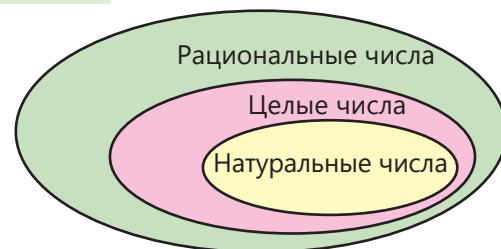
Решение задач

- 16 Из 24 учеников класса в школьной олимпиаде по математике приняли участие 14 учеников. Какой процент учеников принял участие в школьной олимпиаде?

58,(3)% 58,3% 5,83% 58,(83)%

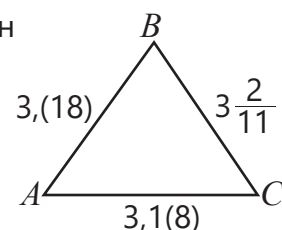
- 17 Определите, каким частям диаграммы соответствуют данные числа.

-2,4 57 -1,(3) 2,0(5)
-14 $-\frac{7}{12}$ -3 100



- 18 На рисунке изображен равнобедренный треугольник, длины сторон которого указаны в сантиметрах.

- Какие стороны этого треугольника равны?
- Равные стороны треугольника длиннее или короче третьей стороны?
- Какой угол больше: A или B ?



1.3. Сравнение и упорядочивание

Исследование-обсуждение

В таблице указана температура воздуха в разных городах в одно и то же время.

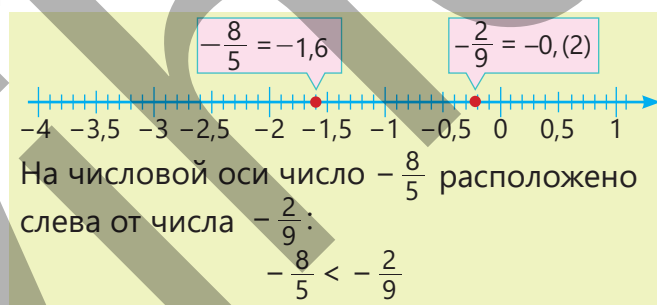
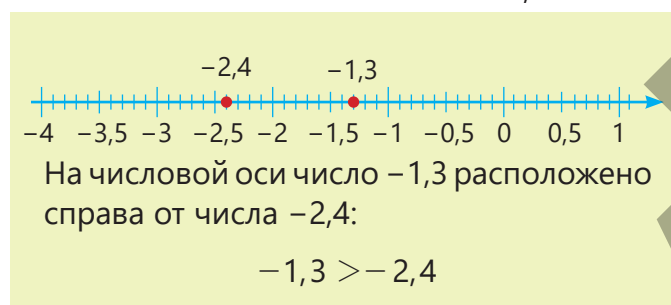
- В каком городе самая высокая температура, а в каком – самая низкая?
- В то же время температура в Лянкяране была $-1,2^{\circ}\text{C}$. Если расположить названия городов в порядке возрастания их температур, между какими городами будет Лянкяран?

Показатели температуры по городам

Город	Температура ($^{\circ}\text{C}$)
Баку	-1
Гянджа	$0,5$
Шуша	-2

Изучение Сравнение рациональных чисел с помощью числовой оси

Рациональные числа можно сравнивать, отмечая их на числовой оси. Из двух чисел на числовой оси число слева меньше, а число справа больше.



- Любое положительное рациональное число больше любого отрицательного рационального числа.

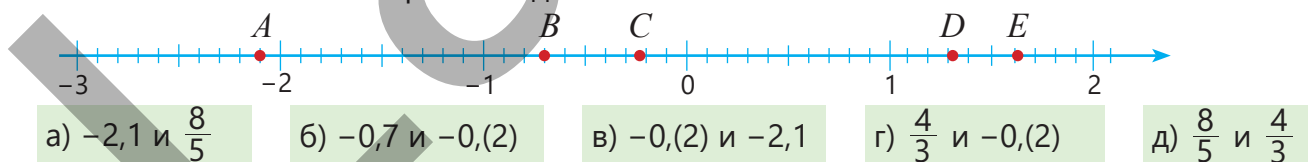


Подумай!

Как сравнить числа $-\frac{3}{4}$ и $-0,7$ с помощью числовой оси?

Задания

- 1 Определите, какие из чисел $-0,7$; $-2,1$; $\frac{8}{5}$; $\frac{4}{3}$; $-0,(2)$ соответствуют точкам, отмеченным на числовой оси, и сравните данные числа.



- 2 Сравните числа, используя числовую ось.

ОБРАЗЕЦ $-\frac{9}{5}$ и $-1,1$

Решение

$$-\frac{9}{5} < -1,1$$

Объяснение



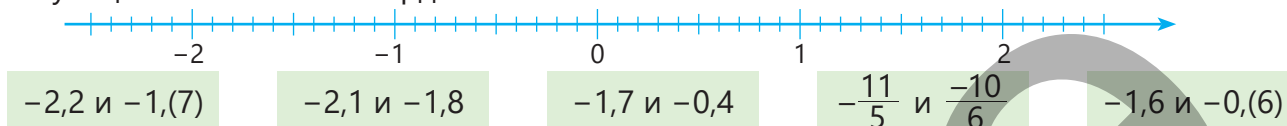
На числовой оси число $-\frac{9}{5}$ расположено слева от числа $-1,1$.

$-2,1$ и -3 $-0,8$ и $-0,4$ $0,7$ и $0,(4)$ $-2,9$ и $-2\frac{1}{5}$ $-1\frac{1}{2}$ и $-1\frac{1}{3}$ $-0,(6)$ и $-0,6$

3 Сравните.

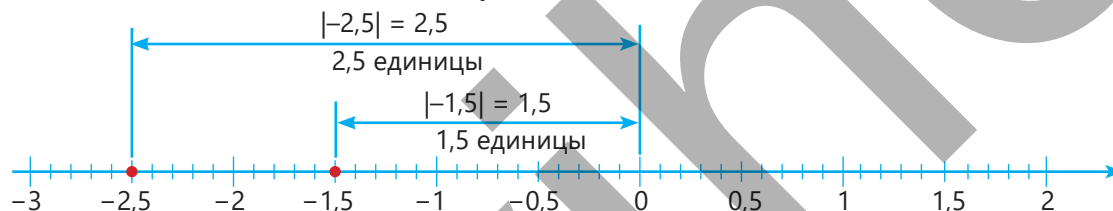
$-14,1$ и $0,7$	$-76,8$ и 0	$14,3$ и 0	$-54,5$ и $0,2$	$0,05$ и -7	$-\frac{1}{3}$ и $0,(3)$
$-\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$	$-3\frac{2}{5}$ и 0	$-8\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$ и $-1,5$	$\frac{1}{2}$ и $-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$ и $0,5$

4 Определите, между какими двумя последовательными целыми числами на координатной оси находится каждое из данных чисел. Сравните числа по расположению соответствующих им точек на координатной оси.



Изучение Сравнение отрицательных чисел по их модулям

Отрицательные числа можно сравнивать также по их модулям. Например, для сравнения чисел $-2,5$ и $-1,5$ сначала находят их модули.



Расстояние от числа $-1,5$ до 0 составляет 1,5 единицы, а расстояние от числа $-2,5$ до 0 равно 2,5 единицы.

$$|-1,5| < |-2,5|$$

Поскольку число $-1,5$ ближе к 0, оно лежит справа от $-2,5$ на числовой оси.
 $-1,5 > -2,5$

• Из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше, и меньше то, у которого модуль больше.

5 Сравните отрицательные числа по их модулям.

ОБРАЗЕЦ а) $-3,2$ и $-3,1$ б) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{5}{6}$ в) $-0,7$ и $-0,(7)$

Решение

Объяснение

а) $-3,2 < -3,1$

$|-3,2| > |-3,1|$

Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого модуль больше. Находятся модули дробей и сравниваются путем приведения их к общему знаменателю.

б) $-\frac{3}{4} > -\frac{5}{6}$

$$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \left|-\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \frac{9}{12} < \frac{10}{12} \quad \left|-\frac{3}{4}\right| < \left|-\frac{5}{6}\right|$$

Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого модуль больше.

в) $-0,7 > -0,(7)$

Находятся модули чисел $-0,7$ и $-0,(7)$. Цифры в разрядах единиц и десятых полученных чисел равны. Сравниваются цифры в разряде сотых.

$$0,7 = 0,7000\dots$$

$$0,(7) = 0,7777\dots$$

$-2,92$ и $-0,31$	$-3,6$ и $-1,8$	$-\frac{5}{9}$ и $-\frac{7}{12}$	$-\frac{3}{5}$ и $-\frac{2}{3}$	$-2,21$ и $-2,(4)$	$-4,(4)$ и $-4\frac{1}{4}$
-------------------	-----------------	----------------------------------	---------------------------------	--------------------	----------------------------

6 В пустые клетки впишите такие цифры, чтобы неравенство стало верным.

$-0,8 > -0,\square$

$-1,1 < -1,\square9$

$-4,1\square < -4,18$

$-\square7,5 > -27,5$

- 7 Какие числа можно вписать в пустые клетки? Для каждого примера найдите два целых и два дробных числа.

$\square > 4,8$

$\square < 3,5$

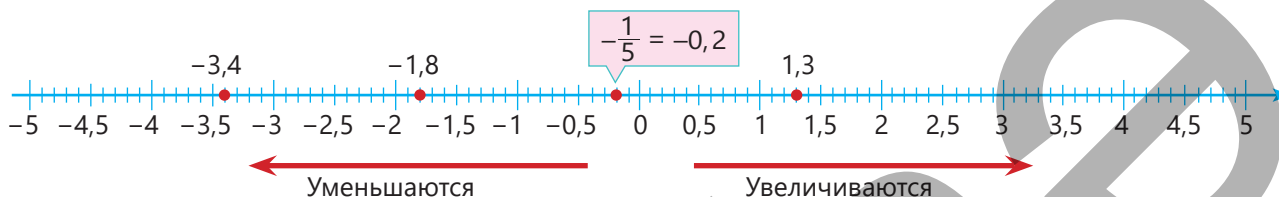
$\square < 0$

$\square < -0,3$

$\square > -2,1$

Изучение Упорядочивание рациональных чисел

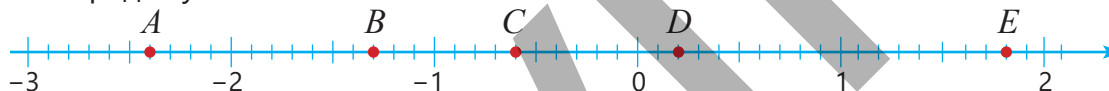
Рациональные числа можно упорядочить, сравнивая их или отмечая на числовой оси. На числовой оси числа увеличиваются вправо и уменьшаются влево. Например, чтобы упорядочить числа $-1,8$; $-3,4$; $1,3$ и $-\frac{1}{5}$ их нужно отметить на числовой оси.



В порядке возрастания $-3,4$; $-1,8$; $-\frac{1}{5}$; $1,3$

В порядке убывания $1,3$; $-\frac{1}{5}$; $-1,8$; $-3,4$

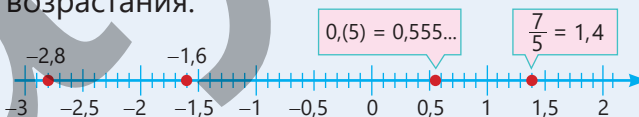
- 8 На числовой оси точки, соответствующие числам $0,2$; $-0,6$; $-2,4$; $1,8$; $-1,3$, обозначены буквами. Определите, какому числу соответствует каждая буква. Расположите данные числа в порядке убывания.



- 9 Расположите данные числа в порядке возрастания.

ОБРАЗЕЦ В порядке возрастания: $-2,8$; $\frac{7}{5}$; $-1,6$; $0,(5)$

Решение	Объяснение
$-2,8 < -1,6 < 0,(5) < \frac{7}{5}$	Числа отмечаются на числовой оси и располагаются в порядке возрастания.



В порядке возрастания:	а) -2 ; $1\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 0	б) -3 ; 1 ; $-2,2$; $\frac{4}{5}$	в) $-3,2$; $1\frac{1}{5}$; $-2,3$; $-\frac{7}{5}$
В порядке убывания:	а) -1 ; $0,5$; $-1,5$; 0	б) -2 ; 2 ; $-2,8$; $-0,2$	в) -4 ; 5 ; $-2,9$; $-1,9$

- 10 Впишите подходящую цифру в пустую клетку.

а) $-0,8 < -0,\square < -0,(6)$

б) $-3,6 < -3,\square9 < -3,5$

в) $-3,5 < -\square,4 < -3$

- 11 Запишите целые числа, находящиеся между данными числами.

а) $-7,2$ и $-2,1$

б) $-4,2$ и $0,3$

в) $-5\frac{7}{12}$ и $-1\frac{2}{3}$

г) $-\frac{13}{3}$ и $1,(2)$

- 12 Впишите четыре подходящих числа в пустую клетку.

а) $-0,3 < \square < 0,2$

б) $-1,7 < \square < -0,2$

в) $-3,5 < \square < -3$

г) $2,1 < \square < 2,(4)$

- 13 Лала и Анар по-разному ответили на вопрос, записанный на доске. Как, по-вашему, кто из них прав?

Сколько рациональных чисел между числами $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$?



Лала

Запишу данные числа в виде десятичных дробей.

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 0,20 \text{ и } \frac{1}{4} = 0,25$$

Между числами 0,20 и 0,25 есть только четыре числа:

0,21 0,22 0,23 0,24

Запишу данные числа в виде обыкновенных дробей со знаменателем 1000.

$$\frac{1}{5} = \frac{200}{1000} \text{ и } \frac{1}{4} = \frac{250}{1000}$$

Между этими числами находится более четырех чисел:

$\frac{201}{1000}$ $\frac{202}{1000}$ $\frac{203}{1000}$ $\frac{204}{1000}$... $\frac{249}{1000}$

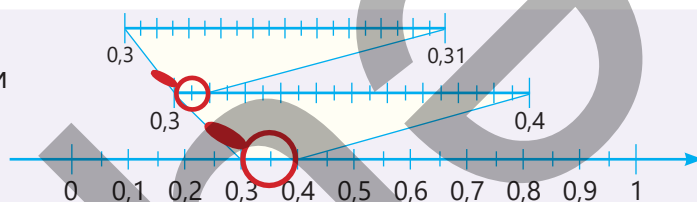


Анар



Запомни!

Между любыми двумя рациональными числами находится бесконечно много рациональных чисел.



- 14 Какие из данных чисел лежат на числовой оси между числами $-1,2$ и $-1,3$?

$-1,23$

$-1,32$

$-1,(2)$

$-1,(3)$

$-1,27$

$-1,4$

- 15 Найдите.

- Наибольшее целое число, меньшее 0,2
- Три числа, которые больше $-1,5$ и меньше $-1,4$
- Наименьшее целое число, большее $-3,(4)$
- Четыре числа, которые больше $\frac{1}{6}$ и меньше $\frac{1}{5}$



Исправь ошибку!

а) Так как $|-2,3| > |-1,8|$, то $-2,3 > -1,8$

б) Так как $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ и $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$, то между числами $\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{8}$ имеется всего пять чисел:

$\frac{9}{16}, \frac{10}{16}, \frac{11}{16}, \frac{12}{16}, \frac{13}{16}$

Решение задач

- 16 Сабина загадала дробь, знаменатель которой равен 24. Эта дробь больше $-\frac{1}{3}$, но меньше $-\frac{1}{4}$. Какое рациональное число загадала Сабина?



- 17 В зависимости от содержания соли температура замерзания морской воды меняется. Вода с высоким содержанием соли замерзает при более низкой температуре. В таблице указаны температуры замерзания воды в некоторых морях.

а) Как можно представить данные на числовой оси?

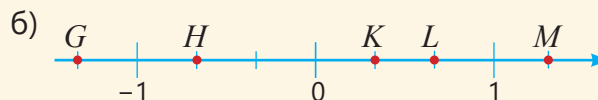
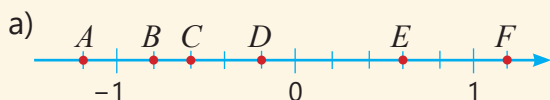
б) Как можно упорядочить названия морей в порядке увеличения температуры замерзания?

в) У какого моря вода более соленая? Обоснуйте свой ответ.

Море	Температура замерзания воды ($^{\circ}\text{C}$)
Азовское	$-0,7$
Каспийское	$-0,5$
Японское	$-1,9$

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

- 1 Определите координаты точек, отмеченных на оси координат.
- Запишите координаты точек в виде десятичной дроби.
 - Укажите точки, координаты которых имеют равные абсолютные значения.



- 2 Сравните.

а) $\frac{4}{11}$ и 0,(4)

б) $\frac{6}{11}$ и 0,(5)

в) $\frac{27}{22}$ и 1,(21)

г) $-\frac{13}{18}$ и -0,(6)

- 3 Запишите две конечные десятичные дроби, две бесконечные периодические десятичные дроби, расположенные между числами $-\frac{2}{9}$ и $\frac{3}{11}$ на числовой оси. Расположите данные числа и записанные вами числа в порядке возрастания.

- 4 Из данных чисел определите те, которые расположены на числовой оси между а) -0,3 и -0,4; б) -1 и -0,(5).

-0,23

-0,(3)

$-\frac{4}{11}$

-0,4(2)

$-1\frac{1}{2}$

$-\frac{5}{6}$

-0,5

-0,5(4)

-0,(6)

- 5 Если считать началом отсчета уровень моря на вертикальной числовой оси, то координата вертолета равна 18,(4), а координата водолаза равна $-18\frac{2}{9}$. Кто находится ближе к поверхности воды: вертолет или водолаз?



- 6 В пекарню привезли 41,5 кг муки, из которых было использовано $\frac{2}{3}$ части. Сколько килограммов муки осталось? Как это записать в виде десятичной дроби? Округлите ответ до тысячных.

- 7 В таблице представлена информация о средней температуре в декабре в разных городах. Напишите названия городов в порядке убывания их температур.

Средняя температура в декабре

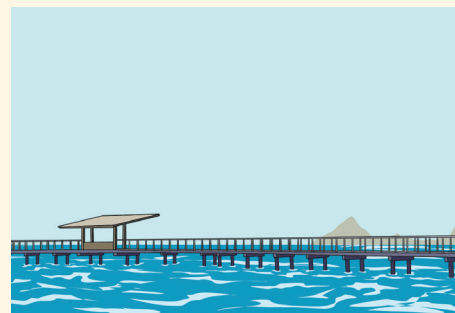
Город	Температура (°C)
Баку	-0,6
Гянджа	-0,3
Шамаха	-1,8
Губа	-1,2

- 8 В таблице указан уровень воды на причале в течение недели.

Дни недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Уровень воды (м)	$-\frac{2}{25}$	0,15	$-\frac{9}{50}$	$-\frac{9}{40}$	0	0,12	$-\frac{2}{33}$

а) Как менялся уровень воды по сравнению с предыдущим днем, начиная со вторника?

б) В какой день уровень воды был самым высоким, а в какой – самым низким?

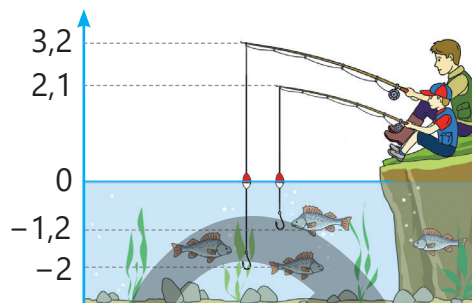


1.4. Сложение и вычитание рациональных чисел

Исследование-обсуждение

Самир с отцом ловят рыбу. Координаты, соответствующие удочке и крючкам, указаны на рисунке.

- На какую длину отец Самира размотал леску удочки?
- На сколько глубже опустился крючок, заброшенный отцом, по сравнению с крючком Самира? Как это можно определить?



Изучение Сложение рациональных чисел

Сумма рациональных чисел также является рациональным числом.

- Сумму произвольных рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ можно найти по правилу сложения обыкновенных дробей.

$$\frac{-3}{7} + \frac{-1}{7} = \frac{-3 + (-1)}{7} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$$

- Сумму произвольных рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно найти, приведя их к общему знаменателю по правилу сложения обыкновенных дробей.

$$\frac{1}{4} + \frac{-5}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{-5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{-20}{12} = \frac{3 + (-20)}{12} = \frac{-17}{12} = -1\frac{5}{12}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Задания

- 1 Найдите сумму рациональных чисел.

а) $\frac{-3}{5} + \frac{-1}{5}$ в) $\frac{5}{13} + \frac{-1}{13}$ д) $\frac{-7}{4} + \frac{-1}{2}$ ж) $\frac{-7}{8} + \frac{11}{12}$ и) $\frac{8}{17} + \frac{-7}{17} + \frac{-3}{17}$ к) $\frac{11}{4} + \frac{-1}{8} + \frac{-5}{16}$
 б) $\frac{-2}{9} + \frac{-5}{9}$ г) $\frac{-2}{11} + \frac{4}{11}$ е) $\frac{-2}{3} + \frac{-5}{6}$ з) $\frac{5}{9} + \frac{-5}{12}$ й) $\frac{-7}{12} + \frac{-1}{12} + \frac{3}{12}$ л) $\frac{-7}{6} + \frac{-2}{9} + \frac{5}{18}$

- 2 Найдите сумму.

ОБРАЗЕЦ $-\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

Решение

$$-\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{-1}{2} = \frac{-3}{4} + \frac{-1 \cdot 2}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-3}{4} + \frac{-2}{4} = \frac{-3 + (-2)}{4} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$$

Объяснение
 Минус перед дробью записывается в числителе, дроби приводятся к общему знаменателю. Целые числа в числителях дробей складываются и сумма записывается в числителе.

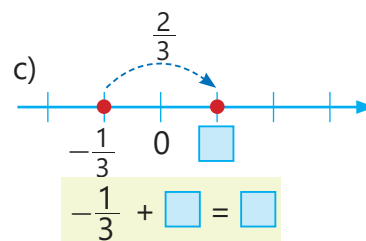
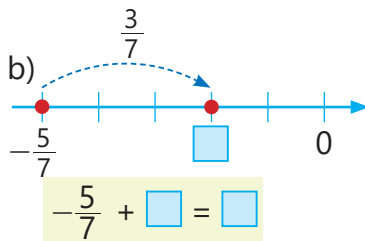
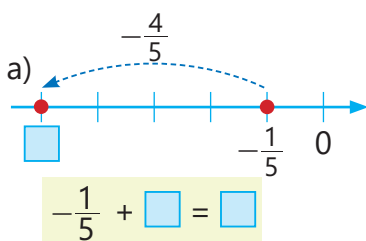
а) $-\frac{3}{7} + \left(-\frac{1}{7}\right)$ в) $-\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ д) $-\frac{2}{3} + \left(-\frac{5}{6}\right)$ ж) $-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ и) $-\frac{5}{3} + \frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{6}\right)$
 б) $-\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)$ г) $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ е) $-\frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)$ з) $\frac{3}{4} + \left(-\frac{7}{6}\right)$ й) $\frac{1}{9} + \left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{3}{2}$

- 3 Выполните сложение.

а) $\frac{-4}{5} + \left(-1\frac{1}{5}\right)$ б) $\frac{-1}{2} + 2\frac{1}{4}$ в) $-2\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ г) $-\frac{3}{4} + 1\frac{1}{8}$ д) $\frac{5}{4} + \left(-1\frac{2}{9}\right)$

Указание: запишите смешанные числа в виде дробей с натуральным числом в знаменателе.

- 4 Напишите пример сложения, соответствующий изображению на числовой оси, и найдите сумму.



Запомни!

- Чтобы сложить два отрицательных рациональных числа, надо сложить их модули и поставить перед результатом знак минус.

$$-1\frac{2}{9} + (-3\frac{5}{9}) = -(1\frac{2}{9} + 3\frac{5}{9}) = -4\frac{7}{9}$$

$$|-1\frac{2}{9}| = 1\frac{2}{9} \quad |-3\frac{5}{9}| = 3\frac{5}{9}$$

$$-2,1 + (-1,3) = -(2,1 + 1,3) = -3,4$$

$$|-2,1| = 2,1 \quad |-1,3| = 1,3$$

- Чтобы сложить числа с разными знаками, следует найти модули этих чисел и из большего модуля вычесть меньший модуль. Перед результатом записывают знак числа, модуль которого больше.

$$-2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{9} = -(2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{9}) = -1\frac{1}{9}$$

$$|-2\frac{1}{3}| = 2\frac{1}{3} \quad |1\frac{2}{9}| = 1\frac{2}{9} \Rightarrow |-2\frac{1}{3}| > |1\frac{2}{9}|$$

$$-3,5 + 6,8 = 6,8 - 3,5 = 3,3$$

$$|-3,5| = 3,5 \quad |6,8| = 6,8 \Rightarrow |6,8| > |-3,5|$$

- 5 Выполните сложение.

ОБРАЗЕЦ а) $-5,4 + (-3,1)$ б) $-1\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

Решение

а) $-5,4 + (-3,1) = -(5,4 + 3,1) = -8,5$

б) $-1\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -1\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = -(1\frac{3}{4} - \frac{2}{4}) = -1\frac{1}{4}$

Объяснение

Оба слагаемых отрицательные. Модули складываются и перед суммой пишется знак минус.

Поскольку слагаемые имеют разные знаки, находят их модули и из большего вычитают меньший. Перед результатом ставят знак того слагаемого, у которого модуль больше.

в) $-4,2 + (-2,5)$

д) $-5,1 + (-3,6)$

ж) $-0,8 + 2,7$

и) $-2,9 + 9,2$

г) $-4\frac{3}{7} + (-2\frac{1}{7})$

е) $-1\frac{2}{5} + (-\frac{1}{5})$

з) $-4\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

й) $\frac{5}{4} + (-3\frac{1}{6})$

- 6 Сравните значения выражений без вычислений. Затем проверьте ответ, вычислив.

а) $-4,2 + 3,9$ и $-7,8 + 8,1$

в) $-1,2 + (-2,7)$ и $-9,6 + 9,6$

д) $2,2 + (-3)$ и $3 + (-2,2)$

б) $-1\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ и $-3\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4}$

г) $-2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ и $-1\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}$

е) $0,4 + (-\frac{2}{5})$ и $-1\frac{1}{8} - 2\frac{5}{8}$



Внимание!

Свойства сложения справедливы и для рациональных чисел ($a, b, c \in \mathbb{Q}$).

Переместительное свойство	$a + b = b + a$ $4,5 + (-1,6) = -1,6 + 4,5$
Сочетательное свойство	$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ $2,7 + (-1,7) + 1,2 = (2,7 + (-1,7)) + 1,2 = 2,7 + ((-1,7) + 1,2)$

- 7 Найдите сумму, используя свойства сложения.

ОБРАЗЕЦ $1,7 + (-5,4) + 3,1 + (-1,7)$

Решение	Объяснение
$1,7 + (-5,4) + 3,1 + (-1,7) =$ $= 1,7 + (-1,7) + (-5,4) + 3,1 =$ $= -5,4 + 3,1 = -(5,4 - 3,1) = -2,3$	Используя переместительное и сочетательное свойства сложения, а также то, что сумма противоположных чисел равна нулю, находится сумма.

$$8,7 + (-8,7) + (-1,5) + (-4)$$

$$7,6 + (-0,8) + (-8,2) + 0,4$$

$$-2,1 + (-1,7) + 5,3 + (-0,4)$$

$$-5,2 + 1,9 + 5,2 + (-3,2)$$

$$3,4 + (-0,8) + 8,3 + 1,2$$

$$4,7 + 3,8 + (-3,2) + 2,5 + (-1,9)$$

Изучение Вычитание рациональных чисел

Разность рациональных чисел также является рациональным числом.

- Разность произвольных рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ можно найти,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

приведя их к общему знаменателю по правилу вычитания обыкновенных дробей.

$$\frac{-3}{11} - \frac{-7}{11} = \frac{-3 - (-7)}{11} = \frac{-3 + 7}{11} = \frac{4}{11}$$

- Разность произвольных рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно найти, приведя их к общему знаменателю по правилу вычитания обыкновенных дробей.

$$\frac{-3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{-9}{6} - \frac{10}{6} = \frac{-9 - 10}{6} = \frac{-9 + (-10)}{6} = \frac{-19}{6} = -3\frac{1}{6}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

- 8 Найдите разность.

а) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$

в) $\frac{-3}{7} - \frac{-1}{7}$

д) $\frac{-7}{5} - \frac{4}{5}$

ж) $\frac{3}{16} - \frac{11}{16}$

и) $\frac{8}{15} - \frac{7}{15} - \frac{-3}{15}$

б) $\frac{2}{9} - \frac{6}{9}$

г) $\frac{-2}{13} - \frac{-5}{42}$

е) $\frac{6}{17} - \frac{-1}{17}$

з) $\frac{3}{14} - \frac{11}{14}$

й) $\frac{-5}{12} - \frac{-1}{12} - \frac{7}{12}$



Запомни!

Как и для целых чисел, разность рациональных чисел можно найти, прибавив к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому.

$$p - q = p + (-q)$$

$$\frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} + \left(-\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) = \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{-4}{6} = \frac{1 + (-4)}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-3 : 3}{6 : 3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$7,2 - 9,5 = 7,2 + (-9,5) = -(9,5 - 7,2) = -2,3$$

- 9 Вычислите разность рациональных чисел, прибавив к уменьшаемому противоположное значение вычитаемого.

а) $\frac{2}{7} - \frac{6}{7}$

в) $-1\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$

д) $-\frac{1}{3} - \left(-2\frac{1}{2}\right)$

ж) $\frac{5}{3} - \left(-\frac{5}{6}\right)$

б) $4,2 - 5,3$

г) $-2,1 - 3,6$

е) $-1,8 - (-0,6)$

з) $3,9 - (-6,2)$

10 Выполните действия.

а) $\frac{-4}{5} + (-1,4)$ в) $0,4 + \left(-\frac{8}{15}\right)$ д) $\frac{3}{5} - 1,8$ ж) $-1,2 - \left(-1\frac{2}{5}\right)$
 б) $\frac{-1}{2} + 0,9$ г) $-\frac{9}{20} + (-0,2)$ е) $-2,5 - \frac{-7}{2}$ з) $1\frac{1}{4} - (-1,5)$

11 Вычислите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $a - \frac{7}{4}$ $a + \frac{1}{6}$ $1,4 - a$ при $a = -\frac{3}{8}$ б) $-c - \frac{2}{3}$ $-c + 0,2$ $-\frac{1}{6} - (-c)$ при $c = -\frac{4}{9}$

12 Решите уравнения.

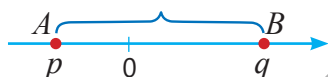
а) $x + 1,2 = 0,4$ б) $2,4 - x = 5,2$ в) $x - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$ г) $x + 1\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$

13 Сравните.

а) $3,2 - 4,1$ и $-0,8$ б) $-4,2 + 0,8$ и $-0,8 - 2,4$ в) $0,4 - \frac{8}{5}$ и $\frac{1}{2} - 0,9$

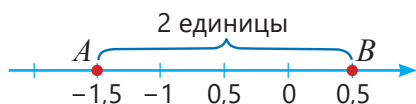
Изучение Расстояние между двумя точками на оси координат

Расстояние между двумя точками на координатной оси, координаты которых являются рациональными числами p и q , равно модулю разности их координат.



$AB = |p - q|$ или $AB = |q - p|$

Например, расстояние между точками $A(-1,5)$ и $B(0,5)$ можно найти так:



$|-1,5 - 0,5| = |-2| = 2$ или $|0,5 - (-1,5)| = |2| = 2$

14 Найдите расстояние между точками, координаты которых заданы, и изобразите на оси координат.

а) $A(-1,2)$ и $B(3,8)$ б) $C\left(-\frac{2}{5}\right)$ и $D(0,2)$ в) $E(-3,5)$ и $F\left(-1\frac{1}{2}\right)$ г) $G\left(-5\frac{1}{4}\right)$ и $H\left(-2\frac{3}{4}\right)$

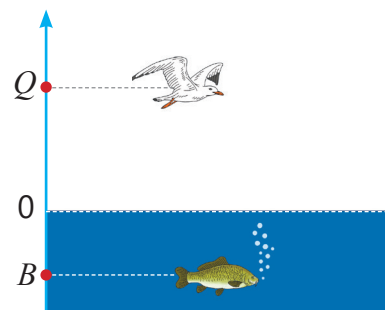
Решение задач

15 В таблице представлено изменение температуры воды в озере в течение 5 дней. В начале наблюдения температура воды была $-0,3^\circ\text{C}$. Какова температура воды в конце наблюдения?

Дни	1	2	3	4	5
Изменение температуры ($^\circ\text{C}$)	-0,5	-1,2	+0,45	-0,2	+0,25

16 Чайка летит на высоте $5,2$ м над уровнем моря. Рыба плавает на глубине $3\frac{3}{5}$ м ниже уровня моря.

- Выразите координаты чайки и рыбы относительно уровня моря с использованием положительных и отрицательных чисел.
- Какое расстояние между точками Q и B , которые соответствуют уровням чайки и рыбы относительно уровня моря?

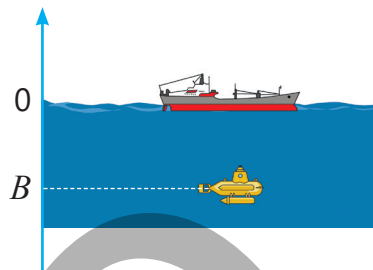


1.5. Умножение и деление рациональных чисел

Исследование-обсуждение

Батискаф опускается на глубину 7 м каждую минуту и через 15 минут достигает требуемого уровня для исследования.

- Как можно записать координату точки В, которая показывает этот уровень, используя отрицательные числа?
- Если батискаф опускается на $7\frac{1}{2}$ м каждую минуту, то за сколько минут он достигнет требуемого уровня? Как это можно вычислить?



Изучение Умножение рациональных чисел

Произведение рациональных чисел можно найти по правилу умножения обыкновенных дробей.

$$\frac{-3}{4} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-3 \cdot (-1)}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8} \quad \frac{-2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{-2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{-8}{15}$$

Произведение рациональных чисел также является рациональным числом.

Как и в случае с целыми числами, произведение двух рациональных чисел одного знака положительно, а произведение двух рациональных чисел разных знаков отрицательно.

$$-1\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \quad 1,2 \cdot (-0,3) = -(1,2 \cdot 0,3) = -0,36$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

+	×	+	=	+
-	×	-	=	+
+	×	-	=	-
-	×	+	=	-



Подумай!

Может ли произведение быть отрицательным числом при умножении рационального числа самого на себя? Обоснуйте свое мнение.

Задания

- 1 Выполните умножение.

ОБРАЗЕЦ $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$

Решение

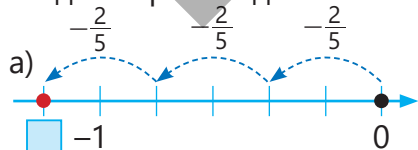
$$\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{-5}{7} = \frac{3 \cdot (-5)}{4 \cdot 7} = \frac{-15}{28} = -\frac{15}{28}$$

Объяснение

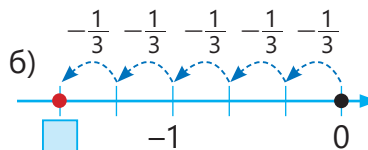
Минус перед дробью записывается в числителе, используется правило умножения дробей.

- а) $\frac{-3}{4} \cdot \frac{-1}{5}$ в) $\frac{5}{8} \cdot \frac{-1}{3}$ д) $\frac{-3}{7} \cdot \frac{-5}{6}$ ж) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$ и) $\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)$ к) $\frac{-3}{14} \cdot 7$
 б) $\frac{-2}{3} \cdot \frac{-5}{5}$ г) $\frac{-7}{11} \cdot \frac{4}{5}$ е) $\frac{-2}{3} \cdot \frac{-5}{4}$ з) $\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$ й) $\left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ л) $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot (-6)$

- 2 Напишите пример умножения, соответствующий изображению на числовой оси, и найдите произведение.



$$\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$$



$$\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$$

- 3 Сравните значения выражений, не производя вычислений.

а) $-4,2 \cdot 1,5$ и $-7,5 \cdot (-1,2)$ б) $-1\frac{3}{5} \cdot (-2,5)$ и $-9,6 \cdot 0$ в) $-1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$ и $-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$

- 4 Сначала определите знак произведения, затем выполните умножение.

а) $-1,2 \cdot (-2,5)$ в) $-4\frac{1}{6} \cdot (-1\frac{4}{5})$ д) $\frac{-4}{5} \cdot (-3\frac{1}{8})$ ж) $-0,8 \cdot 2,7$ и) $-2,5 \cdot 1\frac{3}{5}$
 б) $-5,1 \cdot (-3,6)$ г) $-1\frac{2}{5} \cdot (-\frac{1}{5})$ е) $\frac{-1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$ з) $-4\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ й) $1,6 \cdot (-1\frac{1}{2})$



Запомни!

Если $a \neq 0, b \neq 0$, то числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются взаимно обратными числами. Произведение взаимно обратных чисел равно 1.

Например, $\frac{-3}{5}$ и $\frac{5}{-3}$, -2 и $\frac{1}{-2}$ являются взаимно обратными числами.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

$$\frac{5}{-3} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{-3 \cdot 5}{5 \cdot (-3)} = 1 \quad -2 \cdot \frac{1}{-2} = \frac{-2 \cdot 1}{-2} = 1$$

- 5 Определите, являются ли данные числа взаимно обратными.

а) $\frac{-2}{5}$ и $-\frac{5}{2}$ б) $-1\frac{2}{5}$ и $-\frac{5}{7}$ в) $-2\frac{1}{3}$ и $-\frac{2}{7}$ г) -3 и $\frac{1}{3}$ д) $-1,8$ и $\frac{5}{-9}$



Внимание!

Свойства умножения справедливы и для рациональных чисел ($a, b, c \in \mathbb{Q}$).

Переместительное свойство	$a \cdot b = b \cdot a$ $3,2 \cdot (-1,5) = -1,5 \cdot 3,2$
Сочетательное свойство	$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $1,4 \cdot (-0,5) \cdot 6 = (1,4 \cdot (-0,5)) \cdot 6 = 1,4 \cdot ((-0,5) \cdot 6)$
Распределительное свойство	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(-1,7 + 4) \cdot 2 = -1,7 \cdot 2 + 4 \cdot 2$ $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ $(4 - 1,7) \cdot 2 = 4 \cdot 2 - 1,7 \cdot 2$

- 6 Найдите значение выражений удобным способом, используя свойства умножения.

ОБРАЗЕЦ $-\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3}$ $2,3 \cdot (-5,6) + 2,3 \cdot 3,6$

Решение	Объяснение
$-\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3} = (-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}) \cdot 1\frac{1}{8} = -1 \cdot 1\frac{1}{8} = -1\frac{1}{8}$	Применяются переместительное и сочетательное свойства умножения.
$2,3 \cdot (-5,6) + 2,3 \cdot 3,6 = 2,3 \cdot (-5,6 + 3,6) = 2,3 \cdot (-2) = -4,6$	Применяется распределительное свойство умножения.
$-\frac{1}{4} \cdot 7,8 \cdot (-4)$	$6,4 \cdot (-3,7) + (-3,7) \cdot 3,6$
$-\frac{11}{13} \cdot \frac{5}{9} + (-\frac{2}{13}) \cdot \frac{5}{9}$	$-1,25 \cdot (-3,7) \cdot (-0,8)$
$-0,2 \cdot 3,4 \cdot (-5)$	$-1\frac{1}{6} \cdot (-\frac{5}{9}) \cdot (-\frac{6}{7})$
$0,04 \cdot (-4,1) \cdot (-25)$	$\frac{1}{4} \cdot (-1\frac{1}{2}) - (-1\frac{1}{2}) \cdot 8\frac{1}{4}$

- 7 Упростите и найдите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $-1,4a \cdot 1,5$
 $a = \frac{2}{7}$

б) $-\frac{3}{8}x \cdot (-\frac{4}{3})$
 $x = -1,6$

в) $-\frac{5}{12}b \cdot 1,2c$
 $b = 1,4$ и $c = -\frac{3}{7}$

- 8 Обоснуйте справедливость утверждений, если множители отличны от нуля.

- а) Произведение нечётного количества отрицательных множителей отрицательно.
 б) Произведение чётного количества отрицательных множителей положительно.

Изучение Деление рациональных чисел

При делении рациональных чисел частное можно найти, умножив делимое на число, обратное делителю.

$$\frac{-3}{4} : \frac{-5}{7} = \frac{-3}{4} \cdot \frac{7}{-5} = \frac{-3 \cdot 7}{4 \cdot (-5)} = \frac{-21}{-20} = \frac{21}{20} = 1 \frac{1}{20}$$

Частное, полученное при делении рациональных чисел, также является рациональным числом.

• Как и в случае с целыми числами, частное от деления двух рациональных чисел с одинаковыми знаками будет положительным, а частное от деления двух рациональных чисел с разными знаками – отрицательным.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} (c \neq 0)$$

+	:	+	=	+
-	:	-	=	+
+	:	-	=	-
-	:	+	=	-

$$-1 \frac{3}{4} : (-7) = 1 \frac{3}{4} : 7 = \frac{7}{4} : \frac{7}{1} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{4}$$

$$0,24 : (-0,3) = -(0,24 : 0,3) = -0,8$$

9 Выполните деление.

а) $\frac{-3}{4} : \frac{-1}{5}$ в) $\frac{5}{8} : \frac{-1}{3}$ д) $\frac{-3}{7} : (-6)$ ж) $1 \frac{1}{3} : (-\frac{2}{5})$ и) $(-\frac{2}{7}) : (-\frac{9}{14})$ к) $\frac{-9}{14} : 6$
 б) $\frac{-2}{3} : \frac{-5}{6}$ г) $\frac{-7}{11} : \frac{4}{5}$ е) $\frac{-2}{3} : \frac{-5}{4}$ з) $(-\frac{6}{5}) : \frac{1}{4}$ й) $(-\frac{8}{9}) : (-2 \frac{2}{3})$ л) $(-6) : (-\frac{5}{3})$

10 Сначала определите знак частного, затем найдите его числовое значение.

а) $-3,6 : (-2,4)$ в) $-1,8 : 1,2$ д) $-1 \frac{2}{9} : (-3 \frac{2}{3})$ ж) $-0,9 : 1,5$ и) $-1,5 : 1 \frac{7}{8}$
 б) $-0,34 : (-1,7)$ г) $0,54 : (-0,9)$ е) $1 \frac{1}{4} : (-2 \frac{1}{2})$ з) $-1 \frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ й) $1,8 : (-1 \frac{1}{2})$

11 Определите подходящие числа в пустых клетках.

а) $-0,9 \cdot \square = 0,9$

б) $\square \cdot (-1 \frac{1}{2}) = 1$

в) $-1,4 \cdot \square = 0$

г) $\square : (-\frac{1}{2}) = 0$

12 Решите уравнения.

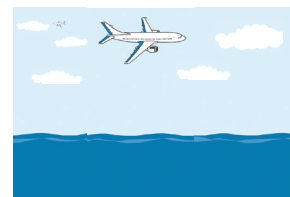
а) $x : 1,2 = 0,4$ в) $2,4x = -3,6$ д) $\frac{1}{2} : x = -\frac{5}{6}$ ж) $-\frac{4}{5} \cdot (2 - x) = -2 \frac{2}{5}$
 б) $2,4 \cdot (x + 5) = 0$ г) $-\frac{2}{7} \cdot x = 6$ е) $-3 \cdot (2x + 3) = 0$ з) $-1 \frac{2}{3} - 3x = -\frac{2}{15}$

Решение задач

13 При подъеме на каждые 100 м выше уровня моря температура воздуха снижается на $0,65^\circ\text{C}$.

• Если температура воздуха на уровне моря составляет 14°C , то какая будет температура воздуха на высоте 2000 м?

• На какую высоту еще должен подняться самолет, находящийся на высоте 2000 м, чтобы температура воздуха на этой высоте была $-18,5^\circ\text{C}$?



14 В таблице приведены данные об изменении атмосферного давления в течение 3 дней.

• Каково среднее арифметическое изменения атмосферного давления за эти 3 дня?

• На сколько должно измениться атмосферное давление на следующий день, чтобы среднее арифметическое изменения за 4 дня стало равно среднему арифметическому изменения за первые 3 дня?

Дни	Изменение атмосферного давления (мм рт. ст.)
1	-0,3
2	-0,6
3	+0,3

1.6. Действия над рациональными числами

Исследование-обсуждение

В таблице указан объем молока в кувшине в литрах. Молока в бидоне в 10 раз больше, чем в кувшине.

- Лала рассчитала, что если в кувшине было 0,(5) литра молока, то в бидоне молока на 5 литров больше. Как она это сделала?
- Если в кувшине было 0,(7); 1,(2) литра молока, то на сколько литров молока в бидоне больше, чем в кувшине? Найдите ответы тем же способом и заполните таблицу.

Молоко в кувшине	Молоко в бидоне $10x$	Разность $10x - x$
0,(5)	5,(5)	5
0,(7)		
1,(2)		

$$10 \cdot 0,555... = 5,555...$$

$$\begin{array}{r} 5,555... \\ - 0,555... \\ \hline 5,000... \end{array}$$



Изучение Преобразование бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

Иногда при вычислениях необходимо преобразовывать бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные. Например, число 0,(4) можно преобразовать в обыкновенную дробь следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= 0,444... \\ 10x &= 4,444... \\ 10x - x &= 4,(4) - 0,(4) \\ 9x &= 4 \\ x &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Число 0,(4) обозначается через x .

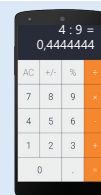
Поскольку в периоде одна цифра, обе стороны равенства умножаются на 10.

Из второго равенства вычитается первое почленно.

Упрощается.

Находится выражение числа 0,(4) в виде обыкновенной дроби.

$$\begin{array}{r} 4,444... \\ - 0,444... \\ \hline 4,000... \end{array}$$



$$\text{Таким образом, } 0,(4) = \frac{4}{9}$$

Ответ можно проверить с помощью деления или калькулятора.

Бесконечную периодическую десятичную дробь с отличной от нуля целой частью можно преобразовать в смешанное число, разложив на целую и дробную части. Например:

$$1,(4) = 1 + 0,(4) = 1 + \frac{4}{9} = 1\frac{4}{9}$$



Подумай!

Чтобы преобразовать число 0,(21) в обыкновенную дробь, необходимо умножить обе стороны равенства на 100 и из второго равенства вычесть первое почленно. Как вы можете это объяснить? Продолжите решение и запишите 0,(21) в виде обыкновенной дроби.

$$\begin{aligned} x &= 0,2121... \\ 100x &= 21,2121... \\ 100x - x &= 21 \\ &... \end{aligned}$$

Задания

- 1 Заполните таблицу и преобразуйте периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби.

а)

x	$10x$	$10x - x$	Обыкновенная дробь
0,222...	2,222...	2	$\frac{2}{9}$
0,(7)			
1,(2)			

б)

x	$100x$	$100x - x$	Обыкновенная дробь
0,3232...	32,32...	32	$\frac{32}{99}$
0,1818...			
0,7474...			

- 2 Преобразуйте периодическую десятичную дробь в обыкновенную. Сравните числитель полученной дроби с числом в периоде, а знаменатель – с количеством цифр в периоде.

а) 0,(5) б) 1,(34) в) 0,(126) г) 2,(7) д) 5,(18) е) 2,(042)



Запомни!

Если периодическая дробь начинается сразу после запятой, то при её преобразовании в обыкновенную дробь целая часть остаётся неизменной. Числитель дробной части представляет собой цифры (или группу цифр) из периода, а в знаменателе записывается столько девяток, сколько цифр в периоде. Например:

$$0,(4) = \frac{4}{9}$$

В периоде есть одна цифра.
В знаменателе пишется 9.

$$0,(32) = \frac{32}{99}$$

В периоде есть две цифры.
В знаменателе пишется 99.

$$3,(412) = 3\frac{412}{999}$$

В периоде есть три цифры.
В знаменателе пишется 999.

- 3 Впишите подходящие числа в пустые клетки.

а) $0,(4) = \frac{\square}{9}$ б) $0,(7) = \frac{7}{\square}$ в) $0,(23) = \frac{23}{\square}$ г) $0,(45) = \frac{45}{\square} = \frac{\square}{11}$ д) $0,(114) = \frac{\square}{999} = \frac{38}{\square}$ е) $1,(5) = \frac{\square}{\square}$

- 4 Преобразуйте бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь и упростите ее. Проверьте правильность ответа.

а) $0,(3)$ б) $0,(72)$ в) $0,(126)$ г) $3,(36)$ д) $4,(54)$ е) $7,(315)$

- 5 Обсудите метод решения примера на доске и суждение Айнур. Проверьте правильность ответа.

• Используя этот метод, выразите данные десятичные дроби в виде обыкновенных дробей. Как связать числа в числителе и знаменателе обыкновенной дроби с цифрами в периоде и до периода?

$$0,3(2)$$

$$2,0(4)$$

$$1,1(5)$$

$$0,0(18)$$

$$\begin{aligned} 0,2(1) &= \frac{?}{?} \\ x &= 0,2111... \\ 10x &= 2,111... \\ 100x &= 21,111... \\ 100x - 10x &= 21,(1) - 2,(1) \\ 90x &= 19 \\ x &= \frac{19}{90} \\ 0,2(1) &= \frac{19}{90} \end{aligned}$$

Периодическую десятичную дробь $0,2(1)$ обозначим как x , сначала умножим на 10, а затем на 100. Полученные равенства вычтем друг из друга почленно.



Запомни!

Если бесконечная периодическая десятичная дробь начинается не сразу после запятой, а через несколько цифр, то при преобразовании в обыкновенную дробь целая часть сохраняется. В знаменателе пишут столько девяток, сколько цифр в периоде, а затем столько нулей, сколько цифр стоит до периода. В числителе записывают разность между всеми цифрами после запятой до конца периода и цифрами до периода, при этом скобки игнорируются.

$$0,2(1) = \frac{21-2}{90} = \frac{19}{90}$$

$$5,1(32) = 5\frac{132-1}{990} = 5\frac{131}{990}$$

$$0,75(4) = \frac{754-75}{900} = \frac{679}{900}$$

- 6 Впишите подходящие числа в пустые клетки.

а) $0,1(6) = \frac{16-\square}{90} = \frac{1}{\square}$ б) $0,8(24) = \frac{\square-8}{990} = \frac{136}{\square}$ в) $0,12(6) = \frac{126-12}{\square} = \frac{\square}{150}$

- 7 Преобразуйте бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь. Упростите, если возможно. Проверьте правильность ответа.

а) $0,1(3)$ б) $0,3(72)$ в) $0,1(26)$ г) $3,21(6)$ д) $1,8(54)$ е) $2,0(06)$

- 8 Проверьте правильность равенства.

а) $0,(9) = 1$ б) $2,(9) = 3$ в) $0,3(9) = 0,4$ г) $4,1(9) = 4,2$

ВНИМАНИЕ! При преобразовании обыкновенной дроби в десятичную никогда не получается периодическая дробь с периодом 9. Поэтому и не рассматриваются бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9.

- 9 Преобразуйте периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби и выполните действия.

а) $0,(2) + 1,(7)$

в) $2,(7) - 1,(4)$

д) $0,(5) \cdot 1,(2)$

ж) $0,(7) : 0,(4)$

б) $0,1(2) + 0,2(1)$

г) $0,8(3) - 0,2(6)$

е) $3,(2) \cdot 0,(3)$

з) $2,(5) : 1,(3)$

Изучение Числовые выражения с рациональными числами

Операции с рациональными числами выполняются в соответствии с общими правилами. Если в выражении есть скобки, сначала выполняются операции в скобках. Например:

$$0,(1) - (1,2 - 1,5) : \left(-1\frac{4}{5}\right) = 0,(1) - (-0,3) : \left(-1\frac{4}{5}\right) = 0,(1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{2-3}{18} = -\frac{1}{18}$$

1 $1,2 - 1,5 = -0,3$

2 $(-0,3) : \left(-1\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{10} : \frac{9}{5} = \frac{1}{6}$

3 $0,(1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{18}$

- 10 Определите порядок действий и найдите значение выражения.

а) $(2,4 - 3,8) : \left(-1\frac{2}{5}\right)$

в) $(0,2 - 1,4) \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)$

д) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right)$

б) $0,3 - 5,7 : \left(-3\frac{1}{6}\right)$

г) $2,1 - 3,4 : \left(-5\frac{2}{3}\right)$

е) $0,(6) + \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

- 11 Выполните действия.

а) $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \left(-1\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)$

г) $\left(0,2 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} - 1,2\right)$

ж) $\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) + (-4,2)$

б) $\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\right)$

д) $\left(-\frac{3}{5} + 2,2\right) \cdot \left(\frac{5}{9} - 0,(3)\right)$

з) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 2,8$

в) $-14 : \left(4\frac{1}{2} \cdot 0,(4) - \frac{1}{4}\right)$

е) $-\frac{5}{8} + 3,2 : \left(-1\frac{3}{5} - 2,4\right)$

и) $\left(-\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3} - 3\right) : 0,1(2)$

- 12 Найдите значение выражения.

ОБРАЗЕЦ $\frac{0,1 - 1\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4} + 0,25}$

Решение

Объяснение

$$\frac{0,1 - 1\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4} + 0,25} = \left(0,1 - 1\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{3}{4} + 0,25\right) = 2,8$$

Дробь можно заменить делением: $\frac{a}{b} = a : b$

1 $0,1 - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{10} - 1\frac{1}{2} = \frac{2}{20} - 1\frac{10}{20} = -1\frac{8}{20} = -1,4$

Последовательно выполняются действия и находится значение выражения.

2 $-\frac{3}{4} + 0,25 = -0,5$

3 $-1,4 : (-0,5) = 2,8$

а) $\frac{-1,8}{0,6}$

в) $\frac{-5,2 + 2,2}{0,(3)}$

д) $\frac{0,1 - 1,15}{0,15}$

ж) $\frac{0,4 - 1,5}{0,(2)}$

и) $\frac{1,54 + 3,06}{3,2 - 5,5}$

б) $\frac{0,4}{-\frac{2}{3}}$

г) $\frac{0,3 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{9}\right)}$

е) $\frac{1\frac{2}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 0,(2)}$

з) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}$

к) $\frac{0,2 - 1}{\frac{1}{5} + \frac{3}{2 + \frac{1}{2}}}$



Из истории математики

Слово "рациональный" происходит от латинского слова ratio, что переводится как "соотношение". Сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (при условии, что делитель не равен нулю) также являются рациональными числами. В отличие от натуральных и целых чисел рациональные числа обладают важным свойством: между любыми двумя рациональными числами всегда существует бесконечно много других рациональных чисел. Поэтому, используя единичный отрезок, можно измерить любое расстояние с любой точностью. Результат такого измерения выражается рациональным числом. Пифагорейцы (VI век до н.э.) считали, что законы природы можно выразить с помощью целых чисел и их соотношений. Иными словами, они полагали, что любую величину можно представить рациональным числом. Однако вскоре было обнаружено, что существуют числа, которые не являются рациональными. Такие числа получили название *иррациональных*. Например, число π является иррациональным ($\pi = 3,1415926535\ 8979323846\dots$).

Рациональное число

$$\frac{a}{b} \rightarrow \text{Целое число}$$

$$\frac{a}{b} \rightarrow \text{Целое число}$$

- 13 Найдите значение выражений при заданных значениях переменных.

$$-\frac{2}{3}a + 0,7b$$

при $a = 0,8$ и $b = -\frac{2}{3}$

$$\frac{3}{4}(x - 1\frac{1}{6}) + 0,2y$$

при $x = -\frac{5}{6}$ и $y = -0,5$

$$-\frac{1}{2}(m + 0,5) + 0,7n$$

при $m = -1\frac{1}{2}$ и $n = 0,3$

- 14 Решите уравнения.

а) $1,4x + 4,2 = -3,6$

г) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = x + 2$

ж) $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} - 2x) = 0,6$

б) $1,5 - \frac{2}{3}x = 0,8 + x$

д) $x : 0,2 + 3,2 = 0,4$

з) $(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}) : 4,5 = 0$

в) $-1,1 \cdot (1 - \frac{2}{3}x) = 0$

е) $2 : (0,3x + 1) = -2,5$

и) $0,3 + (\frac{1}{5} - \frac{1}{4}x) \cdot 2,3 = \frac{1}{3}$

- 15 Для того, чтобы записать $0,4(5)$ в виде обыкновенной дроби, Анар составил уравнение и решил его. Как можно объяснить метод решения Анара? Проверьте правильность ответа несколькими способами.

$$x = 0,4555\dots$$

$$10x = 4,555\dots$$

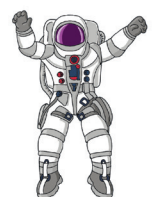
$$10x = 4\frac{5}{9}$$

$$x = 4\frac{5}{9} : 10 = \frac{41}{90}$$

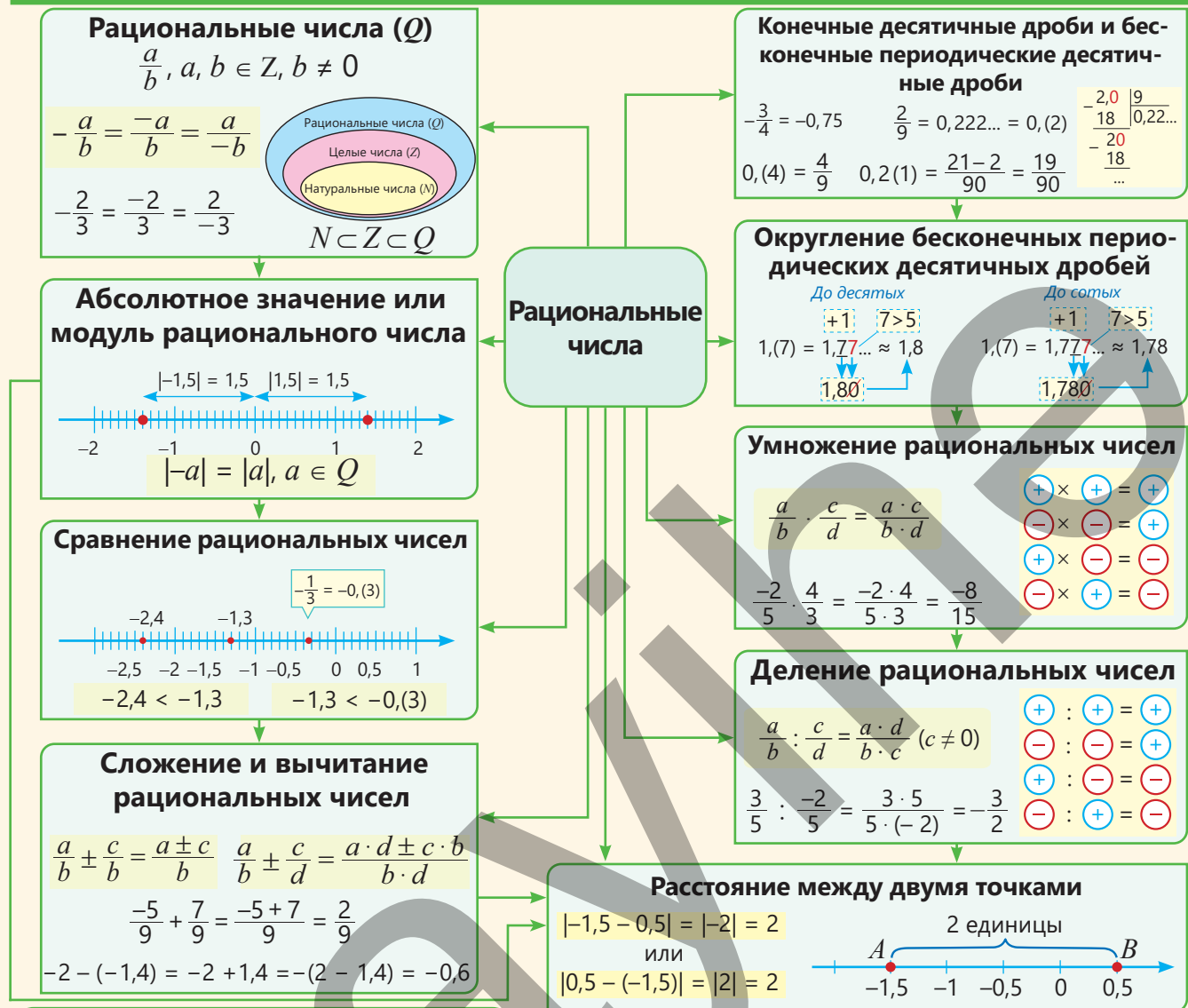


Решение задач

- 16 В развлекательном центре в комнате "кривых зеркал" человек в зеркале выглядит в $1,4$ раза выше. Рост Самира составляет 162 см. Как будет выглядеть Самир в этом зеркале?
- 17 Длина прямоугольной клумбы составляет $14,6$ м, а ширина $0,1(63)$ части от длины. Какова площадь этой клумбы в квадратных метрах?
- 18 Отношение веса тела на Луне к весу на Земле составляет $0,1(6)$, а отношение веса тела на Марсе к весу на Земле $0,3(7)$.
- Если вес космонавта на Земле составляет 800 Н, то каким его вес будет на Луне?
 - Если вес космонавта на Марсе составляет 510 Н, то каким его вес будет на Земле?



ЗАКЛЮЧЕНИЕ



ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Впишите подходящие числа в пустые клетки.

$$\frac{-24}{36} = \frac{\square}{3} = -\frac{10}{\square}$$

$$\frac{39}{-52} = \frac{\square}{4} = -\frac{9}{\square}$$

$$-\frac{2}{5} = \frac{\square}{20} = \frac{4}{\square}$$

$$-\frac{-32}{-48} = -\frac{2}{\square} = \frac{\square}{9}$$

2. Запишите дроби, равные данным числам, в соответствии с условием.

а) Дроби с знаменателем 12.

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{-4}$$

$$\frac{-7}{-6}$$

$$-3$$

б) Дроби с знаменателем 20.

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{7}{-5}$$

$$\frac{-14}{-40}$$

$$-2$$

3. Впишите подходящие целые числа в пустые клетки.

а) $-0,3 < \frac{\square}{15} < -0,2$

б) $\frac{1}{3} < \frac{2}{\square} < \frac{1}{2}$

4. Упорядочьте числа в порядке возрастания. Прочитайте слово по буквам, соответствующим каждому числу.

а)

$-\frac{32}{99}$	$-0,3$	$-0,3(4)$	$-\frac{32}{90}$
↓	↓	↓	↓
Р	К	А	П

б)

$-\frac{6}{11}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,36$	$-0,(7)$	$-0,(4)$
↓	↓	↓	↓	↓
И	Н	А	К	Г

5. Впишите подходящие цифры в пустые клетки.

$$2,(3) < 2,\square(5) < 2,(4)$$

$$-1,\square < -1,8\square < -1,(8)$$

$$-0,1\square < -0,\square8 < -0,1$$

6. Вычислите значения выражений и сравните их.

а) $-\frac{2}{3} + 1,(4)$ и $-1,4 \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$

б) $-2,(6) - \frac{1}{2}$ и $\left(-1\frac{2}{7}\right) : 0,(2)$

в) $2,1 : \left(-1\frac{2}{5}\right)$ и $-1\frac{5}{8} \cdot 2,4$

7. Вычислите.

а) $(2,8 - 1,6) : \left(-\frac{3}{5}\right)$

в) $-1,4 \cdot \left(-2\frac{3}{5} + 1,3\right)$

д) $\left(\frac{1}{2} - 0,8\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) - 1,(3)$

б) $0,3 : \left(1,3 - 2\frac{1}{4}\right)$

г) $\left(0,8 - \frac{7}{9}\right) : \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$

е) $|1,6 - 2,8| : \left|-\frac{3}{5}\right|$

8. Найдите значение выражения.

а) $\frac{-1,2 + 0,6}{0,(6)}$

б) $\frac{0,4}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$

в) $\frac{\frac{1}{4} - 0,5}{0,4 - \frac{3}{5}}$

г) $\frac{5,(3) - 1}{1 - \frac{1}{2} + 4}$

д) $\frac{3,5 - 5 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}}{\frac{1}{5} + 0,1}$

9. Вычислите удобным способом.

а) $-\frac{8}{9} + \left(-\frac{7}{9}\right) + \left(-\frac{6}{9}\right) + \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{3}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{1}{9}\right)$

б) $2,7 \cdot (-4,3) + 2,7 \cdot (-3,2) - 2,7 \cdot 2,5$

10. Впишите подходящие числа в пустые клетки.

$$0,(2) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \rightarrow \square + 0,5 \rightarrow \square : \left(-\frac{5}{6}\right) \rightarrow \square - (-1,4) \rightarrow \square$$

$$\square + \frac{2}{3} \rightarrow \square - \frac{3}{4} \rightarrow \square : \frac{1}{6} \rightarrow \square \times (-1) \rightarrow \square$$

11. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных.

а) $a = 0,4$ и $b = -\frac{1}{4}$
 $-\frac{3}{4}a + 0,6b$

б) $x = -\frac{3}{5}$ и $y = -0,2$
 $1\frac{1}{2}(x + 1) + 0,9y$

в) $m = 2\frac{3}{4}$ и $n = -0,5$
 $-1,1(m - 3) + 0,2n$

12. Решите уравнения.

а) $0,3x - 1,7 = -3,8$

в) $4 : x - \frac{1}{6} = -\frac{1}{4}$

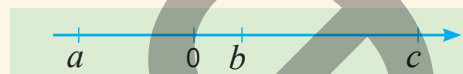
д) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - 5x\right) = 0,3$

б) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}x = 1,4$

г) $x : (-0,1) + 0,3 = 0,2$

е) $\left(\frac{4}{15}x + 0,2\right) : 0,6 = 0,1(6)$

13. На оси координат отмечены числа a, b, c . Здесь $|b| < |a| < |c|$. Определите, верны ли следующие утверждения. Обоснуйте свое мнение.



а) $a + c > 0$ б) $a - b < 0$ в) $a + b > 0$ г) $abc > 0$ д) $b + c > 0$ е) $b - c < 0$

14. Определите закономерность и запишите следующие два числа.

а) 2,(1) 3,(2) 4,(3) 5,(4) ...

б) 0,(2) 1,(4) 2,(6) 3,(8) ...

- Найдите разницу между соседними числами.
- Начиная со второго числа, проверьте, равно ли каждое число среднему арифметическому предыдущего и следующего чисел.

15. Айсберг, вершина которого находится на высоте 35,5 м над уровнем воды, имеет соотношение высоты над водой и глубины под водой как 1 : 9.

- Каково расстояние от вершины до самой глубокой точки этого айсберга?
- Запишите на вертикальной оси координату самой нижней точки айсберга, отсчитывая от уровня моря.



16. Основание коробки имеет форму квадрата со стороной $24\frac{1}{6}$ см. Поместится ли в эту коробку торт в форме цилиндра диаметром 24,(3) см?



17. Самир заполнил водой $\frac{7}{9}$ части однолитровой бутылки. Во время тренировки он выпил некоторое количество воды, и в бутылке осталась $\frac{1}{8}$ часть первоначального объёма. Сколько воды выпил Самир? Запишите ответ в виде десятичной дроби и округлите до тысячных.

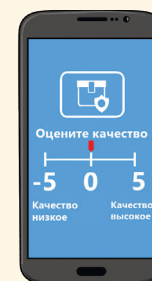


18. В сосуде содержалось 40 г соли. После использования некоторого количества в контейнере осталось 0,(3) части соли. Хватит ли соли в сосуде, если для эксперимента требуется 27,5 г соли? Сколько соли не хватит или будет в избытке?

19. В мобильном приложении качество доставки оценивается баллами от -5 до 5. За день различные курьеры получили следующие оценки.

2,4 3,6 4 0 -1,24 -1 3,2 -2

- Найдите среднее арифметическое этих данных.
- На основе значения среднего арифметического можно сделать вывод о качестве работы курьера. Обоснуйте свое мнение.



Математический калейдоскоп

1. Продолжите решение и вычислите. Решите пример из следующего пункта аналогичным способом.

а) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

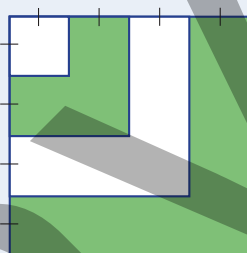
б) $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{11 \cdot 13} + \frac{2}{13 \cdot 15}$

2. В таблице показано количество красных и желтых шаров в каждом из 4-х мешков. Для какого мешка вероятность события, что случайно выбранный шар будет желтым будет самой высокой?

	1-й	2-й	3-й	4-й
Красные шары	4	3	8	5
Желтые шары	4	5	9	7



3. Площадь маленького квадрата равна 4 см². Какой процент площади всей фигуры составляет площадь зеленой части?



4. Среди 27 одинаковых металлических монет одна фальшивая, и она тяжелее остальных. Как можно определить фальшивую монету с помощью трех взвешиваний на весах?



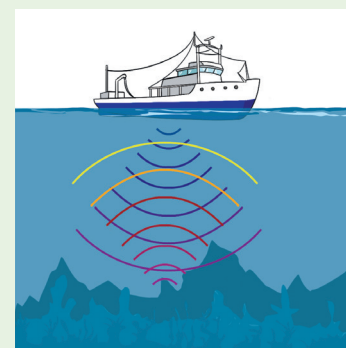
STEAM "ОКЕАНОЛОГИЯ"

Океанология – это наука, изучающая физические, химические и биологические процессы, происходящие в океане и его отдельных частях. Для определения глубины океанов используется система звуковой навигации SONAR (Sound Navigation and Ranging). С помощью этих систем определяется время, которое звук тратит на путь от поверхности воды до дна и обратно.

1. Вычислите, какова глубина океана в километрах, если скорость звука в воде равна 1449 м/с, время прохождения звуковых волн до дна океана и обратно составляет 1,(2) секунды.

2. Из Интернета найдите информацию о Мировом океане, его самых глубоких местах. Определите, сколько времени потребуется звуку, чтобы достичь океанского дна и вернуться обратно, используя систему SONAR в этих местах.

3. Исследуйте другие технологии для измерения глубины и подготовьте презентацию.



Степень с натуральным показателем и ее свойства

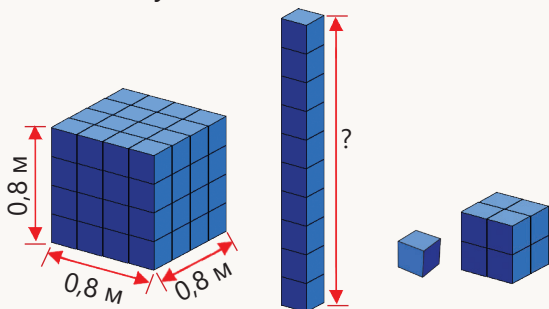
В этой главе вы научитесь:

- вычислять степень рационального числа;
- находить произведение и отношение степеней с одинаковым основанием;
- находить степень степени;
- возводить произведение и дробь в степень;
- решать задачи, связанные с расчётом сложного процента.

Попытайтесь!

Большой куб с ребром 0,8 м был собран из 64 маленьких кубиков одинакового размера.

- Какого будет высота башни, собранной из 10 маленьких кубиков, установленных друг на друга?
- Сколько кубических сантиметров составляет объем 1 маленького кубика?
- Во сколько раз объем куба, составленного из 8 маленьких кубиков, меньше объема большого куба? Как это определить, не вычисляя объемы кубов?



Скорость выполнения математических расчетов и точность результатов имеют большое значение. Для этого в решении задач из различных областей используется степень рациональных чисел. Например, при расчете годовых доходов по банковским вкладам, а также ежегодно изменяющейся стоимости оборудования и автомобилей с использованием сложных процентов применяется возведение в степень.

Выражения с возведением в степень часто встречаются при решении задач, связанных с финансами и экономикой, обработкой статистических данных, составлением прогнозов, а также в различных современных научных областях.



Предварительная проверка

1 Запишите в виде степени.

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

б) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

в) $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14$

2 Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных.

$a^3 + 7$ при $a = 3$

$b^4 + b^3 + 5$ при $b = -2$

$m^3 + m^2 - 3m$ при $m = -5$

3 Вычислите значение выражений.

а) $2 \cdot (-5)^3$

в) $9 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-11)^2$

д) $10 \cdot (-7)^2 + 2 \cdot (-3)^5 - 5 \cdot (-6)^2$

б) $4^3 \cdot (-3)$

г) $5 \cdot (-3)^4 - 2 \cdot (-5)^2$

е) $8 \cdot (-5)^3 - 12 \cdot (-5)^2 + 24 \cdot (-5)^1$

4 Сравните.

а) $(-5)^6$ и 5^6

в) $(-3)^2 + (-3)^3$ и $(-3)^3$

д) $(-5)^2 \cdot (-3)^4$ и $(-2)^7$

б) $(-2)^6$ и 3^4

г) $(-9)^2 - (-5)^3$ и $(-6)^3$

е) $(-2)^2 \cdot (-5)^4$ и 3^6

5 Решите уравнения.

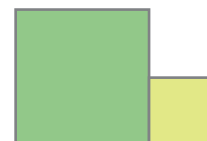
а) $4^3 \cdot x = 2^7 \cdot 5$

б) $5^4 : x = 2^5 + (-3)^3$

в) $(-6)^3 + 3^4 : x = (-5)^3 - 118$

6 Комбайнер выполнил работы по скашиванию на двух квадратных полях со сторонами a и b .

- Напишите выражение для вычисления общей площади скошенного поля.
- Вычислите площадь при $a = 100$ м, $b = 200$ м.



7 Клиент положил на банковский счет 2000 манатов. Если в конце каждого года сумма увеличивается на 10% от первоначальной суммы, то каков будет прирост в конце срока?

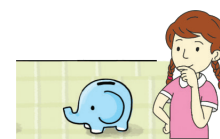
а) через 2 года

б) через 3 года

в) через 4 года

г) через 5 лет

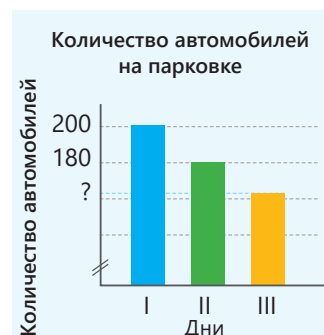
8 В копилке у Айнур было 50 манатов. Каждую неделю мама добавляет ей сумму, равную 10% от первоначальной суммы в копилке. Сколько денег будет в копилке через 3 недели?



9 Банк предлагает увеличение на один и тот же процент от первоначальной суммы для каждого следующего года. Клиент получил 200 манатов дохода за первый год с вложенных 2000 манатов. Каков будет его доход через 3 года?

10 На диаграмме представлена информация о количестве автомобилей, припаркованных в течение нескольких дней.

- На сколько процентов число автомобилей на парковке во второй день меньше, чем в предыдущий?
- Если в третий день число автомобилей уменьшится на тот же процент, что и во второй, сколько всего автомобилей было припарковано за три дня?

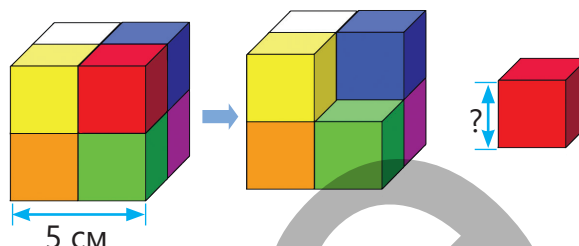


2.1. Степень с натуральным показателем

Исследование-обсуждение

Из одинаковых маленьких кубиков был собран большой куб, как показано на рисунке.

- Если длина ребра большого куба составляет 5 см, каков его объем?
- Какими двумя различными способами можно вычислить объем маленького куба?
- Какова площадь полной поверхности маленького куба?



Изучение Степень с натуральным показателем рационального числа

Произведение одинаковых множителей можно записать в виде степени.

$$\underbrace{(-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5)}_{3 \text{ множителя}} = (-0,5)^3$$

$$\underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}_{5 \text{ множителей}} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$\underbrace{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2}_{4 \text{ множителя}} = 0,2^4$$

- Произведение n множителей, каждый из которых равен рациональному числу a (где $n > 1$), называется n -й степенью числа a .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n$$

показатель степени
основание степени

Здесь a – рациональное число, а n – натуральное число.

Степень числа a с показателем 1 равна самому числу $a^1 = a$.

- Степень отрицательного числа с четным показателем будет положительной, а с нечетным показателем – отрицательной.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$



Подумай!

Как можно объяснить на примерах, что степени противоположных чисел с четными показателями равны, а с нечетными – противоположны? Обоснуйте свой ответ.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Задания

- 1 Запишите в виде степени. Укажите показатель и основание степени.

а) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$

в) $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$

д) $(-0,4) \cdot (-0,4) \cdot (-0,4)$

ж) $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$

б) $1\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{3}$

г) $\left(-2\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-2\frac{3}{5}\right)$

е) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$

з) $\left(-\frac{c}{d}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right)$

- 2 Вычислите.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

б) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$

в) $0,2^5$

г) $-0,2^4$

д) $1,4^3$

е) $(-0,8)^3$

ж) $(-1,2)^4$

3 Сравните.

$(-3)^2$ и $(-5)^3$	$0,2^2$ и $0,2^3$	0^{21} и $(-15)^3$	$(-\frac{1}{2})^6$ и $(-\frac{2}{3})^5$
$(\frac{1}{2})^2$ и $(\frac{1}{2})^3$	$(-0,2)^2$ и $(-0,2)^3$	$(-8)^2$ и 0^3	$(-7)^3$ и $(-2)^4$
$(-\frac{1}{2})^2$ и $(-\frac{1}{2})^3$	$(\frac{5}{3})^3$ и $(-\frac{5}{6})^4$	$(\frac{1}{2})^3$ и $(\frac{1}{3})^2$	$(-\frac{2}{5})^3$ и $(\frac{1}{2})^4$

4 Найдите степень смешанных чисел.

ОБРАЗЕЦ $(-1\frac{1}{3})^2$

Решение	Объяснение
$(-1\frac{1}{3})^2 = (\frac{-4}{3})^2 = (\frac{-4}{3}) \cdot (\frac{-4}{3}) = \frac{16}{9}$	Основание степени записывается в виде дроби, знаменатель которой натуральное число, и затем вычисляется степень.

а) $(2\frac{1}{3})^4$	б) $(3\frac{1}{2})^3$	в) $(-1\frac{3}{4})^4$	г) $(-5\frac{1}{2})^3$	д) $(-2\frac{1}{2})^3$
-----------------------	-----------------------	------------------------	------------------------	------------------------

5 Запишите выражение в виде произведения степеней.

ОБРАЗЕЦ $(-k) \cdot (-k) \cdot (-k) \cdot (-k) \cdot n \cdot n \cdot n$

Решение	Объяснение
$(-k) \cdot (-k) \cdot (-k) \cdot (-k) \cdot n \cdot n \cdot n = (-k)^4 \cdot n^3 = k^4 \cdot n^3$	Произведение множителей $(-k)$ записывается как $(-k)^4$, а произведение множителей n записывается как n^3 . При этом учитывается, что $(-k)^4 = k^4$.

а) $(-p) \cdot (-p) \cdot (-m) \cdot (-m) \cdot (-m)$	б) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d}$	в) $(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot m \cdot m \cdot m$
---	--	--

Изучение Вычисление значений выражений со степенью

• Для вычисления значений выражений со степенью сначала выполняется операция возведения в степень, а затем другие операции.

• В выражениях со скобками сначала выполняются операции в скобках, а затем другие операции в соответствующем порядке.

$$(-2\frac{1}{4})^2 : \frac{9}{32} = 18$$

$$① (-2\frac{1}{4})^2 = (\frac{-9}{4})^2 = \frac{81}{16}$$

$$② \frac{81}{16} : \frac{9}{32} = \frac{81}{16} \cdot \frac{32}{9} = 18$$

$$(125 \cdot (-0,2)^3 - (-\frac{3}{2})^5) \cdot (-2)^4 = 105\frac{1}{2}$$

$$① (-0,2)^3 = -0,008$$

$$④ -1 - (-\frac{243}{32}) = \frac{211}{32}$$

$$② (-\frac{3}{2})^5 = -\frac{243}{32}$$

$$⑤ (-2)^4 = 16$$

$$③ 125 \cdot (-0,008) = -1 \quad ⑥ \frac{211}{32} \cdot 16 = \frac{211}{2} = 105\frac{1}{2}$$

6 Найдите значение выражения.

а) $\left(-3\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{49}{16}$

г) $\frac{147}{25} : \left(-4\frac{1}{5}\right)^2$

ж) $(-5)^3 + 64 : \left(-1\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-5)^2$

б) $|(-0,8)^3| - 0,512$

д) $25 : \left(-\frac{1}{4}\right)^3 : (-10)^3$

з) $(-0,4)^3 + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 : (-10)^2$

в) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^2 \cdot (-5)^3 + 600$

е) $|(-3)^6| : \left(-1\frac{1}{2}\right)^4$

и) $(-0,5)^3 \cdot 2^6 - (6 \cdot 0,3 - 5)^3$

7 Какое из данных чисел может быть основанием степени? Определите и найдите подходящую степень.

а) $\square^\square = 16$ б) $\square^\square = -8$ в) $\square^\square = 32$

Основание степени: 2 -2

а) $\square^\square = \frac{1}{27}$ б) $\square^\square = -\frac{1}{27}$ в) $\square^\square = \frac{1}{81}$

Основание степени: $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$

8 Упорядочьте.

а) В порядке возрастания: $-5,4$ $5,4$ $(-5,4)^2$ $-5,4^2$

б) В порядке убывания: $-0,6$ $0,6$ $(-0,6)^3$ $(-0,6)^2$

9 Найдите значения выражений при заданных значениях переменной и заполните таблицу.

а)

x	1,5	-0,7	$\frac{2}{3}$
$2x^2$			
$(-x)^3$			

б)

y	-0,2	0,3	$-1\frac{1}{2}$
$3y^2 + 5$			
$y^2 - y^3$			

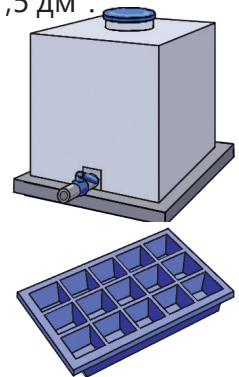
Решение задач

10 Полная площадь поверхности бака с водой в форме куба составляет $181,5 \text{ дм}^2$.

• Какова длина ребра этого бака?

4,5 см 5,5 см 5 дм 5,5 дм 6 дм

• Каков объем этого бака в литрах?



11 Объем воды при замерзании увеличивается на 10%. Ячейки для льда кубической формы имеют длину ребра 2,5 см. Если все ячейки заполнены водой, какой объем льда получится после замерзания?

12 В лаборатории исследуется радиоактивное вещество, которое распадается, теряя свою массу в 2 раза каждую минуту.

• Какова будет масса этого вещества через 2 минуты, если начальная масса составляет 64 г?

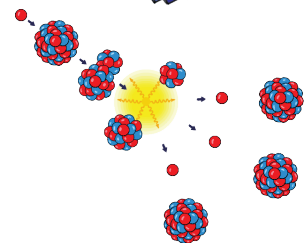
• С помощью какого выражения можно вычислить массу вещества через 5 минут?

$64 - 5 \cdot 2$

$64 : 2^5$

$64 : 5^2$

• Составьте таблицу и найдите, через сколько минут масса вещества станет 0,5 г.



2.2. Умножение и деление степеней

Исследование-обсуждение

Для сборки мозаики прямоугольной формы Самир использовал квадраты с длиной стороны, равной единице.

- Как можно найти площадь полученной фигуры, выразив ее стороны через степень числа 2?
- Можно ли выразить эту площадь в виде степени?



Ключевые слова

- умножение степеней
- отношение степеней
- степень степени

Изучение Умножение степеней с одинаковыми основаниями

Для упрощения записи выражений, содержащих степени, и вычисления их значений, используются свойства степеней. Например, произведение степеней с одинаковыми основаниями можно записать в более простой форме.

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{2 \text{ множителя}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{4 \text{ множителя}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{2 + 4 = 6 \text{ множителей}} = 3^6$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается неизменным.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Действительно:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m} = a^{n+m}$$



Подумай!

Как можно записать произведение $a^n \cdot a^m \cdot a^k$ в виде степени числа a ? Объясните на примерах.

Задания

1 Запишите произведение в виде степени.

а) $7^3 \cdot 7^5$

в) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$

д) $\left(-\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^5$

ж) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)$

б) $(-13)^2 \cdot (-13)^4$

г) $(0,4)^3 \cdot (0,4)^6$

е) $(-1,3)^7 \cdot (-1,3)^8$

з) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right)^5$

2 Вычислите значение выражения двумя способами.

а) $2^3 \cdot 2^2$

б) $(-1)^9 \cdot (-1)^8$

в) $(-4)^2 \cdot (-4)^1$

г) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$

д) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$

3 Упростите.

а) $n^4 \cdot n^6$

в) $p^{11} \cdot p^{12} \cdot p^{22}$

д) $(-m)^5 \cdot (-m)^{11}$

ж) $\left(\frac{a}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^7$

б) $(-x)^5 \cdot (-x)^4$

г) $s^3 \cdot s^4 \cdot s$

е) $(ab)^4 \cdot (ab)$

з) $(-n)^5 \cdot (-n)^3 \cdot (-n)^6$

- 4 Запишите произведение в виде степени, используя свойство степеней с одинаковым основанием

ОБРАЗЕЦ $5^2 \cdot 125$

Решение	Объяснение
$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ $5^2 \cdot 125 = 5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$	Число 125 записывается в виде степени числа 5. Поскольку основания одинаковые, основание остается неизменным, а степени складываются.

а) $2^3 \cdot 4$	в) $(-2)^6 \cdot (-8)$	д) $(-4)^3 \cdot (-64)$	ж) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{27}$	и) $0,4^2 \cdot 0,064$
б) $9 \cdot 3^3$	г) $-125 \cdot (-5)^7$	е) $49 \cdot 7^4 \cdot 7$	з) $\frac{9}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$	к) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{9}$

- 5 Упростите выражение. Вычислите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $a^2 \cdot a^3$
 $a = 2; 0,3$

б) $x^3 \cdot x$
 $x = -3; 0,2$

в) $m^3 \cdot m^4$
 $m = -2; -\frac{1}{2}; 0$

г) $y \cdot y^2 \cdot y$
 $y = -1; 1\frac{1}{3}$

- 6 Сравните устно.

а) 5^5 и $5^4 \cdot 5^3$

в) $(-3)^2 \cdot (-3)^3$ и $(-3)^4$

д) $(-5,1)^2 \cdot (-5,1)^4$ и $(-5,1)^7$

б) $6^2 \cdot 6^3$ и 6^4

г) $(-8)^2 \cdot (-8)^3$ и $(-8)^6$

е) $\left(-\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^5$ и $\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^5$

- 7 Запишите данное выражение в виде произведения степеней, сохраняя основание неизменным. Приведите четыре примера.

ОБРАЗЕЦ 5^7

Решение	Объяснение
$5^7 = 5^{1+6} = 5 \cdot 5^6$ $5^7 = 5^{2+5} = 5^2 \cdot 5^5$ $5^7 = 5^{3+4} = 5^3 \cdot 5^4$ $5^7 = 5^{1+2+4} = 5 \cdot 5^2 \cdot 5^4$	Показатель степени представляется в виде суммы нескольких натуральных чисел. Записывается в виде произведения степеней.

а) 2^{10}	б) $(-5)^{15}$	в) $0,7^{12}$	г) $(-0,5)^5$	д) $\left(-\frac{4}{5}\right)^8$	е) $\left(5\frac{2}{3}\right)^6$
-------------	----------------	---------------	---------------	----------------------------------	----------------------------------

- 8 Впишите подходящие числа в пустые клетки так, чтобы равенство было верным.

$2 \cdot 2^2 = 2^5$

$5 \cdot 5^{\square} = 5^4$

$0,3^2 \cdot 0,3^5 = 0,3^{\square}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\square} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

$4^3 \cdot 4^3 = 4^4 \cdot 4^{\square}$

- 9 Впишите подходящие числа в пустые клетки.

ОБРАЗЕЦ $32 \cdot 16 = 2^{\square}$

Решение	Объяснение
$32 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^9$	Каждый множитель записывается в виде степени числа 2 и показатели степеней складываются.

$9 \cdot 27 = 3^{\square}$	$25 \cdot 125 = 5^{\square}$	$81 \cdot 27 = 3^{\square}$	$2^{\square} \cdot 16 = 2^8$	$36 \cdot 6^{\square} = 6^7$
----------------------------	------------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

Изучение Деление степеней с одинаковыми основаниями

- Отношение степеней с одинаковыми основаниями также можно упрощать.

$$2^5 : 2^2 = \frac{2^5}{2^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается неизменным.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Здесь $m > n$ и $a \neq 0$. Действительно:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^n \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{m-n}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m-n} = a^{m-n}$$

- Поскольку $a^n : a^n = 1$ и $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$ при $n = m$, то $a^0 = 1$ ($a \neq 0$). Например:

$$5^0 = 1 \quad 0,1^0 = 1 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \quad (-2)^0 = 1 \quad (-1,7)^0 = 1$$

- 10 Запишите частное в виде степени ($a \neq 0, b \neq 0$).

а) $a^{12} : a^4$

в) $b^{32} : b^{25}$

д) $a^{22} : a^{13}$

ж) $(-b)^9 : (-b)^3$

б) $23^7 : 23^4$

г) $(-0,3)^9 : (-0,3)^3$

е) $\left(\frac{1}{9}\right)^{22} : \left(\frac{1}{9}\right)^{10}$

з) $\left(-\frac{11}{15}\right)^{22} : \left(-\frac{11}{15}\right)^{21}$

- 11 Найдите значение выражения.

а) $\frac{6^5}{6^4}$

в) $(-3)^7 : (-3)^4$

д) $\frac{5^8}{5^6}$

ж) $\left(-\frac{1}{5}\right)^7 : \left(-\frac{1}{5}\right)^5$

и) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{11} : \left(-2\frac{1}{3}\right)^8$

б) $7^4 : 7^2$

г) $(-2)^6 : (-2)^2$

е) $\frac{(-7)^9}{-7^7}$

з) $\left(-\frac{2}{7}\right)^9 : \left(-\frac{2}{7}\right)^7$

к) $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{10} : \left(-3\frac{1}{2}\right)^7$

- 12 Найдите значение выражения.

ОБРАЗЕЦ $\frac{4^6 \cdot 4^3}{4^7}$

Решение

$$\frac{4^6 \cdot 4^3}{4^7} = \frac{4^{6+3}}{4^7} = \frac{4^9}{4^7} = 4^{9-7} = 4^2 = 16$$

Объяснение

Выражение в числителе дроби записывается как степень с одинаковым основанием. Находится отношение степеней с одинаковыми основаниями.

а) $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4}$

б) $\frac{3^4 \cdot 3^3}{3^6}$

в) $\frac{5^4 \cdot 5^7}{5^5 \cdot 5^6}$

г) $\frac{(-6)^4 \cdot (-6)^7}{(-6)^{11}}$

д) $\frac{7^3 \cdot 7^6 \cdot 7^5}{7^8 \cdot 7^4}$

е) $\frac{2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2}$

- 13 Впишите подходящее число в пустую клетку.

а) $7^{\square} \cdot 7^8 = 7^{19}$

в) $8^{17} : 8^{\square} = 8$

д) $11^{17} : 11^{\square} = 11^{22} : 11^{12}$

б) $9^5 \cdot 9^{\square} = 9^8$

г) $6^{13} : 6^{\square} = 6^5$

е) $5^{12} \cdot 5^{\square} = 5^{22} : 5^2$

Изучение Возведение степени в степень

В некоторых случаях основание степени само является степенью числа. Тогда выражение можно записать в виде степени этого числа. Например:

$$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6$$

При возведении степени в степень основание остается неизменным, а показатели перемножаются.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Действительно:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = a^{m+m+\dots+m} = a^{m \cdot n}$$

Используя формулу $(a^m)^n = (a^n)^m$, можно доказать это равенство.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m \rightarrow (a^m)^n = (a^n)^m$$



Подумай!

Как с помощью формулы показать, что $((a^m)^n)^k = a^{mnk}$? Приведите примеры.

14 Упростите.

а) $(2^4)^5$

б) $(3^5)^6$

в) $((-3)^7)^4$

г) $((-0,3)^5)^2$

д) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^2$

е) $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right)^4$

15 Запишите в виде степени x .

а) $(x^4)^6$

б) $(x^5)^3$

в) $(x^4)^6$

г) $(x^4 \cdot x^7)^3$

д) $(x^5 \cdot x^8)^2$

е) $(x^5 \cdot x^4 \cdot x^9)^3$

16 Вычислите.

а) $(2^3)^2$

б) $(3^3)^2$

в) $((-3)^2)^3$

г) $((-0,5)^2)^2$

д) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2$

е) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^2$

17 Упростите выражение ($m \neq 0$).

а) $x^2 \cdot (x^3)^5$

б) $x^5 \cdot (x^4)^6$

в) $m^8 : (m^3)^2$

г) $(x^8)^3 \cdot (x^3)^7$

д) $(m^{10})^3 : (m^4)^2$

18 Впишите подходящее число в пустую клетку.

ОБРАЗЕЦ $(6^3)^{\square} = 6^{15}$

Решение

$$(6^3)^{\square} = 6^{15}$$

$$3 \cdot \square = 15 \rightarrow \square = 5$$

$$(6^3)^5 = 6^{3 \cdot 5} = 6^{15}$$

Объяснение

Согласно свойству возведения степени в степень, подходящее число в пустой клетке равно 5.

Подставив число 5 в пустую клетку, можно проверить результат.

а) $(7^{14})^{\square} = 7^{28}$

б) $(5^{\square})^4 = 5^{20}$

в) $(3^6)^2 = 3^{\square} \cdot 3^5$

д) $((4^2)^{\square})^4 = 4^{40}$

е) $(x^{14})^{\square} = x^{70}$

19 Запишите число 2^{24} в виде степени заданного выражения.

а) 2^2

б) 2^3

в) 2^8

г) 2^{12}

д) 16

е) 64



Исправь ошибку!

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 \quad 5^4 \cdot 5^3 = (5 + 5)^{4+3} = 10^7 \quad 7^4 \cdot 7^5 = (7 \cdot 7)^{4+5} = 49^9 \quad (6^3)^2 = 6^{3+2} = 6^5$$

20 Вычислите.

а) $\frac{(2^2)^4}{2^7}$

б) $\frac{(5^7)^3 \cdot 5}{5^{18}}$

в) $\frac{7^3 \cdot (7^3)^3}{7^{10}}$

г) $\frac{6 \cdot 6^8}{(6^2)^3}$

д) $\frac{(11^2)^5 \cdot 11^8}{11^4 \cdot (11^3)^4}$

21 Вычислите значение выражения.

ОБРАЗЕЦ $\frac{25^3 \cdot 5^2}{125 \cdot 5^4}$

Решение

$$\frac{25^3 \cdot 5^2}{125 \cdot 5^4} = \frac{(5^2)^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{5^6 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{5^{6+2}}{5^{3+4}} = \frac{5^8}{5^7} = 5^{8-7} = 5^1 = 5$$

Объяснение

Все степени записываются с основанием 5.

Используя свойства степеней, выражение упрощается и находится его значение.

а) $\frac{4^3 \cdot 2^8}{2^{12}}$

б) $\frac{81 \cdot 3^5}{3^6}$

в) $\frac{25 \cdot 5^{11}}{5^{12}}$

г) $\frac{(-7)^5 \cdot 49^2}{(-7)^3 \cdot (-7)^4}$

д) $\frac{9^3 \cdot 3^5}{27^2 \cdot 3^4}$

е) $\frac{16^3 \cdot 2^7}{4^5 \cdot 2^6}$

22 Решите уравнения.

а) $x \cdot 2^3 = 2^8$

в) $3^5 \cdot x = 3^8$

д) $x \cdot 5^7 : 5^2 = 5^5$

ж) $6^{37} : 6^{32} \cdot x = 6^8$

б) $x : 3^4 = 3^2$

г) $5^{15} : x = 5^{13}$

е) $x \cdot 9^{17} \cdot 9^{13} = 9^{32}$

з) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot x = \left(\frac{2}{3}\right)^{14}$

Решение задач

23 В бак через каждые из двух труб за 1 минуту поступает 2^4 литра воды.

- Сколько воды поступит в бак за 1 минуту, если обе трубы работают одновременно?

- За сколько минут наполнится пустой бак объемом 2^{13} литров, если обе трубы работают одновременно?

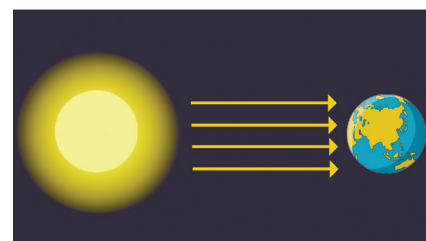
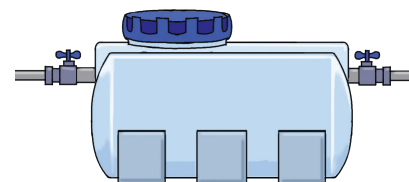
24 Расстояние от Солнца до Земли составляет $15 \cdot 10^{10}$ м, а скорость света равна $3 \cdot 10^8$ м/с. За какое время солнечный свет достигает Земли?

25 Единица измерения памяти компьютера: 1 Гб = 2^{30} байтов. На рисунке приведены данные о размере общей памяти диска C: компьютера и объеме свободного места.

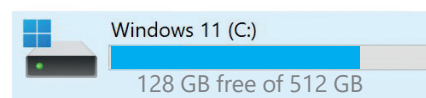
Ответы на вопросы запишите в виде степени.

- Каков общий объем памяти диска C: в байтах?

- Каков объем свободного места на диске C: в байтах, согласно рисунку?



Hard Disk Drives



2.3. Степень произведения и дроби

Исследование-обсуждение

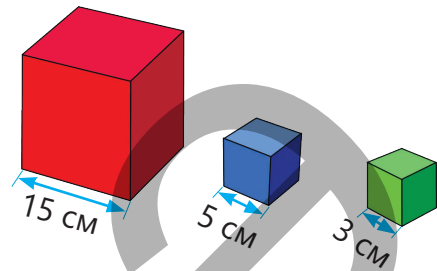
Во сколько раз объем куба с длиной ребра 15 см больше объема кубов с длиной ребра 5 см и 3 см? Как это можно найти, используя степень?

- Если длина ребра одного куба равна b , а другого $2b$, то во сколько раз их объемы различаются?
- Какая связь существует между отношением длины ребер двух кубов и отношением их объемов?



Ключевые слова

- степень произведения
- степень дроби



Изучение Возведение произведения в степень

Степень произведения двух чисел можно найти как произведение их степеней.

$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2$$

При возведении произведения в степень каждый множитель возводится в эту степень, а результаты перемножаются.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Действительно:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_n \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_n = a^n \cdot b^n$$

Также верно и обратное правило.

Чтобы найти произведение степеней с одинаковыми показателями, произведение оснований возводится в эту же степень.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$



Подумай!

Как доказать равенство $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$? Объясните на примерах.

Задания

- 1 Запишите выражение в виде произведения степеней.

ОБРАЗЕЦ $(5 \cdot b^2)^7$

Решение		Объяснение		
$(5 \cdot b^2)^7 = 5^7 \cdot (b^2)^7 = 5^7 \cdot b^{14}$		Используя свойства степеней, степень произведения записывается в виде произведения степеней.		
а) $(7 \cdot 6)^8$	в) $((-2) \cdot (-5))^7$	д) $(0,7 \cdot 1,5)^5$	ж) $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)^5$	и) $(3 \cdot a^2 \cdot b)^3$
б) $(5 \cdot a)^6$	г) $(2 \cdot 3^2)^4$	е) $(k \cdot f)^6$	з) $(s^2 \cdot t)^3$	к) $((-p) \cdot (-q) \cdot r)^{10}$

- 2 Запишите произведение в виде степени.

а) $n^5 \cdot m^5$

б) $(-x)^3 \cdot (-y)^3$

в) $a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$

г) $(-x)^3 \cdot (-y)^3 \cdot (-z)^3$

3 Найдите значение выражения.

а) $5^3 \cdot 6^3$

в) $(-7)^2 \cdot (-3)^2$

д) $(1,4)^3 \cdot 0,5^3$

ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$

б) $2^4 \cdot 3^4$

г) $(-5)^3 \cdot (-2)^3$

е) $2,5^4 \cdot (-0,4)^4$

з) $(-0,8)^3 \cdot (-5)^3$

4 Впишите подходящие числа в пустые клетки.

$4^{\square} \cdot 3^4 = 12^4$

$20^{\square} = 4^3 \cdot 5^3$

$(-0,3)^7 \cdot 10^7 = \square^7$

$0,5^5 \cdot \square^5 = 1$

5 Запишите выражение в виде степени произведения и вычислите.

ОБРАЗЕЦ $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{16}{25}$

Решение

$$\frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5}\right)^2 = (-2)^2 = 4$$

Объяснение

Второй множитель записывается в виде степени.

Произведение степеней записывается как степень произведения. Выражение внутри скобок упрощается и находится ответ.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 6^4$

б) $2^3 \cdot 27$

в) $(-3)^2 \cdot 25$

г) $(-2)^3 \cdot (-32)$

д) $\frac{1}{9} \cdot (-18)^2$

Изучение Возведение дроби в степень

Чтобы возвести дробь в степень, можно использовать определение степени и правило умножения дробей.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

Для нахождения степени дроби числитель и знаменатель возводятся в эту же степень.

Действительно:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n} = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

Также верно и обратное правило.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$$

6 Запишите степень в виде дроби.

а) $\left(\frac{5}{6}\right)^{17}$

б) $\left(\frac{3}{-5}\right)^6$

в) $\left(\frac{m}{2}\right)^5$

г) $\left(\frac{x^2}{5}\right)^2$

д) $\left(\frac{3k}{2}\right)^3$

е) $\left(\frac{-y}{7}\right)^6$

7 Впишите подходящие числа или переменные в пустые клетки.

$\frac{8^3}{24^3} = \left(\frac{\square}{3}\right)^3$

$\left(\frac{6}{\square}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$

$\frac{m^6}{5^3} = \left(\frac{m^{\square}}{5}\right)^3$

$\left(\frac{n^4}{2^5}\right)^{\square} = \frac{n^{\square}}{2^{15}}$

$\frac{a^{12}}{7^8} = \left(\frac{a^{\square}}{7^4}\right)^{\square}$

8 Вычислите.

ОБРАЗЕЦ

$$\frac{(-15)^3}{5^3}$$

Решение

$$\frac{(-15)^3}{5^3} = \left(\frac{-15}{5}\right)^3$$

$$\left(\frac{-15}{5}\right)^3 = (-3)^3 = -27$$

Объяснение

Числитель и знаменатель имеют одинаковый показатель степени, поэтому выражение можно записать как степень дроби. Основание степени вычисляется, после чего находится степень полученного числа.

а) $\frac{12^3}{4^3}$

б) $\frac{14^6}{7^6}$

в) $\frac{32^3}{8^3}$

г) $\frac{(-33)^2}{11^2}$

д) $\frac{80^4}{(-40)^4}$

е) $\frac{(-50)^3}{(-20)^3}$

9 Вычислите.

а) $\frac{13^6 \cdot 2^6}{26^5}$

в) $\frac{7^8 \cdot 5^8}{(-35)^7}$

д) $\frac{25^3 \cdot 14^2}{49 \cdot 50^2}$

ж) $\frac{(-50)^3 \cdot 2^3}{(-25)^3 \cdot 4^3}$

и) $\frac{2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{19}}{6^{19}}$

к) $\frac{5^{12} \cdot 2^{12}}{2^{10} \cdot 5^8 \cdot 25}$

б) $\frac{12^3 \cdot 5^2}{6^3}$

г) $\frac{4^3 \cdot 7^2}{196}$

е) $\frac{12^5}{4^4 \cdot 3^5}$

з) $\frac{7^3 \cdot 3^2}{21^2}$

й) $\frac{6^8 \cdot 5^4}{9^4}$

л) $\frac{13^4 \cdot 6^3}{78^3}$

10 Упростите и сравните.

а) $(-1,4)^2 \cdot 5^2$ и $(-0,4)^0$

в) $(-0,2^3)^4 \cdot 5^{12}$ и $2^{17} \cdot 0,5^{17}$

д) $0,04^3 \cdot 25^3$ и $(-0,1)^2$

б) $\frac{(-27)^3}{(-9)^3}$ и $(-3)^5$

г) $\frac{(-0,125)^3}{(-0,025)^3}$ и $\frac{123^3}{41^3}$

е) $\frac{(-22)^5}{11^5}$ и $\frac{44^3}{(-11)^3}$

11 Упростите выражение и вычислите его значение, используя свойства степеней.

а) $(0,1a^2)^2$; $\left(\frac{1}{9}\right)^3 a^{12}$ при $a^4 = 81$

б) $\frac{a^9}{16^3}$; $\frac{a^{15}}{32^5}$ при $a^4 = 81$



Исправь ошибку!

$$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^{2+2} = 15^4$$

$$2^3 \cdot 7^3 = (2 + 7)^3 = 9^3$$

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$$

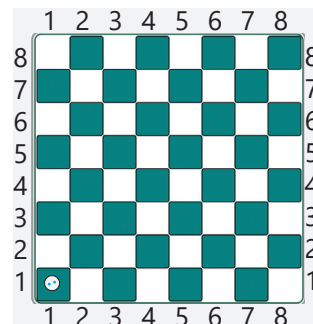
$$\left(-\frac{a}{3}\right)^4 = -\frac{a^4}{81}$$

Решение задач

12 Лала и Самир сыграли в следующую игру:

Они нарисовали на бумаге шахматную доску и обозначили координаты клеток числами. По правилам, в каждую клетку нужно "положить" пуговицы в количестве, равном квадрату произведения координат этой клетки. Например: в клетку (2; 3) кладут $(2 \cdot 3)^2$ пуговиц, в клетку (3; 4) кладут $(3 \cdot 4)^2$ пуговиц.

- Сколько пуговиц должно быть в клетке (2; 5)?
- В каких клетках будет 64 пуговицы?
- В каких клетках может быть 2^8 пуговиц?
- Сколько пуговиц должно быть в клетке (a; b)?
- Во сколько раз количество пуговиц в клетке (4; 8) больше, чем в клетке (2; 4)?



2.4. Вычисление сложного процента

Исследование-обсуждение

Клиент решил положить 10 000 манатов на вклад в банк на 2 года.

Банк предлагает два варианта.

1. Ежегодный прирост составляет 10% от первоначальной суммы вклада

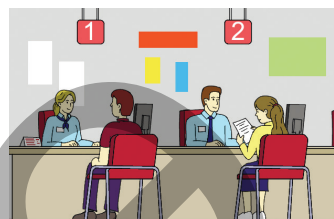
2. Ежегодный прирост составляет 10% от суммы, находящейся на счёте в конце предыдущего года

- Какой вариант окажется более выгодным для клиента через 2 года?
- Какова будет сумма на его счёте в этом случае?



Ключевые слова

- сложный процент



Изучение Вычисление сложного процента

Сумма вклада в банке увеличивается на определённый процент каждый год. На второй год процент начисляется на сумму, которая была на счёте в конце первого года, на третий год – на сумму в конце второго года и так далее. Такой способ начисления называется *вычислением сложных процентов*.

ОБРАЗЕЦ. Клиент положил на счёт в банке 2000 манатов под 10% годовых. Если каждый год к сумме на счёте прибавляется 10%, сколько денег будет на счёте клиента через 3 года?

Года	Сумма денег на счете в начале года (h)	Прирост (h)	Сумма денег на счете в конце года (h)
1	2000	10% от 2000 $\rightarrow \frac{2000 \cdot 10}{100} = 200$	$2000 + 200 = 2200$
2	2200	10% от 2200 $\rightarrow \frac{2200 \cdot 10}{100} = 220$	$2200 + 220 = 2420$
3	2420	10% от 2420 $\rightarrow \frac{2420 \cdot 10}{100} = 242$	$2420 + 242 = 2662$

Через 3 года на счете клиента будет 2662 маната.

- Конечную сумму можно найти и другим способом. При увеличении суммы на 10% она становится равной 110% от начальной. Поэтому для вычисления суммы на конец каждого года достаточно умножать начальную сумму на 1,1.

$$100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1,1$$

Таким образом, начальную сумму умножают на соответствующие степени числа 1,1, чтобы найти суммы на конец последующих лет.

1-й год. $2000 \cdot 1,1 = 2200$ (h)

2-й год. $(2000 \cdot 1,1) \cdot 1,1 = 2000 \cdot 1,1^2 = 2420$ (h)

3-й год. $(2000 \cdot 1,1^2) \cdot 1,1 = 2000 \cdot 1,1^3 = 2662$ (h)



Запомни!

В отличие от простого процента при расчете сложного процента прирост каждый год меняется.

Выражение $2000 \cdot 1,1^3$ можно вычислить с помощью научного калькулятора, нажимая на кнопки в этой последовательности.



2 0 0 0 $\times$ 1 , 1 x^y 3 =

Задания

- 1 Вычислите, используя сложный процент, сумму денег к концу указанного периода.

ОБРАЗЕЦ Первоначальная сумма — 1000 ман., годовой процентный рост — 20%, срок — 2 года.

Решение	Объяснение
$100\% + 20\% = 120\% = 1,2$ $1000 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1000 \cdot 1,2^2 =$ $= 1440 \text{ (ман)}$	Увеличение суммы на 20% означает увеличение в 1,2 раза. Начальная сумма последовательно умножается на 1,2 дважды, или $1,2^2$. Через два года сумма составит 1440 манатов.

- а) Первоначальная сумма — 3000 ман., годовой процентный рост — 30%, срок — 2 года
б) Первоначальная сумма — 5000 ман., годовой процентный рост — 10%, срок — 3 года
в) Первоначальная сумма — 10 000 ман., годовой процентный рост — 15%, срок — 2 года

- 2 В городе с населением 2 000 000 человек численность населения ежегодно увеличивается на 3% по сравнению с предыдущим годом. Какова будет численность населения в этом городе через 3 года?

- 3 Вкладчик положил 3000 манатов на вклад в банк под 20% годовых.
а) Сколько денег будет на счёте клиента через 2 года; 3 года?
б) Через сколько лет, как минимум, сумма на счёте превысит 6000 манатов?



Запомни!

В ряде случаев величина ежегодно уменьшается на определённый процент от значения в конце предыдущего года. В этом случае новое значение вычисляется по правилу сложных процентов.

ОБРАЗЕЦ. Цена автомобиля составляла 30 000 манатов, и каждый год она уменьшалась на 10% по сравнению с предыдущим годом. Какой будет цена автомобиля через 3 года?

Года	Цена автомобиля в начале года (т)	Уменьшение (т)	Цена автомобиля в конце года (т)
1	30 000	10% от 30 000 $\rightarrow \frac{30\,000 \cdot 10}{100} = 3000$	$30\,000 - 3000 = 27\,000$
2	27 000	10% от 27 000 $\rightarrow \frac{27\,000 \cdot 10}{100} = 2700$	$27\,000 - 2700 = 24\,300$
3	24 300	10% от 24 300 $\rightarrow \frac{24\,300 \cdot 10}{100} = 2430$	$24\,300 - 2430 = 21\,870$

Через 3 года цена автомобиля составит 21 870 манатов.

• Цену автомобиля можно вычислить и другим способом. При снижении цены на 10% новая стоимость равна 90% от предыдущей. Для определения цены автомобиля в конце каждого года его начальная цена умножается на 0,9.

$$100\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100} = 0,9$$

Умножая начальную цену на соответствующую степень числа 0,9, можно найти цену автомобиля на конец каждого года.

1-й год. $30\,000 \cdot 0,9 = 27\,000 \text{ (т)}$

2-й год. $(30\,000 \cdot 0,9) \cdot 0,9 = 30\,000 \cdot 0,9^2 = 24\,300 \text{ (т)}$

3-й год. $(30\,000 \cdot 0,9^2) \cdot 0,9 = 30\,000 \cdot 0,9^3 = 21\,870 \text{ (т)}$

- 4 Ответьте на вопросы, вычислив сложный процент.

ОБРАЗЕЦ Оборудование компании, занимающейся производством, дешевеет на 10% в конце каждого года. Какова будет стоимость оборудования через 3 года, если его первоначальная стоимость составляет 100 000 манатов?

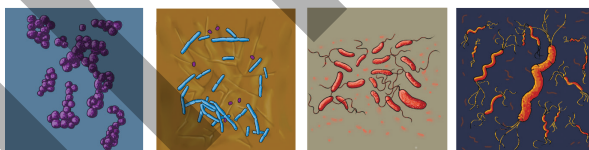
Решение	Объяснение
$100\% - 10\% = 90\% = 0,9$.	Если цена ежегодно снижается на 10% от стоимости предыдущего года, то для нахождения стоимости через 1 год нужно умножить предыдущую цену на 0,9.
$100\ 000 \cdot 0,9^3 = 72\ 900$	Чтобы рассчитать стоимость через 3 года, первоначальную цену нужно умножить последовательно 3 раза на 0,9, или на 0,9 в кубе.
Ответ: 72 900 ман	

а) Клиент купил товар стоимостью 2000 манатов в кредит. Каждый месяц он выплачивает 20% от оставшегося долга. Сколько он будет должен магазину через 3 месяца?

б) Тираж газеты ежемесячно уменьшается на 10% по сравнению с предыдущим месяцем. Если в марте тираж составил 25 000 экземпляров, то каким будет тираж газеты в июне?

Решение задач

- 5 В определенной среде количество микроорганизмов увеличивается каждый час на 10% по сравнению с предыдущим. Если первоначально было 100 000 микроорганизмов, то сколько их станет через 3 часа?



- 6 Цена мобильного телефона, изначально стоившего 1600 ₴, ежегодно уменьшается на 5%. Какова будет цена телефона через 4 года?



- 7 Клиент положил 10 000 манатов на вклад в банк на 3 года. Через год на его счете стало 11 500 манатов. Если сумма ежегодно увеличивается на один и тот же процент по сравнению с предыдущим годом, то сколько манатов будет на счете через 3 года?

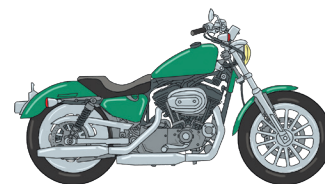
- 8 В магазине продаются обои двух типов: А и В. Цена рулона обоев типа А увеличивалась каждый месяц на 20% от цены предыдущего месяца и через 2 месяца стала равна 144 манатам. Цена рулона обоев типа В увеличивалась каждый месяц на 20% от начальной цены и через 2 месяца составила 168 манатов. У какого типа обоев была выше начальная цена?



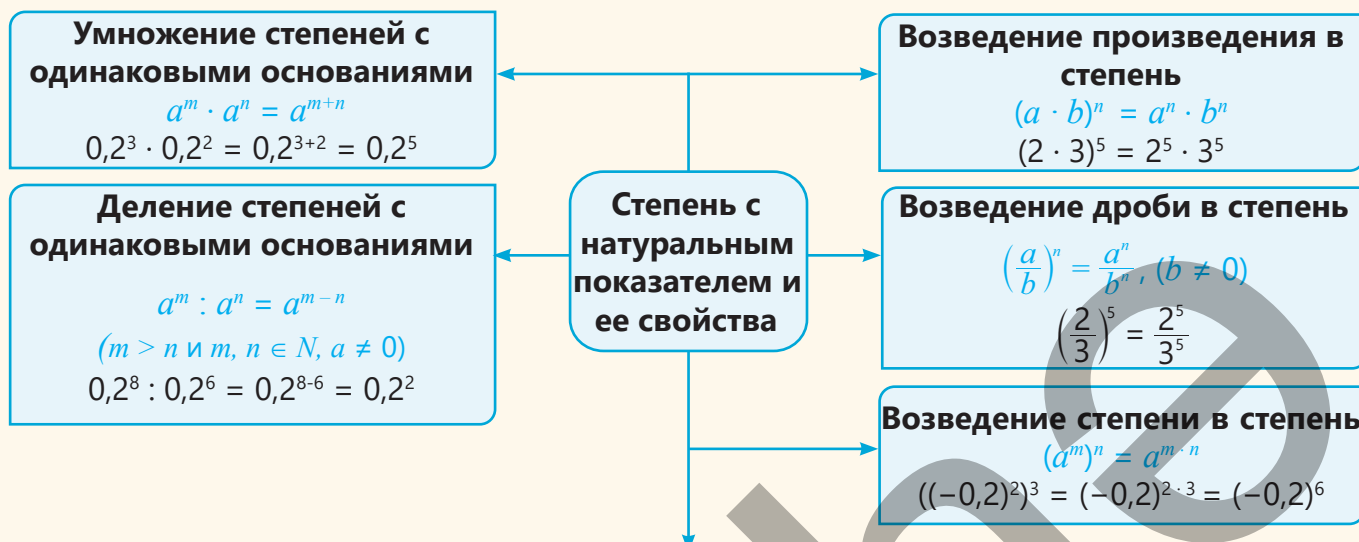
- 9 Акции компании ежегодно увеличиваются в цене на 30% по сравнению с предыдущим годом. Акционер приобрел акции на 2000 манатов.
- Какова будет стоимость акций через 2 года?
 - В следующие 2 года стоимость акций ежегодно снижалась на 30% от предыдущей стоимости. Какова будет стоимость акций через 2 года?
 - Стала ли стоимость акций выше или ниже первоначальной? На сколько процентов?



- 10 Первоначальная цена мотоцикла составляла 15 000 манатов. В первые два года его стоимость ежегодно уменьшалась на 6% по сравнению с предыдущим годом, а в следующие два года — на 10% ежегодно по сравнению с предыдущим годом. Найдите цену мотоцикла через 4 года



ЗАКЛЮЧЕНИЕ



Вычисление сложного процента

Года	Сумма денег на счете в начале года (руб)	Прирост (руб)	Сумма денег на счете в конце года (руб)
1	2000	10% от 2000 $\rightarrow \frac{2000 \cdot 10}{100} = 200$	2000 + 200 = 2200
2	2200	10% от 2200 $\rightarrow \frac{2200 \cdot 10}{100} = 220$	2200 + 220 = 2420
3	2420	10% от 2420 $\rightarrow \frac{2420 \cdot 10}{100} = 242$	2420 + 242 = 2662

1. $2000 \cdot 1,1 = 2200$ (руб)

2. $(2000 \cdot 1,1) \cdot 1,1 = 2000 \cdot 1,1^2 = 2420$ (руб)

3. $(2000 \cdot 1,1^2) \cdot 1,1 = 2000 \cdot 1,1^3 = 2662$ (руб)

При вычислении сложного процента прирост меняется для каждого периода.

Решение исходной задачи

Из 64 одинаковых маленьких кубиков составлен большой куб, вдоль каждой грани которого размещаются 4 маленьких кубика.

- Определяется длина ребра каждого маленького кубика. $0,8 : 4 = 0,2$ (м).
- Определяется высота башни из 10 маленьких кубиков. $0,2 \cdot 10 = 2$ (м)
- Определяется объем одного маленького кубика.

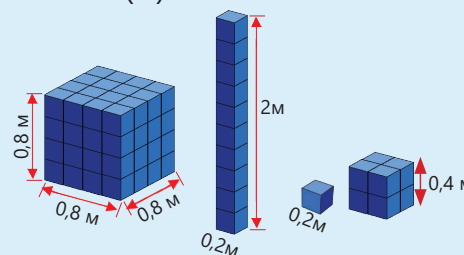
$$V = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008 \text{ (м}^3\text{)} = 8000 \text{ см}^3$$

- Определяется объем большого кубика. $V_1 = 0,8^3 \text{ (м}^3\text{)}.$

Для нахождения объема куба, составленного из 8 маленьких кубиков, находится его длина ребра и возводится в третью степень. $V_2 = (2 \cdot 0,2)^3 = 0,4^3 \text{ (м}^3\text{)}.$

Вычисляется, во сколько раз объем куба из 8 маленьких кубиков меньше объема большого куба. $V_1 : V_2 = 0,8^3 : 0,4^3 = (0,8 : 0,4)^3 = 2^3 = 8.$

Можно сделать это и без вычисления объемов. Большой куб состоит из 64 маленьких кубиков, а другой куб — из 8 маленьких кубиков. Следовательно, объем куба из 8 маленьких кубиков в $64 : 8 = 8$ раз меньше объема большого куба.



ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Запишите в виде степени. Укажите основание и показатель степени.

а) $(-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5)$

б) $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$

в) $(-2b) \cdot (-2b) \cdot (-2b)$

г) $\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}$

2. Запишите выражение в виде произведения степеней.

а) $c \cdot c \cdot c \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d$

б) $\frac{-a}{5} \cdot \frac{-a}{5} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b}{3}$

в) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n)$

3. Запишите в виде степени.

а) $0,4^3 \cdot 0,4^6$

в) $\left(-\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)^5$

д) $(0,5^3)^2 \cdot 0,5$

ж) $\left(3\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(3\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(3\frac{1}{2}\right)^2$

б) $(-2,1)^6 : (-2,1)^3$

г) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

е) $(-5)^3 \cdot (-125)$

з) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 : \left(-\frac{1}{2}\right)$

4. Упростите выражение ($y \neq 0, p \neq 0$).

а) $m^5 \cdot m^3 \cdot m^2$

б) $(-y)^{12} : (-y)^4$

в) $(b^7)^3$

г) $(y^7)^4 : (y^3)^5$

д) $p^{13} \cdot p^4 : p^3$

е) $x^6 \cdot (x^2)^7$

5. Упорядочьте.

а) В порядке возрастания: $-0,4^2$ $0,4$ $(-0,4)^2$ $-0,4$

б) В порядке убывания: $-1,2$ $1,2$ $(-0,2)^3$ $(-0,2)^2$

6. Каким может быть основание степени среди данных чисел? Определите и найдите соответствующий показатель степени.

а) $\square^\square = 9$

б) $\square^\square = -27$

в) $\square^\square = 81$

а) $\square^\square = \frac{1}{4}$

б) $\square^\square = -\frac{1}{8}$

в) $\square^\square = \frac{1}{32}$

Основание степени: 3 -3

Основание степени: $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

7. Найдите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $4 \cdot m^2 + 5$
 $m = 1,5; -2\frac{1}{2}$

б) $6 \cdot n^3 - 2$
 $n = -2; 1$

в) $6 \cdot k^3 \cdot k^2 + 3$
 $k = -1; 2$

г) $(p^4 : p^2) \cdot p$
 $p = -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

8. Определите устно, какие пары равны, и проверьте это вычислением.

$0,81$

$\left(-\frac{5}{6}\right)^3$

$0,064$

$\left(1\frac{1}{13}\right)^2$

$0,4^3$

$0,9^2$

$1\frac{27}{169}$

$-\frac{125}{216}$

9. Впишите подходящие числа в пустые клетки.

$0,3^{12} = (0,3^3)^{\square}$

$(3^{\square})^3 = 3^6$

$(-0,2)^5 \cdot 10^5 = \square^5$

$12^{10} = 12^5 \cdot 12^{\square} : 12^3$

$(m^{\square} \cdot m^5)^2 = m^{24}$

10. Вычислите.

а) $2^5 \cdot 2^2 : 2^4$

в) $(-10)^{19} \cdot (-10)^{18} : (-10)^{35}$

д) $(-0,4)^5 : (-0,4)^3 \cdot (-0,4)$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^8$

г) $\left(-\frac{2}{5}\right)^8 : \left(-\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

е) $\left(\left(-2\frac{1}{3}\right)^3\right)^2 : \left(-2\frac{1}{3}\right)^4$

11. Найдите значение выражения.

- а) $0,6^3$ б) $(-0,3)^4$ в) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ г) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$ д) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$ е) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^5$ ж) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$

12. Упростите и вычислите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $a^6 \cdot a^7 : a^8$, при $a = -2$; $0,5$

б) $m^{13} : m^{12} \cdot m$, при $m = -6$; $-\frac{1}{5}$

13. Сравните.

а) $(-0,7)^3$ и $(-5)^4$

б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ и $\left(-\frac{3}{5}\right)^7$

в) $6^{12} : 6^3$ и 6^9

г) $(-3)^{12} \cdot (-3)^{13}$ и $(-3)^{25}$

14. Запишите число 2^{60} в виде степени заданного выражения.

а) 2^3

б) 16^3

в) 32^6

г) 64^5

д) 4^{15}

е) 8^{10}

15. Представьте в виде произведения или отношения степеней ($x \neq 0$).

а) $(0,3 \cdot 2,5)^2$

б) $(m \cdot n)^{11}$

в) $(a \cdot m)^8$

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

д) $\left(\frac{a}{x}\right)^6$

е) $((-m) \cdot (-n) \cdot t)^{12}$



16. Используя свойства степеней, упростите и вычислите значение выражения.

а) $(1,2)^3 \cdot 5^3$

в) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^5$

д) $(-0,8)^4 \cdot (-5)^4$

ж) $\frac{24^3}{8^3}$

и) $\frac{80^4}{(-16)^3}$

б) $3^4 \cdot 16$

г) $(-9)^2 \cdot 81$

е) $(-4)^2 \cdot (-64)$

з) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 15^4$

к) $\frac{1}{27} \cdot (-3)^5$

17. Найдите значение выражения.

а) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2 : 2\frac{13}{18}$

в) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2 \cdot (-5)^3 + 90$

д) $(-4)^3 + 16 : \left(-1\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-5)^2$

б) $0,625 - |(-0,6)^3|$

г) $125 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 : (-10)^2$

е) $((-0,2)^3 + 0,32 : (-0,2)^2) \cdot (-10)^2$

18. Вычислите.

а) $\frac{3^5 \cdot 3^8}{3^{10}}$

б) $\frac{5^4 \cdot 5^{11}}{5^{12}}$

в) $\frac{6^3 \cdot 6^8}{6^5 \cdot 6^4}$

г) $\frac{(-7)^4 \cdot (-7)^8}{(-7)^2 \cdot (-7)^9}$

д) $\frac{27^3 \cdot 3^2}{9^2 \cdot 3^4}$

е) $\frac{25^4 \cdot 5^7}{125^2 \cdot 5^6}$

19. Упростите выражение и найдите его значение, если $x^6 = 64$.

а) $\frac{x \cdot x^5}{2}$

б) $\frac{x^8}{x^2}$

в) $x^2 \cdot x^4$

г) $(x^2)^3$

д) $((x^2)^3)^2$

е) $(x^4)^3 : x^6$

20. Найдите значение выражения.

а) $\frac{5 \cdot 10^8}{10^3}$

б) $\frac{4^2 \cdot 25^3}{500}$

в) $\frac{8 \cdot (5^2)^2}{5^2}$

г) $\frac{18 \cdot 6^2}{6^3}$

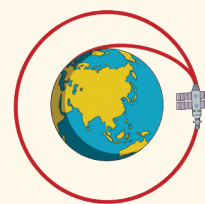
д) $\frac{36 \cdot 6^3}{3 \cdot 6^4}$

е) $\frac{16 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^5}$

ж) $\frac{2^4 \cdot 6^6}{12^5}$

21. Космический корабль выводится на околоземную орбиту с помощью ракеты, движущейся с первой космической скоростью ($8 \cdot 10^3$ м/с).

- Во сколько раз скорость света ($3 \cdot 10^8$ м/с) больше первой космической скорости?
- За какое время ракета, движущаяся с первой космической скоростью, преодолеет расстояние, которое свет проходит за 1 секунду?





22. Банк *A* предлагает клиенту ежегодное увеличение вклада на 12,5% от первоначальной суммы, а банк *B* — ежегодное увеличение на 12% от суммы, накопленной к концу предыдущего года. Если клиент решил вложить 20 000 AZN на 2 года, то в каком банке он получит больше дохода? На сколько больше?



Математический калейдоскоп

1. Упростите и найдите значение переменной.

а) $2^1 \cdot 4^2 \cdot 8^3 \cdot 16^4 = 2^m$

б) $2^n \cdot 30^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3$

2. Найдите устно последнюю цифру значений выражений на основе закономерности.

а) $4^1 = 4$ $4^2 = 16$ $4^3 = 64$ $4^4 = 256$ $4^{17} = \dots?$

б) $4^{18} + 4^{15}$

в) 2^{25}

3. Если $p > 1$, запишите в порядке возрастания.

$-p$

p

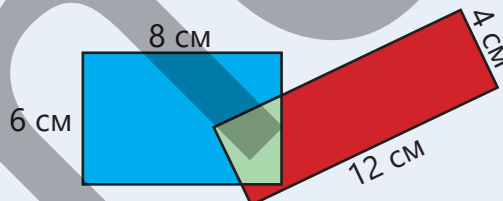
$-p^2$

$\frac{p}{3}$

p^2

4. На рисунке изображены два прямоугольника.

Сравните площади красной и синей частей. Обоснуйте свой ответ.



5. В племени *A* всегда говорят правду, а в племени *B* всегда лгут. Однажды в одно из этих племен пришел гость. Задав одному из местных жителей только один вопрос, он определил, говорят в этом племени правду или лгут. Какой вопрос он задал? Обоснуйте свое мнение.



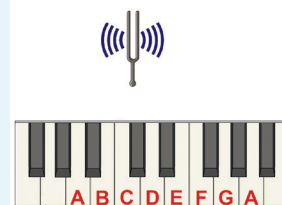
"МУЗЫКА И МАТЕМАТИКА: КАМЕРТОН"

Музыкальные инструменты, в том числе фортепиано, настраивают с использованием камертонов. Камертон — это прибор, точно и ясно издающий звук определенной высоты. Ударив по камертону, похожему на длинную двузубую вилку, можно услышать звук с частотой $55 \cdot 2^3$ герц. Это соответствует ноте "ля" (A) первой октавы на фортепиано.

1. Если частота одного и того же звука в каждой последующей октаве вдвое выше, то какова будет частота звука "ля" в пятой октаве?

2. Частота звука, соответствующего клавише справа, на 5,95% выше частоты звука клавиши слева. Запишите выражение для вычисления частот звуков "си" и "до" первой октавы. Воспроизведите соответствующие звуки на виртуальном пианино (<https://www.musicca.com/piano>).

3. Какие математические закономерности можно привести в качестве примеров в музыке? Проведите исследование о взаимосвязи музыки и математики и подготовьте презентацию.



Одночлены и многочлены

В этой главе вы научитесь:

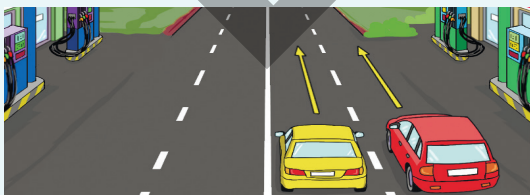
- объяснять одночлены и многочлены;
- приводить одночлены и многочлены к стандартному виду;
- вычислять значение многочлена при заданных значениях переменных;
- умножать одночлены и возводить их в степень;
- складывать, вычитать и умножать многочлены;
- использовать многочлены для решения задач.

Попытайтесь!

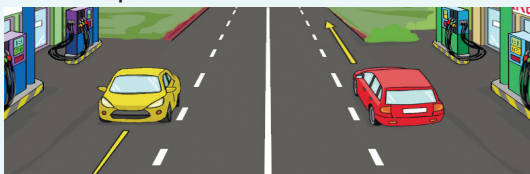
У автомобилей A и B радиус колес составляет 0,4 метра. Оба автомобиля начали движение одновременно с одного и того же места. Колесо автомобиля A совершает a оборотов в секунду, а колесо автомобиля B — b оборотов в секунду ($a > b$).

Как можно выразить расстояние между этими автомобилями через t секунд; через $(t + 15)$ секунд ($\pi \approx 3$)?

- Если они движутся в одном направлении.

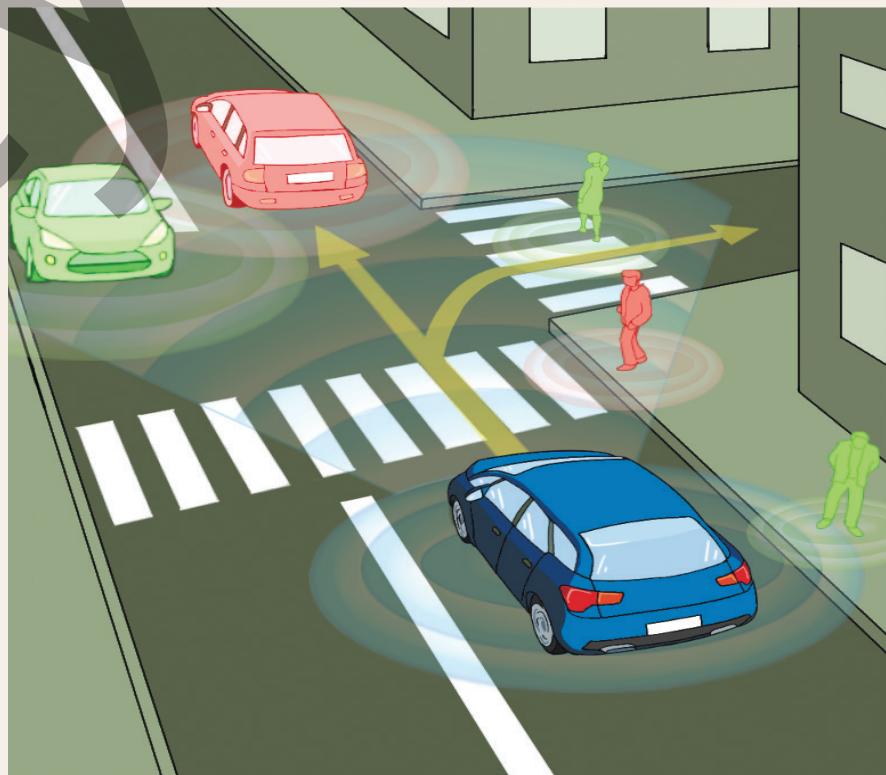


- Если они движутся в противоположных направлениях.



Многочлены широко используются при решении задач, связанных с реальными ситуациями. Для решения социальных, экономических, инженерных и других задач величины выражаются через переменные, а затем создаются различные математические модели, состоящие из многочленов, включающих эти переменные.

Многочлены находят применение и в робототехнике, и при определении траектории движения беспилотных автомобилей.



Предварительная проверка

1 Дополните таблицу.

а)

x	-2	0,5	$\frac{1}{4}$	
y	3	-0,2		-1,2
$2x - y$			5	3

б)

a	$-\frac{1}{4}$	0		
b	-2	-0,5	1,2	$-1\frac{1}{3}$
$a - 3b^2$			-1	0

2 Упростите выражение и вычислите его значение при заданных значениях переменной.

а) $10 - 2,5(2m + 4)$
при $m = -0,01$

б) $5a(b + 2) - 2a$
при $a = -2, b = 1,5$

в) $3(-m - 0,2n) + 1,5m$
при $m = 5, n = -7$

3 Решите уравнение.

а) $-2x + 1,6 = -4x + 5$

б) $x - 6(x + 2,5) - x = 16$

в) $x + 3 - 5x = -2(x - 7)$

4 Упростите выражение и найдите его значение, если $a + b = 5$.

а) $5a + 5b$

б) $3a + 2,5b - 0,5a$

в) $a + 3b - (b - a)$

г) $-a - 1,1 - (2b + a)$

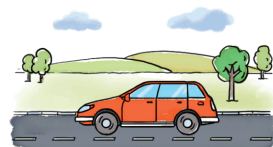
5 Составьте выражение с переменной и ответьте на вопросы.

а) Покупатель купил 3 кг яблок и 2,5 кг груш. Цена 1 кг яблок a манатов, а 1 кг груш — b манатов. Сколько денег заплатил покупатель за эти фрукты?

б) Сторона параллелограмма равна a см, а высота, проведенная к этой стороне, составляет 6 см. Чему равна площадь прямоугольника, площадь которого в два раза больше площади параллелограмма?

6 Автомобиль двигался со скоростью v (км/ч) в течение 1 часа 15 минут и, увеличив скорость на 10 км/ч в течение следующих 45 минут, достиг пункта назначения.

- Запишите выражение для нахождения расстояния, пройденное автомобилем за это время.
- Каков будет пройденный путь при $v = 70$ км/ч?



7 Гюльсум изготовила модель велосипеда с помощью 3D-ручки, используя пластиковые нити. Для этого ей понадобилось a метров красной нити и на 0,8 метра больше — черной нити.

- Запишите выражение для вычисления длины нити, необходимой для изготовления трех таких велосипедов.
- Найдите, сколько метров нити потребуется, если $a = 2$?



8 Если разделить параллелограмм, как показано на рисунке, образуются два конгруэнтных ромба. Сторона ромба на 2 см больше его высоты.

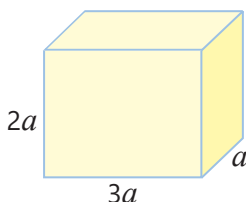
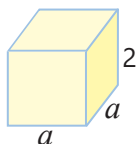
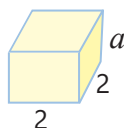
- Запишите выражение для вычисления периметра параллелограмма.
- Если известно, что периметр параллелограмма на 16 см больше периметра ромба, то какова площадь параллелограмма?



3.1. Одночлены

Исследование-обсуждение

На рисунке показаны размеры нескольких кубоидов в сантиметрах.



- Какое выражение можно записать, чтобы найти объем каждого кубоида?
- Во сколько раз увеличится объем каждого кубоида, если значение переменной a увеличить в 2 раза? Как это можно определить?

Изучение Одночлен и его стандартный вид

Одночлены – это выражения, состоящие из произведения чисел, переменных и их натуральных степеней. Например, ab , $2m$, $2x \cdot 3xy$, $\frac{2}{3}ab^3$, $0,2x^3$ – являются одночленами.

$1 + a^2$, $\frac{2}{m}$, $a + b$ – не являются одночленами.

- Обычно знак умножения в записи одночленов не указывается: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y^3 = \frac{1}{2}xy^3$

Число, переменная или ее степень также считаются одночленами. Например: -9 , 34 , x , x^2

Для упрощения одночленов можно использовать свойства умножения.

$$4a^2(-5)ac^4 = 4 \cdot (-5)a^3c^4 = -20a^3c^4$$

В полученном одночлене обычно на первом месте пишется числовой множитель, затем идут буквенные множители с их степенями. Такая запись называется **стандартным видом одночлена**. Любой одночлен можно записать в стандартном виде.

- Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называется **коэффициентом**.
- Сумма показателей степеней буквенных множителей одночлена называется его **степенью**.

$$\text{Степень одночлена: } 3 + 4 = 7$$

$$-20a^3c^4$$

$$\text{Коэффициент: } -20 \quad \text{Буквенная часть: } a^3c^4$$

Любое ненулевое число считается одночленом степени ноль. Число ноль также является одночленом, но его степень не определена.

Задания

- 1 Среди данных выражений определите одночлены.

a

$a + c$

b^2

x^3x

$b^2 - 1$

$\frac{a}{b}$

4

$\frac{2x}{3}$

$3x^2 + 1$

- 2 Определите одночлены в стандартном виде.

$2xya \cdot (-3)b$

$3aabc$

$6xyz^3$

$-2 \cdot (-0,5)ab$

$2ab \cdot 4c^2$

$-3ab^4$



Ключевые слова

- одночлен
- коэффициент одночлена
- степень одночлена
- стандартный вид одночлена
- подобные одночлены

- 3 Найдите коэффициент и степень заданных одночленов.

$-4abc$

$3abc^2$

cd^5

$-x^2yz^3$

$2,4mnp^2$

$12x^{12}$

$-\frac{2}{5}yx$

$-5abc^3$

- 4 Запишите одночлены в стандартном виде.

$aaabc$

$3mkmmk$

$-4xyxyxy$

$-cdcdc$

$5a^2aa^3$

$2,5aba^2b^3$

- 5 Запишите одночлены в стандартном виде. Определите их коэффициент и степень.

ОБРАЗЕЦ $2,5a \cdot 4b^2$

Решение	Объяснение
$2,5a \cdot 4b^2 = (2,5 \cdot 4) \cdot ab^2 = 10ab^2$ Коэффициент одночлена равен 10, а его степень равна 3.	На основе свойств умножения одночлен приводится к стандартному виду. Степени буквенных множителей складываются: $1 + 2 = 3$.

$-2,5c \cdot 4$

$2x^2 \cdot 3y^2$

$-3a^2c \cdot 2$

$-0,6m \cdot 3c \cdot 5n$

$0,1c \cdot 2b^5$

$2\frac{1}{2}x \cdot 6$

$-m^2 \cdot \frac{1}{2}n$

$\frac{1}{2}c \cdot 8$

$3\frac{1}{3} \cdot 3bc$

$-\frac{1}{2}c \cdot (-8b^2)$

Изучение Умножение одночленов

Произведение одночленов также является одночленом. Для нахождения произведения двух одночленов используются переместительное и распределительное свойства умножения. При этом числа и одинаковые переменные группируются, а результат записывается в стандартном виде одночлена.

$$-4xy \cdot 2xy^3 = \underbrace{(-4 \cdot 2)}_{-8} \cdot \underbrace{(x \cdot x)}_{x^2} \cdot \underbrace{(y \cdot y^3)}_{y^4} = -8x^2y^4$$

- 6 Найдите произведение одночленов и запишите в стандартном виде.

ОБРАЗЕЦ $2a^2b$ и $-3a^3$

Решение	Объяснение
$2a^2b \cdot (-3a^3) = 2 \cdot (-3) \cdot (a^2 \cdot a^3) \cdot b = -6a^5b$	По свойствам умножения и правилу сложения показателей степеней с одинаковыми основаниями находится произведение. Полученный одночлен записывается в стандартном виде.

а) $2xy$ и $-0,4y$

б) $\frac{1}{5}bc^2$ и $20abc$

в) $-5e^2f$ и $0,4e^2$

г) $-x^4z^2$ и $(-3\frac{1}{3}x)$

- 7 Найдите произведение одночленов и заполните таблицу, записав в стандартном виде.

а)

$\times$	3	ab	$5ab^2$	$\frac{2}{3}ab^2c$
$2ac$				
$0,6ab^2$				

б)

$\times$	x	$1,5y^3$	$-0,4y^5z$	$2xy^2z$
$4x^2$				
$-1\frac{1}{2}xy^2$				

- 8 Найдите произведение одночленов.

а) $4b^2c^3d^3 \cdot 2d^2 \cdot 2,5c$

в) $8a^2c^5 \cdot 2,4cm^3 \cdot 10am$

д) $-100m^2n \cdot 0,4m^2 \cdot (-0,25n) \cdot 1,5nm^2$

б) $\frac{1}{3}a^2b^4 \cdot 1,2ab^3 \cdot 5b^2$

г) $6ab^3 \cdot 0,3a^2 \cdot 5ac^2$

е) $-x^4z^2 \cdot 2\frac{1}{2}x \cdot (-0,2y) \cdot (-14yz^2)$

- 9 Впишите подходящие числа в пустые клетки.
- а) $-2ab^3 = -2b \cdot ab^{\square}$ б) $8x^5y = -4x^{\square} \cdot \square x^3y$ в) $c^6de^3 = 5ec^{\square} \cdot \square c^3de^{\square}$
- 10 Напишите а) два; б) три одночлена, произведение которых равно данному одночлену.
- $6a^2$ $-abc$ $5xy^2$ $15x^7$ $20x^3y$ $0,4x^3y^3$ $1\frac{1}{4}m^2m^2p$ $-3\frac{1}{3}c^5df$
- 11 Впишите такие числа в пустые клетки, чтобы при записи в стандартном виде получился одночлен, у которого: а) коэффициент равен 12, степень равна 6; б) коэффициент равен 6, степень равна 12.
- $2a^{\square} \cdot \square b$ $-3x^{\square}y^2x \cdot \square x$ $\frac{2}{3}a^{\square}b^2c \cdot \square c \cdot 9$ $m^{\square}n^2 \cdot \square m \cdot 1\frac{1}{2}$ $-1,2a^{\square} \cdot \square b^3 \cdot 2c$



Запомни!

Одночлены с одинаковой буквенной частью называются **подобными одночленами**. Подобные одночлены либо равны, либо отличаются только коэффициентами. Например: $2x$ и $-3x$, yx^2 и $5x^2y$ — подобные одночлены, а x^2y и xy^2 — не подобные. Чтобы определить, являются ли одночлены подобными, их нужно привести к стандартному виду. Например: $4aba^2b$ и $-2ab^2aa$ — подобные, так как их можно записать как:

$$4aba^2b = 4a^3b^2$$

$$-2ab^2aa = -2a^3b^2$$

- 12 Приведите одночлены к стандартному виду и определите подобные.
- а) $-aa^4$ $-aaa$ $2a^2a$ $-5a^2 \cdot 2aa^2$ б) $acab$ $abbc$ $2aba \cdot (-0,5)c$ $2abcb$
- б) c^2b $2cbb$ $3bcc$ bcb г) a^2ba $-aba^2$ $-b \cdot (-3)b^2a^2$ $3bab^2$
- 13 Запишите данные одночлены в виде произведения.
- Произведение двух подобных одночленов а) $14x^8$ б) $20a^4b^2$ в) $-18x^2y^2$ г) $25m^6$
- Произведение трех подобных одночленов а) $18a^6$ б) $24m^6n^3$ в) $-30x^3y^3$ г) $27x^9$

Изучение Степень одночлена

При возведении одночлена в степень используются свойства степеней. Например, одночлен $2x^2y$ можно возвести в третью степень (куб) следующим образом:

$$(2x^2y)^3 = (2x^2y) \cdot (2x^2y) \cdot (2x^2y) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (x^2 \cdot x^2 \cdot x^2) \cdot (y \cdot y \cdot y) = 2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = 8x^6y^3$$

Таким образом, $(2x^2y)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = 8x^6y^3$

- 14 Запишите данные выражения в виде стандартного вида одночлена.

ОБРАЗЕЦ $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^2$

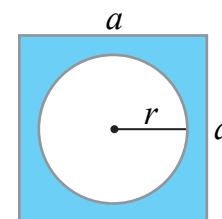
Решение	Объяснение
$\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot b^2 = \frac{1}{9}a^4b^2$	Степень одночлена находится используя свойства степеней.
а) $(-3x)^3$	б) $\left(\frac{1}{6}ab^2\right)^2$
в) $(-5e^2f)^2$	г) $(4a^2d^3)^3$
	д) $(-2b^2c^3)^4$

- 15 Запишите выражение в виде квадрата одночлена.
 а) $25x^2$ б) $\frac{1}{81}b^2c^2$ в) $0,49e^6f^8$ г) $1\frac{9}{16}a^{10}d^6$ д) $9c^{20}d^{12}$
- 16 Запишите выражение в виде куба одночлена.
 а) $8x^9$ б) $\frac{1}{27}b^3c^3$ в) $-64m^9n^3$ г) $3\frac{3}{8}a^3d^{12}$ д) $0,125b^{30}c^{15}$
- 17 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство было верным. Определите одночлен, который соответствует пустой ячейке.
 $81a^2 = (\square a)^2$ $(10ab^2)\square = 100a^2b\square$ $27x^6 = (\square x^2)\square$ $(\square m^2n)^2 = 64m^4n\square$
 $(-2b^2)\square = -8b^6$ $\square m^6n\square = \left(1\frac{1}{2}m^3n^2\right)^2$ $\square c^6 = (0,2c^2)\square$ $(2x^3y^2)\square = \square x^6y\square$
- 18 В пустую клетку впишите подходящий одночлен.
 а) $b^2 \cdot \square = b^6$ б) $\square \cdot 2a^2 = 4a^6$ в) $-3b^2 \cdot \square = -27ab^6$ г) $\square \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 2y^2z^3$
 б) $x \cdot \square = 9x^5$ г) $xy \cdot \square = 6x^6y$ е) $\square \cdot 3bc^5 = -3b^2c^5$ з) $-5bc^2 \cdot \square = b^5c^3$
- 19 Запишите одночлен в стандартном виде.
 а) $-6b^3c \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)b$ б) $2x^3y \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)y^3$ в) $\left(24m^2n \cdot \frac{5}{8}m\right)^2n$
 б) $4^2ab \cdot (-2)^3ab$ г) $-1,8c^3d \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2d^3$ е) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2a^3d \cdot (-10)^2ab$
- 20 Запишите одночлены в стандартном виде. Вычислите значения выражений при заданных значениях переменных.
 $-b^3c \cdot (-2,5c)$ $-1,2a^3b \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2$ $\left(-1\frac{1}{3}xy\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ $-6,4(xy^3)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^3$
 $b = 2, c = -1$ $a = -3, b = 0,2$ $x = -3, y = 0,1$ $x = -1, y = 1$

Решение задач

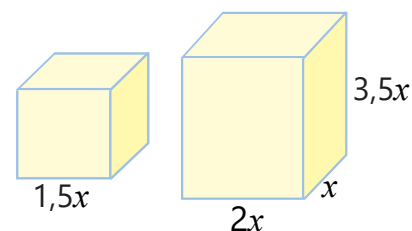
- 21 Ответьте на вопросы:
 а) При каком значении n степень одночлена $2a^3 \cdot a^{2n-1}$ равна 8?
 б) При каком значении n степень одночлена $3a^{3n} \cdot b^{n-2} \cdot b$ равна 11?

- 22 Окружность радиуса r расположена внутри квадрата со стороной a . Напишите выражения для нахождения площади закрашенной части и длины окружности. Объясните, являются ли эти выражения одночленами.



- 23 На основе рисунка запишите выражения для нахождения объема куба, площади его полной поверхности, а также для нахождения объема прямоугольного параллелепипеда.

- Приведите полученные одночлены к стандартному виду
- Найдите коэффициенты и степени этих одночленов.
- Какие одночлены являются подобными?

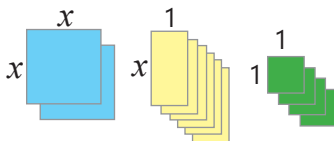


3.2. Многочлены

Исследование-обсуждение

Число игроков: 2.

Принадлежности: 2 синих и 4 зеленых квадратных, 6 прямоугольных фигур (алгебраические карты).



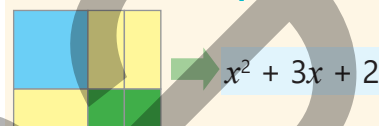
Правила игры. Используя предложенные фигуры, составляются различные прямоугольники. Площадь полученного прямоугольника записывается в виде суммы площадей маленьких фигур. Побеждает игрок, который за определенное время составит наибольшее количество прямоугольников и правильно запишет выражения для их площадей.



Ключевые слова

- многочлен
- член многочлена
- стандартный вид многочлена
- степень многочлена
- свободный член
- двучлен, трехчлен

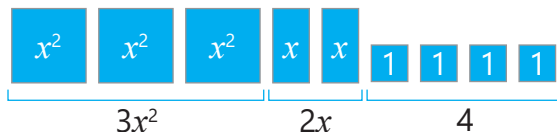
ОБРАЗЕЦ



Изучение Многочлен

Сумма одночленов называется **многочленом**. Одночлены, составляющие многочлен, называются его членами.

Например, $3x^2 + 2x + 4$ – многочлен, $3x^2$, $2x$ и 4 – его члены.



Многочлен: $3x^2 + 2x + 4$

Члены многочлена: $3x^2$, $2x$, 4

Член многочлена, не содержащий буквенной части, называется свободным членом. В многочлене $3x^2 + 2x + 4$ число 4 является свободным членом.

Выражение $2x^2 - y^2 - 2y - 1$ можно записать как $2x^2 + (-y^2) + (-2y) + (-1)$.

Таким образом, $2x^2 - y^2 - 2y - 1$ является многочленом, а $2x^2$, $-y^2$, $-2y$ и -1 — его члены.



Многочлен: $2x^2 - y^2 - 2y - 1$

Члены многочлена: $2x^2$, $-y^2$, $-2y$, -1

• Многочлен с двумя членами называется **двучленом**, а с тремя членами — **трехчленом**.

Например, $2a^2 - 3a$ и $ab^2 + cd$ — двучлены, $3a^3 - a^2 + 5$ и $x^2 + 2xy + y^2$ — трехчлены.

• Одночлен является многочленом, состоящим из одного члена.



Подумай!

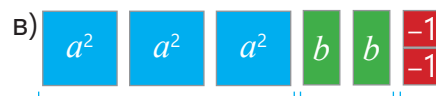
Как объяснить, что выражение $x^2 + \frac{3}{x} + 5$ не является многочленом?

Задания

1 Определите, какие из данных выражений являются многочленами.

$$\frac{1}{2}x + 1 \quad \frac{3}{a} - 5 \quad \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{b} \quad 5a^2 \quad 8 + c^2 - \frac{c}{7} \quad 2x^3 - \frac{1}{x} \quad 0,1x^2 + x - 1 \quad \frac{ab}{c} - 6$$

2 Запишите изображенный многочлен.



3 Определите члены многочленов.

$-2a - 2a^2$

$-7x^2 - 2x - 5$

$0,1bc + 3c^2 - 1$

$6y^2 - 0,3xy + xy^2 - 3$

$m^3 - m^2 - \frac{1}{5}m - 4$

Изучение Стандартный вид многочлена

В многочлене сумму подобных одночленов можно заменить одночленом. Это называется **приведением подобных членов**. Например, в многочлене $3xy^2 + 3 - xy^2 + y$ одночлены $3xy^2$ и $(-xy^2)$ являются подобными.

$$3xy^2 + 3 - xy^2 + y = 2xy^2 + y + 3$$

В полученном многочлене каждый член записан в стандартном виде и нет подобных членов. Такой многочлен называется **многочленом, записанным в стандартном виде**.

$a - b + 1$

$3x^3 + 2xy + 4$

$c^3 - 2c^2 - 5$

Многочлены записаны в стандартном виде.

$a^5a^2 + b$

$2x^2 - x + 3 + 5x$

$3bc + b^2 - 2bc$

Многочлены не записаны в стандартном виде.

Чтобы привести многочлен к стандартному виду, каждый его член приводится к стандартному виду, и если есть подобные члены, то они приводятся.

4 Определите многочлены, записанные в стандартном виде.

$6a^4 + 4a^2 - 2a^2 - 2a$

$c^5 + 3c^4 - 2c^2 + c$

$x^6 + 0,9x^3 - 2x^2$

$aa^2 + a + ab + 2a^2$

5 Запишите многочлен в стандартном виде, приведя подобные члены.

ОБРАЗЕЦ $2a^2a + 3ab - ab - 4a^3a$

Решение

$$\begin{aligned} 2a^2a + 3ab - ab - 4a^3a &= \\ &= 2a^3 + 3ab - ab - 4a^4 = \\ &= -4a^4 + 2a^3 + 2ab \end{aligned}$$

Объяснение

Члены многочлена приводятся к стандартному виду.
Приводятся подобные члены.
Многочлен записывается в стандартном виде.

а) $0,5x^4 + 0,3x^3 - 0,2x^4 + x^3$

в) $-2k^3 + 2k^2 + k^3 - 1 - 2k^2$

д) $\frac{3}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{2}aa^2 - \frac{1}{2}a^2b$

б) $a^3 + a - (-a^3) - a + 2a^2 + 5$

г) $\frac{1}{6}x^3y - xy^2 + 2xy^2 - \frac{1}{6}x^3y$

е) $1\frac{4}{5}p^4 + \frac{1}{3}p^2 - \frac{4}{5}p^2p^2 - \frac{1}{3}p^2$

Изучение Степень многочлена

В многочлене, записанном в стандартном виде, наибольшая из степеней его членов называется степенью этого многочлена. Например, для многочлена $2x^4y + 5xy^2 - x$ наибольшая степень одночленов равна 5, поэтому степень многочлена равна 5.

Степени членов

$$\begin{array}{c} 4+1=5 \quad 1+2=3 \quad 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2x^4y + 5xy^2 - x \end{array}$$

Члены многочлена: $2x^4y, 5xy^2, -x$
Степень многочлена: 5

Чтобы найти степень многочлена, не записанного в стандартном виде, его сначала нужно привести к стандартному виду, а затем определить степень.

$$-x^3yu + 5x^3x + xy - 7 + x^2y^2x = -x^3y^2 + 5x^4 + xy - 7 + x^3y^2 = 5x^4 + xy - 7$$

Таким образом, степень многочлена $-x^3yu + 5x^3x + xy - 7 + x^2y^2x$ равна 4.

Обычно при записи многочлена в стандартном виде его члены записываются в порядке убывания степеней.



Исправь ошибку!

$x^2x + 2x^2 + 2x^4$ степень многочлена : $2 + 1 = 3$

$-x^3 + 3x^4 - xx^3 + x - 2xx^3$ степень многочлена : 4

- 6 Определите члены и степень многочлена.
- а) $4a^2 - 5a^3 - 2a$ в) $2b^3 + b^2c + bc^2 - c^2$ д) $4d^3 - d^2d^3 + 2d^2$
- б) $c^2 - c + 1 + 2c^3$ г) $x^4 - 0,1x^6 - 0,2x^5$ е) $y^5 - 3x^3y - 5yy^5$
- 7 Приведите многочлен к стандартному виду и определите его степень.
- а) $0,5x^3y^2 + x^2y - 0,5x^3y^2 - 2x^4$ в) $(2a)^2 + 2ab^4 - 6a^4 - 2ab^4$ д) $-2,1m^2 - m^3 + 0,4m^2$
- б) $c^4 + 3d^2d^3 + c^3c - 2d^5 - dd^4$ г) $2d^4 + d^4d^2 + dd^4 - d^5$ е) $-m^2k - m^4 + 0,3m^2k + (m^2)^2$
- 8 Впишите в пустую клетку такой одночлен, чтобы равенство было верно при любом значении переменных.
- а) $\square + a^2 + 5 = a^2 - 3a + 5$ в) $-3ab^2 + \square - ab = 4b^3 - 3ab^2 - ab$
- б) $2c^2 + \frac{1}{5}bc = \square - 3c^2 + 0,2bc$ г) $xy^3 + \frac{1}{2}y^2 - y^2 + 5 = xy^3 + 5 + \square$
- 9 Запишите многочлены в стандартном виде. Найдите значения полученных выражений при заданных значениях переменных.
- $2aa - 3a - 2a^2$ при $a = -1,5$ $-a^2b^3 - abb^2 - bbab$ при $a = -2$ и $b = 3$
- $\frac{2}{27}x^4 - x + \left(\frac{1}{3}x\right)^3x$ при $x = 3$ $\frac{1}{5}y^3 + 2xy^2 + \frac{4}{5}yy^2$ при $x = 0,1$ и $y = -5$

Решение задач

- 10 После приведения к стандартному виду многочленов, записанных на доске, Лала получила многочлен 4-й степени, а Анар – многочлен 5-й степени. Какие числа могли быть на стертых местах?



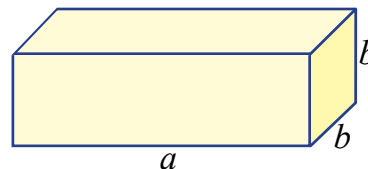
$$4xy^4 - 4x(y^2) - x^3y + 4$$

$$a^4a^2 - a^3aa - a^2 \cdot 2a - 3a^6 + 5$$



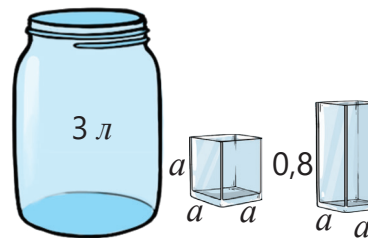
- 11 Составьте выражение для вычисления площади поверхности кубоида, изображенного на рисунке. Приведите полученный многочлен к стандартному виду.

- Определите степень этого многочлена.
- Какова будет площадь поверхности кубоида, если $a = 10$ см, $b = 5$ см?



- 12 Из банки с 3 литрами воды каждым стаканом зачерпнули по два раза.

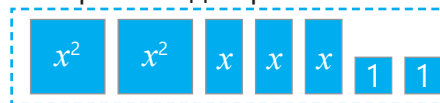
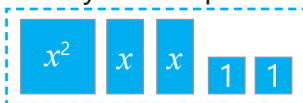
- Сколько воды осталось в банке? Запишите выражение в виде многочлена, если размеры стакана даны в дециметрах.
- Определите степень этого многочлена.
- Если $a = 0,5$ дм, каков будет объем оставшейся в банке воды?



3.3. Сложение и вычитание многочленов

Исследование-обсуждение

Айнур и Анар, используя алгебраические карты, изобразили два различных многочлена.

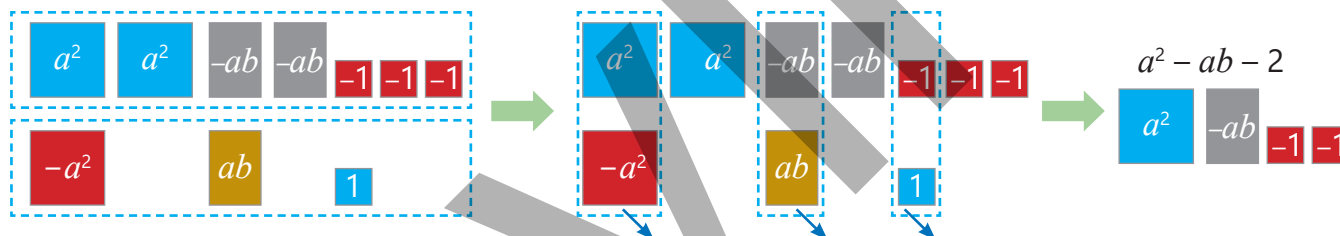


- Какие многочлены они изобразили? Какой многочлен получится, если объединить эти карточки?
- Какие карточки должна добавить Айнур, чтобы получить многочлен, изображенный Анаром?

Изучение Сложение многочленов

Для сложения многочленов каждый из них берется в скобки, после чего записывается их сумма. Затем раскрываются скобки и приводятся подобные слагаемые. Например, сумма многочленов $2a^2 - 2ab - 3$ и $-a^2 + ab + 1$ вычисляется следующим образом:

$$(2a^2 - 2ab - 3) + (-a^2 + ab + 1) = \underline{2a^2} - \underline{2ab} - 3 - \underline{a^2} + \underline{ab} + 1 = \\ = (2a^2 - a^2) + (-2ab + ab) + (-3 + 1) = a^2 - ab - 2$$



- Сложение двух многочленов, записанных в стандартном виде, можно выполнить, записав их в столбик. При этом подобные слагаемые пишутся друг под другом и приводятся.

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 2ab - 3 \\ + (-a^2 + ab + 1) \\ \hline a^2 - ab - 2 \end{array}$$

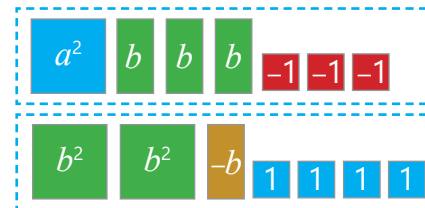
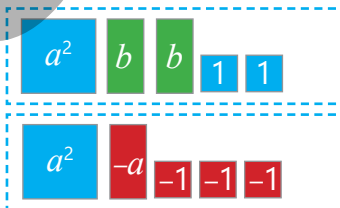
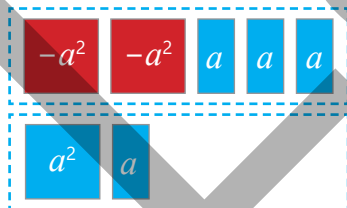
Задания

- 1 Найдите сумму многочленов, используя изображения

а) $-2a^2 + 3a$ и $a^2 + a$

б) $a^2 + 2b + 2$ и $a^2 - a - 3$

в) $a^2 + 3b - 3$ и $2b^2 - b + 4$



- 2 Найдите сумму данных многочленов.

ОБРАЗЕЦ $2a^2 - 5a + 2$ и $3a^2 + 4a$

Решение

$$(2a^2 - 5a + 2) + (3a^2 + 4a) = \\ = \underline{2a^2} - \underline{5a} + 2 + \underline{3a^2} + \underline{4a} = \\ = 5a^2 - a + 2$$

Объяснение

Записывается сумма многочленов.
Приводятся подобные слагаемые.
Многочлен записывается в стандартном виде.

- ▶ а) $a + 2$ и $a - 2$ в) $5a^2 + 2a$ и $4a + 1$ д) $-m^2 + 2n$ и $m^2 - n + 3$
 б) $2a - 5b$ и $3a - b$ г) $5ab - b$ и $-ab + a$ е) $-m^2 - mn - 2$ и $5 + mn$

3 Запишите данный многочлен в виде суммы двух многочленов. Приведите 3 примера.

- а) $3x^2 + 2x^3 + 4x + 1$ в) $3y^2 - y^3 + 2xy - 5$ д) $5ab - a^2 + 3a$
 б) $6ab^2 - b^3 + 2ab - b$ г) $-n^3 - 2n^2 - 5n - 1$ е) $2m^3 + m + 1$

Изучение Вычитание многочленов

Чтобы вычесть один многочлен из другого, каждый многочлен заключается в скобки, записывается их разность, после чего скобки раскрываются. В этом случае используется правило раскрытия скобок. Если есть подобные слагаемые, они приводятся. Например, разность многочленов $2a^2 - 3ab - 3$ и $-a^2 + 2ab + 1$ вычисляется следующим образом.

$$(2a^2 - 3ab - 3) - (-a^2 + 2ab + 1) = \underline{2a^2} - \underline{3ab} - 3 + \underline{a^2} - \underline{2ab} - 1 = \\ = (2a^2 + a^2) + (-3ab - 2ab) + (-3 - 1) = 3a^2 - 5ab - 4$$

• Разность двух многочленов, записанных в стандартном виде, можно также найти, записав их в столбик. Обычно удобно записывать каждый член вычитаемого многочлена с противоположным знаком и складывать полученные многочлены в столбик.

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 3ab - 3 \\ -a^2 + 2ab + 1 \\ \hline 3a^2 - 5ab - 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2a^2 - 3ab - 3 \\ + a^2 - 2ab - 1 \\ \hline 3a^2 - 5ab - 4 \end{array}$$

4 Найдите разность данных многочленов.

ОБРАЗЕЦ $4a^2 + 3a$ и $a^2 - a$

Решение

$$(4a^2 + 3a) - (a^2 - a) = \\ = \underline{4a^2} + \underline{3a} - \underline{a^2} + \underline{a} = \\ = 3a^2 + 4a$$

Объяснение

Чтобы найти разность многочленов, записывается выражение. Раскрываются скобки. Приводятся подобные слагаемые. Многочлен записывается в стандартном виде.

- а) $a + 6$ и $a - 2$ в) $3a^2 + a$ и $6a^2 + 1$ д) $1 - 4m^2$ и $4m^2 - 3$
 б) $-x - y$ и $x + 2y$ г) $m^2 - 3m$ и $-mn + m$ е) $-4b^2 - a$ и $b - b^2 + a$

5 Раскройте скобки и приведите подобные члены.

- а) $x^2y + y^2 - (x^2 + y^2)$ в) $ab^2 + a^2 - (ab^2 + b^2 + 2)$ д) $-m^2n + mn - (mn - 2m^2n - 2mn)$
 б) $2x^2 + x - (2x^2 + 3x)$ г) $2,1ab - ab - (3 + 1,1ab)$ е) $0,4ab - ac - (2,5ac - 0,2ab)$

6 В пустую клетку впишите такое слагаемое, чтобы равенство было верным.

- а) $x + \square + x^2 - 2 = x^2 + 3x - 2$ в) $(3ab + \square) - (ab + a) = 2ab + 3a$
 б) $x^3 + 4x^2 + 1 = x^3 + 3x^2 + 1 + \square$ г) $(5m^2n + mn) - (m^2n + 3m) = 4m^2n + \square - 3m$

7 Запишите данный многочлен в виде разности двух многочленов. Приведите 3 примера.

- а) $2x^3 + 2x^2 - x - 5$ в) $4p^4 - 5 - 5p - p^2$ д) $5a^2 - ab - 6a$
 б) $3b^2 - ab - 2a - b$ г) $2x^4 + 7x^3 - 3x^2 + x$ е) $-mn^2 + m^2n + 2$

- 8 Найдите сумму и разность данных многочленов, записав их в столбик.

а) $3a + 2b$ и $a - b$

в) $a^2 + a$ и $-4a^2 - 0,2a$

д) $n^2 + n - 5$ и $-n^2 - n - 5$

б) $5x - y$ и $2x - 4y$

г) $2,5b - bc$ и $1,5b + bc$

е) $-y^2 - y + 1$ и $-y^2 - y - 1$

- 9 Упростите данное выражение при $M = 3a^2 - a - 2$, $N = 2a^2 - 2a$, $P = a^2 - 1$ и $K = a + 4$. Определите степень полученного многочлена.

а) $M - N$

б) $M - K$

в) $M - (N + P)$

г) $N + P - K$

д) $M - (P + K)$

- 10 Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство.

$x^2 - 5x + 4 - x^2 - 5x - 3 = 1$

$x^2 - 5x + 4 - x^2 - 5x - 3 = 7$

$x^2 - 5x + 4 - x^2 - 5x - 3 = -1$

$a^2 - 3a + 4 - a^2 - 3a = 4$

$a^2 - 3a - 5 + a^2 + 3a = 5$

$a^2 - a + 4 - a^2 - a = 2a^2 - 4$

- 11 Запишите многочлен в стандартном виде.

а) $\frac{3}{4}x^2 + 2x^3 - (x^2 - \frac{1}{4}x^3)$

г) $-(\frac{1}{2}a^2)^2 - ab - (\frac{3}{4}a^4 + ab) + a^3a$

б) $2\frac{1}{2}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2x - (2x^3 + x)$

д) $-\frac{1}{2}m^2n + mn - (mn - \frac{2}{3}m^2 \cdot \frac{3}{4}n)$

в) $ab^2 + \frac{1}{5}a - (ab^2 - \frac{1}{5}a - a^2b^2)$

е) $2\frac{1}{3}a - a^2 - (2a^2 + 1\frac{1}{3}a - 2)$

- 12 Упростите выражение. Значение какого из выражений не зависит от переменных?

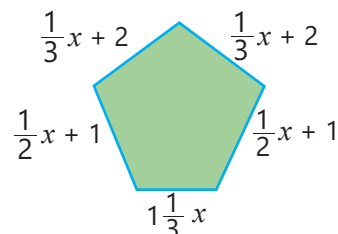
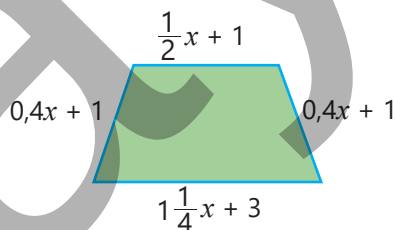
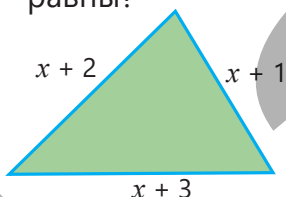
а) $(2a^2 + b^2 - 3) + (b^2 + 2 - a^2) - (a^2 + 2b^2 - 4)$

б) $(a - 2b + c) - (a - b - 3) + (a - c + b) - (b - c + 6)$

в) $(m - n + p - 1) - (m - p + n + 1) - (p - m - n - 1) - (m - n + p + 1)$

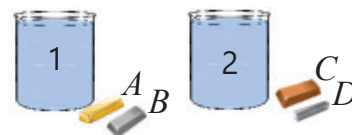
Решение задач

- 13 Запишите выражения для определения периметров фигур. У каких фигур периметры равны?



- 14 Тело, погруженное в жидкость, вытесняет объем жидкости, равный своему собственному объему. Используя таблицу плотностей, ответьте на вопросы, записав выражения:

- В первый сосуд поместили тело A массой m граммов и тело B массой n граммов. Какой объем воды вытеснят эти тела из сосуда?
- Во второй сосуд поместили тело C массой m граммов и тело D массой n граммов. Какой объем воды вытеснят эти тела из второго сосуда?
- Каков общий объем воды, вытесненный из обоих сосудов вместе?
- Насколько объем воды, вытесненный из второго сосуда, больше объема воды, вытесненного из первого сосуда?



Тело	Плотность (г/см³)
A	20
B	10
C	8
D	2

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

1 Дополните таблицу.

а)

×	5		$4y^2z$
$-2x$	$-10x$		
$0,6x^2y$		$0,6x^4y$	

б)

+	$2n$	$2m^2 - 3n$	$m^2 + 2n + 2$
$-2m^2$			
		$m^2 - 5n$	

2 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство было верным.

а) $(a^2)^3 \cdot (2b^2) \square = 4a^6b^4$ б) $(3b^2) \square \cdot b = 81b \square$ в) $c^5 \cdot (2c) \square = 8c \square$ г) $(c^2d) \square \cdot d^3 = c^6d \square$

3 Запишите одночлен в стандартном виде, определите его степень и коэффициент.

а) $\frac{2}{7}b^3c \cdot 2\frac{1}{3}a^2b$ б) $-6,4(a^3b)^2 \cdot (\frac{1}{2}a)^4$ в) $2m^4n \cdot (-\frac{1}{4})^3m^3n$ г) $(15a^2p \cdot 1\frac{1}{3}p)^2 \cdot \frac{1}{5}ap^5$

4 Приведите многочлен к стандартному виду.

а) $2a \cdot a^2 - a^2 \cdot \frac{3}{4}a + a^2 \cdot \frac{3}{4}aa - 2a^2 \cdot 2,5a$ в) $\frac{2}{3}x \cdot (-3y)^2 - 4x \cdot 1,5y^2 + x^2 \cdot yy + x^2 \cdot 10yy$
 б) $\frac{1}{2}x \cdot (-5x^2) - (4xx \cdot 1,5x + 2x \cdot 1\frac{3}{4}xx)$ г) $\frac{1}{4}a \cdot (-5b^2)^2 - (6ab^4 + b^3 \cdot 1\frac{1}{4}a) + (3ab^2)^2$

5 Запишите в виде степени:

а) В виде квадрата одночлена

$a \cdot 4a^3b^{12}$ $(3xy^3)^4$ $(4x)^2 \cdot (2x^2)^2$

б) В виде куба одночлена

$2b \cdot 4a^9b^8$ $(-3cd^2)^6$ $b^3 \cdot (4b^2)^3$

6 Упростите выражение. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных.

а) $2x \cdot (-xy^2)^3 + (x^2y^3)^2$
 $x = -2; y = -1$

б) $4abc^2 + 2abb^2 - (3abc^2 + 2ab^3)$
 $a = -1; b = 1; c = -4$

7 Определите правильное утверждение. Обоснуйте на примерах.

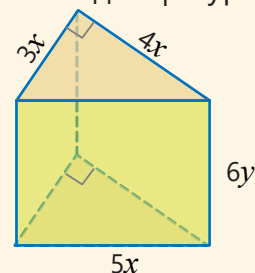
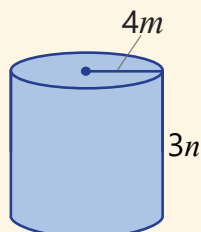
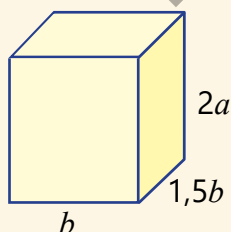
- а) При умножении двух одночленов 3-й и 2-й степеней получается одночлен 6-й степени.
 б) При сложении двух многочленов 3-й и 2-й степеней получается многочлен 3-й степени.

8 Запишите одночлен с коэффициентом 5 и степенью 7. Найдите квадрат и куб этого одночлена. Каковы коэффициенты и степени полученных одночленов?

9 На рисунке указаны размеры кубоида, цилиндра и прямой треугольной призмы.

а) Запишите выражения для нахождения объема каждой фигуры ($\pi \approx 3$).

б) Запишите выражения для нахождения площади полной поверхности каждой фигуры.



3.4. Умножение одночлена на многочлен

Исследование-обсуждение

Два класса, в каждом из которых по k учеников, отправились в музей ковров. Цена входного билета для взрослых составляет m манатов, а для школьников – на 4 маната дешевле.

- Сколько школьников посетили музей?
- Сколько стоит один билет для школьников?
- Сколько денег нужно заплатить за билеты для школьников?

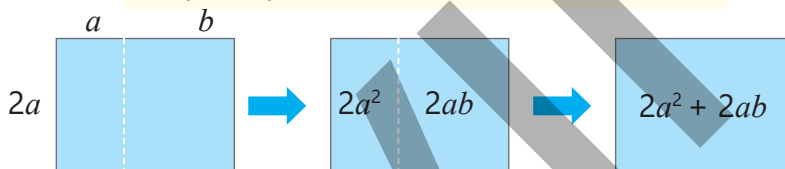


Изучение Произведение одночлена и многочлена

Произведение одночлена на многочлен можно найти, используя распределительное свойство умножения. Чтобы умножить одночлен на многочлен, необходимо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

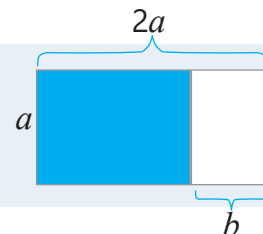
$$a(b + c) = ab + ac$$

$$2a(a + b) = 2a \cdot a + 2a \cdot b = 2a^2 + 2ab$$



Подумай!

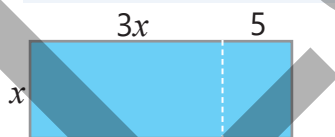
Как по изображению можно объяснить, что $a(2a - b) = 2a^2 - ab$?



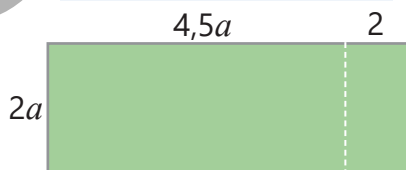
Задания

- 1 Для нахождения площади закрашенного прямоугольника в пустые клетки впишите подходящий одночлен.

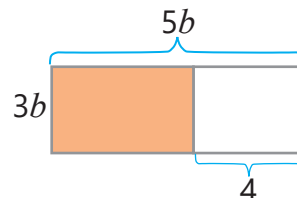
а) $x(3x + \square) = \square + \square$



б) $\square(\square + 2) = \square + \square$



в) $3b(\square - \square) = \square - \square$



- 2 Представьте произведение в виде многочлена.

ОБРАЗЕЦ $-2xy(x + y)$

Решение

$$\begin{aligned} -2xy(x + y) &= -2xy \cdot x + (-2xy) \cdot y = \\ &= -2x^2y - 2xy^2 \end{aligned}$$

Объяснение

По распределительному свойству умножения одночлен $-2xy$ умножается на каждый член двучлена $x + y$. Полученный многочлен записывается в стандартном виде.

- а) $-3(a^2 + 1)$ в) $4x(y^2 - x)$ д) $-mn(1 + n^2)$ ж) $-2,2c^2(5c^2 - c + 1)$
 б) $5(ab - 5)$ г) $-x(xy - 3)$ е) $5m^2n(-2m + n)$ з) $-2ab(a^3 - 2a + b)$

3 Найдите произведение одночлена и многочлена. Заполните таблицу, записав полученный многочлен в стандартном виде.

$\times$	$ab + a^2b^2 - a^2$	$a^2b - 2ab + ab^3$	$3b^4 + 4b^3 - 5$	$a^2b - 2ab - ab^2 + 4b^4$
-7				
$2ab$				

4 Упростите выражение.

а) $a(a + b) - b(a - b)$

б) $a(a^2 - 1) + a^2(a - 1)$

в) $5(2a + ax) - 5(2a - ax)$

г) $m(m^2 - mn + n^2) - n(m^2 - mn + n^2)$

д) $x(y - z) - y(z - x) - z(x - y)$

е) $6a(x - y) - 6b(y - x) - c(x - y)$

5 Упростите выражение и определите, зависит ли его значение от переменной.

ОБРАЗЕЦ $4(2b - ab + 3) - 2b(4 - 2a)$

Решение

$$4(2b - ab + 3) - 2b(4 - 2a) = 8b - 4ab + 12 - 8b + 4ab = 12$$

Объяснение

Произведение записывается в виде многочлена. Полученный многочлен упрощается. Ответ равен постоянной, то есть 12. Значит, значение выражения не зависит от переменной.

а) $3n^2 - n(3n - 5)$

в) $6c^3 - 2(4c^3 + 6) + 2c^5$

д) $-(a - b) - (c - a) - 2(a + b + c)$

б) $a^2 + a(2 - a)$

г) $5c(2a - 3c^2) - c(a - 15c^2)$

е) $2(p - 5p^2) - 2(3 - p - 2,5p^2)$

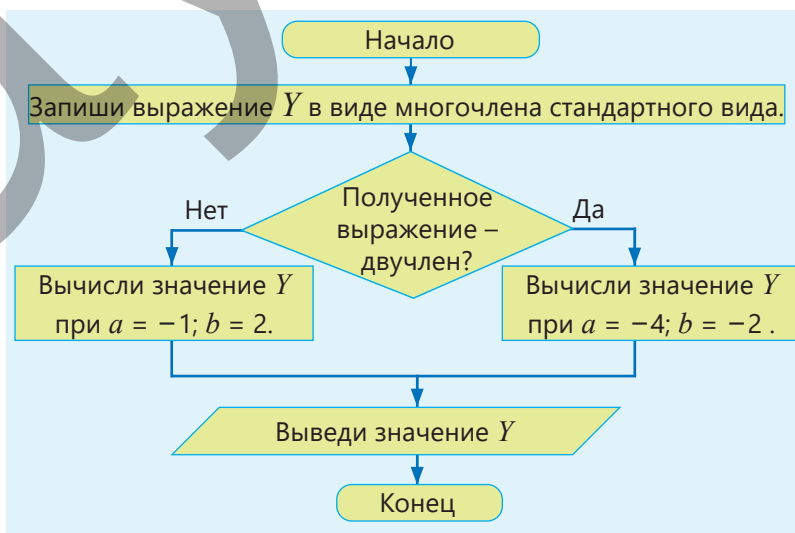
6 Выполните алгоритм и определите полученное число.

а) $Y = 2a^2(b + 3) - b(2a^2 - 3)$

б) $Y = (2ab)^2 - a(ab^2 + 2) - 4$

в) $Y = ab(b + 8) - 4a(b^2 + 2b)$

г) $Y = a(ab^3 - 2) - ((3ab)^3 + 1)$



7 Впишите подходящие выражения в пустые клетки.

а) $\square(a - 1) = ab - b$

в) $6xy + x^2y = x\square(6 + \square)$

д) $4a^4 - 2a^2 + 2a = 2a(\square - \square + \square)$

б) $5x^2 + x = \square(5x + 1)$

г) $-2x^3y - 2xy = \square(x^2y + y)$

е) $\square(a^2 + a + 3) = -3a^3 - 3a^2 - 9a$

8 Упростите левую часть и решите уравнение.

а) $a^2 - a(a - 2) = 5$

г) $-21b^2 - 3b(2 - 7b) = -42$

б) $3x(x + 3) - x(3x - 5) = 28$

д) $-3y(y + 3) - (2 - 3y^2) = 16$

в) $-2(y^2 - 5y) - y(-2y) = 19$

е) $4,2m(m + 5) - 2(1 + 2,1m^2) = 40$

9 В пустые клетки впишите такие одночлены, чтобы получилось верное равенство.

$-2a^2 \cdot (1 - \square) = \square + 2a^3$

$a^5 \cdot (-a^3 + \square + 2) = -a^8 + a^6 + \square$

$(b - 3a^2) \cdot \square = 5ab - \square$

$\square \cdot (b^2 - 3ab + 7) = -2b^3 + \square - 14b$

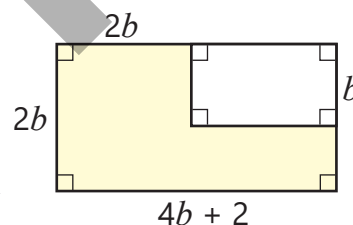
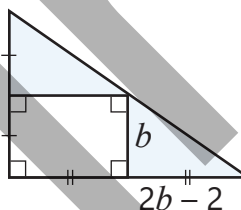
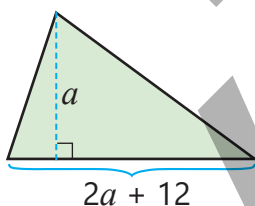
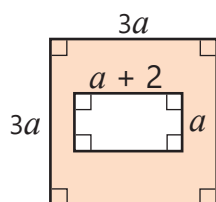
10 Ответьте на вопросы. При каком значении переменной:

а) значение выражения $2(x + 3)$ на 5 единиц больше значения выражения $3x$?

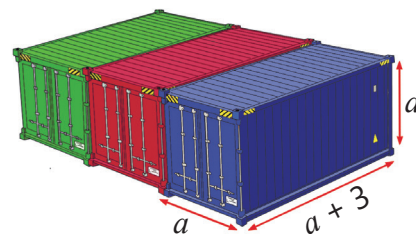
б) значение выражения $6y(y - 2)$ на 6 единиц меньше значения выражения $2y(4 + 3y)$?

Решение задач

11 Напишите многочлены для вычисления площадей закрашенных частей данных фигур.



12 Грузовой контейнер в форме кубоида имеет размеры, указанные на рисунке (в метрах). Какой многочлен можно составить для нахождения общего объема трёх таких контейнеров? Найдите ответ двумя способами.



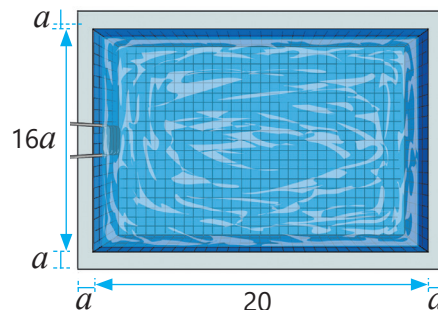
13 Первый принтер печатает m страниц в минуту, а второй — на 4 страницы больше. Ответьте на вопросы, записав многочлены:

- Сколько страниц напечатает второй принтер за 3 минуты?
- Как найти общее количество страниц, напечатанных двумя принтерами за 5 минут?
- Сколько страниц вместе напечатают два принтера за k минут?



14 На плане указаны размеры бассейна прямоугольной формы в метрах. Для бассейна предусмотрена укладка плитки по его краям.

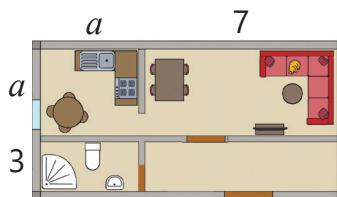
- Используя план, запишите многочлен для нахождения общей площади плитки, которая будет уложена на эту часть бассейна. Найдите ответ двумя способами.
- Если $a = 0,5$, то чему равна эта площадь?



3.5. Умножение многочлена на многочлен

Исследование-обсуждение

Размеры прямоугольной части квартиры указаны на рисунке. Какими способами можно найти многочлен, который выражает эту площадь?

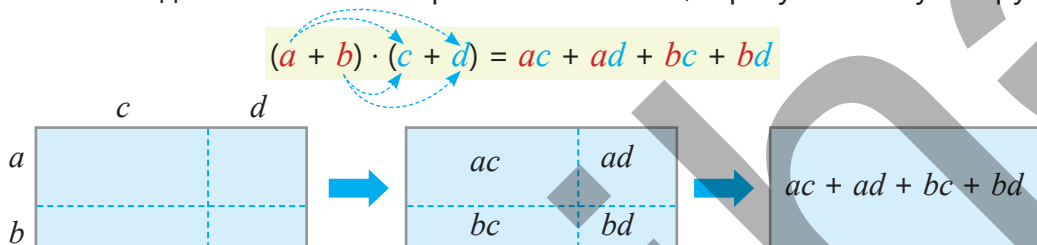


Ключевые слова

- эквивалентные выражения
- тождество

Изучение Умножение многочленов

Чтобы найти произведение двух многочленов, каждое слагаемое первого многочлена умножается на каждое слагаемое второго многочлена, и результаты суммируются.



- Также для нахождения произведения двух многочленов можно использовать таблицу.

×	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Например, произведение двучленов $a + 1$ и $3a + 2$ можно найти так:

$$(a + 1) \cdot (3a + 2) = a \cdot 3a + a \cdot 2 + 1 \cdot 3a + 1 \cdot 2 = 3a^2 + 2a + 3a + 2 = 3a^2 + 5a + 2$$

$$(a + 1) \cdot (3a + 2) = 3a^2 + 5a + 2$$

×	3a	2
a	3a ²	2a
1	3a	2

- При нахождении произведения многочленов необходимо пользоваться правилом умножения слагаемых с одинаковыми и разными знаками, учитывая знаки слагаемых, входящих в каждый многочлен.

$$(2a - 5) \cdot (a + 3) = 2a \cdot a + 2a \cdot 3 - 5 \cdot a - 5 \cdot 3 = 2a^2 + 6a - 5a - 15 = 2a^2 + a - 15$$

×	a	3
2a	2a ²	6a
-5	-5a	-15

$$(2a - 5) \cdot (a + 3) = 2a^2 + a - 15$$



Подумай!

Изменится ли результат при нахождении произведения многочленов, если поменять местами множители? Найдите произведение двучленов $2a - 5$ и $a + 3$, поменяв местами члены, и объясните свой ответ.

Задания

- 1 Заполните пустые ячейки в таблице и найдите произведение многочленов.

$$(a - 1) \cdot (a + 4)$$

×	a	4
a		
-1		

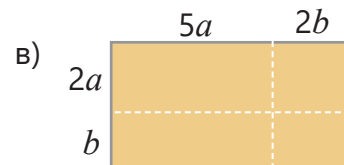
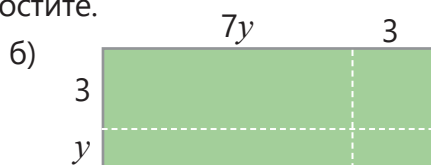
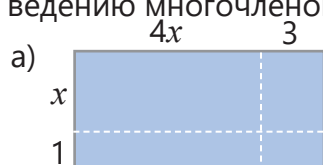
$$(2a + 1) \cdot (a - 3)$$

×	a	-3
2a		
1		

$$(a - 5) \cdot (2a^2 + a + 1)$$

×	2a ²	a	1
a			
-5			

- 2 Чтобы найти площадь прямоугольника, запишите выражение, соответствующее произведению многочленов, и упростите.



- 3 Представьте произведение в виде многочлена.

ОБРАЗЕЦ $(3x - y)(x + 2y)$

Решение	Объяснение
$(3x - y)(x + 2y) =$ $= 3x \cdot x + 3x \cdot 2y - y \cdot x - y \cdot 2y =$ $= 3x^2 + 6xy - xy - 2y^2 = 3x^2 + 5xy - 2y^2$	Каждый член первого двучлена умножается на каждый член второго двучлена, и полученные произведения суммируются. Многочлены записываются в стандартном виде.

- а) $(a - 5)(a + 3)$ в) $(x + y)(-2 - y)$ д) $(y - 4)(x + 8)$ ж) $(5 - a)(2 + a)$
 б) $(x - y)(x + y)$ г) $(x - 9)(y + 2)$ е) $(-a + 7)(b - 6)$ з) $(6 - x)(x - 3)$

- 4 Упростите выражение.

- а) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$ в) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$ д) $(3c^2 - d)(-d - 3c^2)$ ж) $(x + 2)(3x^2 - 2x - 1)$
 б) $(m - n)(n + 3m^2)$ г) $(-b^2 - 1)(b^2 + 2)$ е) $(1,2m^2 - n)(5m^2 - n)$ з) $(2x - 3)(x^2 - 2x - 5)$



Из истории математики

Древние математики доказывали правильность некоторых равенств для положительных значений переменных с помощью геометрических фигур. Греческий математик Евклид (IV век до н.э.) в своем труде "Начала" показал истинность равенства $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, разделив прямоугольник на четыре прямоугольника.



	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

- 5 В пустые клетки впишите подходящие выражения так, чтобы равенство было верным.

а) $(a + b)(c - \square) = ac - ad + \square - bd$

в) $(b + 2)(b - \square) = b^2 + \square - 2$

б) $(a - 1)(\square - 3) = ab - 3a - \square + 3$

г) $(d - \square)(d - 5) = d^2 - 7d + \square$

- 6 Упростите выражения.

а) $(a - 2)(a - 5) - a(3 - a)$

г) $(x - 3)(2y - 5) - (5x + 6y) + 2xy$

б) $(a^2 + 1)(2 - a) + a^2(1 + a)$

д) $(m - n^2)(2 + n) - (m + 2n)(m - n)$

в) $-a(a + 5) - (a - 3)(a + 4)$

е) $(x^3 - y)(y - 2x) - 2x(x + y) - 3(x + y)$

- 7 Упростите выражение. Найдите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $(a + 1)(2a - 3) + a(3a + 1)$
при $a = 1$; -2

б) $(x - 3)(x + 6) - (x - 2)(x - 1)$
при $x = -1$; -4

в) $-3y(2y - 1)(y + 4) + 6y^3$
при $y = 0$; $-0,5$

- 8 Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида. Найдите значение выражения по условию.

а) $(a - 3)(a - 2)$
при $a^2 - 5a = 14$

б) $(2a + 3)(b + 2) - a(b + 4)$
при $ab + 3b = -2$

- 9 Упростите левую часть уравнения и решите уравнение.

а) $(x + 3)(x - 1) - x^2 = 5$

в) $5 - (y - 3)(y + 1) + y(y - 1) = 11$

б) $(2x + 1)(x - 5) - 2x(2 + x) = -18$

г) $-3(y + 3)(2 - y) - 3y(2 + y) = -12$

- 10 Найдите произведение многочленов, используя свойства умножения.

ОБРАЗЕЦ $(3a - 2)(a + 1)(a - 2) = ?$

Решение	Объяснение
$(3a - 2)(a + 1) = 3a \cdot a + 3a \cdot 1 - 2 \cdot a - 2 \cdot 1 =$ $= 3a^2 + 3a - 2a - 2 = 3a^2 + a - 2$ $(3a^2 + a - 2) \cdot (a - 2) =$ $= 3a^2 \cdot a - 3a^2 \cdot 2 + a \cdot a - 2 \cdot a - 2 \cdot a + 2 \cdot 2 =$ $= 3a^3 - 6a^2 + a^2 - 2a - 2a + 4 = 3a^3 - 5a^2 - 4a + 4$	Вычисляется произведение первых двух многочленов. Полученный многочлен умножается на следующий многочлен. В полученном многочлене приводятся подобные слагаемые.

а) $(a - 5)(a + 3)(a + 2)$ б) $(b - 2)(b + 1)(b + 3)$ в) $(m - 2)(m - 2)(m + 4)$ г) $(p - 5)(p + 3)(p + 3)$

- 11 Запишите степень в виде произведения и выполните умножение.

а) $(a - b)^2$

в) $(2a + b)^2$

д) $(2m - 3)^2$

ж) $(x + 2)^3$

б) $(x - 1)^2$

г) $(3 - y)^2$

е) $(-b - 1)^2$

з) $(y - 1)^3$

Изучение Тождество

Выражения $4(a + b)$ и $4a + 4b$ принимают одинаковые значения при любых значениях переменных a и b . Например, при $a = 5$ и $b = 2$ оба выражения равны 28, а при $a = 0$ и $b = -1$ оба равны -4 и т. д.

Два выражения, принимающие равные значения при любых значениях переменных, называются **эквивалентными выражениями** или **тождественно равными выражениями**. Равенство, которое верно при любых значениях переменных, называется **тождеством**. Например:

$$(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$$

• Также равенства, выражающие свойства сложения и умножения, являются тождествами. Например, $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$ и т. д. являются тождествами.

- 12 По каким свойствам операций можно сказать, что равенство является тождеством?

а) $a + (-a) = 0$

в) $b - (-c) = b + c$

д) $b - ac - bc = b - c(a + b)$

б) $-x(-y) = xy$

г) $xy + 5 = 5 + xy$

е) $4(a - 1) + b(a - 1) = (4 + b)(a - 1)$

- 13 Укажите выражения, тождественно эквивалентные данному выражению.

а) $2a - 8$

$2(a - 4)$

$2(a - 8)$

$2(-4 + a)$

б) $-ab - 6a$

$a(b - 6)$

$-a(b + 6)$

$a(-6 - b)$

в) $2a(a - 1)$

$2a^2 - 2a$

$a(a - 2)$

$-2(a - a^2)$

г) $2xy - 6x + 3$

$2x(y - 3) + 3$

$2xy - 3(2x + 1)$

$2xy - 3(2x - 1)$



Запомни!

Замена выражения на другое, тождественно равное ему, называется **тождественным преобразованием выражения**. Например, нахождение суммы, разности и произведения многочленов является тождественным преобразованием.

- Можно проверить, является ли равенство тождеством, сравнив выражения в левой и правой частях равенства после их тождественного преобразования.

При преобразовании выражения с одной стороны равенства получается выражение, стоящее с другой стороны.

$$(2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2$$

$$(2x - y)(2x + y) = 4x^2 + 2xy - 2xy - y^2 = 4x^2 - y^2$$

Выражения с обеих сторон равенства тождественно преобразуются и получается одинаковое выражение в обеих сторонах.

$$3x(2x - y) + 6xy = 2x(3x + y) + xy$$

$$3x(2x - y) + 6xy = 6x^2 - 3xy + 6xy = 6x^2 + 3xy$$

$$2x(3x + y) + xy = 6x^2 + 2xy + xy = 6x^2 + 3xy$$

- 14 Тожественно ли равны данные выражения? Объясните.

а) $3(a + 2)$ и $3a + 6$

в) $-4(a + 2)$ и $-4a + 8$

д) $5(xy - xy)$ и 5

б) $10 - 5a$ и $5a - 10$

г) $6(a - a)$ и 0

е) $2(a + 10)$ и $20 + 2a$

- 15 Проверьте, является ли тождеством.

а) $2a(2a - 0,5b) - ab = 4a^2$

в) $3 - (a - 1)(2 - a) = 5 + a(a - 1)$

б) $-2x^2 + 2(x - 1)(x - 2) = -2(3x - 2)$

г) $-4(2c^2 - b) + 2b = 2(3b - c^2) - 2c^2$

- 16 Определите, является ли данное равенство тождеством.

а) $2(xy + 5) = 2xy + 10$

в) $5xy \cdot 3z = 3xy \cdot 5z$

д) $ab + (-bc) = b(a - c)$

б) $-3(5 + x) = 3x - 15$

г) $-a + b + c = c - a - b$

е) $(b - 2)(a - c) = (2 - b)(a - c)$

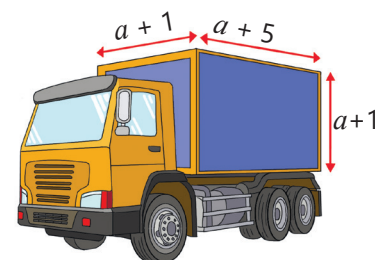
- 17 Обоснуйте, что значение следующего выражения не зависит от переменных:

$$(a + b - 2c)(b - a) + (a + c - 2b)(a - c) - (b + c - 2a)(b - c)$$

Решение задач

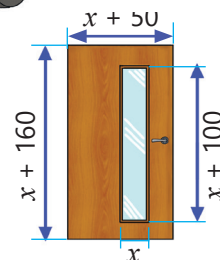
- 18 Грузовой отсек машины имеет форму кубоида.

- Выразите объем грузового отсека в виде многочлена.
- В грузовой отсек погрузили грузовой контейнер кубической формы с ребром длиной a . Выразите объем оставшейся свободной части в виде многочлена.
- Если $a = 2$ м, чему будет равен объем оставшейся свободной части?



- 19 На рисунке указаны размеры двери в сантиметрах. Напишите многочлены, выражающие площадь одной стороны двери и стеклянной части.

- Площадь деревянной части одной стороны двери составляет 12400 см^2 . Каковы ширина и длина двери?



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одночлены

ab , $2m$, $6x^2y$ – одночлен
 $a + b$, $\frac{2}{m}$ – не является
 одночленом.

Стандартный вид одночлена

Степень
 одночлена: $3 + 4 = 7$

$$-20a^3c^4$$

Коэффициент: -20 Буквенная часть: a^3c^4

Подобные одночлены: x^3y^2 и $4x^3y^2$

Не подобные одночлены: x^2y и $2xy^2$

Многочлены

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x^2 & x^2 & -y^2 & -y & -y & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 \quad -2y$$

Многочлен: $2x^2 - y^2 - 2y + 1$

Члены многочлена: $2x^2$, $-y^2$, $-2y$, 1

Стандартный вид многочлена

$$3xy^2 + 3 - xy^2 + y = 2xy^2 + y + 3$$

Двучлен: $a^2 + 3$ Трехчлен: $a^2 - 3ab + 4$

Степень членов:

$$4 + 1 = 5 \quad 1 + 2 = 3 \quad 1$$

$$2x^4y + 5xy^2 - x$$

Члены многочлена: $2x^4y$, $5xy^2$, $-x$

Степень многочлена: 5

Одночлены и многочлены

Произведение одночленов

$$2x \cdot 4x = (4 \cdot 2) \cdot (x \cdot x) = 8x^2$$

$$(2x^2y)^3 = 8x^6y^3$$

Сложение и вычитание многочленов

$$(2a^2 + ab) + (a^2 - 3ab) = 3a^2 - 2ab$$

$$(2a^2 + ab) - (a^2 - 3ab) = a^2 + 4ab$$

Умножение одночлена на многочлен и умножение многочлена на многочлен

$$2a(a + b) = 2a^2 + 2ab$$

$$(a + 1) \cdot (3a + 2) = 3a^2 + 5a + 2$$

Решение исходной задачи

Когда каждое колесо двух автомобилей совершает один полный оборот, пройденное расстояние (в метрах): $2\pi \cdot 0,4 \approx 2,4$.

Колесо автомобиля А за 1 секунду совершает a оборотов, поэтому пройденное расстояние равно: $2,4a$.

Колесо автомобиля В за 1 секунду совершает b оборотов, поэтому пройденное расстояние: $2,4b$.

• Когда автомобили А и В двигаются в одном направлении:

Расстояние между ними через 1 секунду: $2,4a - 2,4b$

Расстояние между ними через t секунд:

$$(2,4a - 2,4b) \cdot t = 2,4at - 2,4bt$$

Расстояние между ними через $t + 15$ секунд:

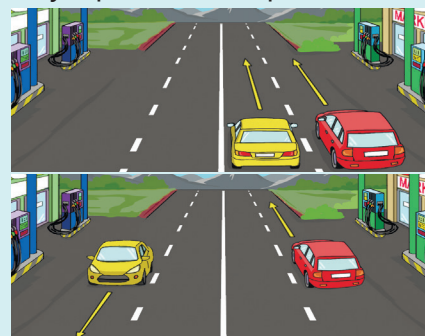
$$(2,4a - 2,4b)(t + 15) = 2,4at + 36a - 2,4bt - 36b$$

• Когда автомобили А и В двигаются в противоположных направлениях:

Расстояние между ними через 1 секунду: $2,4a + 2,4b$

Расстояние между ними через t секунд: $(2,4a + 2,4b) \cdot t = 2,4at + 2,4bt$

Расстояние между ними через $t + 15$ секунд: $(2,4a + 2,4b)(t + 15) = 2,4at + 36a + 2,4bt + 36b$



ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Чье мнение верно: Айнур или Анара? Объясните свой ответ.

Айнур

Степень многочлена равна 6.

$$a^2 + a^4 + a^3 \cdot a^3$$

Анара

Степень многочлена равна 4.

2. Определите многочлены, соответствующие каждому пункту.

- а) Степень равна 2.
- б) Степень равна 3.
- в) Свободный член равен 1.
- г) Дан в стандартном виде.

$2xy^2 + 1$	$2x + x^2 + x + x^3$
$-x^3 - x$	$-1 + x^2 + 2$
$3 - xy^3 + x^2$	$2x^2 - xx^2 + x^3 + 1$

3. Выполните умножение. Найдите сумму коэффициентов полученных многочленов.

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| а) $(a - 5)(a + 6)$ | г) $(ab - a)(b + a)$ | ж) $(x + 3)(4x - 2)(x + 2)$ |
| б) $(b - 1)(b - 3)$ | д) $(2m - n)(2n - m)$ | з) $(x + 1)(x^2 - x - 1)$ |
| в) $(1,2 - m)(m + 6)$ | е) $(4m + n)(5 - 0,5n)$ | и) $(m^2 + 3m + 1)(m - 5)$ |

4. Упростите выражение. Определите степень полученного многочлена.

- | | |
|--|---|
| а) $2(a + ab) - a(ab + 2b)$ | д) $m(m^2 - mn + n^2)(m^2 + n^2)$ |
| б) $(a^2 - a)(a - 3) + 4a^2$ | е) $x^3 - (x - 2)(x - 5)(x - 4)$ |
| в) $\frac{1}{2}b(b + bc) - \frac{1}{4}c(b - bc)$ | ж) $1\frac{1}{6}b(x - y) + \frac{5}{6}b(y - x) - \frac{2}{3}b(x + y)$ |
| г) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ | з) $(y - 1)(y - 2)(y - 3)(y + 4)$ |

5. Определите, верно утверждение или нет. Обоснуйте, показав на примерах.

- а) Степень произведения двух многочленов 2-й и 3-й степеней равна 5.
- б) Степень суммы двух многочленов 3-й и 4-й степеней равна 7.
- в) Степень суммы двух многочленов 3-й степени также должна быть равна 3.
- г) Степень суммы двух многочленов 5-й степени может быть равна 3.

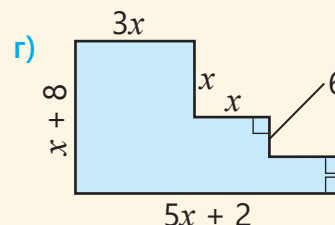
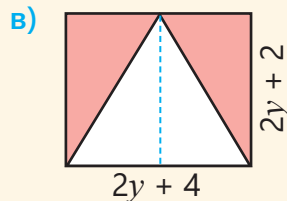
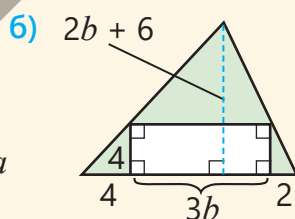
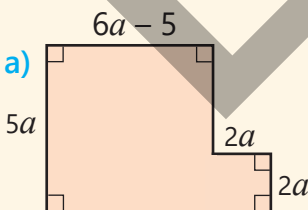
6. Упростите выражение. Вычислите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $2xy^2 + x(5y - 2y^2)$
при $x = -2; y = -1$

б) $3a^2b^4c^2 - (2ab^2c)^2$
при $a = -2; b = 3; c = -1$

в) $m - (-mn^3) - n + mn^3$
при $m = -5; n = 4$

7. Напишите многочлен для вычисления площади цветной части.



8. Упростите выражение, если $A = x - 1$, $B = 0,5x + 2$ и $C = x^2 + 2$.

- а) $A(A + C)$ б) $B(A + C)$ в) $2AB - C$ г) $(3A + 2B)(A + C)$ д) $(A + B)(B - A)(C - B)$

9. Расставьте скобки так, чтобы равенство было верным.

а) $2a^2 - a + 2 + 2a^2 - a + 5 = -3$

в) $2ac^2 - b - ac^2 - ac^2 + 2b = 0$

б) $2y^2 - 5 + y + y^2 - y^2 + y = -5$

г) $2xy^2 - x - xy^2 + 3xy^2 + 5x = 4x$

10. Если $b^2 - 3b = a$, то запишите данные выражения в виде многочлена, зависящего от a .

$b^2 - 3b + 5$

$2b^2 - 6b$

$(b^2 - 3b + 1)(b^2 - 3b + 3) - (4b^2 - 12b)$

$(b^2 - 3b)(b^2 - 3b + 1)$

$-b^2 + 3b$

$(b^2 - 3b - 1)(b^2 + 4 - 3b) - 3(b^2 - b - 2b)$

11. Решите уравнения.

а) $x^2 - x(x + 2) = 8$

в) $(y - 2)(y - 3) - y(y - 6) = 40$

б) $6x^2 - (3x + 2)(2x - 1) = 15$

г) $-6y(y - 1) + 3(2y - 4)(y + 30) = 0$

12. Обоснуйте, что значение выражения делится на 8 при любых натуральных значениях a и b .

а) $3(10a + 4b) + 2(10b + a)$

б) $2a(a + 5b) - a(2b - 14a)$

в) $(4a - b)(4a + b) + b^2$

13. Если из произведения двух последовательных натуральных чисел вычесть квадрат меньшего числа, то получится 16. Какие это числа?

14. Найдите такие три последовательных натуральных числа, чтобы произведение второго и третьего чисел было на 24 больше произведения первого и второго.

15. Ширина экрана планшета равна a см, а длина — $1,5a$ см. Ширина серой рамки по краям экрана равна 1 см.

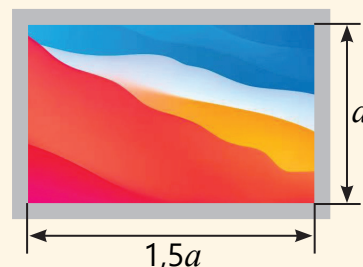
а) С помощью какого из выражений можно найти площадь этой серой рамки.

$(1,5a + 1)(1,5a + 1) - 1,5a(a + 1)$

$(1,5a + 2)(a + 2) - 1,5a^2$

$(1,5a + 2)(1,5a + 2) - 1,5a(a + 2)$

$(1,5a + 1)(a + 1) - 1,5a^2$



б) Если площадь рамки составляет 74 см^2 , то каковы размеры экрана планшета?

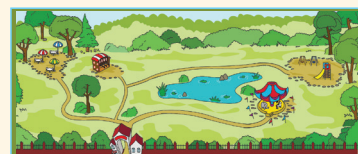
16. Если две противоположные стороны квадрата уменьшить на 1 см, а две другие стороны увеличить на 3 см, то площадь полученного прямоугольника окажется больше площади квадрата на 7 см^2 . Какова длина стороны квадрата?

17. Ответьте на вопросы.

а) Если произведение $a(x^2 - x)(ax - 2)$ записать в виде многочлена стандартного вида, то при каком значении a коэффициент при x^2 будет равен 0?

б) Если произведение $a(x^2 + ax - 1)(x - 2)$ записать в виде многочлена стандартного вида, то при каком значении a коэффициенты при x и x^2 являются противоположными числами?

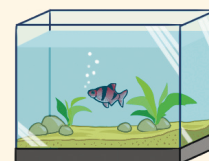
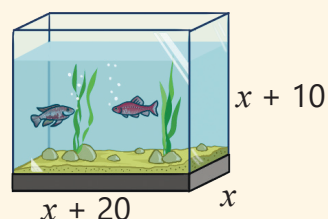
18. Длина прямоугольного парка в 3 раза больше его ширины. В ходе реконструкции ширину парка увеличили на 10 м, а длину сократили на 10 м. В результате площадь парка увеличилась на 1900 м^2 . Какими стали размеры парка?



19. Боковые поверхности аквариумов в форме прямоугольного параллелепипеда изготовлены из стекла. Ребра маленького аквариума на 10 см меньше соответствующих ребер большого аквариума.

- Выразите объем и площадь поверхности аквариумов с помощью многочленов.

- Для изготовления маленького аквариума использовали на 6800 см^2 меньше стекла, чем для большого. Какова длина ребер аквариумов?



Математический калейдоскоп

1. Запись числа $\overline{abc}$ представляет собой трехзначное число, составленное из цифр a , b и c : $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Если a , b и c отличны от 9, то какие из приведенных выражений будут нацело делиться на 9?

$$\overline{ab} - \overline{ba}$$

$$\overline{abc} - \overline{bac}$$

$$\overline{abc} - \overline{b0c}$$

$$\overline{abc} - \overline{ba}$$

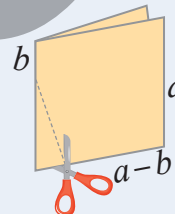
$$\overline{aac} - \overline{caa}$$

$$\overline{acc} - \overline{c0}$$

2. После складывания цветной бумаги пополам образовались два квадрата. Затем ножницами вырезали треугольник, как показано на рисунке. Напишите многочлен для вычисления площади оставшейся фигуры.

3. Возраст деда в 2 раза больше возраста сына, а возраст сына в 6 раз больше возраста внука. Через 5 лет сумма возрастов деда и сына будет в 10 раз больше возраста внука. Сколько лет деду сейчас?

4. В классе учится одинаковое количество мальчиков и девочек. В выборах старосты участвовали два кандидата. После подсчета голосов оказалось, что один из них получил на 3 голоса больше. Учитель заявил, что подсчет голосов был проведен неверно. Как он это определил?



"ВОЗОБНОВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ"

Источники энергии, получаемые за счет постоянных природных процессов, называются возобновляемыми. Для расчета количества производимой ими энергии и оценки экономической эффективности в некоторых случаях применяются многочлены.

1. Мощность электрической энергии, вырабатываемой солнечными панелями за 1 день, можно рассчитать по следующей формуле:

$$G = 0,85npt$$

Здесь p — мощность одной панели, n — количество солнечных панелей, t — время эффективного освещения солнечным светом в течение дня (в часах). На крыше дома для солнечных панелей на прямоугольной площадке можно разместить по ширине a штук, по длине — $a + b$ штук панелей. Мощность одной панели составляет 100 ватт, а максимальное время освещения солнечным светом в течение дня — 5 часов. Сколько ватт электрической энергии эти панели обеспечат в течение дня? Запишите многочлен, чтобы вычислить это.

2. Соберите информацию о других возобновляемых источниках энергии.

3. Исследуйте, какие работы проводятся в области возобновляемой энергии в Азербайджане, и подготовьте презентацию.



Формулы сокращенного умножения

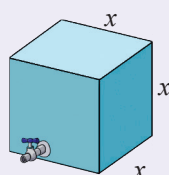
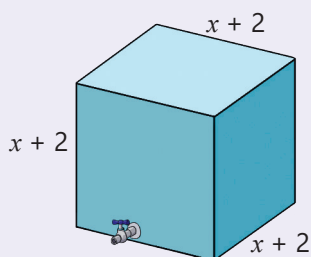
В этой главе вы научитесь:

- упрощать выражения с применением формул сокращенного умножения;
- выносить общий множитель за скобки и разлагать многочлен на множители;
- разлагать многочлены на множители способом группировки;
- разлагать многочлен на множители с применением формул сокращенного умножения.

Попытайтесь!

Мастер изготовил два бака для воды в форме куба из металлического листа. Длина ребра одного бака x метров, а другого $x + 2$ метров.

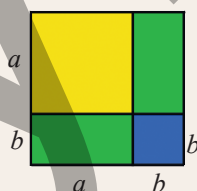
- Как записать выражение, показывающее, на сколько объем большого бака больше объема маленького, в виде многочлена?
- Сколько всего квадратных метров металлического листа было израсходовано на изготовление двух баков?
- На изготовление большого бака было использовано на 48 м^2 больше металлического листа, чем на маленький бак. Каков объем каждого бака?



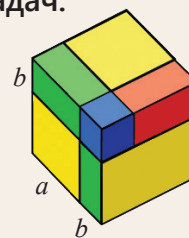
Формулы сокращенного умножения широко используются при упрощении выражений, решении уравнений, обосновании тождеств.

Эти формулы также применяются для упрощения вычислений.

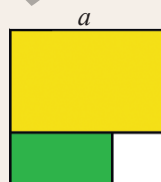
Формулы сокращенного умножения используются при нахождении площадей и объемов геометрических фигур, в финансово-экономических расчетах и при моделировании различных задач.



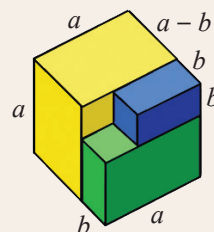
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



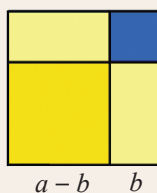
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



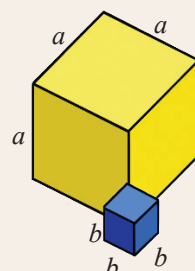
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$



$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Предварительная проверка

1 Вычислите.

а) НОД (24, 36)

б) НОД (48, 72)

в) НОД (21, 84)

г) НОД (36, 54, 72)

2 Впишите подходящее число в пустую клетку.

а) $64 = 4^{\square}$

б) $81 = \square^4$

в) $32 = 2^{\square}$

г) $-125 = (-5)^{\square}$

д) $0,01 = \square^2$

е) $\frac{8}{27} = \square^3$

3 Запишите данное выражение в виде квадрата одночлена.

а) $25a^4$

б) $49x^8$

в) $121a^6b^6$

г) $0,16x^4y^6$

д) $\frac{25}{49}a^{10}$

е) $1\frac{11}{25}c^6d^2$

4 Запишите данное выражение в виде куба одночлена.

а) $27a^6$

б) $64b^9$

в) $-216x^6y^3$

г) $0,125a^3b^9$

д) $-\frac{27}{64}x^{12}$

е) $-3\frac{3}{8}x^6$

5 Вынесите общий множитель за скобки. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных.

а) $12 + 6x$
 $x = 18$

б) $16a + 8b$
 $a = -2; b = 24$

в) $-25x - 25y$
 $x = 2,1; y = 1,9$

6 Упростите выражение. Определите, является результат двучленом или трехчленом.

а) $a(a + 3)(a + 4) - a(a + 1)(a + 2)$

в) $(b - 1)(1 + b + b^2 + b^3) + 3b^4 + 5$

б) $(a + b)(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3)$

г) $(3n^2 - 2n + 1)(3n^2 + 2n - 1) - 4n(n + 1)$

7 В пустые клетки впишите одночлены так, чтобы получилось тождество.

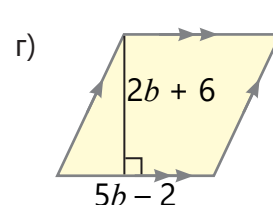
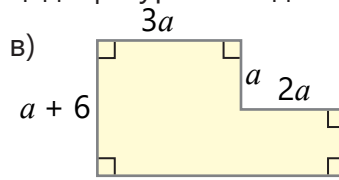
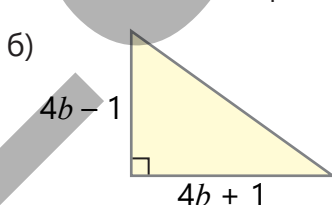
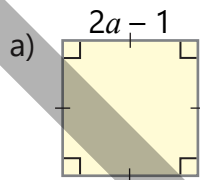
а) $(a - b)(a - \square) = a^2 - ac - ab + bc$

в) $(4a + \square)(\square + 1) = 4a^2 + 4a + \square + 5b$

б) $(2b + 3)(2b - \square) = \square - 9$

г) $(0,5a - b)(0,2a - \square) = \square - \square + 2b^2$

8 Запишите выражение, показывающее площадь фигуры, в виде многочлена.



9 На рисунке указаны размеры нового прямоугольного парка в метрах.

- Выразите площадь парка в виде многочлена.
- Если площадь, отведенная под аттракционы, на 100 м^2 больше площади для пикника, каковы общая площадь и периметр парка?



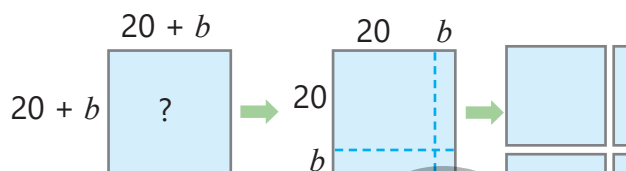
4.1. Квадрат суммы и разности

Исследование-обсуждение

Как можно найти площадь квадрата со стороной $20+b$ по рисунку, используя площади соответствующих фигур?

- Запишите выражение для нахождения этой площади.

- Как с помощью этого способа можно найти значение выражения $(30 + 5)^2$?

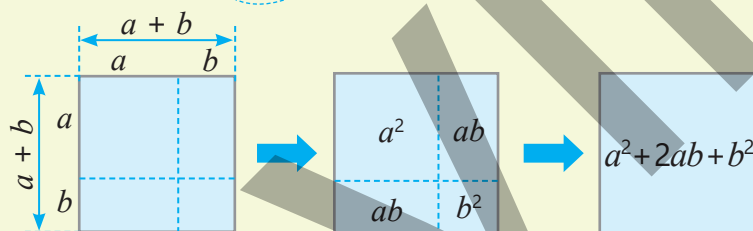


Изучение Квадрат суммы и разности

Иногда при нахождении произведения многочленов нет необходимости перемножать их почленно. Произведение можно записать напрямую с помощью специальных формул, которые называются *формулами сокращенного умножения*.

Используя правило умножения многочленов, *квадрат суммы двух чисел* можно найти следующим образом:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Формула квадрата суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого и второго чисел плюс квадрат второго числа.

- Аналогично можно выразить квадрат разности двух чисел:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - \underline{ab} - \underline{ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Формула квадрата разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого и второго чисел плюс квадрат второго числа.

- В формулах квадрата суммы и разности, если вместо переменных a и b подставить любые выражения, равенство также будет верным. В этом случае можно провести соответствующую подстановку и упростить результат. Например:

$$\underbrace{(2x - 3)}_a^2 = \underbrace{(2x)}_a^2 - \underbrace{2 \cdot 2x \cdot 3}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{3^2}_b^2 = 4x^2 - 12x + 9$$



Подумай!

Как можно обосновать, что выражения тождественно равны?

$$(a - b)^2 = (b - a)^2 \quad (a + b)^2 = (-a - b)^2$$

Задания

- 1 Запишите квадрат суммы или разности в виде многочлена.

ОБРАЗЕЦ $(x + 3)^2$

Решение	Объяснение
$\underbrace{(x + 3)}_a^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{2 \cdot x \cdot 3}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{3^2}_{b^2} = x^2 + 6x + 9$	Квадрат первого выражения (x^2) плюс удвоенное произведение первого выражения на второе ($2 \cdot x \cdot 3$) плюс квадрат второго выражения (3^2).

- а) $(a - 5)^2$ в) $(x - 1)^2$ д) $(-b + 5)^2$ ж) $(a + 0,2)^2$ и) $(-a - 5)^2$
 б) $(2 + n)^2$ г) $(m + n)^2$ е) $(0,1 + y)^2$ з) $(x + 6)^2$ к) $(-9 + p)^2$

- 2 Запишите квадрат суммы или разности в виде многочлена.

ОБРАЗЕЦ $(2x - y)^2$

Решение	Объяснение
$\underbrace{(2x - y)}_a^2 = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} - \underbrace{2 \cdot 2x \cdot y}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{y^2}_{b^2} = 4x^2 - 4xy + y^2$	В формуле $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ принимаем $a = 2x$, $b = y$, подставляем в формулу и упрощаем выражение.

- а) $(2x - 1)^2$ в) $(xy - 4)^2$ д) $(-x + 0,2)^2$ ж) $(mn + 1)^2$ и) $(-0,5y - 1)^2$
 б) $(3x + y)^2$ г) $(c + 3d)^2$ е) $(0,2x - y)^2$ з) $(x - 4y)^2$ к) $(-2p - 0,1q)^2$

- 3 В пустые клетки впишите выражения так, чтобы равенство было верным.

$$(a + 3b)^2 = a^2 + \square + 9b^2 \quad (x - \square)^2 = x^2 - \square + 25y^2 \quad (\square - 5d)^2 = \square - 10d + \square$$

- 4 Запишите выражение в виде трехчлена.

- а) $\left(\frac{1}{2}a - 1\right)^2$ в) $(0,3x^2 - 4)^2$ д) $(b^3 - 1,1)^2$ ж) $\left(-ab^2 + 1\frac{1}{3}\right)^2$ и) $(0,3m^2 - 3)^2$
 б) $(m^2 + n)^2$ г) $\left(-6m + \frac{1}{3}n^3\right)^2$ е) $(x^2y - 0,5)^2$ з) $(-3x^2 - 4y)^2$ к) $(4 + 0,2p^2q^2)^2$



- 5 Объясните, каким способом были найдены квадраты чисел в приведенном примере. Найдите квадраты заданных чисел этим способом и проверьте ответ с помощью калькулятора.

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1 = 1681$$

$$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1 = 1521$$

31^2 28^2 49^2 52^2 201^2 199^2 103^2 $2,1^2$ $10,01^2$ $6,5^2$ $1,01^2$ $2,98^2$

- 6 Запишите в виде многочлена.

- а) Квадрат разности выражений a и $2b$.
 б) Квадрат суммы выражений a и $a - 2$.
 в) Сумма квадратов двух последовательных целых чисел, меньшее из которых равно n .
 г) Квадрат суммы двух последовательных четных чисел, меньшее из которых равно $2n$.

- 7 Упростите выражение. Определите, зависит ли значение выражения от переменной.

- а) $(2a - 5)^2 - 4a^2$ в) $(a + 3)^2 - 3(a + 1)^2 + 2a^2$ д) $(2a + 4)^2 - (4a)^2$
 б) $(b^2 + c)^2 - 2b^2c$ г) $(2x - 3y)^2 - 4(x^2 - 3xy)$ е) $(3n^2 + m)^2 - 3(n + mn)^2$

- 8 Упростите. Найдите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $(a + 3)^2 - (3a + 1)^2$
при $a = 2; -1$

б) $(b - 1)^2 + 2(b - 1)$
при $b = 3; 0,1$

в) $(n^2 - 2)^2 - 4$
при $n = -4; \frac{1}{2}$

- 9 Докажите тождество.

ОБРАЗЕЦ $(4x - y)^2 + 8xy = 16x^2 + y^2$

Решение	Объяснение
$(4x - y)^2 + 8xy = 16x^2 - 8xy + y^2 + 8xy = 16x^2 + y^2$	Левая часть равенства упрощается. Определяется, что полученное выражение равно выражению в правой части равенства.

а) $(3a - b)^2 = 9a^2 + b^2 - 6ab$

в) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

б) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

г) $(a^2 - b)^2 + 2a^2b = a^4 + b^2$

- 10 Ответьте на вопросы.

- а) Какой одночлен нужно вычесть из $(a + b)^2$, чтобы получить $(a - b)^2$?
 б) Какой одночлен нужно добавить к выражению $(3x - 2y)^2$, чтобы получить $(3x + 2y)^2$?
 в) Какой одночлен нужно добавить к выражению $(5m - 1)^2$, чтобы получить $(5m + 1)^2$?

- 11 Анар решил найти квадрат суммы чисел ab и 3. Верно ли его решение? Объясните.

$(ab + 3)^2 = (ab)^2 + 3^2 = a^2b^2 + 9$



- 12 Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 1 больше удвоенного произведения этих чисел.



Запомни!

Некоторые трехчлены можно записать в виде квадрата двучлена. Для этого в формуле квадрата суммы (разности) меняются местами правая и левая части равенства, и данный трехчлен сравнивается с левой частью равенства. Если в левой части равенства есть выражения, соответствующие a и b , то и в правой части выполняется соответствующая подстановка.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

ОБРАЗЕЦ 1. Чтобы записать трехчлен $x^2 + 12x + 36$ в виде квадрата двучлена, данный трехчлен сравнивается с левой частью формулы. Первый член трехчлена — это квадрат переменной x , третий член — это квадрат числа 6. Второй член равен удвоенному произведению x и 6, поэтому данный трехчлен можно записать в виде квадрата двучлена $x + 6$.

$$x^2 + 12x + 36 = \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{2 \cdot 6 \cdot x}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{6^2}_{b^2} = \underbrace{(x + 6)^2}_{(a + b)^2}$$

ОБРАЗЕЦ 2. Трехчлен $25m^2 - 20mn + 4n^2$ можно записать в виде квадрата двучлена следующим образом:

$$25m^2 - 20mn + 4n^2 = \underbrace{(5m)^2}_{a^2} - \underbrace{2 \cdot 5m \cdot 2n}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{(2n)^2}_{b^2} = \underbrace{(5m - 2n)^2}_{(a - b)^2}$$



Подумай!

Как можно доказать равенство: $25m^2 - 20mn + 4n^2 = (2n - 5m)^2$?

- 13 Запишите трехчлен в виде квадрата двучлена. Проверьте ответ.

ОБРАЗЕЦ $4x^2 + 12x + 9$

Решение	Объяснение
$\begin{array}{ccc} 4x^2 & + & 12x & + & 9 \\ \underbrace{}_{a^2} & & \underbrace{}_{2ab} & & \underbrace{}_{b^2} \end{array}$ $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$	В данном трехчлене $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ определяются выражения, которые можно подставить вместо a и b в левой части равенства: $a = 2x$, $b = 3$. Применяется формула и записывается правая часть.

а) $c^2 + 16c + 64$	в) $25 + 10a + a^2$	д) $16a^2 + 8a + 1$	ж) $1 - 18a + 81a^2$
б) $m^2 - 2m + 1$	г) $y^2 + 4y + 4$	е) $n^2 - 14n + 49$	з) $9a^2 + 24a + 16$

- 14 В пустую клетку впишите такой одночлен, чтобы трехчлен можно было записать в виде квадрата двучлена.

а) $a^2 - \square + 9b^2$	в) $b^4 + 14b^2 + \square$	д) $\frac{1}{4}b^2 + \square + 4c^2$	ж) $1 - \square + 0,04b^2$
б) $x^2 - \square + 25y^2$	г) $\square - 12y + 36y^2$	е) $\square - cd^2 + \frac{1}{25}d^4$	з) $\square - 20c^2 + 100$

- 15 В пустую клетку впишите такой одночлен, чтобы получилось тождество.

$a^2 - \square + 4b^2 = (a - 2b)^2$	$16a^2 + 24a + \square = (4a + \square)^2$	$\square - 6b + 9b^2 = (\square + 3b)^2$
-------------------------------------	--	--

- 16 Запишите трехчлен в виде квадрата двучлена. Проверьте ответ.

а) $9a^2 + 1 - 6a$	б) $0,36 + x^2 - 1,2x$	в) $4ab + 25a^2 + 0,16b^2$	г) $\frac{4}{9}a^2 + 2\frac{1}{4} + 2a$
--------------------	------------------------	----------------------------	---

- 17 Вычислите на основе формул квадрата суммы и разности.

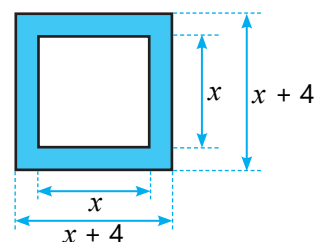
а) $14^2 + 2 \cdot 14 \cdot 6 + 6^2$	в) $101^2 - 2 \cdot 101 + 1$	д) $(5\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot 5\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2$
б) $48^2 - 2 \cdot 48 \cdot 38 + 38^2$	г) $12,5^2 - 25 \cdot 0,5 + 0,5^2$	е) $(1\frac{3}{4})^2 - 2 \cdot 1\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2$

- 18 Запишите трехчлен в виде квадрата двучлена. Найдите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $a^2 + 4a + 4$ $a = 2; -1,6$	б) $x^2 - 0,8x + 0,16$ $x = -0,6; 1,4$	в) $a^2 - 16ab + 64b^2$ $a = 2; b = \frac{1}{8}$
------------------------------------	---	---

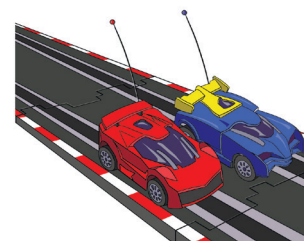
Решение задач

- 19 На рисунке указаны размеры рамки в сантиметрах.
- Какое выражение можно записать для нахождения площади рамки?
 - При каком значении x площадь рамки составит 144 см^2 ?



- 20 Движущиеся тела обладают кинетической энергией. Кинетическая энергия вычисляется по формуле $\frac{mv^2}{2}$, где m — масса тела, v — скорость. Единица измерения кинетической энергии — джоуль. Тело массой 1 кг , движущееся со скоростью 1 м/с , обладает кинетической энергией $\frac{1}{2}$ джоуля.

Две игрушечные машины на пульте управления, каждая массой 2 кг , движутся с разными скоростями. Скорость первой машины на $0,2 \text{ м/с}$ больше скорости второй, а ее кинетическая энергия на $0,12 \text{ Дж}$ больше. С какой скоростью движется каждая из машин?



4.2. Произведение суммы и разности двух чисел

Исследование-обсуждение

Айнур вырезала из квадрата со стороной a см квадрат со стороной b см.

- Запишите выражение для вычисления площади оставшейся фигуры.
- Айнур разделила оставшуюся фигуру на части, как показано на рисунке, и соединила их. Запишите выражение для вычисления площади полученного прямоугольника.



- Как можно обосновать, что выражения для площадей исходной и конечной фигур тождественно равны?

Изучение Произведение суммы и разности двух чисел

Используя правило умножения многочленов, произведение суммы и разности двух чисел можно найти следующим образом:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - \underline{ab} + \underline{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

- Произведение суммы и разности двух чисел равно разности квадратов этих чисел.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- Равенство остается верным, даже если вместо переменных a и b подставить любые выражения. В этом случае можно провести соответствующую подстановку и упростить результат.

$$\underbrace{(2x + 3)}_{a} \underbrace{(2x - 3)}_{b} = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} - \underbrace{3^2}_{b^2} = 4x^2 - 9$$



Подумай!

Как можно записать выражение $(-a - b)(a - b)$ в виде многочлена, основываясь на правиле нахождения произведения суммы и разности?

Задания

1

Запишите в виде многочлена.

ОБРАЗЕЦ $(x + 5)(x - 5)$

Решение	Объяснение
$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$	Квадрат первого выражения (x^2) минус квадрат второго выражения (5^2).
а) $(a - 4)(a + 4)$	в) $(m + 10)(m - 10)$
б) $(5 + b)(5 - b)$	г) $(c - \frac{1}{2})(c + \frac{1}{2})$
	д) $(-x - 1)(x - 1)$
	е) $(-b + 0,1)(b + 0,1)$
	ж) $(-y + 0,5)(y + 0,5)$
	з) $(d - 1\frac{2}{3})(d + 1\frac{2}{3})$

- 2 Найдите произведение суммы и разности двух чисел, записав его в виде разности квадратов этих чисел.

ОБРАЗЕЦ $(40 + 3)(40 - 3)$

Решение	Объяснение
$(40 + 3)(40 - 3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$	Произведение суммы и разности чисел 40 и 3 равно разности квадратов этих чисел.

- а) $(50 + 4)(50 - 4)$ в) $(2 + 0,1)(2 - 0,1)$ д) $(100 + 8)(100 - 8)$ ж) $(2,5 + 1)(2,5 - 1)$
 б) $(20 + 5)(20 - 5)$ г) $(8 + 0,5)(8 - 0,5)$ е) $(200 + 2)(200 - 2)$ з) $(1 + 0,1)(1 - 0,1)$

- 3 Объясните, каким способом было найдено произведение в данном примере, и проверьте верность ответа. Используя этот способ, найдите произведение чисел.

$$51 \cdot 49 = (50 + 1) \cdot (50 - 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

- а) $41 \cdot 39$ б) $28 \cdot 32$ в) $101 \cdot 99$ г) $1,1 \cdot 0,9$ д) $102 \cdot 98$ е) $199 \cdot 201$

- 4 Упростите выражение.

- а) $(2a - 1)(2a + 1)$ в) $(2xy - 5)(5 + 2xy)$ д) $(-0,1b^2 - 4)(0,1b^2 - 4)$
 б) $(3a + 2b)(3a - 2b)$ г) $\left(\frac{2}{3}m + 8\right)\left(\frac{2}{3}m - 8\right)$ е) $\left(2\frac{1}{2}c - \frac{3}{4}b^3\right)\left(2\frac{1}{2}c + \frac{3}{4}b^3\right)$

- 5 В пустые клетки впишите подходящие одночлены так, чтобы равенство было верным.

- а) $(a + 4)(a - 4) = a^2 - \square$ в) $\left(\frac{1}{2}a^2 + \square\right)\left(\frac{1}{2}a^2 - 3\right) = \square - 9$
 б) $(x + \square)(6 - x) = 36 - x^2$ г) $(0,2x^4 + \square)(0,2x^4 - \square) = \square - x^4$

- 6 Ответьте на вопросы:

- а) На какое выражение нужно умножить $2x + y$, чтобы получить $4x^2 - y^2$?
 б) На какое выражение нужно умножить $0,5ab - 1$, чтобы получить $0,25a^2b^2 - 1$?
 в) Какое выражение получится, если сумму $1\frac{1}{2}x$ и 3 умножить на их разность?

- 7 Упростите. Определите, зависит ли значение выражения от переменной.

- а) $(3a - 4)(3a + 4) - 9a^2$ в) $(a - 1)^2 - (a + 1)(a - 1)$
 б) $(5x - 8)(-5x - 8) + 25x^2$ г) $(c - 3)(c + 3)(c^2 + 9) - (c^2 - 2)^2$

- 8 Решите уравнения.

- а) $(a - 2)(a + 2) - a(a + 2) = 5$ в) $(c - 1)(c + 1) = (c - 1)(c + 5)$
 б) $(x + 2)^2 - (x + 4)(x - 4) = 0$ г) $(-y - 5)(y - 5) = 5 - y(y + 5)$



- 9 Сравните, используя формулу разности квадратов. Проверьте ответ с помощью калькулятора.

- а) $288 \cdot 286$ и 287^2 б) 1300^2 и $1301 \cdot 1299$ в) 10000^2 и $10005 \cdot 9995$



Запомни!

Если в формуле произведения суммы и разности двух выражений поменять местами правую и левую части равенства, получается *формула разности квадратов*.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению суммы и разности этих выражений.

Например: $a^2 - 64 = a^2 - 8^2 = (a + 8)(a - 8)$

- 10 Запишите в виде произведения суммы и разности.

а) $a^2 - 25$

в) $(3c)^2 - 16$

д) $25b^6 - 121$

ж) $-x^2 + 25$

и) $0,36 - 9d^2$

б) $49 - b^2$

г) $b^4 - a^4$

е) $81x^2 - 1$

з) $a^2 - 2\frac{1}{4}$

к) $4y^2 - 0,04$



- 11 Объясните, каким способом была найдена разность квадратов чисел в данном примере. Используя этот способ, найдите разность квадратов чисел. Проверьте ответ с помощью калькулятора.

$$5,8^2 - 4,2^2 = (5,8 + 4,2) \cdot (5,8 - 4,2) = 10 \cdot 1,6 = 16$$

а) $102^2 - 2^2$

в) $1,8^2 - 0,8^2$

д) $\left(2\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$

ж) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$

б) $99^2 - 1^2$

г) $3,1^2 - 0,1^2$

е) $7,6^2 - 2,4^2$

з) $2,01^2 - 1,01^2$

- 12 Запишите в виде многочлена.

а) Произведение суммы и разности выражений a и $2b$.

б) Разность квадратов выражений x и $x-5$.

в) Разность квадратов двух последовательных целых чисел, меньшее из которых равно n .

г) Произведение суммы и разности двух последовательных четных чисел, меньшее из которых равно $2n$.

- 13 Проверьте, является ли тождеством.

а) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) = a^8 - 1$

б) $(b - 2)(b + 2)(b^2 + 4) = (b^2 + 2)(b^2 - 2) - 12$

в) $a^6 - 9a^4 = a^4(a - 3)(a + 3)$

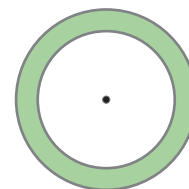
Решение задач

Решите задачи, используя формулу разности квадратов.

- 14 Самир нарисовал два круга с общим центром. Радиус большого круга равен a , радиус маленького круга равен b .

• Какое выражение можно записать для нахождения площади цветного кольца?

• Если $a = 6,2$ см, $b = 4,8$ см, то какова площадь кольца ($\pi \approx 3,14$)?



- 15 Парковку для автомобилей в форме квадрата планируется расширить, увеличив длину ее сторон на 2 м.

• Какое выражение можно записать, чтобы найти, на сколько увеличится площадь парковки?

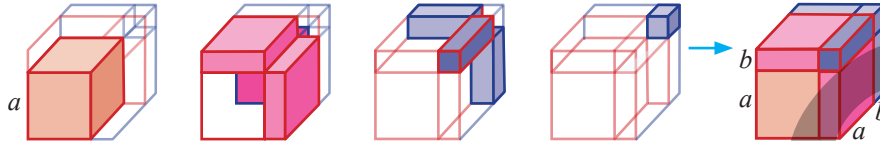
• Если площадь парковки увеличилась на 76 м^2 , какова была ее первоначальная площадь?



4.3. Куб суммы и разности. Сумма кубов и разность кубов

Исследование-обсуждение

Куб с длиной ребра a был преобразован в новый куб с длиной стороны $a + b$ путем добавления нескольких кубоидов.



- Сколько кубоидов и какого размера для этого понадобилось?
- Какой многочлен можно записать для вычисления объема нового кубоида?

Изучение Куб суммы и разности двух чисел

С помощью правила умножения многочленов можно найти куб суммы двух чисел.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Таким образом, выводится формула куба суммы двух чисел:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа и второго числа плюс утроенное произведение первого числа и квадрата второго числа плюс куб второго числа.

- Аналогично можно записать формулу куба разности.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа и второго числа плюс утроенное произведение первого числа и квадрата второго числа минус куб второго числа.

- Если в формулах куба суммы и разности двух чисел вместо переменных a и b подставить любые выражения, равенство также будет верным. В этом случае, выполняя соответствующую подстановку, преобразования можно упростить.

$$\underbrace{(2x - 3)}_a^3 = \underbrace{(2x)}_a^3 - \underbrace{3 \cdot (2x)^2 \cdot 3}_{3 \cdot a^2 \cdot b} + \underbrace{3 \cdot 2x \cdot 3^2}_{3 \cdot a \cdot b^2} - \underbrace{3^3}_{b^3} = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$



Подумай!

Как доказать, что выражение $(a - b)^3$ тождественно равно выражению $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$?

Задания

- 1 Запишите куб суммы или разности в виде многочлена.

$$(a + 1)^3$$

$$(a - 2)^3$$

$$(b + 3)^3$$

$$(5 - c)^3$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}x\right)^3$$

$$(3a + 1)^3$$

$$(2b + a)^3$$

$$(ab - 4)^3$$

- 2 Запишите в виде куба суммы или разности.

$$a) x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$б) m^3 - 6m^2n + 12mn^2 - 8n^3$$

$$в) a^6 + 3a^2b^4 + 3a^4b^2 + b^6$$

- 3 В пустые клетки впишите одночлены так, чтобы равенство было верным. Проверьте ответ.

$$(2a - 1)^3 = 8a^3 - \square + 6a - \square \quad (x + \square)^3 = x^3 + \square + 48x + 64 \quad a^6 - \square + \square - 1 = (a^2 - \square)^3$$

- 4 Упростите выражение.

а) $(a + 1)^3 - 3a(a + 1)$

б) $(x + 3)^3 - (x - 3)^3$

в) $(a - 2b)^3 + (2a - b)^3$

- 5 Чей результат верный: Лалы или Анара? Обоснуйте.



$$(a^2 + 2)^3 = (a^2)^3 + 2^3 = a^6 + 8$$

$$(a^2 + 2)^3 = a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8$$



Изучение Сумма кубов

При умножении многочленов $a + b$ и $a^2 - ab + b^2$ и упрощении подобных слагаемых получается выражение $a^3 + b^3$.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} - \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Если поменять местами левую и правую стороны равенства, то получится формула суммы кубов.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

• Выражение $a^2 - ab + b^2$ отличается от выражения $a^2 - 2ab + b^2$, полученного при раскрытии $(a - b)^2$, коэффициентом второго члена. Поэтому выражение $a^2 - 2ab + b^2$ называется **полным квадратом** двучлена $(a - b)$, а выражение $a^2 - ab + b^2$ называется **неполным квадратом** двучлена $(a - b)$.

Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и неполного квадрата их разности.

• В формуле суммы кубов равенство остается верным, если вместо переменных a и b подставить любые выражения. При этом выполняется соответствующая подстановка.

$$64x^3 + 27 = \underbrace{(4x)^3}_{a^3} + \underbrace{3^3}_{b^3} = \underbrace{(4x + 3)}_a \underbrace{(16x^2 - 12x + 9)}_{b^2}$$

- 6 Запишите неполный квадрат разности.

ОБРАЗЕЦ $3x - 2$

Решение

$$\underbrace{3x}_a - \underbrace{2}_b \rightarrow (3x)^2 - 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 6x + 4$$

Объяснение

Подставив $a = 3x$ и $b = 2$ в выражение $a^2 - ab + b^2$, можно упростить полученное выражение.

а) $a - 2$ б) $2x - 1$ в) $x - 3y$ г) $\frac{1}{3}a - 3$ д) $a^2 - 4b$ е) $ab - 6$ ж) $\frac{a}{3} - \frac{1}{2}$

- 7 Определите, является данное выражение полным или неполным квадратом разности.

а) $x^2 - x + 1$ б) $a^2 - 4a + 4$ в) $x^2 - 10x + 25$ г) $c^2 - 2c + 4$ д) $m^2 - 8m + 64$

- 8 Упростите выражение.

ОБРАЗЕЦ $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Решение

$$\underbrace{(x + 2)}_a \underbrace{(x^2 - 2x + 4)}_{a^2 - ab + b^2} = \underbrace{x^3}_a^3 + \underbrace{2^3}_b^3 = x^3 + 8$$

Объяснение

Подставив $a = x$, $b = 2$ в формулу $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, выражение можно записать в виде суммы кубов.

а) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

б) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$

в) $\left(c + \frac{1}{2}\right)\left(c^2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}\right)$

- 9 Запишите в виде суммы кубов и представьте как произведение двух выражений.

ОБРАЗЕЦ $8x^3 + 27$

Решение	Объяснение
$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)((2x)^2 - 2x \cdot 3 + 3^2) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$	Подставляя $a = 2x$ и $b = 3$, используется формула суммы кубов.

- а) $x^3 + 8$ б) $b^3 + 125$ в) $m^6 + 27$ г) $x^3y^3 + 1$ д) $x^9 + \frac{1}{64}$

- 10 Используя формулу суммы кубов, выполните вычисления.

- а) $2^3 + 8^3$ б) $0,6^3 + 0,4^3$ в) $6^3 + 4^3$ г) $0,9^3 + 0,1^3$ д) $13^3 + 2^3$ е) $2,5^3 + 1,5^3$

- 11 Обоснуйте верность утверждений на основе формулы суммы кубов:

а) Значение выражения $6^3 + 7^3$ делится на 13.

б) Значение выражения $95^3 + 15^3$ делится на 11.

Изучение Разность кубов

Аналогичным образом разность кубов можно записать как произведение двух многочленов.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Это равенство называется *формулой разности кубов*.

• Выражение $a^2 + ab + b^2$ отличается от выражения $a^2 + 2ab + b^2$, полученного при раскрытии $(a + b)^2$, коэффициентом второго члена. Выражение $a^2 + 2ab + b^2$ называется **полным квадратом** двучлена $(a + b)$, а выражение $a^2 + ab + b^2$ называется **неполным квадратом** двучлена $(a + b)$.

Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел и неполного квадрата их суммы.

• В формуле разности кубов равенство остается верным, если вместо переменных a и b подставить любые выражения. При этом выполняется соответствующая подстановка.

$$\underbrace{125x^3}_{a^3} - \underbrace{8}_{b^3} = (5x)^3 - 2^3 = (\underbrace{5x}_a - \underbrace{2}_b)(\underbrace{25x^2}_{a^2} + \underbrace{10x}_{ab} + \underbrace{4}_{b^2})$$



Подумай!

Как, записав $a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3)$, вывести формулу разности кубов из формулы суммы кубов?

- 12 Запишите неполный квадрат суммы.

ОБРАЗЕЦ $2x + 3$

Решение	Объяснение
$2x + 3 \rightarrow \underbrace{(2x)^2}_{a^2} + \underbrace{2x \cdot 3}_{ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} = 4x^2 + 6x + 9$	Для записи неполного квадрата суммы используется подстановка $a = 2x$ и $b = 3$ в формулу $a^2 + ab + b^2$.

- а) $c + 9$ б) $4k + 3$ в) $x + 5z$ г) $\frac{1}{2}b + 2$ д) $c^2 + 2b$ е) $ab + 3$ ж) $\frac{x}{5} + \frac{1}{4}$

- 13 Определите, является данное выражение полным или неполным квадратом суммы.

- а) $y^2 + 2y + 1$ б) $b^2 + 3b + 9$ в) $c^2 + 4c + 16$ г) $x^2 + 6x + 9$ д) $a^2 + 6a + 36$

- 14 Представьте выражение в виде разности кубов.

- а) $(c - 5)(c^2 + 5c + 25)$ б) $(2b - 3)(4b^2 + 6b + 9)$ в) $\left(a - \frac{1}{5}\right)\left(a^2 + \frac{1}{5}a + \frac{1}{25}\right)$

- 15 Запишите в виде разности кубов и представьте как произведение двух выражений.

ОБРАЗЕЦ $27x^3 - 8$

Решение	Объяснение
$27x^3 - 8 = (3x)^3 - 2^3 = (3x - 2)((3x)^2 + 3x \cdot 2 + 2^2) = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$	$27a^3 = (3a)^3$ и $8 = 2^3 \rightarrow$ выполнив подстановку $a = 3x$ и $b = 2$, используется формула разности кубов.

- а) $64 - y^3$ б) $125 - 8c^3$ в) $-8n^9 + 1$ г) $1 - \frac{1}{27}x^6$ д) $a^3c^3 - 8$

- 16 Вычислите, используя формулу разности кубов.

- а) $7^3 - 2^3$ б) $1,4^3 - 0,4^3$ в) $8^3 - 2^3$ г) $1,1^3 - 0,1^3$ д) $12^3 - 2^3$ е) $2,5^3 - 1,5^3$

- 17 Используя формулу разности кубов, покажите, что:

а) Значение выражения $121^3 - 47^3$ делится на 37.

б) Значение выражения $27^3 - 23^3$ делится на 4.

- 18 В пустые клетки впишите одночлены так, чтобы равенство стало верным. Проверьте ответ.

а) $(x - 2)(x^2 + 2x + \square) = x^3 - 2^3$

в) $c^6 + 125 = (c^2 + \square)(c^4 - \square + 25)$

б) $(\square + 1)(16a^2 - \square + 1) = 64a^3 + 1$

г) $\frac{1}{27} - \square = \left(\frac{1}{3} - y^3\right)\left(\frac{1}{9} + \square + \square\right)$

- 19 Запишите выражение в виде многочлена, используя формулу суммы или разности кубов.

а) $(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$ в) $\left(\frac{1}{3} - 3y^2\right)\left(\frac{1}{9} + y^2 + 9y^4\right)$ д) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)$

б) $(3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$ г) $(ab + 5)(a^2b^2 - 5ab + 25)$ е) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)$

- 20 Упростите и определите, зависит ли значение выражения от переменной.

а) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) - 8a^3$

в) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) - (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

б) $(1 - x)(1 + x + x^2) + x(x + 1)^2$

г) $(8a^6 + 1)^2 - (16a^8 + 4a^4 + 1)(4a^4 - 1)$

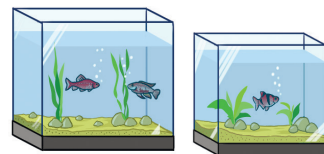
- 21 Докажите тождество.

а) $(m^3 - 1)(m + 1) = (m^2 + m + 1)(m^2 - 1)$ б) $(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^6 - y^6$

Решение задач

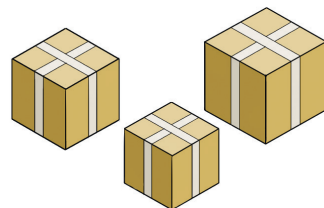
- 22 Даны два аквариума кубической формы с длинами ребер a и b .

- Запишите выражение, показывающее разницу в их объемах.
- На сколько литров больше воды помещается в большой аквариум по сравнению с маленьким, если $a = 45$, $b = 40$ см?



- 23 Из трех кубов один имеет длину ребра k см. Длина ребра этого куба на 5 см больше длины ребра одного из кубов и на 5 см меньше длины ребра третьего куба.

- Запишите выражения для вычисления объема каждого куба.
- Запишите сумму объемов большего и меньшего кубов в виде многочлена.



ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

1 Запишите в виде многочлена.

- | | | | | |
|-----------------|-------------------|---------------------------------------|------------------------|------------------------------|
| а) $(a - 5)^2$ | г) $(-1 + 3m)^2$ | ж) $(0,2 - 5x)^2$ | й) $(2 - 3n)(2 + 3n)$ | м) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$ |
| б) $(b + 3)^2$ | д) $(6 - 2n)^2$ | з) $(-3 + 2y^2)^3$ | к) $(4a - 1)(4a + 1)$ | н) $(2b - 1)(4b^2 + 2b + 1)$ |
| в) $(-4 + c)^2$ | е) $(2x^3 - y)^3$ | и) $\left(-4 + \frac{1}{3}n\right)^3$ | л) $(-5 - 6n)(6n - 5)$ | о) $(x + 1)(9x^2 - 9x + 9)$ |

2 Запишите в виде квадрата или куба двучлена.

- | | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| а) $m^2 - 2mn + n^2$ | в) $a^2 - 8a + 16$ | д) $b^2 - b + 0,25$ | ж) $b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ |
| б) $100 - 60c + 9c^2$ | г) $64 - 32b + 4b^2$ | е) $\frac{1}{4}a^2 - 2ab + 4b^2$ | з) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$ |

3 Запишите в виде многочлена.

- | | |
|--|---|
| а) Произведение суммы и разности b и 5 | в) Произведение c и квадрата суммы 10 и c |
| б) Сумма квадратов x и $x - 5$ | г) Квадрат суммы b и произведения 2 и a |

4 Выполните вычисления, используя формулы сокращенного умножения.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--|---|
| а) $25^2 - 5^2$ | в) $0,2^3 + 0,8^3$ | д) $28^2 - 2 \cdot 28 \cdot 18 + 18^2$ | ж) $8^3 - 3 \cdot 8^2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 7^2 - 7^3$ |
| б) $1,7^2 - 0,7^2$ | г) $0,9^3 - 0,1^3$ | е) $26^2 + 52 \cdot 14 + 14^2$ | з) $11^3 + 3 \cdot 11^2 \cdot 9 + 3 \cdot 9^2 \cdot 11 + 9^3$ |



5 Сравните, основываясь на формуле разности квадратов. Проверьте ответ с помощью калькулятора.

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| а) $523 \cdot 525$ и 524^2 | б) 2135^2 и $2145 \cdot 2125$ | в) $102 \cdot 106$ и $103 \cdot 105$ |
|------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|

6 Вычислите, используя формулы сокращенного умножения и свойства степени.

- | | |
|--|--|
| а) $(5^2 - 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) - 5^{16}$ | г) $(7 - 12^7)(7 + 12^7) + 2^{28} \cdot 3^{14}$ |
| б) $25^3 - (24^3 + 3 \cdot 24^2 + 3 \cdot 24 + 1)$ | д) $(20 - 16)(20^2 + 20 \cdot 16 + 16^2) + 8^4$ |
| в) $1002 \cdot 998 - 1000 \cdot (1000 - 2)$ | е) $20\frac{1}{4} \cdot 19\frac{3}{4} - 20\frac{1}{8} \cdot 19\frac{7}{8}$ |

7 Выполните подстановку $A = 2x - 1$, $B = 8x + 1$ и $C = x + 1$ и запишите выражение в виде многочлена.

- | | | | |
|---------------|----------|---------------|------------------------------|
| а) $AB + C^2$ | б) ABC | в) $A^3 - BC$ | г) $(A + C)^3 - (A + C - B)$ |
|---------------|----------|---------------|------------------------------|

8 Объясните пример и, используя этот способ, найдите значение выражения.

$$(a + b)^2 = ? \text{ при } ab = 6; a^2 + b^2 = 13,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 13 + 2 \cdot 6 = 25$$

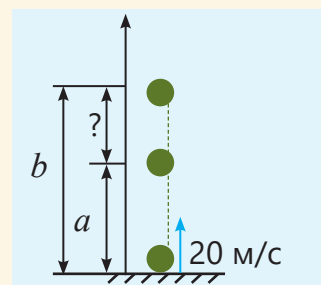
а) $(a + b)^2$, при $ab = 10$; $a^2 + b^2 = 29$

в) $(a - b)^2$, при $ab = 1,5$; $a^2 + b^2 = 9,25$

б) $a^2 + b^2$, при $a + b = -5$; $ab = 6$

г) $4a^2 + b^2$, при $2a - b = 1$; $ab = 1,5$

- 9 Покажите, используя формулы сокращенного умножения, что:
- а) Значение выражения $24^2 - 42^2$ делится на 14.
 - б) Значение выражения $12^3 - 4^3$ делится на 16.
 - в) Значение выражения $28^3 + 8$ делится на 30.
 - г) Значение выражения $9^3 - 7^2$ делится на 20.
- 10 Запишите в виде многочлена.
- а) $2(a - b)^2 + 2a(a - b)$
 - б) $3(c - d)^3 + 24c(c - d)^2$
 - в) $((2x - y)(2x + y))^2$
 - г) $(c - 1)^3(c + 1)^3$
 - д) $(x - 6)^2 - 1,5(x - 4)(x - 6)$
 - е) $(y - 6)(y^2 + 6y + 36) - 24(y - 3)(y + 3)$
 - ж) $(5m + n)(25m^2 - 5mn + n^2) - 5m(5m - n)^2$
 - з) $(2a - 1)^3(2a + 1)^3 + (4a^2 + 1)^3$
- 11 Докажите тождество.
- а) $(x - 2y)^2 + (x + 2y)^2 = 2(x^2 + 4y^2)$
 - б) $(a + 3)^3 + (a - 3)^3 = 2a(a^2 + 27)$
 - в) $(b + 1)(b^2 - b + 1) = (b - 1)(b^2 + b + 1) + 2$
 - г) $(b + 2)(b^2 + 4)(b - 2) + 16 = b^4$
- 12 Упростите обе стороны равенства и решите полученное уравнение.
- а) $(4a - 2)^2 + (3a + 2)^2 = (5a + 1)(5a - 1)$
 - б) $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 3(2x + 1)^2 + 1$
 - в) $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 3(x + 1)^2$
 - г) $(x + 1)^3 = x(x + 1)^2 + x^2$
- 13 Упростите выражение. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных.
- | | | |
|--|---|---|
| а) $2m^2n - 2n(m - 3)^2$
$m = 6, n = 0,5$ | б) $(ab + 1)^2 - a^2b^2$
$a = -0,5, b = 0,3$ | в) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 + 1)^2$
$a = 8$ |
|--|---|---|
- 14 При каком значении a в записи выражений в виде многочлена стандартного вида:
- а) x не участвует?
 - б) коэффициенты при x и x^2 будут равны?
- | | | | |
|------------------------|-------------------|--------------------------|------------------------------|
| $(x - a)(x^2 - x + 1)$ | $a(4 + x)^2 - 2x$ | $a(3 + x)^3 - 3x(x + 2)$ | $(x - 3)(x + a) + (x - 1)^2$ |
|------------------------|-------------------|--------------------------|------------------------------|
- 15 Проверьте:
- а) Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна их сумме.
 - б) Квадрат среднего из трех последовательных чисел на 1 единицу больше произведения остальных.
- 16 Анар и Сабина вырезали квадраты из цветной бумаги. Сторона квадрата, вырезанного Сабиной, на 4 см длиннее стороны квадрата, вырезанного Анаром, а его площадь на 100 см^2 больше. Они хотели украсить квадраты лентой по периметру. Сколько сантиметров ленты потребуется для этого?
- 17 Мяч был подброшен вверх со скоростью 20 м/с . Высота мяча над землей через t секунд определяется выражением $20t - 5t^2$.
- Если в момент времени $t = n$ высота составляет a метров, а в момент $t = n + 1$ равна b метров, то каким многочленом можно выразить расстояние $b - a$?
 - При каком значении n разность высот $b - a$ равна 10 метрам?



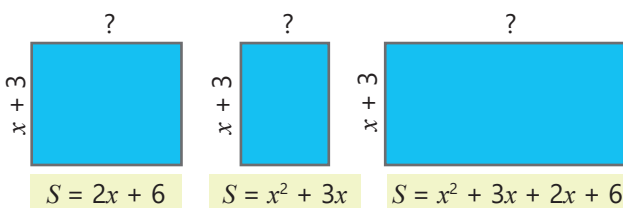
4.4. Разложение многочлена на множители

Исследование-обсуждение

На рисунке под прямоугольниками с одной равной стороной указаны их площади.

- Как можно найти другие стороны прямоугольников, записав выражения для их площадей в виде произведения двух многочленов?

- В каком случае только один из множителей будет двучленом, а в каком оба множителя будут двучленами?



Изучение Вынесение общего множителя за скобки

Представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называется **разложением многочлена на множители**. Многочлен можно разложить на множители различными способами.

- Если члены многочлена имеют общий множитель, то согласно distributive property умножения общий множитель можно вынести за скобки.

Вынесенный общий множитель выбирается так, чтобы оставшиеся члены в скобках не имели общего множителя.

$$12xy - 8x = 4 \cdot 3 \cdot x \cdot y - 4 \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot x \cdot 3 \cdot y - 4 \cdot x \cdot 2 = 4x(3y - 2)$$

- В многочлене, коэффициенты которого являются целыми числами, в качестве общего множителя за скобки выносятся НОД модулей коэффициентов, а также наименьшая степень общих переменных.

$$9x^3y^2 + 6x^2y^3 = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot y = 3x^2y^2(3x + 2y)$$

Задания

- 1 Разложите многочлен на множители, вынеся общий множитель за скобки. Найдите произведение и проверьте результат.

ОБРАЗЕЦ $10x^2 - 25x^3$

Решение

$$10x^2 - 25x^3 = \underbrace{5 \cdot x^2}_{5x^2} \cdot 2 - \underbrace{5 \cdot x^2}_{5x^2} \cdot 5 \cdot x = 5x^2 \cdot (2 - 5x)$$

$$5x^2 \cdot (2 - 5x) = 5x^2 \cdot 2 - 5x^2 \cdot 5x = 10x^2 - 25x^3$$

Объяснение

НОД (10, 25) = 5. Наименьшая степень общих переменных выносится за скобки. x^3 и $x^2 \rightarrow x^2$

Находится произведение и проверяется правильность ответа.

а) $5a - 5b$ б) $ac^2 - a^2$ в) $30x^2 - 3x$ г) $12a^3b^3 + 18a^2$ д) $8ay^2 - 16a^2y^4 + 24ay$

- 2 В пустую клетку впишите одночлен так, чтобы получилось тождество. Проверьте правильность ответа.

а) $x^2 + 6x = \square(x + 6)$

б) $-c^2 + 2c = -c(c - \square)$

в) $3a^2 + 9a + 3 = \square(a^2 + 3a + 1)$

- 3 Вынесите общий множитель за скобки и вычислите значение выражения при заданных значениях переменных.

а) $x^2 + 2,7x$ $x = 1,3$

в) $4a^2 - 5ab$ $a = 4,5$ $b = -1,2$

б) $-b^2 + 1,8b$ $b = -2\frac{1}{5}$

г) $-y^2 - xy - y$ $x = 1\frac{2}{5}$ $y = -1,4$

- 4 Найдите значение выражения, вынеся общий множитель за скобки и сокращая дроби.

а) $\frac{11 \cdot 0,8 + 11 \cdot 0,2}{22}$ б) $\frac{3^6 \cdot 5 + 3^4}{3^3}$ в) $\frac{5^5 \cdot 4 - 5^4}{4 \cdot 5^4}$ г) $\frac{2^6 + 2^4 \cdot 6}{2^3 + 2^5}$ д) $\frac{3^5 + 2 \cdot 3^4 + 3^3}{3^4 - 3^3}$



Внимание!

Иногда при упрощении буквенных выражений за скобки можно вынести многочлен. В этом случае исходное выражение записывается в виде произведения многочленов. Например, выражение $a(x-y) + 3(x-y)$ можно записать как произведение двух многочленов.

$$a(x-y) + 3(x-y) = (x-y)(a+3)$$

Иногда один из множителей отличается от другого только знаком. Например, в выражении $a(x-y) + 3(y-x)$ множители $x-y$ и $y-x$ имеют разные знаки. В этом случае общий множитель можно определить, вынеся -1 за скобки.

$$a(x-y) + 3(y-x) = a(x-y) + (-1) \cdot 3 \cdot (x-y) = a(x-y) - 3(x-y) = (x-y)(a-3)$$

- 5 Найдите общий множитель и, вынеся его за скобки, запишите выражение в виде произведения двух многочленов.

а) $k(a-b) + 2(a-b)$

в) $8(a-b) + n(b-a)$

д) $-3b(2a-b) + (2a-b) + a(2a-b)$

б) $a(x-y) - (x-y)$

г) $a^2(c-d) - b(c-d)$

е) $-5x(3x-y) - 2y(3x-y) - (y-3x)$

Изучение Разложение многочленов на множители способом группировки

Один из способов разложения многочлена на множители — это метод группировки. Для этого члены многочлена группируются так, чтобы после вынесения общих множителей за скобки в полученном выражении снова образовался общий множитель. Затем этот общий множитель выносится за скобки и производится разложение многочлена на множители.

Например, у многочлена $ab - 3a + 2b^2 - 6b$ нет общего множителя для всех членов. Однако члены можно сгруппировать так, чтобы в каждой группе был общий множитель. После этого общий множитель выносится за скобки.

$$ab - 3a + 2b^2 - 6b = (ab - 3a) + (2b^2 - 6b) = a(b-3) + 2b(b-3) = (b-3)(a+2b)$$

или

$$ab - 3a + 2b^2 - 6b = ab + 2b^2 - 3a - 6b = b(a+2b) - 3(a+2b) = (a+2b)(b-3)$$

- 6 Разложите многочлен на множители, сгруппировав его члены.

ОБРАЗЕЦ $ab - 5b + 2a^2 - 10a$

Решение
 $(ab - 5b) + (2a^2 - 10a) =$
 $= b(a - 5) + 2a(a - 5) =$
 $= (a - 5)(b + 2a)$

Объяснение
 Первый и второй, третий и четвертый члены группируются. Общий множитель выносится за скобки: $ab - 5b = b(a - 5)$ и $2a^2 - 10a = 2a(a - 5)$. Затем общий множитель слагаемых выносится за скобки, и производится разложение многочлена на множители.

а) $a(b-c) + 4b - 4c$

г) $3a + 3b + ca + cb$

ж) $6y + 6z + ay + az + by + bz$

б) $mx - my - n(x-y)$

д) $ab + ac - 4b - 4c$

з) $7p - 7q + kp - kq + mp - mq$

в) $n + 9m(n-k) - k$

е) $xy + 5y + 5z + xz$

и) $2n - m + km - 2kn + 2mn - m^2$

- 7 Запишите в виде произведения двух многочленов.

$$12x^2 - 12xy + 7x - 7y$$

$$16m^2 - 24mn + 10mk - 15nk$$

$$a(x - 4) - b(4 - x) + c(x - 4)$$

$$20px + 15xy - 12py - 25x^2$$

$$42mk^2 - 28mn^2 - 12nk^2 - 8n^3$$

$$6a(x - y) + 6b(y - x) - c(x - y)$$

- 8 Разложите многочлен на множители. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных.

а) $x^2y + xy^2 + xy + y^2$

$x = 2,4 \quad y = 2,6$

б) $a^2 + ab - 2b^2 - 2ab$

$a = 5\frac{1}{3} \quad b = -\frac{1}{3}$

в) $m^2n - 2n - m^3 + 2m$

$m = -2 \quad n = -5$

- 9 Запишите второй член трехчлена в виде суммы двух подходящих слагаемых и разложите на множители способом группировки.

ОБРАЗЕЦ $x^2 + 3x + 2$

Решение
 $x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 =$
 $= x(x + 1) + 2(x + 1) =$
 $= (x + 1)(x + 2)$

Объяснение
 Второй член трехчлена записывается в виде суммы двух слагаемых так, чтобы после группировки членов многочлена можно было вынести общий множитель за скобки. Затем многочлен записывается в виде произведения.

а) $x^2 + 5x + 4$

б) $m^2 - 6m + 5$

в) $x^2 + 8x + 12$

г) $b^2 - 13b + 30$

- 10 Докажите тождество $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$. На основе этого тождества разложите заданный трехчлен на множители.

ОБРАЗЕЦ $x^2 + 5x + 6$

Решение
 $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + (3 \cdot 2) =$
 $= (x + 3)(x + 2)$

Объяснение
 Если выбрать $a = 3, b = 2$, то $a + b = 5, ab = 6$.
 На основе тождества производится разложение многочлена на множители.

а) $m^2 + 7m + 10$

в) $n^2 + 14n + 24$

д) $a^2 - 7a + 10$

ж) $x^2 + 7x - 60$

б) $x^2 - 8x + 15$

г) $c^2 + 6c - 16$

е) $x^2 - 13x + 12$

з) $y^2 - 2y - 15$

- 11 Разложите многочлен на множители.

а) $(x - 1)^2 + 6(x - 1)$

в) $(x + 2)(x - 2) + 2(x - 2)^2$

д) $(x - 5)(2x + 1) + (x - 5)^2$

б) $(2x - y)^2 - 4(2x - y)$

г) $(3x - 2)^3(3x + 1) - (3x - 2)^2$

е) $x^2(6x - 4) - x(6x - 4)^3$

- 12 Докажите тождество.

а) $x + y + xy + y^2 = (x + y)(1 + y)$

в) $a^2 + 8ab + 12b^2 = (a + 2b)(a + 6b)$

б) $3ax - 6ay + bx - 2by = (x - 2y)(3a + b)$

г) $x^2 + xy - 20y^2 = (x - 4y)(x + 5y)$

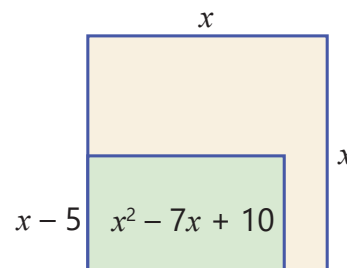
Решение задач

- 13 Во дворе в форме квадрата со стороной x метров выделили прямоугольное место для сада.

Ширина выделенного места для сада равна $x - 5$, а площадь выражается многочленом $x^2 - 7x + 10$.

• Запишите многочлен для вычисления длины забора, построенного вокруг сада.

• Если общая площадь двора составляет 121 м^2 , то каков будет периметр выделенного для сада места?



4.5. Различные способы разложения многочлена на множители

Исследование-обсуждение

В центре конного спорта каждую сторону открытой арены квадратной формы увеличили на 20 м.

- Какое выражение можно записать для вычисления площади открытой арены?
- Увеличенная площадь равна площади закрытой арены с шириной 40 м. Как, используя формулу разности квадратов, найти многочлен, выражающий длину закрытой арены?



Изучение Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения

Для разложения многочленов на множители можно использовать формулы сокращенного умножения.

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 & a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 & a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a - b)^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

Например, чтобы разложить многочлен $8a^2 - 18$ на множители, сначала общий множитель выносится за скобки. Выражение в скобках затем разлагается на множители с применением формулы разности квадратов.

$$8a^2 - 18 = 2(4a^2 - 9) = 2((2a)^2 - 3^2) = 2(2a + 3)(2a - 3)$$

Задания

- Разложите выражение на множители с помощью формул сокращенного умножения.
а) $a^2 - 16$ б) $49 - x^2$ в) $4b^2 - 25$ г) $1 - 100k^2$ д) $27 + 64x^6$ е) $b^3 - \frac{1}{8}a^6$ ж) $3\frac{3}{8} + 8x^9$
- Запишите выражение в виде произведения многочленов.
а) $4x^3 - 4x$ в) $32a^2 - 50$ д) $a^2 + 2a + 1$ ж) $y^5 + \frac{1}{27}y^2$
б) $100x - x^3$ г) $1 - 16k^2$ е) $m^3 + 6m^2 + 9m$ з) $54 - 16x^6$



Внимание!

Многочлены можно разложить на множители, сгруппировав их члены и применив формулы сокращенного умножения. Например, для многочлена $a^2 + 2ab + b^2 - 9$ сначала применяется формула квадрата суммы, а затем формула разности квадратов.

$$a^2 + 2ab + b^2 - 9 = (a^2 + 2ab + b^2) - 9 = (a + b)^2 - 3^2 = (a + b - 3)(a + b + 3)$$

- Разложите многочлен на множители.

ОБРАЗЕЦ $x^4 - 81$

Решение	Объяснение
$\begin{aligned} x^4 - 81 &= (x^2)^2 - 9^2 = \\ &= (x^2 - 9)(x^2 + 9) = \\ &= (x^2 - 3^2)(x^2 + 9) = \\ &= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) \end{aligned}$	Применяется формула разности квадратов для $a = x^2$ и $b = 9$ Для $x^2 - 3^2$ снова применяется формула разности квадратов и производится разложение многочлена на множители.

- а) $p^4 - 16$ в) $x^2 - y^2 - x - y$ д) $x^2 - 2xy + y^2 - 16$
 б) $y^8 - 1$ г) $m + n + m^2 - n^2$ е) $25 - 4ax - 4a^2 - x^2$

4 Разложите многочлен на множители.

ОБРАЗЕЦ $x^3y^3 - 1$

Решение	Объяснение
$x^3y^3 - 1 = (xy)^3 - 1^3 = (xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)$	Используя свойство степеней и формулу разности кубов при $a = xy$ и $b = 1$ производится разложение многочлена на множители.

- а) $1 - a^3b^6$ в) $1 - 27m^3n^3$ д) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ ж) $(n + 3)^3 - (n - 3)^3$
 б) $8a^3b^3 + c^3$ г) $x^3y^3 + 64z^3$ е) $(a - b)^3 + (a + b)^3$ з) $(m - 1)^3 - (m + 1)^3$



Из истории математики

Древние вавилоняне для упрощения выражений и выполнения расчетов более эффективными способами применяли разложение на множители. Например, разность квадратов двух чисел они вычисляли следующим образом:

$$87^2 - 13^2 = (87 + 13)(87 - 13) = 100 \cdot 74 = 7400$$

Записи о дальнейшем развитии метода разложения на множители как математического инструмента встречаются в IX веке в произведении аль-Хорезми "Китаб аль-Джабр валь-Мукабала". Методы, предложенные аль-Хорезми, особенно метод разложения на множители, сыграли важную роль в дальнейшем развитии алгебры.



АЛЬ-ХОРЕЗМИ
(780–850)

5 Разложите многочлен на множители.

- а) $5x^4 - 80$ г) $(2x - 5)^3 - (2x - 5)$ ж) $x^3 + 27y^3 - 4x - 12y$
 б) $x^4y^4 - 81$ д) $4a^2 - 4ab + b^2 - 36$ з) $(a - b) + 2(a - b)^2 + (a - b)^3$
 в) $k^2 - k - p^2 - p$ е) $9x^2 - y^2 + 4(3x - y)^2$ и) $9x^2 - 12xc + 4c^2 + 6x - 4c$

6 Используя формулы куба суммы или разности, запишите выражение в виде куба двучлена. Вычислите значение выражения для заданных значений переменных.

- а) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $x = -1$ б) $x^3 - 6x^2y + 12y^2 - 8y^3$ $x = 5; y = 2$

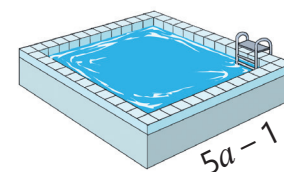
7 Докажите тождество.

- а) $x + y + x^3 - xy^2 = (x + y)(x^2 - xy + 1)$ в) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
 б) $m^4 + 9 = (m^2 + 3)^2 - 6m^2$ г) $a^6 + 27 = (a^2 + 3)^3 - 9a^2(a^2 + 3)$

Решение задач

8 На рисунке изображен бассейн в форме кубоида с площадью основания $(25a^2 - 1)$ квадратных метров и объемом $(25a^3 - a)$ кубических метров.

- Разложите многочлены, выражающие объем бассейна и площадь поверхности воды, на множители.
- Каким многочленом можно вычислить площадь боковой поверхности бассейна?
- Если высота бассейна составляет 2 м, каковы его ширина и длина?



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квадрат суммы и разности

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$$

$$(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$9x^2 - 4y^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$$

$$(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$$

Куб суммы и разности

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(2x - y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

$$27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = (3x + 2y)^3$$

$$(a \pm b)^3 \neq a^3 \pm b^3$$

Формулы сокращенного умножения

Сумма и разность кубов

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$27x^3 + 8y^3 = (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$$

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 8x^3 - y^3$$

Разложение многочлена на множители

$$2ab + 2b^2 = 2b \cdot a + 2b \cdot b = 2b(a + b)$$

$$4ab + 2b^2 - 6a - 3b = 2b(2a + b) - 3(2a + b) = (2a + b)(2b - 3)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 9 = (a^2 + 2ab + b^2) - 9 = (a + b)^2 - 3^2 = (a + b - 3)(a + b + 3)$$

Решение исходной задачи

- Выражение, показывающее, насколько объем большого бака больше объема маленького, записывается в виде многочлена.

$$(x + 2)^3 - x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 6x^2 + 12x + 8$$

- Чтобы определить, сколько квадратных метров металлического листа было использовано для изготовления обоих баков, вычисляется сумма площадей их поверхностей.

$$6(x + 2)^2 + 6x^2 = 6x^2 + 24x + 24 + 6x^2 = 12x^2 + 24x + 24$$

- Составляется и решается уравнение. Подставив значение x , вычисляется объем каждого бака.

$$6(x + 2)^2 - 6x^2 = 48$$

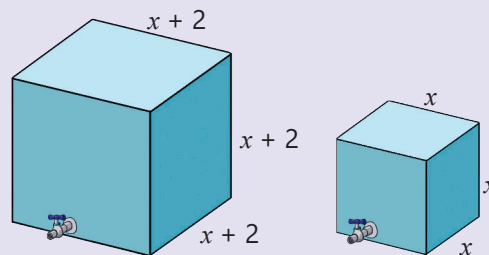
$$6x^2 + 24x + 24 - 6x^2 = 48$$

$$24x + 24 = 48$$

$$24x = 24$$

$$x = 1$$

Объем маленького бака составляет 1 м^3 , а объем большого — 27 м^3 .



ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена.

а) $4a^2 - 4ab + b^2$

в) $y^2 + 16y + 64$

д) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

ж) $a^3b^3 - 3a^2b^2 + 3ab - 1$

б) $25 - 20x + 4x^2$

г) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

е) $9x^2 + 2x + \frac{1}{9}$

з) $64 + 12x^2 + 48x + x^3$

2. Вычислите, используя формулы сокращенного умножения.

а) $3,5^2 - 1,5^2$

в) $1,1^3 - 0,1^3$

д) $1,8^2 + 2 \cdot 1,8 \cdot 0,2 + 0,2^2$

ж) $7^3 - 3 \cdot 7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot 2^2 - 2^3$

б) $0,9^2 - 0,1^2$

г) $0,9^3 + 0,1^3$

е) $2,3^2 - 2 \cdot 2,3 \cdot 0,3 + 0,3^2$

з) $6^3 + 3 \cdot 6^2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \cdot 4^2 + 4^3$



3. Сравните, используя формулу разности квадратов. Проверьте ответ с помощью калькулятора.

а) $102 \cdot 98$ и 100^2

б) 1024^2 и $1020 \cdot 1028$

в) $2111 \cdot 2113$ и $2110 \cdot 2114$

4. Запишите в виде многочлена.

а) $(a - 8)^2$

в) $(-3 + 6m)^2$

д) $(0,6 - x^3)^2$

ж) $(8 - 12n)(8 + 12n)$

и) $(xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 4)$

б) $(2 + 5b)^2$

г) $(4 - 3x)^2$

е) $(-4y^2 + 1)^3$

з) $(3a^3 - 1)(1 + 3a^3)$

к) $(y + 2x)(y^2 + 4xy + 4x^2)$

5. Вычислите, используя формулы сокращенного умножения.

а) $(8 - 1)(8 + 1)(8^2 + 1)(8^4 + 1) - 2^{24}$

г) $(11 - 5^9)(11 + 5^9) + 125^6$

б) $(98^3 + 6 \cdot 98^2 + 12 \cdot 98 + 8) - 99^3$

д) $(24 - 1)(24^2 + 24 + 1) - 2^9 \cdot 3^3$

в) $29,7 \cdot 30,3 - 29,1 \cdot 30,9 - 0,81$

е) $\frac{35^2}{100} + \frac{15 \cdot 35}{50} + \frac{15^2}{100}$

6. Если $A = 3x + 1$, $B = 3x - 1$ и $C = x - 1$, запишите выражение, зависящее от x .

а) $AB + C^2$

б) $C^2 - AB$

в) ABC

г) $(A + B)^2 - (BC - A)^2$

7. Найдите значение выражения на основе данных.

а) $(a - b)^2$ при $ab = 1,5$ и $a^2 + b^2 = 4$

в) $a^2 - b^2$ при $a - b = 3$ и $a + b = 9$

б) $(2a + b)^2$ при $ab = 4$ и $4a^2 + b^2 = 20$

г) $a^2 + 4b^2$ при $a - 2b = 1$ и $ab = 0,5$

8. Покажите, являются утверждения верными или ложными, используя формулы сокращенного умножения.

а) Для любого натурального значения a значение выражения $(a + 3)^2 - a^2$ делится на 3.

б) Для любого натурального значения n значение выражения $(5 - n)^2 - (n + 1)^2$ делится на 4.

в) Для любого натурального значения b значение выражения $(2 - b)^3 + (b + 4)^3$ делится на 6.

9. Запишите в виде многочлена.

а) $4(a + 3)^2 + 3a(a - 8b)$

в) $(a - 2)^3(a + 2)^3 + (a^2 + 4)^3$

д) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) - b(a - b)^2$

б) $3(2c - d)^3 + 24c(2c - d)^2$

г) $(x - 6)^2 - 1,5(x - 4)(x - 6)$

е) $(a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

10. Докажите тождество.

а) $(2x - y)^2 - (2x + y)^2 = -8xy^2$

в) $(b + 1)(b^2 - b + 1) = (b - 1)(b^2 + b + 1) + 2$

б) $(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x(x^2 + 3y^2)$

г) $(a + b + c)(a + b - c) = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

11. Решите уравнения.

а) $(a - 1)^2 - (a + 4)^2 = 22 - a$

в) $10y^2 - (y - 1)^2 = (3y + 1)(3y - 1)$

б) $(4 + x)^2 + (x - 4)^2 = 2(x - 1)^2$

г) $8 - (b + 2)(b - 2) = (5 - b)(b - 6)$

12. Используйте формулу сокращенного умножения и найдите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $2m^2 - 4mn + 2n^2$

б) $(a - b)^2 + 4ab$

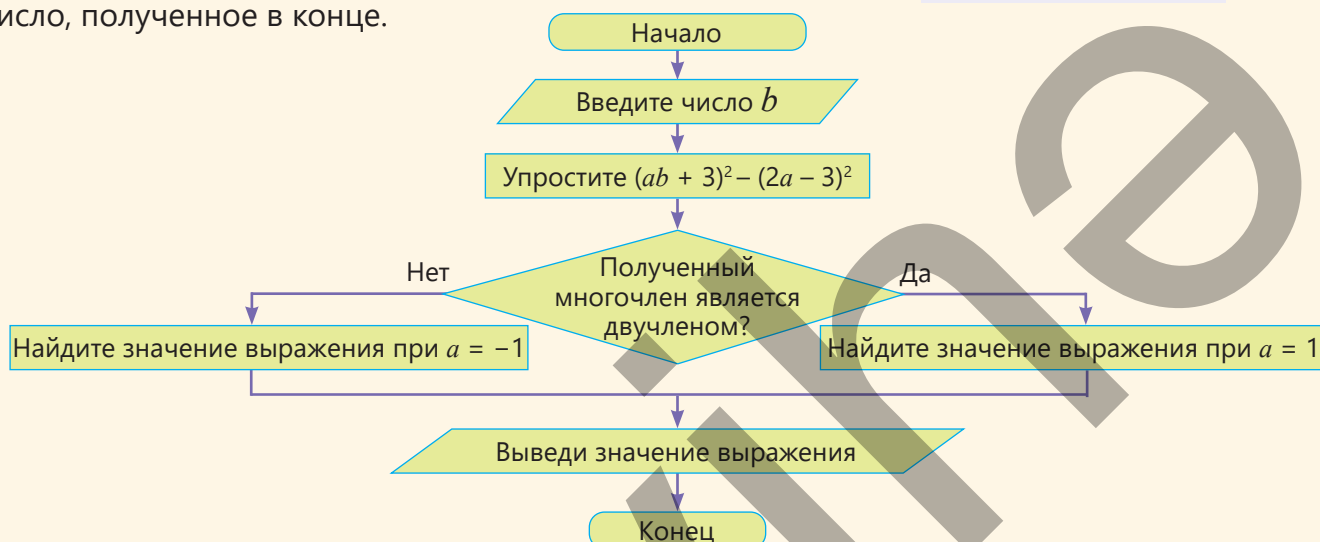
в) $(x + 5)^2 + 2(x + 5)(x - 5) + (x - 5)^2$

$m = 2,5 \quad n = 0,5$

$a = 1,86 \quad b = 0,14$

$x = -40$

13. Выполните алгоритм для заданных чисел и определите число, полученное в конце.



14. Разложите многочлен на множители.

а) $48p^4 - 3$

в) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

д) $(2 - c)^2 - 8c(2 - c) + 16c^2 - 16$

б) $y^6 - 1$

г) $a^2 + a - b^2 + b + ac + bc$

е) $(a + 1)^3 + (a - 1)^3 + 6a$

15. Вычислите с помощью формул сокращенного умножения.

а) $\frac{12,5 \cdot 14,2 + 2,4 \cdot 12,5}{10,4^2 - 2,1^2}$

б) $\frac{12,6^2 + 2 \cdot 12,6 \cdot 7,4 + 7,4^2}{6,8^2 - 2,8^2}$

в) $\frac{8,1^3 + 1,1^3}{9,2} - 8,1 \cdot 1,1$

16. Докажите:

а) Разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

б) Произведение наибольшего и наименьшего из трех последовательных нечетных чисел меньше квадрата среднего числа на 4 единицы.

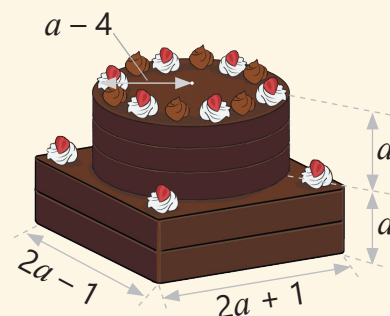
17. В магазин поступили коробки с красными карандашами, количество которых равно числу карандашей в каждой коробке. Количество коробок с зелеными карандашами на одну больше, чем с красными. В каждой коробке с зелеными карандашами на 1 карандаш меньше, чем в коробке с красными карандашами. Какого цвета карандашей поступило в магазин больше: красных или зеленых? На сколько?

18. Кондитер испек для торта бисквит в форме кубоида и цилиндра. Затем он поставил бисквит в форме цилиндра на бисквит в форме кубоида, чтобы получился двухъярусный торт, и покрыл его шоколадом.

• Запишите объем торта в виде многочлена.

• Если $a = 15$ см, каков объем торта?

• Если на каждый квадратный сантиметр поверхности торта уходит 0,2 г шоколада, сколько всего шоколада потребуется для покрытия поверхности торта?





Математический калейдоскоп

1. Вычислите с помощью формул сокращенного умножения.

а) $\frac{199 \cdot 201}{2024^2 - 2023 \cdot 2025}$

б) $\frac{2^{13} - 2}{24^2 + 48 \cdot 40 + 40^2 - 1}$

в) $\frac{44440}{444442^2 - 444440 \cdot 444444}$

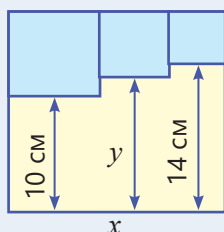
2. Найдите значения выражений, если $a^2 - 3a + 8$ равно 10.

$$3a^2 - 9a + 5$$

$$a^4 - 6a^3 + 9a^2$$

$$a^6 - 9a^5 + 27a^4 - 27a^3 - 8$$

3. Три рыцаря и их оруженосцы подошли к берегу. Оруженосцы не хотят оставаться одни с другими рыцарями. Как рыцари и их оруженосцы могут переправиться на другой берег на двухместной лодке?



4. В большом квадрате с длиной стороны x нарисованы маленькие квадраты. Запишите многочлен, который выражает расстояние y . Найдите значение y , если длина стороны большого квадрата равна 18 см.



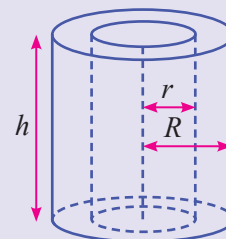
"АКВАРИУМ АКВАДОМ"

"Аквариум АкваДом" — это огромный аквариумный комплекс, расположенный в Берлине. Этот аквариум занесен в Книгу рекордов Гиннеса. Аквариум имеет форму цилиндра, внутри которого установлен лифт в цилиндрической шахте. В декабре 2022 года из-за резкого понижения температуры окружающей среды аквариум разрушился. В настоящее время проводятся работы по его восстановлению.



1. Напишите выражение для вычисления массы воды в аквариуме "АкваДом", если его высота 25 м, радиус внутреннего цилиндра r , радиус внешнего цилиндра R , плотность воды 1000 кг/м^3 и $\pi \approx 3,14$.

2. Как известно, высота "Аквариума АкваДом" равна 25 м, диаметр внутреннего цилиндра 8 м, а диаметр внешнего цилиндра 14 м. Сколько тонн воды он может вместить?



3. Соберите информацию в Интернете о пяти самых больших аквариумах мира и их внешнем виде. Соберите информацию об "Аквариуме АкваДом" и причинах его разрушения.

4. Подготовьте презентацию о вымышленном аквариуме. Определите его форму, размеры и емкость. Исходя из предполагаемых обитателей и объема воды, исследуйте, какую толщину стекла или других материалов вам следует использовать.

Четырехугольники

В этой главе вы научитесь:

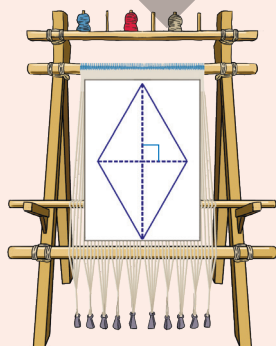
- различать выпуклые и невыпуклые четырехугольники;
- применять свойства внутренних и внешних углов четырехугольника;
- использовать свойства и признаки параллелограмма и его разновидностей: прямоугольника, ромба, квадрата;
- применять свойства средней линии и медиан треугольника;
- использовать свойства трапеции и средней линии трапеции.

Попытайтесь!

Ткач решил нанести на ковер узор в форме ромба площадью $0,4 \text{ м}^2$.

- Он изобразил эскиз ромба на бумаге и, как показано на рисунке, соединил его противоположные вершины попарно. Длина меньшей диагонали составила $0,8 \text{ м}$. Какова длина большей диагонали?

- Ткач измерил угол между двумя сторонами ромба и получил 78° . Каковы градусные меры углов между другими сторонами ромба?



Изучение четырехугольных фигур и их свойств имеет большое значение. Эти фигуры находят широкое применение в различных областях.

Четырехугольники используются в строительстве и архитектуре, градостроительстве и геодезии, землемерии, решении инженерных задач. Четырехугольники также придают особую красоту созданным произведениям искусства, включая дизайн, декоративное искусство и создание орнаментов.



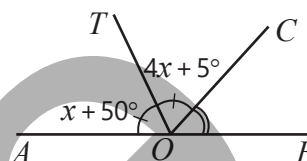
Предварительная проверка

- 1 Точки A, B, C и D расположены на одной прямой. Точка M — середина отрезка AC , а точка N — середина отрезка BD . Если $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 2$ см, то какова длина отрезка MN ?

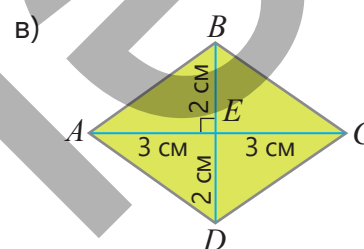
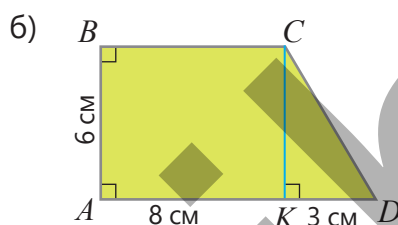
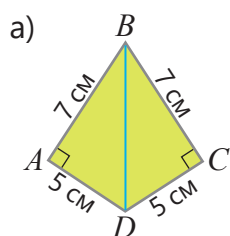


- 2 Углы AOC и BOC смежные. Луч OT является биссектрисой угла AOC . Найдите величины указанных углов.

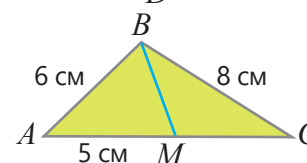
$$\begin{aligned}\angle AOT &= ? \\ \angle COT &= ? \\ \angle COB &= ?\end{aligned}$$



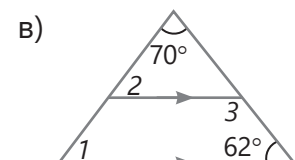
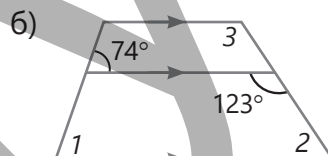
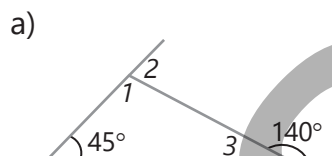
- 3 Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.



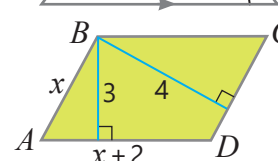
- 4 В треугольнике ABC BM — медиана.
- Каков периметр треугольника ABC ?
 - Если периметр треугольника ABM равен 16 см, то каков периметр треугольника BMC ?



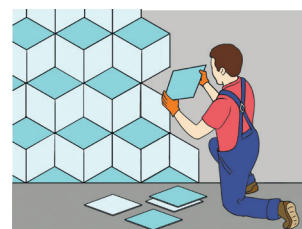
- 5 Найдите градусные меры углов, обозначенных цифрами.



- 6 На рисунке даны размеры параллелограмма $ABCD$ в сантиметрах.
- Найдите стороны параллелограмма.
 - Вычислите периметр и площадь параллелограмма.



- 7 Определите, верны или нет следующие утверждения. Обоснуйте ответ.
- Оба смежных угла не могут быть тупыми.
 - Оба смежных угла могут быть острыми.
 - Если два угла конгруэнтны, то смежные с ними углы также конгруэнтны.
- 8 Периметр рекламного щита прямоугольной формы составляет 6,4 м, а стороны находятся в отношении 5 : 3. Каковы длины сторон и площадь щита?
- 9 Прямоугольная стена имеет высоту 2 м и длину 19 м. Мастер выкладывает её плитками в форме ромба со стороной 40 см и высотой 25 см. Если 5% материала идёт в отходы, то сколько плиток как минимум потребуется?



5.1. Начальные понятия геометрии

Исследование-обсуждение

Отметьте точку A на листе.

- Сколько прямых можно провести через эту точку?
- Отметьте на листе еще одну точку B . С помощью линейки проведите через точки A и B прямую. Сколько таких прямых можно провести?
- Укажите точку C , не лежащую на прямой AB . Сколько прямых, не пересекающих прямую AB , можно провести через точку C ?



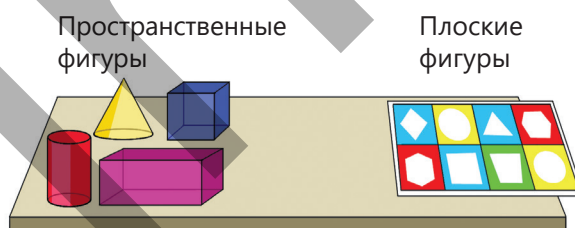
Ключевые слова

- аксиома
- теорема
- доказательство
- следствие

Изучение Геометрические фигуры и основные понятия

Геометрия — одна из древнейших наук. Она возникла примерно 4000 лет назад в Месопотамии, Египте, Индии и Китае. Древние греки дали ей название "геометрия" (от "гео" — земля и "метрон" — измеряю).

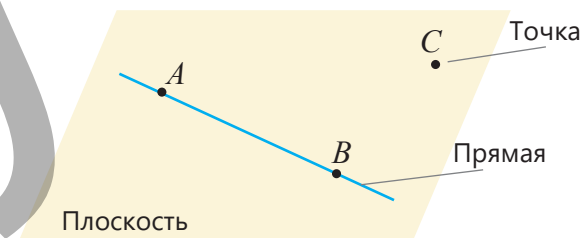
Геометрия — это наука, изучающая свойства геометрических фигур. *Геометрической фигурой называют множество точек.* Например, отрезок, окружность, треугольник, четырехугольник, кубоид, призма — все это геометрические фигуры.



В геометрии любое новое понятие определяется с помощью ранее известных понятий. Например, отрезок можно определить с помощью точки и прямой так:

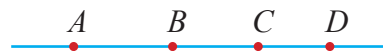
- *Фигура, состоящая из двух точек прямой и всех точек между ними, называется отрезком.*

В геометрии точка, прямая и плоскость не определяются и принимаются как основные понятия.



Задания

- 1 На прямой отмечены точки A , B , C и D .
 - а) Сколько существует лучей с началом в этих точках?
 - б) Сколько существует отрезков, ограниченных этими точками?
- 2 Какие понятия используются в определениях данных фигур?
 - а) угол
 - б) биссектриса угла
 - в) смежные углы
 - г) радиус
 - д) медиана треугольника



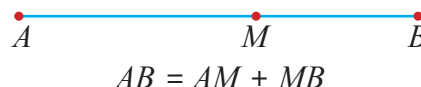
Исправь ошибку!

- Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.
- Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называют диаметром.

Изучение Аксиома

В геометрии свойства фигур формулируются в виде аксиом или теорем. Утверждение, принимаемое без доказательства, называется **аксиомой** (или **постулатом**). Например, аксиома сложения отрезков формулируется так:

- Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разделен любой его точкой.



Из истории математики

Наука геометрия изначально формировалась как совокупность отдельных фактов, полученных из опыта. В III веке до нашей эры древнегреческий ученый Евклид в своем труде "Начала" (The Elements) собрал эти факты, систематизировал их и обогатил науку геометрию новыми сведениями. Пять предложенных им постулатов легли в основу евклидовой геометрии.

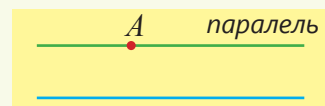
В современной евклидовой геометрии, помимо постулатов Евклида, существуют другие аксиомы, некоторые из которых формулируются так:

- Через любые две точки можно провести прямую, и эта прямая единственна.
- Из трех точек, лежащих на одной прямой, только одна может находиться между двумя другими.
- Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.



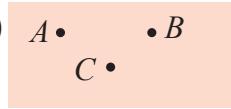
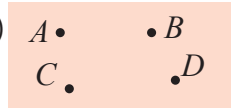
ЕВКЛИД

(325–265 годы до н.э.)



Запомни!

В задачах по геометрии если единицы измерения длин не указаны, считается, что все отрезки даны в одних и тех же единицах, которые не влияют на вычисления.

- 3 На прямой отмечены три точки. Если $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 12$, какая из точек A , B , C находится между двумя другими?
- 4 Могут ли точки A , B и C лежать на одной прямой, если $AB = 18$ см, $AC = 22$ см, $BC = 30$ см?
- 5 Может ли для точек A , B и C , лежащих на одной прямой, выполняться неравенство $AB + BC \neq AC$? Обоснуйте свой ответ.
- 6 Сколько всего прямых, проходящих через любые две из данных точек, можно провести?
а)  б) 
- 7 Постройте четыре прямые так, чтобы они имели: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6 точек пересечения.
- 8 Начиная с нижней ступени лестницы, каждая ступень параллельна той, которая находится выше. Как доказать, что самая верхняя и самая нижняя ступени также параллельны?



Изучение Аксиома

Теорема — это утверждение, истинность которого обосновывается логическими рассуждениями. Такая цепочка рассуждений называется **доказательством**. Для доказательства теоремы используются аксиомы и ранее доказанные теоремы. Например:

τ Теорема 1. Свойство внешнего угла треугольника

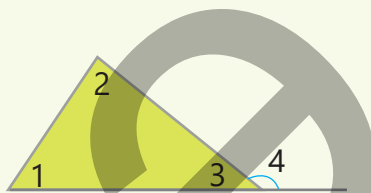
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$ – внутренние углы треугольника,
 $\angle 4$ – внешний угол.

Доказать: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

Доказательство.



Предложение

1. $\angle 4$ – внешний угол треугольника.
2. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$
3. $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$
4. $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$
5. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

Обоснование

1. Дано.
2. Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .
3. $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные углы.
4. Обе части равенства равны 180° .
5. Из обеих частей равенства вычитается $\angle 3$.

Из теорем можно выводить следствия. **Следствие** — это утверждение, непосредственно получаемое из аксиомы или теоремы. Например, из теоремы о свойстве внешнего угла треугольника можно вывести следующее следствие:

Следствие. Внешний угол треугольника больше каждого из двух внутренних, не смежных с ним. Теорему можно разделить на *условие* и *закключение*. Часть теоремы, описывающая данные, называется условием, а часть, которую требуется доказать, — заключением.

Если поменять местами условие и заключение, то получится *обратная теорема*.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180° .

Обратная теорема:

Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

Обратная теорема может не быть верной.

- 9 Как можно выразить обратное утверждение для данного предложения? Обсудите истинность самого предложения и его обратного утверждения.
 - а) Внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей, конгруэнтны.
 - б) Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.
- 10 Лала и Самир высказали следствия, полученные из утверждения: "Сумма смежных углов равна 180° ". Верны ли их утверждения? Обоснуйте свое мнение.



Если два угла конгруэнтны, то их смежные углы также конгруэнтны.

Оба смежных угла не могут быть острыми или тупыми одновременно.



5.2. Четырехугольники



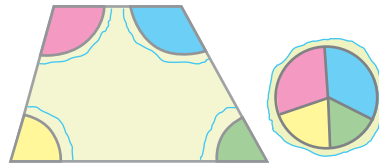
Ключевые слова

- выпуклый
- четырехугольник
- невыпуклый (вогнутый)
- четырехугольник
- диагональ
- внутренний угол
- внешний угол

Исследование-обсуждение

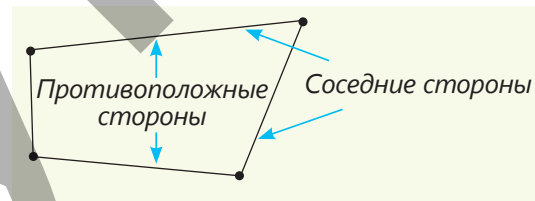
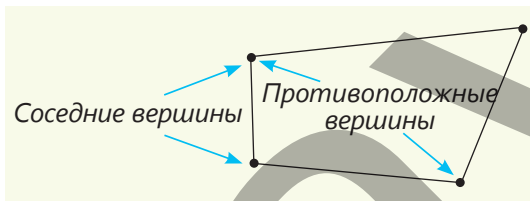
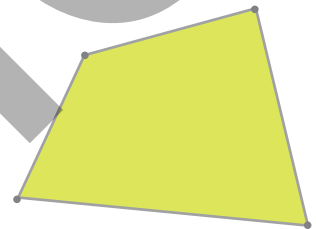
Нарисуйте на плотной бумаге трапецию и вырежьте ее углы. Поместите углы так, чтобы их вершины совпадали, как показано на рисунке.

- Сколько градусов составляет сумма градусных мер углов?
- Как можно обосновать полученный результат?



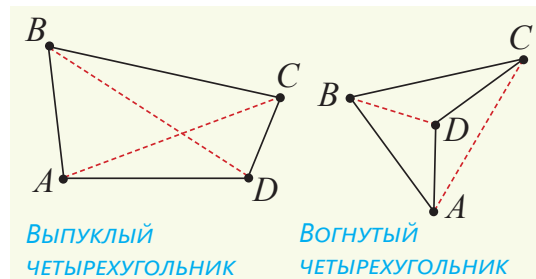
Изучение Четырехугольник

Возьмем на плоскости четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой. Если эти точки (вершины) соединить последовательно четырьмя непересекающимися отрезками (сторонами), то получится **четыреугольник**. Четырехугольник делит точки плоскости, которой он принадлежит, на два множества: внутреннюю часть и внешнюю часть. Вершины одной стороны называются *соседними вершинами*. Не соседние вершины называются *противоположными вершинами*. Стороны, выходящие из одной вершины, называются *соседними сторонами*, а не соседние стороны — *противоположными сторонами*.



Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю** четырехугольника. Четырехугольник имеет две диагонали. На рисунке отрезки AC и BD — диагонали четырехугольника $ABCD$.

Четырехугольник может быть **выпуклым** или **вогнутым**. У выпуклого четырехугольника обе диагонали полностью лежат внутри фигуры, а у вогнутого — только одна из диагоналей.

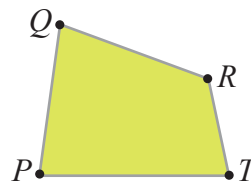


Задания

- 1 Какие фигуры являются четырехугольниками? Обоснуйте, являются ли эти фигуры выпуклыми или невыпуклыми четырехугольниками.



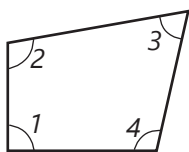
- 2 По данным на рисунке найдите.
- Вершины, соседние с вершиной P
 - Вершину, противоположную вершине T
 - Стороны, соседние со стороной QR
 - Сторону, противоположную стороне PQ



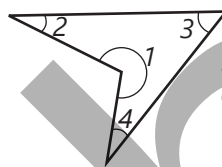
- 3 Нарисуйте выпуклый четырехугольник $ABCD$ и невыпуклый четырехугольник $MNKL$. Покажите противоположные стороны, противоположные вершины и диагонали каждого.

Изучение Сумма углов четырехугольника

Внутренний угол четырехугольника — это угол, образованный двумя его соседними сторонами и расположенный внутри фигуры.



Каждый внутренний угол выпуклого четырехугольника меньше 180° .



В невыпуклом четырехугольнике один внутренний угол больше 180° .

Теорема 2. Сумма углов четырехугольника

Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° .

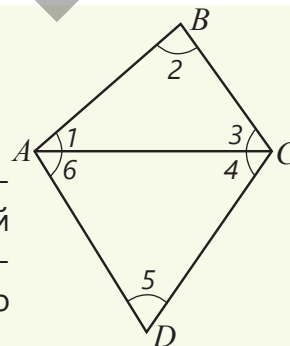
Дано: $ABCD$ — четырехугольник.

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

Доказательство. Теорему можно доказать для выпуклого четырехугольника следующим образом. Если провести одну из диагоналей четырехугольника $ABCD$, то он будет разделен на два треугольника. Поскольку сумма внутренних углов треугольника равна 180° , то можно написать:

$$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

$$(\angle 1 + \angle 6) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 4) + \angle 5 = 360^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

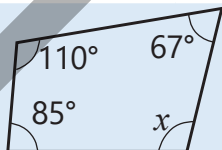


Подумай!

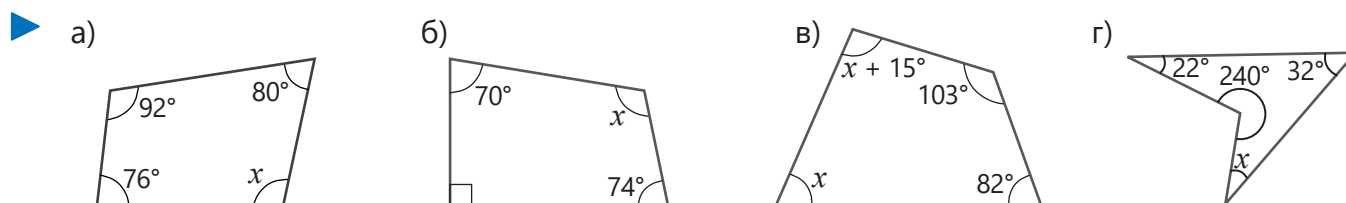
Как доказать, что теорема о сумме внутренних углов верна и для невыпуклого четырехугольника?

- 4 Найдите неизвестный угол четырехугольника.

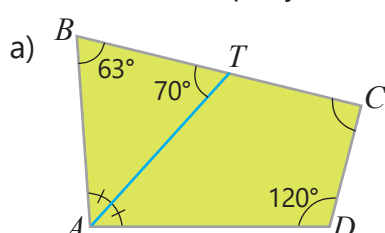
ОБРАЗЕЦ



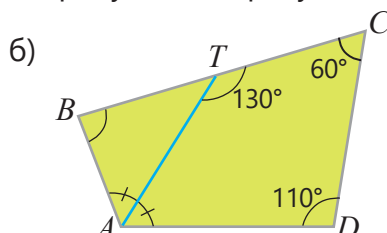
Решение	Объяснение
$85^\circ + 110^\circ + 67^\circ + x = 360^\circ$ $262^\circ + x = 360^\circ$ $x = 360^\circ - 262^\circ; x = 98^\circ$	Поскольку сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° , записывается и решается соответствующее уравнение.



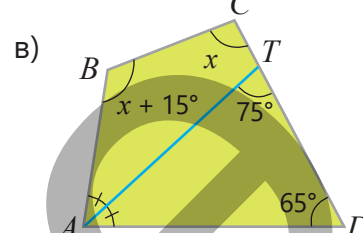
5 По данным на рисунке найдите градусные меры углов.



$\angle BAT = ? \angle BAD = ? \angle C = ?$



$\angle TAD = ? \angle BAD = ? \angle B = ?$

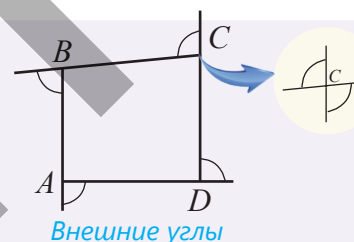


$\angle BAD = ? \angle C = ? \angle B = ?$

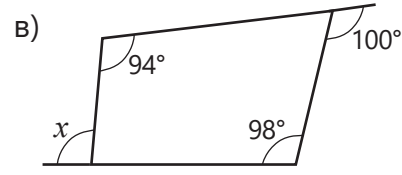
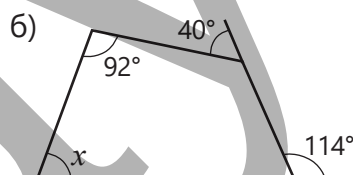
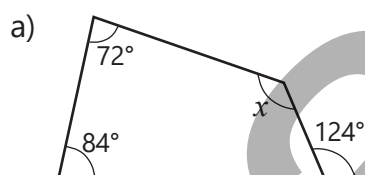


Запомни!

Угол, смежный с внутренним углом выпуклого четырехугольника, называется внешним углом при этой вершине. Из каждой вершины можно провести два внешних угла, и они являются вертикальными углами, поэтому конгруэнтны. Говоря о внешнем угле, будем подразумевать один из этих углов.

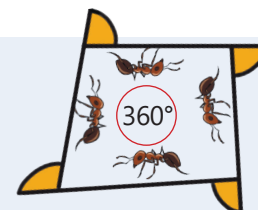


6 Найдите градусную меру угла четырехугольника, обозначенного переменной.

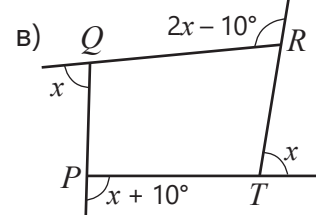
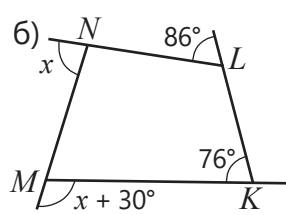
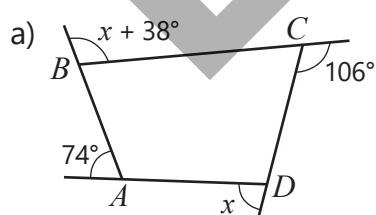


Подумай!

Как обосновать, что сумма внешних углов выпуклого четырехугольника, исходя из движения муравья вдоль сторон четырехугольника, равна 360° ?



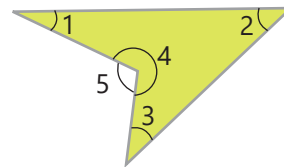
7 Найдите градусные меры внешнего и внутреннего углов четырехугольника.



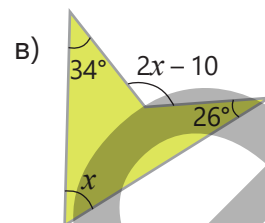
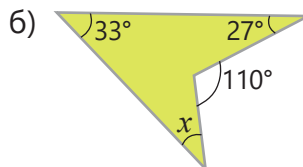
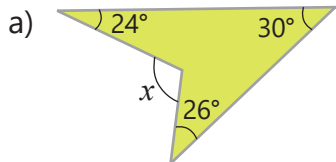
8 Градусные меры внутренних углов четырехугольника относятся как $3 : 4 : 5 : 6$. Найдите внутренние и внешние углы при каждой вершине этого четырехугольника.

- 9 Докажите, что в невыпуклом четырехугольнике $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

Указание: обратите внимание, что $\angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$.



- 10 Найдите градусные меры неизвестных углов.

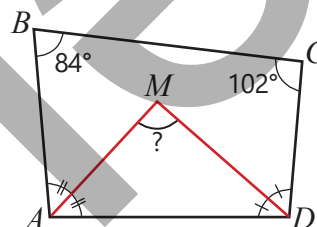


- 11 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, пересекаются в точке M . По рисунку найдите следующее.

$\angle A + \angle D = ?$

$\angle MAD + \angle MDA = ?$

$\angle M = ?$



- 12 Определите, верны или ложны утверждения. Объясните свой ответ.
- Все внутренние углы выпуклого четырехугольника не могут быть острыми.
 - Все внутренние углы выпуклого четырехугольника могут быть тупыми.
 - Все внутренние углы выпуклого четырехугольника не могут быть прямыми.

Решение задач

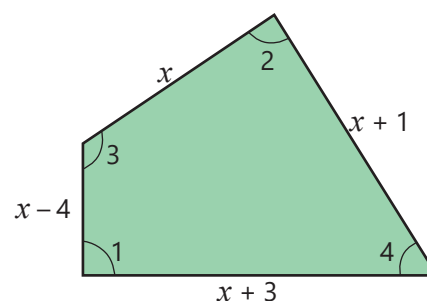
- 13 Улицы Чинарли и Кондалан перпендикулярны. Улица Чичекли образует угол 68° с улицей Нарлы и 74° с улицей Кондалан.

- Каковы градусные меры углов, образованных при пересечении улиц Чинарли и Нарлы?
- На сколько градусов красный автомобиль должен повернуть направо на улицу Кондалан?
- На сколько градусов желтый автомобиль должен повернуть налево на улицу Чичекли?



- 14 Подготовлен план детской площадки в форме четырехугольника периметром 24 м.

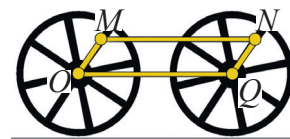
- Какова длина сторон площадки?
- Найдите градусные меры $\angle 1$ и $\angle 2$, учитывая, что $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 2$.
- Сколько квадратных метров составляет площадь площадки?



5.3. Параллелограмм

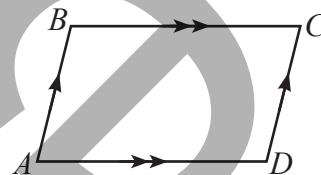
Исследование-обсуждение

Отрезки OM и QN на радиусах колес равны. Стержень MN , длина которого равна расстоянию OQ между центрами колес, передает движение от одного колеса к другому. Как можно обосновать, что отрезки MN и OQ параллельны?



Изучение Параллелограмм и его свойства

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом**. В параллелограмме $ABCD$ на рисунках $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Параллелограмм – это выпуклый четырехугольник.



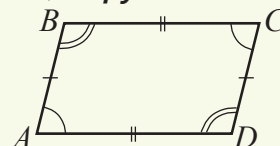
Т Теорема 3. Свойства сторон и углов параллелограмма

Противоположные стороны параллелограмма конгруэнтны. Противоположные углы (углы при противоположных вершинах) параллелограмма конгруэнтны.

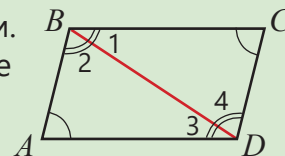
Дано: $ABCD$ — параллелограмм

Доказать: $AB \cong CD$, $BC \cong AD$, $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

Доказательство.



Предложение	Обоснование
1. Проводится диагональ BD	1. Имеется отрезок, соединяющий две точки.
2. $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$	2. Поскольку $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны.
3. $BD \cong BD$	3. Сторона BD является общей стороной $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$.
4. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$	4. По признаку УСУ конгруэнтности треугольников.
5. $AB \cong CD$, $BC \cong AD$	5. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.
6. $\angle A \cong \angle C$	6. Соответствующие углы конгруэнтных треугольников.
7. $\angle B \cong \angle D$	7. $\angle B = \angle 1 + \angle 2$, $\angle D = \angle 3 + \angle 4$, $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$

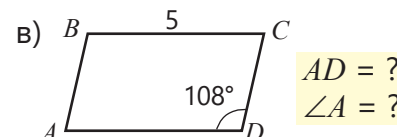
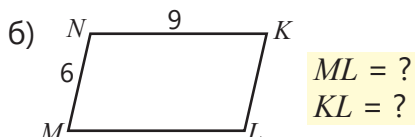


Подумай!

Как можно обосновать, что сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180° ?

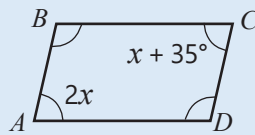
Задания

1 $ABCD$ — параллелограмм. По данным на рисунке найдите искомое.



- 2 Найдите искомые углы параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке.

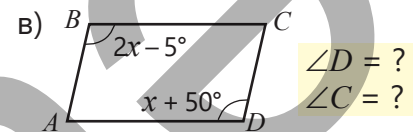
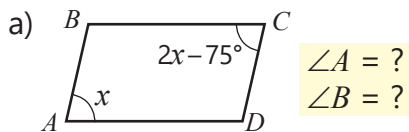
ОБРАЗЕЦ



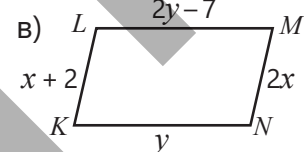
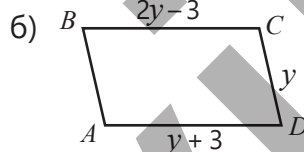
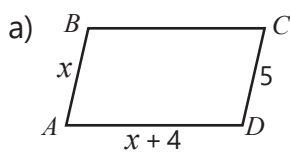
$$\angle A = ?$$

$$\angle D = ?$$

Решение	Объяснение
$2x = x + 35^\circ$ $2x - x = 35^\circ$ $x = 35^\circ$ $\angle A = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$ $\angle D = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$	Поскольку градусные меры противоположных углов параллелограмма равны, записывается и решается соответствующее уравнение. Записывается на место значения переменной и находятся градусные меры искомых углов.



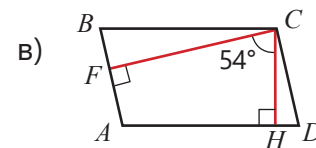
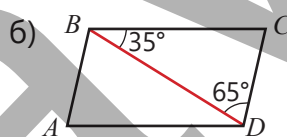
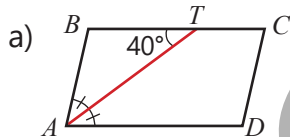
- 3 Найдите стороны и периметр параллелограмма по данным на рисунке.



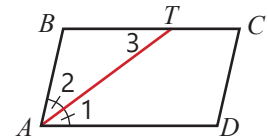
- 4 Найдите градусные меры углов параллелограмма $ABCD$ по указанным данным.

а) $\angle A : \angle D = 5 : 7$ б) $\angle B - \angle A = 80^\circ$ в) $\angle B + \angle D = 240^\circ$ г) $\angle A + \angle B + \angle C = 220^\circ$

- 5 Найдите углы параллелограмма по данным на рисунке.

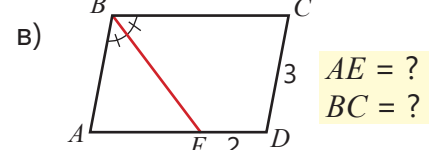
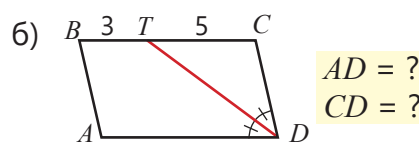
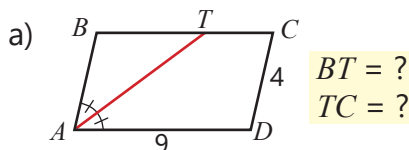


- 6 В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке T . Определив подходящие утверждения в пропусках, обоснуйте, что треугольник ABT является равнобедренным.



Предложение	Объяснение
1. $\angle 1 \cong \angle 2$	1. AT биссектриса.
2. $\angle 1 \cong \angle 3$	2. _____
3. $\angle 2 \cong \angle 3$	3. Согласно свойствам равенства.
4. $\triangle ABT$ равнобедренный: $AB \cong BT$	4. _____

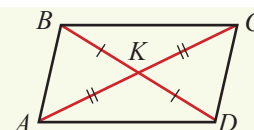
- 7 На основании данных, представленных на рисунке, найдите искомое в параллелограмме.



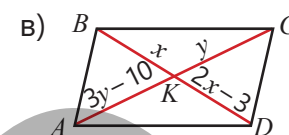
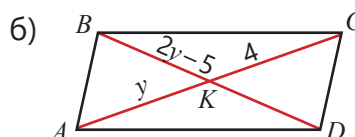
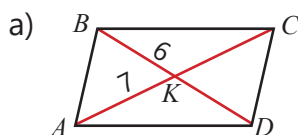
T Теорема 4. Свойства диагоналей параллелограмма

Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся в точке пересечения пополам.

Доказательство. Задание 10.



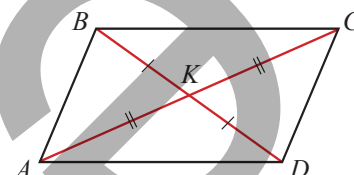
- 8 Найдите диагонали параллелограмма.



- 9 Проведены диагонали параллелограмма $ABCD$.

а) Если $AC = 12$ см, $BD = 8$ см, $CD = 5$ см, найдите периметр треугольника ABK .

б) Найдите длину диагонали AC параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 28 см, а периметр треугольника ACD — 25 см.

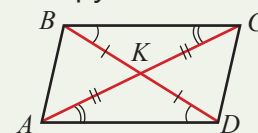


- 10 Завершите доказательство свойства диагоналей параллелограмма (теорема 4), определив утверждения, соответствующие пропускам.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказать: $AK \cong CK$, $KD \cong KB$

Предложение	Обоснование
1. $\angle KAD \cong \angle KCB$, $\angle ADK \cong \angle CBK$	1. Так как при пересечении двух параллельных прямых секущей внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны.
2. $BC \cong AD$	2.
3. $\triangle AKD \cong \triangle CKB$	3. По признаку конгруэнтности треугольников УСУ.
4. $AK \cong CK$, $KD \cong KB$	4.



Запомни!

На основании следующих признаков можно заключить, что данный четырёхугольник является параллелограммом.

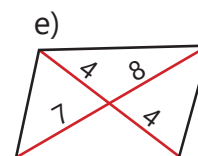
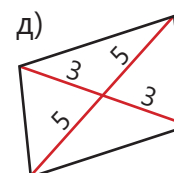
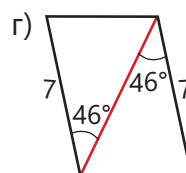
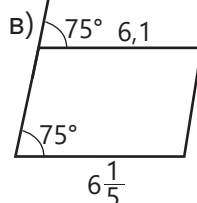
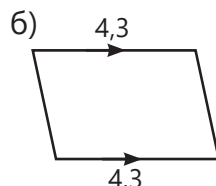
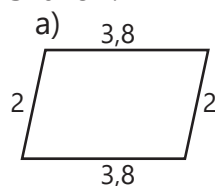
1. Если две противоположные стороны четырёхугольника конгруэнтны и параллельны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

2. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно конгруэнтны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

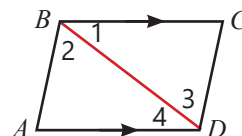
3. Если диагонали четырёхугольника пересекаются и делятся пополам в точке пересечения, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

Эти утверждения называются **признаками параллелограмма**. Если выполняется хотя бы одно из этих условий, четырёхугольник является параллелограммом. Эти признаки можно доказать.

- 11 Какой из четырёхугольников на рисунке является параллелограммом, исходя из его признаков?

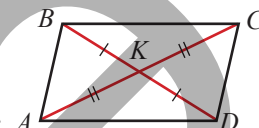


- 12 В четырехугольнике $ABCD$ $BC \cong AD$ и $BC \parallel AD$. Нарисуйте диагональ BD этого четырехугольника и обоснуйте, ответив на вопросы, что если две противоположные стороны четырехугольника конгруэнтны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом.

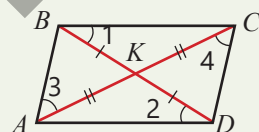


- Почему $\angle 1$ и $\angle 4$ конгруэнтны?
 - По какому признаку $\triangle CBD$ и $\triangle ADB$ конгруэнтны?
 - Почему $\angle 2$ и $\angle 3$ конгруэнтны?
 - По какому признаку параллельности прямых можно сказать, что $AB \parallel CD$
- Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

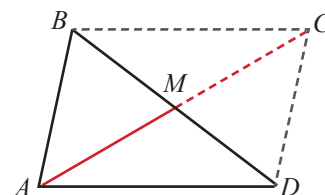
- 13 Определив утверждения в пропусках, обоснуйте, что если диагонали четырехугольника пересекаются и делятся пополам в точке пересечения, то четырехугольник является параллелограммом.



Предложение	Обоснование
1. $\angle BKC \cong \angle DKA$	1. Это вертикальные углы.
2. $\triangle BKC \cong \triangle DKA$	2. По признаку СУС конгруэнтности треугольников
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Соответствующие углы конгруэнтных треугольников.
4. $BC \parallel AD$	4. По конгруэнтности внутренних накрест лежащих углов
5. $\angle AKB \cong \angle CKD$	5. _____
6. $\triangle AKB \cong \triangle CKD$	6. _____
7. $\angle 3 \cong \angle 4$	7. _____
8. $AB \parallel CB$	8. _____
9. $ABCD$ параллелограмм.	9. По определению параллелограмма



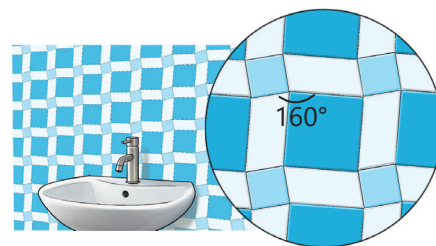
- 14 Медиана AM треугольника ABD продолжена на свою длину: $AM = MC$. Как обосновать, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом?



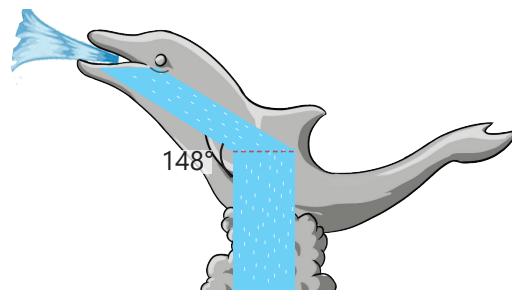
Решение задач

- 15 Мастер выложил стену кафельными плитками, одни из которых имеют форму параллелограмма, а другие – двух квадратов, как показано на рисунке. Периметр большого квадрата равен 40 см, а периметр маленького квадрата равен 24 см.

- Найдите периметр параллелограмма.
- Каковы градусные меры углов параллелограмма?



- 16 В парке установили фонтан в форме дельфина. Трубы сбоку имеют форму прямоугольника и параллелограмма. Сколько градусов составляют углы параллелограмма согласно рисунку?

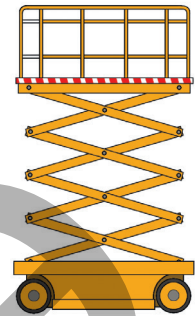


5.4. Виды параллелограммов. Прямоугольник, ромб, квадрат

Исследование-обсуждение

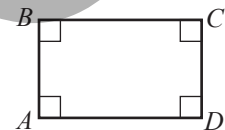
В различных ремонтных работах используются специальные самоходные устройства, называемые "ножничными подъемниками". Подъем и опускание рабочей платформы осуществляются за счет складывания и раскладывания одинаковых по длине стержней.

Какие четырехугольники могут образовывать стержни устройства от сложенного состояния до достижения наивысшей точки? Как изменяются углы между стержнями в этот момент?



Изучение Прямоугольник

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником. Поскольку прямоугольник является параллелограммом, все свойства параллелограмма применимы и к прямоугольнику. У прямоугольника есть еще одно свойство.



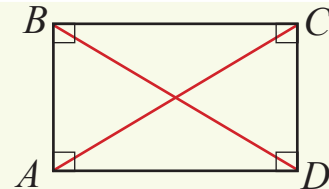
τ Теорема 5. Свойство диагоналей прямоугольника

Диагонали прямоугольника конгруэнтны.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник.

Доказать: $AC \cong BD$

Доказательство.

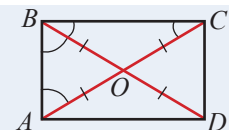


Предложение	Обоснование
1. $AB \cong CD, BC \cong AD$	1. Противоположные стороны прямоугольника конгруэнтны.
2. $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$	2. Все углы прямоугольника прямые.
3. $\triangle BAD \cong \triangle CDA$	3. По признаку СУС конгруэнтности треугольников.
4. $AC \cong BD$	4. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.



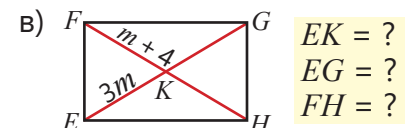
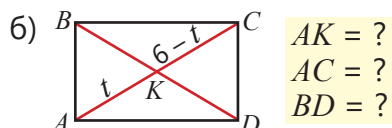
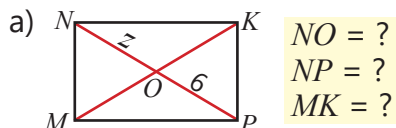
Подумай!

Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Как доказать, что $BO \cong OD \cong AO \cong OC$, $\angle BCO \cong \angle CBO$, $\angle ABO \cong \angle BAO$?

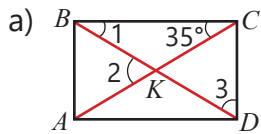


Задания

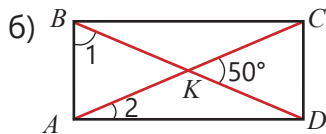
1 На рисунке изображен прямоугольник. Найдите требуемое по данным.



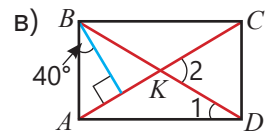
- 2) $ABCD$ — прямоугольник. Найдите градусные меры углов по данным на рисунке.



$$\begin{aligned}\angle 1 &= ? \\ \angle 2 &= ? \\ \angle 3 &= ?\end{aligned}$$

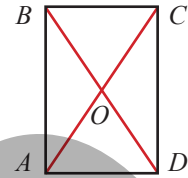


$$\begin{aligned}\angle 1 &= ? \\ \angle 2 &= ?\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\angle 1 &= ? \\ \angle 2 &= ?\end{aligned}$$

- 3) Диагональ прямоугольника $ABCD$ составляет 10 см. Найдите периметр прямоугольника, если периметр треугольника BOC 16 см, а периметр треугольника COD — 18 см.



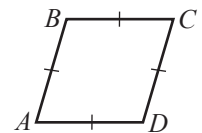
- 4) Обоснуйте, заполнив пропуски соответствующими утверждениями, что параллелограмм с конгруэнтными диагоналями является прямоугольником.



Предложение	Обоснование
1. $AC \cong BD$	1.
2. $AB \cong CD, BC \cong AD$	2.
3. $\triangle BAD \cong \triangle CDA$	3. Согласно признаку конгруэнтности треугольников ССС
4. $\angle BAD \cong \angle CDA$	4.
5. $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$	5. $\angle BAD \cong \angle CDA$ и $\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$
6. $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$	6.
7. $ABCD$ — прямоугольник.	7. По определению прямоугольника

Изучение Ромб

Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны, называется **ромбом**. На рисунке $ABCD$ — ромб: $AB \parallel CD, BC \parallel AD, AB \cong BC \cong CD \cong AD$. Свойства параллелограмма также применимы к ромбу. У ромба есть и дополнительные свойства.



Теорема 6. Свойства ромба

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

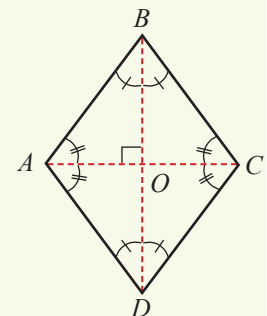
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Дано: $ABCD$ — ромб.

Доказать: $\angle ABD \cong \angle CBD, \angle BAC \cong \angle DAC, BD \perp AC$

Доказательство. Поскольку ромб является параллелограммом, его диагонали делятся пополам в точке пересечения: $AO = OC, BO = OD$. Так как все стороны ромба равны, $\triangle ABC$ является равнобедренным треугольником: $AB \cong BC$. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, одновременно является биссектрисой и высотой. Следовательно,

$$\angle ABD \cong \angle CBD \text{ и } BD \perp AC$$

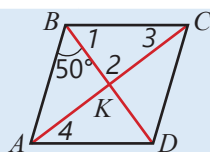


Подумай!

Как подобными рассуждениями можно показать, что $\angle BAC \cong \angle DAC$?

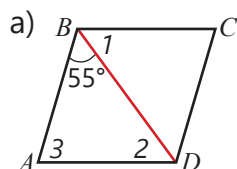
- 5 $ABCD$ – ромб. Найдите градусные меры углов по данным на рисунке.

ОБРАЗЕЦ



$$\angle 1 = ? \quad \angle 2 = ? \quad \angle 3 = ? \quad \angle 4 = ?$$

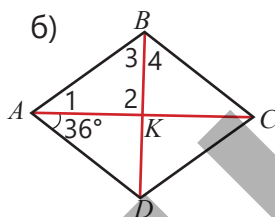
Решение	Объяснение
$\angle 1 = 50^\circ$ $\angle 2 = 90^\circ$ $\angle 3 = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ $\angle 4 = \angle 3 = 40^\circ$	Диагональ ромба является биссектрисой угла при вершине. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°. Внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны.



$$\angle 1 = ?$$

$$\angle 2 = ?$$

$$\angle 3 = ?$$

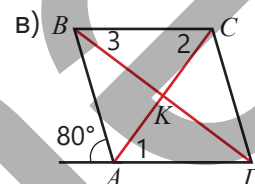


$$\angle 1 = ?$$

$$\angle 2 = ?$$

$$\angle 3 = ?$$

$$\angle 4 = ?$$

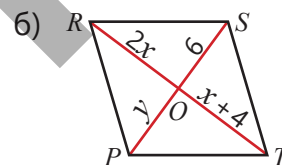
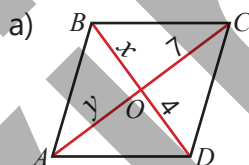


$$\angle 1 = ?$$

$$\angle 2 = ?$$

$$\angle 3 = ?$$

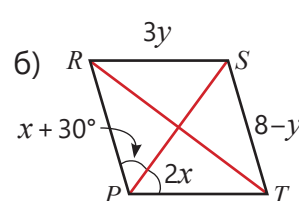
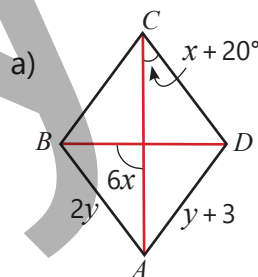
- 6 Найдите диагонали ромба по данным на рисунке.



- 7 $ABCD$ — ромб.

- а) Найдите периметр ромба, если $AB + BC + CD = 36$ см.
- б) Найдите длину диагонали BD , если $\angle A = 60^\circ$, а периметр ромба — 48 см.

- 8 Найдите градусные меры углов и сторону ромба по данным на рисунке.

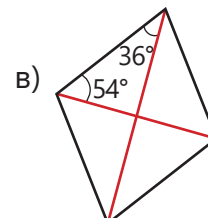
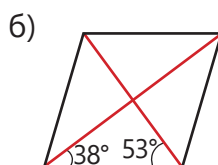
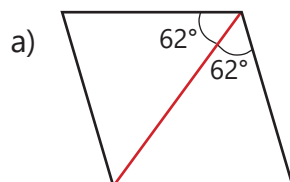


Запомни!

На основании следующих признаков можно заключить, что данный параллелограмм является ромбом.

1. Параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом.
2. Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм является ромбом.

- 9 Какие из параллелограммов, изображенных на рисунке, являются ромбом? Обоснуйте свое мнение.



- 10 Фигура на рисунке составлена из 4 конгруэнтных равнобедренных треугольников.

- Сколько ромбов изображено на рисунке?
- Сколько градусов составляет тупой угол этих ромбов?

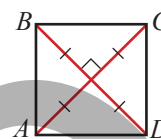


Изучение Квадрат

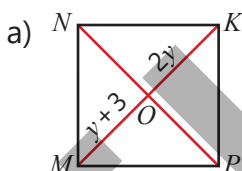
Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом**.

Квадрат – это тоже ромб, у которого все углы прямые. Следовательно, свойства прямоугольника и ромба применимы и к квадрату. У квадрата:

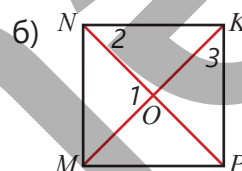
- все углы прямые.
- все стороны конгруэнтны.
- диагонали конгруэнтны.
- диагонали взаимно перпендикулярны.
- диагонали делятся пополам в точке пересечения.
- диагонали являются биссектрисами углов.



- 11 На рисунке изображен квадрат $MNKP$. Используя данные, найдите требуемые стороны или углы.

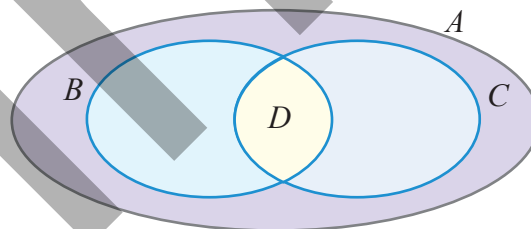


$MO = ?$
 $MK = ?$
 $NP = ?$

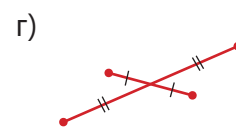
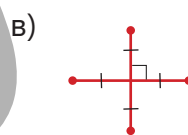
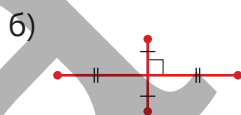


$\angle 1 = ?$
 $\angle 2 = ?$
 $\angle 3 = ?$

- 12 На диаграмме изображены множества "параллелограммов", "прямоугольников", "ромбов" и "квадратов". Если множество "ромбов" обозначено буквой C , определите, какой буквой обозначены другие множества.



- 13 На рисунке показаны диагонали четырехугольника. Какая фигура получится при последовательном соединении вершин отрезками? Обоснуйте ответ.



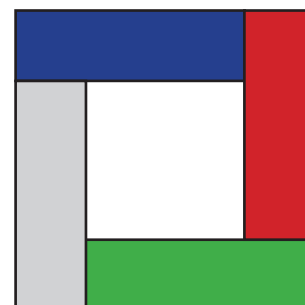
Решение задач

- 14 В саду планировалось создать клумбу квадратной формы. Для этого были установлены четыре столба с одинаковым расстоянием между соседними столбами. Как на основе длин диагоналей определить, является ли клумба квадратной?



- 15 Даны четыре полосы в форме конгруэнтных прямоугольников. Эти полосы расположены так, что одна из коротких сторон одной полосы прилегает к длинной стороне другой, как показано на рисунке.

- а) Докажите, что в результате получаются маленький и большой квадраты.
 б) Какой периметр у большого квадрата, если периметр каждой полосы равен 12 см?



5.5. Свойства средней линии и медиан треугольника



Ключевые слова

- средняя линия треугольника

Исследование-обсуждение

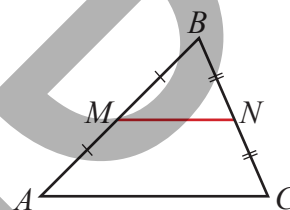
Из четырех конгруэнтных равносторонних треугольников был составлен треугольник, как показано на рисунке.

- Объясните, почему этот треугольник равносторонний.
- Как можно разделить любой треугольник на четыре конгруэнтных треугольника с помощью трех отрезков?



Изучение Средняя линия треугольника

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника. На рисунке отрезок MN — это средняя линия треугольника ABC .



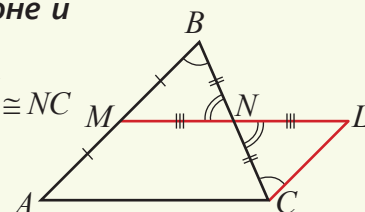
Теорема 7. Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Дано: отрезок MN является средней линией $\triangle ABC$: $AM \cong MB$, $BN \cong NC$

Доказать: $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{AC}{2}$

Доказательство.



Предложение	Обоснование
1. $NL \cong MN$	1. На продолжении MN откладывается равный ему отрезок.
2. $\angle BNM \cong \angle CNL$	2. Вертикальные углы конгруэнтны.
3. $\triangle BNM \cong \triangle CNL$	3. По признаку конгруэнтности треугольников СУС.
4. $\angle NCL \cong \angle NBM$	4. Соответствующие углы конгруэнтных треугольников.
5. $LC \parallel AB$	5. По признаку параллельности прямых.
6. $LC \cong AM$	6. $LC \cong BM \cong AM$
7. $AMLC$ параллелограмм	7. Поскольку $LC \cong AM$, $LC \parallel AB$
8. $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{AC}{2}$	8. $ML \parallel AC$ и $AC = ML = MN + NL = 2MN$

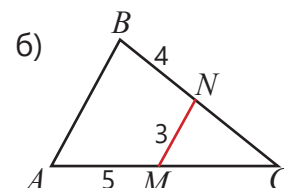
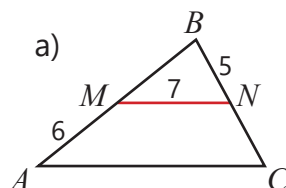


Подумай!

Сколько средних линий у треугольника? На какие фигуры делит треугольник любая средняя линия?

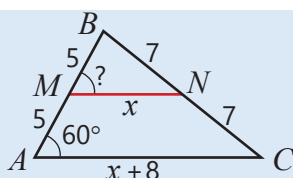
Задания

- 1 На рисунке MN — средняя линия. По данным найдите стороны треугольника ABC .



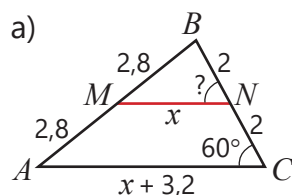
- 2 Найдите угол и длину отрезков по данным на рисунке.

ОБРАЗЕЦ

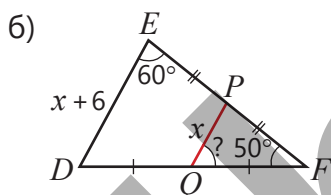


$$MN = ? \quad AC = ? \quad \angle BMN = ?$$

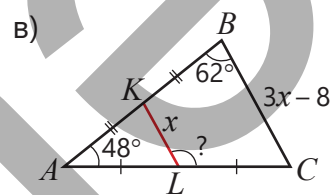
Решение	Объяснение
$x = \frac{x+8}{2}$ $x = 8$ $MN = 8, AC = 8 + 8 = 16$ $\angle M = \angle A = 60^\circ$	$AM = MB = 5, BN = NC = 7, MN$ — средняя линия и $MN = \frac{AC}{2}$. Находится корень уравнения. По значению x находятся длины отрезков MN и AC . Поскольку $MN \parallel AC$, соответствующие углы конгруэнтны.



$$MN = ? \quad AC = ? \quad \angle MNB = ?$$



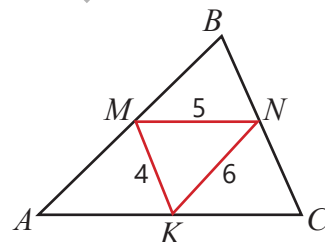
$$PQ = ? \quad DE = ? \quad \angle PQF = ?$$



$$KL = ? \quad BC = ? \quad \angle CLK = ?$$

- 3 Точки M, N, K являются серединами сторон треугольника ABC .

- а) Найдите стороны треугольника ABC .
б) Найдите длины отрезков AM, MB, BN, NC, AK, KC .
в) Треугольник был разделен на четыре маленьких треугольника средними линиями. По какому признаку можно доказать, что эти треугольники конгруэнтны?



- 4 Одна из средних линий равнобедренного треугольника с периметром 32 см равна 4 см. Найдите стороны треугольника. Параллельна ли эта средняя линия стороне или основанию треугольника?

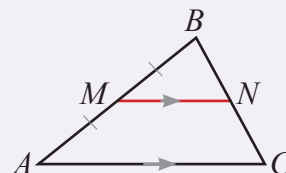


Запомни!

Верно и обратное утверждение теоремы о средней линии.

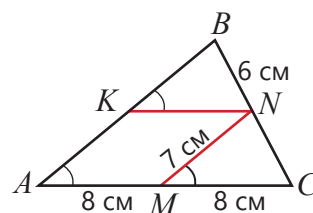
Прямая линия, проведенная из середины одной стороны треугольника параллельно другой стороне, проходит через середину третьей стороны.

$$AM \cong MB, MN \parallel AC \Rightarrow BN \cong NC$$

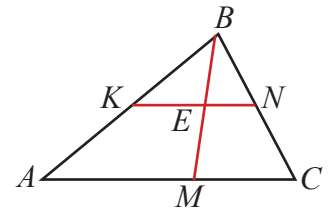


- 5 В треугольнике ABC $\angle BKN \cong \angle NMC \cong \angle A$, $AM = MC = 8$ см, $MN = 7$ см, $BN = 6$ см.

- а) Как можно обосновать, что четырехугольник $AKNM$ является параллелограммом?
б) Найдите длины отрезков AK и KN .
в) Обоснуйте, что $\triangle BKN \cong \triangle NMC$.
г) Объясните, что отрезки MN и KN являются средними линиями треугольника ABC .
д) Найдите периметр треугольника ABC .



- 6 Отрезок KN является средней линией треугольника ABC . Если точка M — произвольная точка на основании AC , то как можно обосновать, что $BE = EM$?



Изучение Медианы треугольника

Треугольник, его медианы и точки пересечения их медиан играют определенную роль в решении некоторых практических задач. Точку пересечения медиан еще называют центром тяжести треугольника. Соответствующее свойство медиан можно выразить следующим образом.

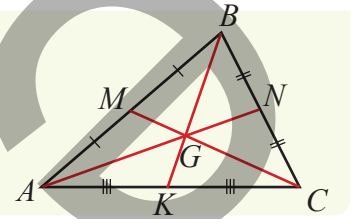
Т Теорема 8. Свойство медиан треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем точка пересечения делит каждую медиану в соотношении $2 : 1$, считая от вершины.

$$AG : GN = 2 : 1$$

$$BG : GK = 2 : 1$$

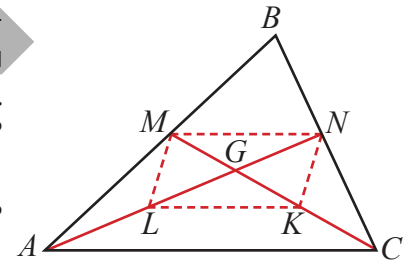
$$CG : GM = 2 : 1$$



Подумай!

Как можно объяснить, что в треугольнике ABC , изображенном на рисунке, $AG = \frac{2}{3}AN$ и $GN = \frac{1}{3}AN$?

- 7 В треугольнике ABC медианы AN и CM пересекаются в точке G . Ответив на вопросы, докажите, что точка пересечения делит эти медианы в соотношении $2 : 1$, начиная с вершины.
- Является ли отрезок MN средней линией треугольника ABC ? Почему?
 - Если $AL \cong LG$ и $CK \cong KG$, как объяснить, что $LK \parallel AC$ и $LK = \frac{AC}{2}$?
 - Почему $LK \parallel MN$ и $LK \cong MN$?
 - Как показать, что четырехугольник $MNKL$ является параллелограммом?
 - Как определить, что $LG \cong GN$ и $KG \cong GM$?
 - Как объяснить, что $CG : GM = 2 : 1$ и $AG : GN = 2 : 1$?



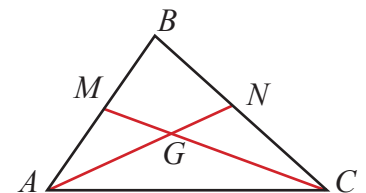
- 8 На рисунке AN и CM — медианы. Найдите, если $AG = 12$ см, $CM = 21$ см.

а) $GN = ?$

б) $AN = ?$

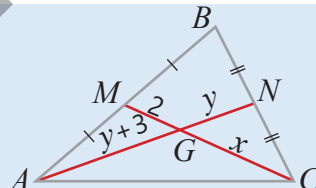
в) $CG = ?$

г) $GM = ?$



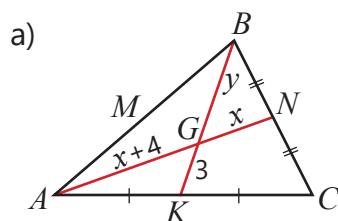
- 9 Найдите требуемое по данным на рисунке.

ОБРАЗЕЦ

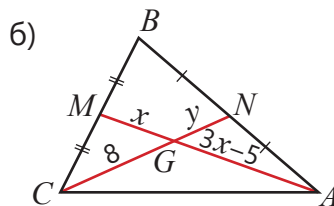


$$CG = ? \quad GN = ? \quad AG = ?$$

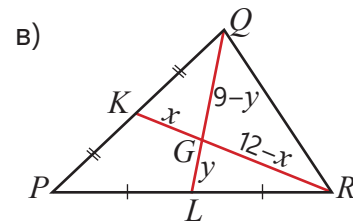
Решение	Объяснение
$x = 2 \cdot 2 = 4, \quad CG = 4$ $y + 3 = 2y$ $y = 3, \quad GN = 3$ $AG = 3 + 3 = 6$	Поскольку $CG : GM = 2 : 1, \quad CG = 2 \cdot GM$. Поскольку $AG : GN = 2 : 1$, то записывается и решается уравнение, соответствующее равенству $AG = 2 \cdot GN$. По значению y находятся длины отрезков GN и AG .



$$GN = ? \quad AG = ? \quad BG = ?$$



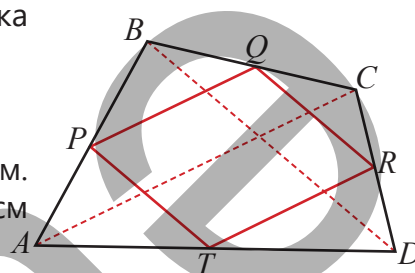
$$GN = ? \quad GM = ? \quad AG = ?$$



$$GK = ? \quad RG = ? \quad QL = ?$$

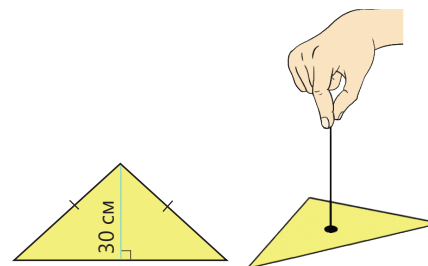
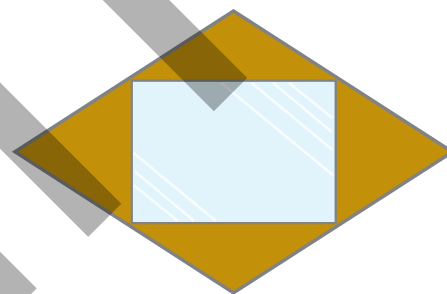
- 10) Середины P , Q , R и T сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ соединены последовательно.

- а) Объясните, что PQ и RT параллельны диагонали AC .
 б) Докажите, что $QR \parallel PT$.
 в) Объясните, что четырехугольник $PQRT$ — параллелограмм.
 г) Найдите периметр параллелограмма $PQRT$, если $AC = 12$ см и $BD = 8$ см.

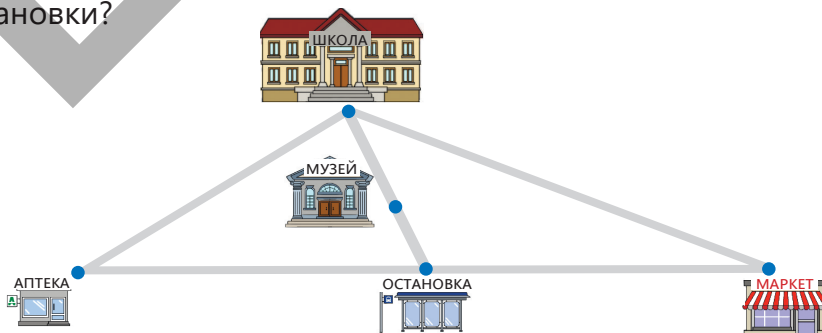


Решение задач

- 11) Средние точки сторон деревянной доски в форме ромба последовательно соединили палочками, а к полученной рамке прикрепили зеркало.
- Как можно обосновать, что зеркало имеет прямоугольную форму?
 - Если диагонали ромба равны 64 см и 48 см, какова площадь зеркала?
- 12) Из картона вырезана фигура в виде равнобедренного треугольника, как показано на рисунке.
- При подвешивании из какой точки этой фигуры она будет параллельна полу?
 - Каково расстояние от этой точки до основания треугольника?



- 13) На плане школа, аптека и маркет соответствуют вершинам треугольника, а музей — центру тяжести этого треугольника. Остановка находится на прямой, проходящей между аптекой и маркетом, и находится в 200 м от каждого из них. Расстояние между школой и музеем на 280 м меньше, чем между аптекой и маркетом. Каково расстояние от музея до остановки?



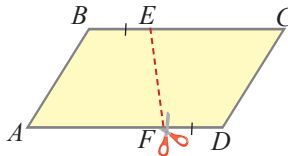
5.6. Трапеция

Исследование-обсуждение

Практическое задание.

Нарисуйте параллелограмм на цветной бумаге и, используя ножницы, разрежьте его вдоль линии, как показано на рисунке.

- Какие фигуры получились?
- Можно ли одну из них положить на другую, чтобы они полностью совпали?



Ключевые слова

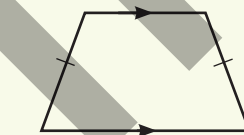
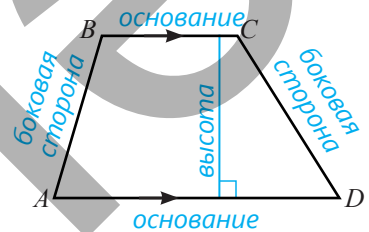
- равнобедренная трапеция
- прямоугольная трапеция
- средняя линия трапеции

Изучение Трапеция

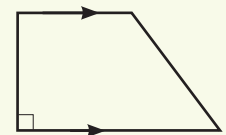
Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а другие две — не параллельны, называется **трапецией**. На рисунке $ABCD$ — трапеция: $BC \parallel AD$. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, а не параллельные — **боковыми сторонами**.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к другому основанию или его продолжению.

Трапеция, у которой боковые стороны конгруэнтны, называется **равнобедренной трапецией**, а трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основанию, называется **прямоугольной трапецией**.



Равнобедренная трапеция



Прямоугольная трапеция

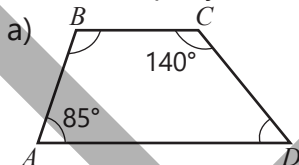


Подумай!

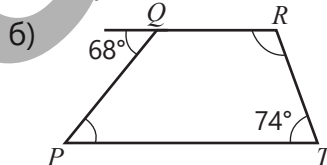
Как можно объяснить, что сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° ?

Задания

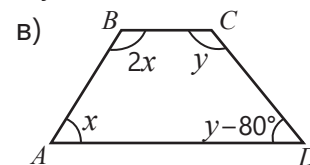
- 1 Найдите градусные меры углов трапеции по данным на рисунке.



$$\angle B = ? \quad \angle D = ?$$



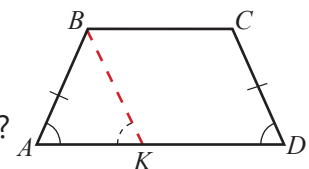
$$\angle P = ? \quad \angle R = ?$$



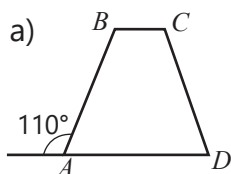
$$\angle A = ? \quad \angle B = ? \quad \angle D = ?$$

- 2 В равнобедренной трапеции $ABCD$ проведите $BK \parallel CD$ и, ответив на вопросы, обоснуйте, что углы, прилежащие к основаниям равнобедренной трапеции, конгруэнтны.

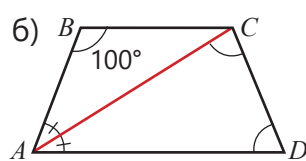
- Является ли четырехугольник $BCDK$ параллелограммом? Почему?
- Как можно обосновать, что $\angle AKB \cong \angle D$?
- Как можно объяснить, что $\angle A \cong \angle D$?
- Как можно обосновать, что $\angle B \cong \angle C$?



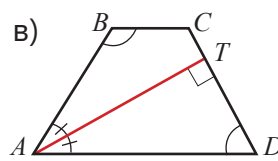
- 3 $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Найдите градусные меры углов по данным на рисунке.



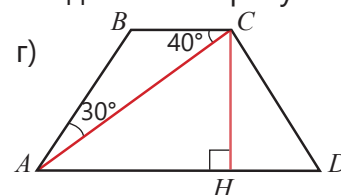
$\angle C = ? \quad \angle D = ?$



$\angle D = ? \quad \angle ACD = ?$



$\angle D = ? \quad \angle B = ?$



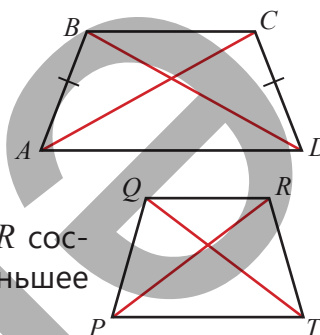
$\angle B = ? \quad \angle HCD = ?$

- 4 Докажите, используя указание, что *диагонали равнобедренной трапеции конгруэнтны*.

Дано: $ABCD$ — трапеция и $AB \cong CD$.

Доказать: $AC \cong BD$.

Указание. Обоснуйте, что $\triangle BAD \cong \triangle CDA$.



- 5 $PQRT$ – равнобедренная трапеция. Периметр треугольника PQR составляет 15 см, а периметр треугольника PQT – 20 см. Если меньшее основание трапеции 6 см, найдите большее основание.

Изучение Трапеция

Отрезок, соединяющий средние точки боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**. На рисунке отрезок MN является средней линией трапеции $ABCD$.



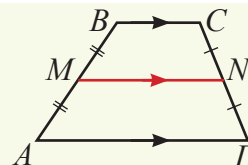
Теорема 9. Свойство средней линии трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине суммы их длин.

$MN \parallel AD$

$MN \parallel BC$

$MN = \frac{AD + BC}{2}$



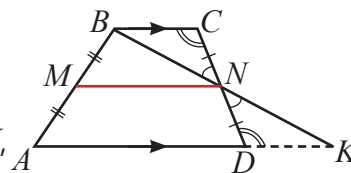
- 6 Заполните пропуски, определив соответствующие утверждения, и дополните доказательство свойства средней линии трапеции (теорема 9).

Дано: в трапеции $ABCD$ отрезок MN — средняя линия:

$AM \cong MB, CN \cong ND$

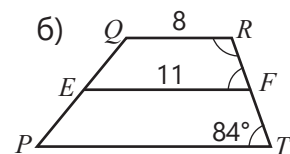
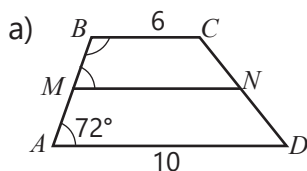
Доказать: $MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}$

Доказательство. Пусть прямая, проходящая через точки B и N , пересекает продолжение основания AD в точке K .



Предложение	Обоснование
1. $\angle CNB \cong \angle DNK$	1. _____
2. $\angle NCB \cong \angle NDK$	2. _____
3. $\triangle NCB \cong \triangle NDK$	3. По признаку конгруэнтности треугольников СУС.
4. $BC \cong KD, BN \cong KN$	4. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.
5. $MN \parallel AK, MN = \frac{AK}{2}$	5. _____
6. $MN \parallel AD \parallel BC$	6. Поскольку $MN \parallel AK$.
7. $MN = \frac{AD + BC}{2}$	7. Поскольку $AK = AD + DK$ и $DK \cong BC$.

- 7 На рисунке изображена средняя линия трапеции. Найдите градусные меры требуемых углов и длину отрезка.

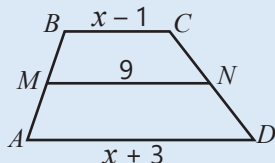


$\angle M = ? \quad \angle B = ? \quad MN = ?$

$\angle F = ? \quad \angle R = ? \quad PT = ?$

- 8 На рисунке изображена средняя линия трапеции. Найдите длину требуемых отрезков.

ОБРАЗЕЦ



$BC = ? \quad AD = ?$

Решение

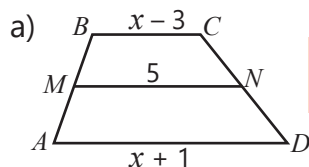
$$9 = \frac{x+3+x-1}{2}$$

$$x = 8$$

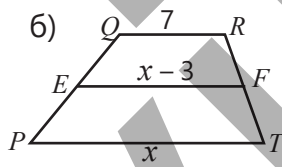
$$BC = 8 - 1 = 7, AD = 8 + 3 = 11$$

Объяснение

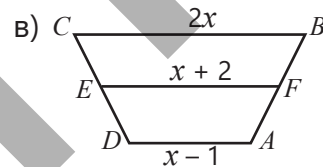
MN – средняя линия. $MN = \frac{AD+BC}{2}$. Записывается соответствующее уравнение. Уравнение решается. Вписывается значение переменной.



$BC = ?$
 $AD = ?$



$PT = ?$
 $EF = ?$

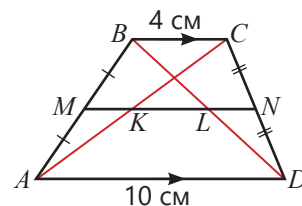


$AD = ?$
 $BC = ?$
 $EF = ?$

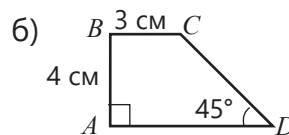
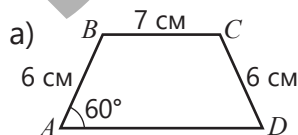
- 9 Основания трапеции относятся как 3 : 5, длина средней линии — 12 см. Найдите основания трапеции.

- 10 Ответьте на вопросы по рисунку.

- Сколько сантиметров составляет длина средней линии MN ?
- Для какого треугольника отрезок LN является средней линией и какова его длина?
- Для какого треугольника отрезок KN является средней линией и какова его длина?
- Как можно найти длину отрезка KL ?

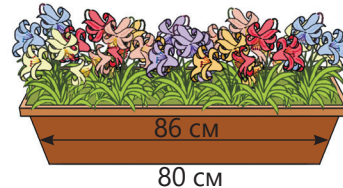


- 11 Найдите длину средней линии трапеции по данным на рисунке.

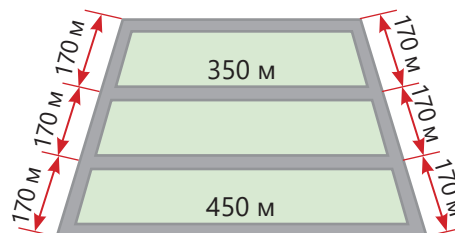


Решение задач

- 12 Боковая грань горшка имеет форму трапеции с меньшим основанием, равным 80 см, средней линией — 86 см. Какова длина большего основания этой трапеции?



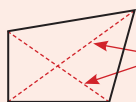
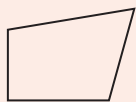
- 13 В парке дорожки, имеющие форму равнобедренной трапеции, выложены камнями. Какова общая длина каменных дорожек?



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

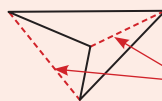
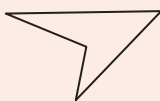
Выпуклые и невыпуклые четырехугольники

Выпуклый четырехугольник



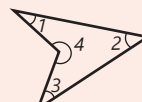
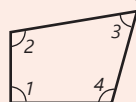
диагональ

Вогнутый (невыпуклый) четырехугольник



диагональ

Внутренние и внешние углы четырехугольника



Сумма внутренних углов равна 360° .

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$$

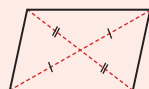
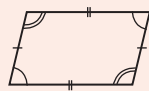
Сумма внешних углов выпуклого четырехугольника равна 360° .

Параллелограмм

Это четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

Противоположные стороны и противоположные углы конгруэнтны.

Диагонали делятся пополам в точке пересечения.



Четырехугольники

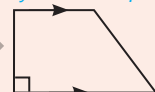
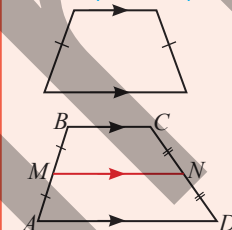
Трапеция

Четырехугольник, у которого параллельны только две стороны.



Равнобедренная трапеция

Прямоугольная трапеция



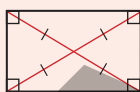
$$MN \parallel AD, MN \parallel BC$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Виды параллелограмма

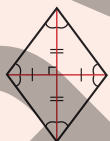
Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

- Диагонали конгруэнтны.



Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны.

- Диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами углов.

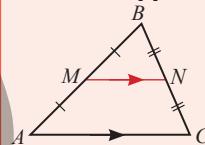


Квадрат – это ромб с углами 90° .

- Диагонали конгруэнтны и являются биссектрисами углов.

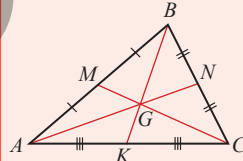


Средняя линия и свойства медиан треугольника



$$MN \parallel AC$$

$$MN = \frac{AC}{2}$$



$$AG : GN = 2 : 1$$

$$BG : GK = 2 : 1$$

$$CG : GM = 2 : 1$$

Решение исходной задачи

• Исходя из свойств ромба, вычисляется расстояние между двумя противоположными вершинами на рисунке, то есть длина диагонали BD . Диагональ AC делит ромб на два конгруэнтных треугольника: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

$$S_{ABC} = S_{ADC} = 0,4 : 2 = 0,2 \text{ (м}^2\text{)}$$

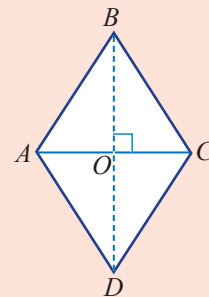
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BO = 0,2 \text{ (м}^2\text{)}$$

Учитывая, что $AC = 0,8 \text{ м}$, можно найти длину отрезка BO .

$$\frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot BO = 0,2 \Rightarrow BO = 0,5 \text{ м}$$

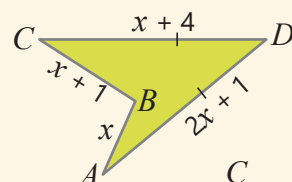
Диагонали ромба делятся пополам в точке пересечения $\Rightarrow BD = 2 \cdot BO = 1 \text{ м}$.

• Противоположные углы ромба конгруэнтны, а сумма углов соседних вершин равна 180° : $\angle ABC = \angle ADC = 78^\circ$. $\angle BAD = \angle BCD = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$.

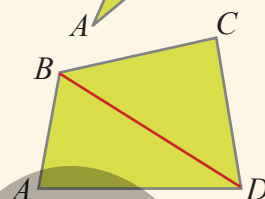


ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

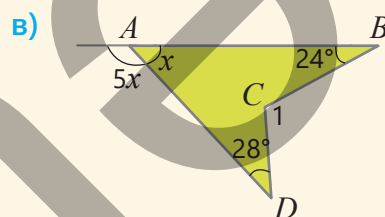
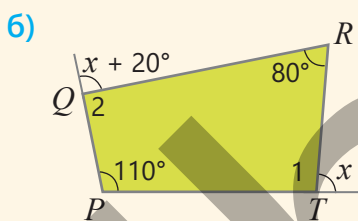
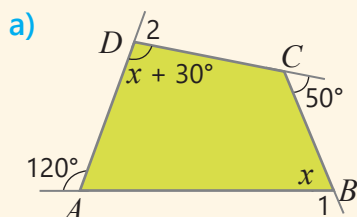
1. По данным на рисунке найдите длины сторон четырехугольника. Найдите периметр четырехугольника.



2. $ABCD$ является выпуклым четырехугольником с периметром 25 см. Диагональ BD делит его на два треугольника ABD и BCD , периметры которых равны 20 см и 21 см соответственно. Найдите длину диагонали BD .



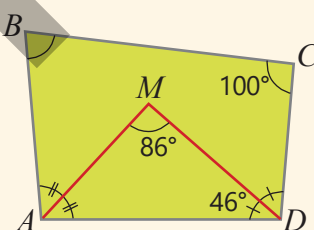
3. По данным на рисунке определите градусные меры углов четырехугольника, обозначенных цифрами.



4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов двух соседних вершин пересекаются в точке M .

• Определите градусные меры требуемых углов по данным на рисунке.

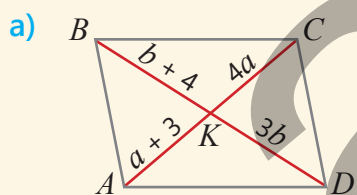
$$\angle MAD = ? \quad \angle BAD = ? \quad \angle ADC = ? \quad \angle B = ?$$



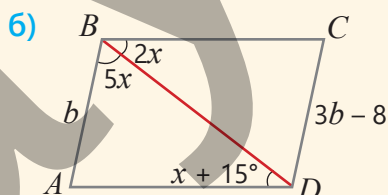
• Докажите, что $\angle AMD = (\angle B + \angle C) : 2$.

• Как можно обосновать истинность указанного равенства для любого выпуклого четырехугольника $ABCD$?

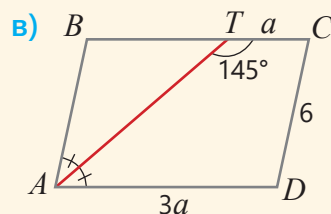
5. По данным на рисунке найдите требуемые размеры в параллелограмме $ABCD$.



$$AC = ? \quad BD = ?$$



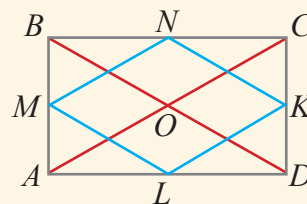
$$\angle ADB = ? \quad \angle C = ? \quad CD = ?$$



$$\angle B = ? \quad BT = ? \quad AD = ?$$

6. Средние точки сторон прямоугольника с диагоналями длиной 10 см последовательно соединены отрезками.

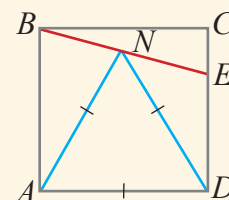
• Обоснуйте, что четырехугольник $MNKL$ является ромбом.
• Найдите периметр этого ромба.



7. Один из углов ромба равен 60° , а длина меньшей диагонали 8 см. Найдите периметр ромба.

8. На рисунке $ABCD$ — квадрат, AND — равносторонний треугольник. Точка N находится на отрезке BE . Найдите градусные меры требуемых углов.

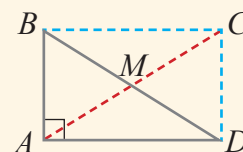
$$\angle BAN = ? \quad \angle BNA = ? \quad \angle DNE = ? \quad \angle NDE = ? \quad \angle NEC = ?$$



9. Используйте указания и, отвечая на вопросы, обоснуйте, что длина медианы, проведенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

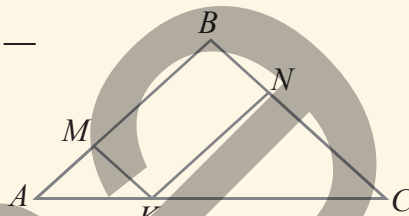
Указание. В прямоугольном треугольнике ABD из вершины прямого угла A проведите медиану AM и продолжите её до точки C : $AM = MC$.

- Почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом?
- Как можно объяснить, что $ABCD$ — прямоугольник?
- Как обосновать равенство $AM = \frac{1}{2}BD$?



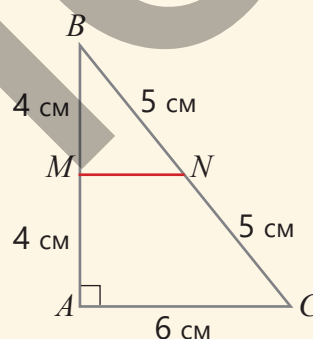
10. На рисунке ABC — равнобедренный треугольник, $MBNK$ — параллелограмм и $AB = BC = 12$ см, $\angle A = \angle C = 40^\circ$.

- Каковы градусные меры углов параллелограмма $MBNK$?
- Как доказать, что $AM = MK$?
- Чему равен периметр параллелограмма $MBNK$?



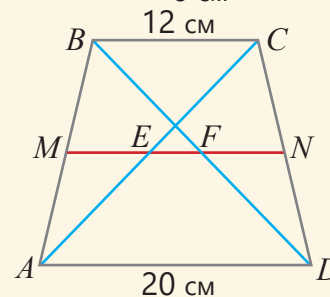
11. По рисунку найдите.

- Длину отрезка MN .
- Периметр трапеции $AMNC$.
- Площади треугольников ABC и MBN .
- Площадь трапеции $AMNC$.
- Отношение площади треугольника MBN к площади трапеции $AMNC$.



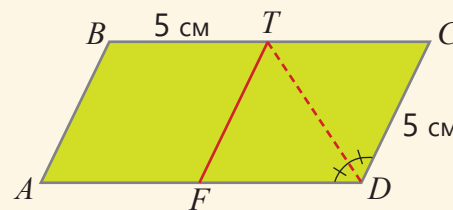
12. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали и средняя линия MN . По данным на рисунке найдите длины требуемых отрезков.

$MN = ?$ $MF = ?$ $FN = ?$ $ME = ?$ $EF = ?$

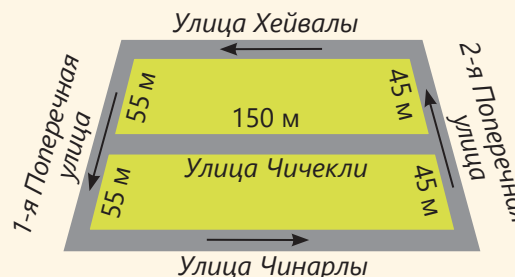


13. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла CDA пересекает противоположную сторону в точке T и $TF \parallel AB$.

- Как доказать, что четырехугольник $FTCD$ — ромб?
- Если площадь треугольника CTD равна 8 см^2 , какова площадь ромба $FTCD$?
- Как обосновать то, что $ABTF \cong FTCD$?
- Какова площадь трапеции $ABTD$?
- Какова площадь параллелограмма $ABCD$?



14. Тренер команды определил на карте маршрут бега. Улицы Хейвалы, Чичекли и Чинарлы параллельны. Сколько кругов должны сделать участники команды по указанному маршруту, если планируется пробежать дистанцию 2 км?





Математический калейдоскоп

1. Произвольное четное число можно представить как $2n$, а нечетное — как $2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Докажите, что:

а) сумма любых двух последовательных нечетных чисел делится на 4.

б) сумма любых трех последовательных четных чисел делится на 6.

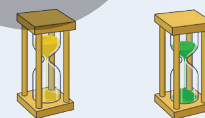
2. Какое выражение является:

а) полным квадратом? $(2^5)^{13}$ $(5^6)^5$ $(7^{11})^{13}$ б) полным кубом? $(2^5)^6$ $(5^7)^8$ $(9^9)^8$

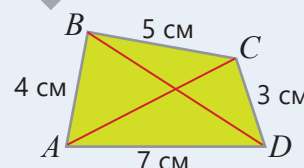
3. В данном равностороннем треугольнике проведены средние линии, после чего вырезан треугольник, образованный в центре. Затем в оставшихся треугольниках также проведены средние линии и вырезаны образовавшиеся центральные треугольники. Какая часть исходного треугольника была вырезана в итоге?



4. Одни песочные часы измеряют 7 минут, другие — 11 минут. Как с их помощью измерить 15 минут для приготовления пищи?



5. В четырехугольнике $ABCD$, изображенном на рисунке, даны длины сторон. Длина одной из диагоналей равна 8 см. Какая это диагональ: AC или BD ?



STEAM

"АРЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В АРХИТЕКТУРЕ"

Арка — конструкция, используемая в архитектуре для перекрытия пространства между двумя опорами. Арки впервые появились в архитектуре Древнего Востока, а позже широко использовались в зданиях Древнего Рима. Некоторые арки состоят из блоков в форме призмы.

1. На рисунке даны количество одинаковых блоков в форме трапеции и их размеры, обозначенные буквами. Каждый блок имеет форму призмы с основанием в виде равнобедренной трапеции.

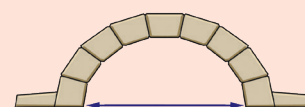
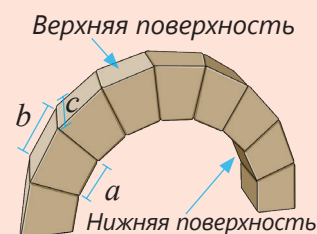
Напишите выражение для вычисления полной площади верхней и нижней поверхностей арки.

Если $n = 9$, $a = 75$ см, $b = 95$ см, $c = 2$ м, найдите площадь верхней и нижней поверхностей арки.

2. На основе вида сбоку арки определите углы трапеций.

3. Найдите информацию в Интернете о видах арок, их частях, областях применения и истории появления, подготовьте презентацию.

4. Разработайте проект арки в определенном стиле. Укажите размеры арки и количество используемых блоков.

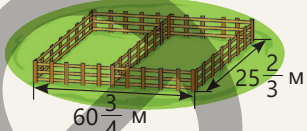
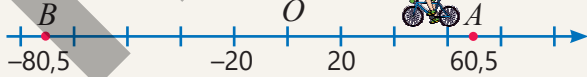


ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ ЗА ПЕРВОЕ ПОЛУГОДИЕ

Задачи с относительно высокой степенью сложности отмечены знаком "***".

- 1 Сравните данные рациональные числа с нулем и запиши их в виде несократимой дроби с натуральным знаменателем.
 $-\frac{81}{-72}$ $-\frac{-21}{-35}$ $-0,56$ $-1,3(4)$
- 2 Среди рациональных чисел определите эквивалентные а) натуральным; б) целым числам.
 $-\frac{27}{9}$ $\frac{24}{-48}$ $-\frac{15}{-5}$ $\frac{0}{-6}$ $-\frac{17}{-1}$
- 3 Впишите подходящий знак ($\in$ или $\notin$) в пустые клетки.
 $28 \square Z$ $-1,5 \square Z$ $3,(4) \square Q$ $1\frac{1}{2} \square N$
- 4 Сравните.
 а) $-0,(3)$ и $-\frac{4}{9}$ б) $-|-0,11|$ и $-|0,101|$
 б) $-1\frac{1}{6} : 5\frac{4}{9}$ и $(1,25 - 1\frac{1}{3}) \cdot 5\frac{1}{7}$
- 5 Найдите сумму $a + b$ при
 $a = \frac{10}{11} - \frac{11}{12} - \frac{12}{13}$ и $b = -\frac{21}{11} + \frac{23}{12} + \frac{25}{13}$
- 6 Какие цифры можно вписать в пустые клетки?
 а) $2,(3) < 2,\square(5) < 2,(4)$
 б) $-1,\square < -1,8\square < -1,(8)$
- 7 Решите уравнение. Проверьте правильность ответа.
 а) $0,4x + 2,6 = 11$ б) $0,(3)x - 1,5 = 10,5$
 б) $0,27 : x + 6,7 = 7$ г) $5\frac{1}{6} - x : 0,2 = 5$
- 8 На числовой прямой отмечены точки, соответствующие рациональным числам a , b , c . По условиям определите, какое число соответствует каждой точке.

 а) $a \cdot b > 0$ и $a - b > 0$
 б) $a \cdot c < 0$, $b \cdot c^2 < 0$, $b - a > 0$
- 9* В разложении числа на простые множители количество пар 2 и 5 указывает на количество нулей в конце этого числа. Сколько нулей будет в конце значения данного выражения?
 а) $5^4 \cdot 8$ б) $(-5)^2 \cdot 64$ в) $125^2 \cdot 32$
- 10 Найдите значение выражения.
 а) $-0,28 \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{7} : 2\frac{6}{7}$ в) $\frac{-1,2 + 0,6}{0,(6)}$
 б) $\frac{0,4}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$ г) $\frac{5,(3) - 1}{-\frac{5}{1 - \frac{1}{2}} + 4}$
- 11 Используя свойства степени, вычислите.
 а) $\frac{16 \cdot 3^8}{4 \cdot 9^2}$ б) $\frac{(-2)^{24} \cdot (-5)^8}{(-5)^6 \cdot (-2)^{22}}$ д) $\frac{20 \cdot 27^4 \cdot 3^2}{5^2 \cdot 3^{12}}$
 б) $\frac{3^{14} \cdot 25^{11}}{5^{20} \cdot 81^3}$ г) $\frac{7^{23} \cdot 6^{18}}{36^8 \cdot 49^{10}}$ е) $\frac{32 \cdot 125 \cdot 2^{12}}{25 \cdot 2^{13} \cdot 5^5}$
- 12 Запишите произведение одночленов в стандартном виде. Определите их коэффициент и степень.
 а) $-9y \cdot (-0,(6))xy^2$ в) $0,(3)a^2b \cdot (-1,2a^4b^2)$
 б) $(-4p^2q^3p^4 \cdot \frac{1}{2^3})^2$ г) $(2\frac{1}{3}a^4b^8)^3 \cdot (-1\frac{2}{7}a^5b^{12})^2$
- 13* Вычислите: $\frac{2+3}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{3+4}{(3 \cdot 4)^2} + \frac{4+5}{(4 \cdot 5)^2} + \frac{5+6}{(5 \cdot 6)^2} + \frac{6+7}{(6 \cdot 7)^2} + \frac{7+8}{(7 \cdot 8)^2}$
Указание. Запишите слагаемые в виде разности двух дробей и упростите.
Пример: $\frac{2+3}{(2 \cdot 3)^2} = \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{5}{4 \cdot 9} = \frac{9-4}{4 \cdot 9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$
- 14* С помощью соответствующей замены запишите многочлен в виде выражения, зависящего от переменных x и y .
 а) $3m^2n^6 + 5m^4n^3 - 2m^2n^3$
 $m^2 = x, n^3 = y$
 б) $2a^9b + 8a^6b^2 - 4a^3$
 $a^3 = x, 2b = y$
- 15 Используя формулы сокращенного умножения, вычислите удобным способом.
 а) $0,8 \cdot 1,2$ в) $3\frac{1}{4} \cdot 2\frac{3}{4}$
 б) $97 \cdot 103$ г) $0,44 \cdot 0,56$
 д) $12,8^2 + 2 \cdot 17,2 \cdot 12,8 + 17,2^2$
 е) $9,8^3 + 3 \cdot 9,8^2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 9,8 \cdot 0,2^2 + 0,2^3$

- 16 Найдите значение выражения, если $a + b = 7$, $ab = 11$.
 а) $a^2b + ab^2$ в) $a^2 + b^2$
 б) $3a^3b^2 + 3a^2b^3$ г) $5a^3b + 5ab^3$
- 17* Разложите на множители.
 а) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
 б) $x^4 - 8x^2 + 16$
 в) $x^2 - 2xy + x - xz + 2yz - z$
 г) $a^2 - 4ab - 4c^2 + 4b^2$
 д) $4x^2 - 9y^2 - 12x + 9$
- 18 Разложите на множители и покажите, что:
 а) Значение выражения $8^5 + 2^{13}$ делится на 10;
 б) Значение выражения $9^6 - 3^{10}$ делится на 24.
- 19 Используя формулы сокращенного умножения, вычислите.
 а) $\frac{2^3 - 9^3}{7} + 18$
 б) $(2^3 - 7^3)(2^3 + 7^3) + 49^3$
 в) $\frac{73^2 - 17^2 + 34 \cdot 90}{75^2 - 15^2}$
- 20 Найдите значение выражения.
 а) $a^2 + b^2$ б) $a^3 + b^3$
 $a - b = 8$ и $ab = 15$ $a + b = 5$ и $ab = 6$
- 21 Какова степень одночлена $5a^3b^{n-7}c^{n+1}$, если степень одночлена $3a^5bc^{n-2}$ равна 16?
- 22 Ответьте на вопросы:
 а) При каком значении b выражение $3x^5 - 2x^3 + x + 2 - (bx^5 + 6x^4 - 2x^2 - x - 7)$ будет многочленом 4-й степени?
 б) При каком значении a коэффициент при x^3 в записи произведения $(x^3 + 3x^2 - 5) \times (3x + a)$ в виде многочлена в стандартном виде будет равен нулю?
 в) При каком значении c трехчлен $25x^2 + 20xy + cy^2$ будет полным квадратом?
- 23 В Древнем Египте в математическом пособии, известном как *папирус Райнда*, было дано такое правило: *площадь круга равна площади квадрата, сторона которого равна $\frac{8}{9}$ диаметра круга*. На основе этого правила найдите приближенное значение числа π . Сравните найденное значение с известным значением π .
- 24* Если степень многочлена A равна 14, а степень многочлена B равна 8, то какова степень многочлена $(A + B)^2 - 5AB$?
- 25 Упростите выражение $M \cdot N - P \cdot Q$ при $M = x^2 - 5x + 7$, $N = x^2 + 8x - 6$, $P = x^2 + 5x - 33$, $Q = x^2 - 2x + 4$.
- 26 Фермер выделил участок для содержания овец в форме прямоугольника с размерами, указанными на рисунке.

 • Сколько метров забора он установил?
 • Фермер планировал потратить 12 манатов за каждый метр забора, но забор оказался на 60% дороже. Сколько дополнительно денег в манатах он потратил?
- 27 Велосипедист отправился из пункта A в пункт B . На числовой прямой отмечены координаты соответствующих точек.

 • Если единица длины — километр, то каково расстояние AB ?
 • За какое время велосипедист преодолет это расстояние, двигаясь с постоянной скоростью 15 км/ч?
- 28 В автобусе было $2n$ пассажиров. На каждой из первых трех остановок вошло m пассажи-

 ров, а на четвертой остановке несколько пассажиров вышло. После этого в автобусе осталось 25 пассажиров.
 • Запишите выражение для вычисления количества вышедших пассажиров.
 • Если цена одного билета p манатов, то каким выражением можно рассчитать общую стоимость проезда всех вышедших пассажиров? Найдите значение выражения при данных значениях переменных.
 а) $n = 12$, $m = 5$, $p = 0,5$
 б) $n = 10$, $m = 6$, $p = 0,4$

- 29 Периметр прямоугольника равен 60 м. Если его длину увеличить на 10 м, а ширину уменьшить на 6 м, то его площадь уменьшится на 32 м^2 . Какова была первоначальная площадь прямоугольника?

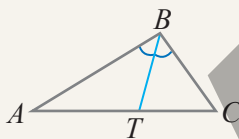


- 30 Вычислите, сколько манатов составит сумма в 5000 манатов через 4 года при годовой ставке 10% с использованием простого и сложного процентов. Какой вариант выгоднее и на сколько?

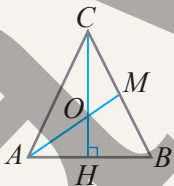
- 31* Моторная лодка прошла расстояние по течению реки за 2 часа, а против течения это же расстояние — за 3 часа. Если скорость лодки в стоячей воде равна $12,5 \text{ км/ч}$, какова скорость течения реки?



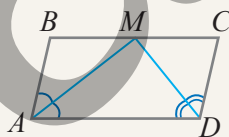
- 32 В треугольнике ABC проведена биссектриса BT . Если $\angle BTC = 80^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, найдите угол A . Определите вид треугольника $БТА$.



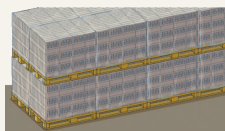
- 33* В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB известно, что $AO = 2 \cdot OM$, $CO = 16 \text{ см}$, $OH = 8 \text{ см}$, $BM = 13 \text{ см}$, $BH = 10 \text{ см}$. Найдите периметр и площадь треугольника ABC .



- 34 Биссектрисы прилежащих углов одной из сторон параллелограмма пересекаются в точке M на противоположной стороне. Докажите, что треугольник AMD является прямоугольным.



- 35 В первый день на строительство привезли $\frac{1}{3}$ часть кирпичей из склада, а во второй день — 60 упаковок. После этого на складе осталась $\frac{1}{4}$ часть кирпичей. Сколько упаковок кирпичей было на складе изначально?

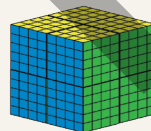


- 36* Кенгуру совершает 2 прыжка в секунду, преодолевая 9 м за каждый прыжок.



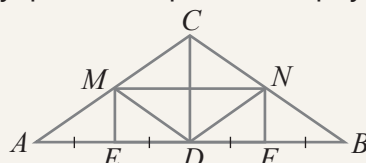
- Какое расстояние преодолит кенгуру за 2^{11} секунд?
- Скорость кенгуру больше или меньше скорости автомобиля, движущегося со скоростью 60 км/ч ?

- 37 Из 8 кубиков Рубика размером $5 \text{ см} \times 5 \text{ см} \times 5 \text{ см}$ собрали один большой куб.



- На сколько маленьких кубиков с ребром 1 см можно разделить один кубик Рубика? Запишите это число в виде степени.
- На сколько маленьких кубиков с ребром 1 см можно разделить большой куб? Можно ли выразить это число с помощью степени?

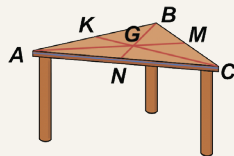
- 38 Металлическая конструкция ABC имеет форму равнобедренного треугольника.



Для прочности конструкции к основанию AB приварили перпендикулярную трубу CD . В треугольнике ABC выполняются условия $AM = MC$ и $BN = NC$. Если $AE = 2 \text{ м}$, $ME = 1,5 \text{ м}$, $AM = 2,5 \text{ м}$, ответьте на вопросы:

- Какова длина укрепляющей трубы MN ?
- Какова длина опоры CD ?
- Каков периметр четырехугольника $MCND$?
- Сколько метров трубы было использовано для изготовления конструкции?

- 39 На треугольном столе проведены отрезки AM , BN и CK , пересекающиеся в точке G .

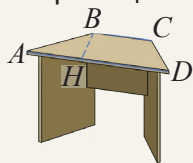


$$AG : GM = 2 : 1,$$

$$BG = 2GN, AK = KB.$$

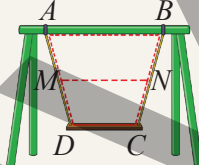
$AK = 50$ см, $MC = 40$ см, $AN = 60$ см. Какова длина канта, наклеенного по периметру стола?

- 40 Поверхность рабочего стола имеет форму равнобедренной трапеции.



Меньшее основание трапеции $BC = 0,8$ м, высота $BH = 0,8$ м. Если $AH = 0,6$ м, то какова площадь скатерти, приобретенной для покрытия стола?

- 41 В детском городке установлены качели, где верхняя перекладина, канаты и сиденье образуют равнобедренную трапецию.



• Найдите градусные меры углов трапеции, если $\angle BAD = 3x - 5^\circ$ и $\angle CDA = 5x + 25^\circ$.

• Если расстояние между серединами канатов качелей $MN = 110$ см, а $AB = 140$ см, какова длина основания DC ?

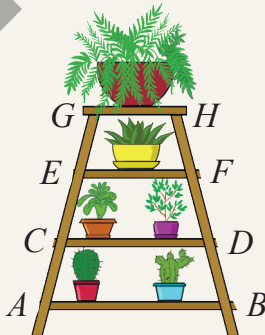
- 42 Передняя часть шкафа для цветов образует равнобедренную трапецию $ABHG$.

$$GE = EC = CA,$$

$$HF = FD = DB,$$

$$EF = 1 \text{ м}, CD = 1,2 \text{ м}.$$

Найдите длины частей наименьшей и наибольшей полок, находящихся внутри трапеции.



- 43 Если на фигуре в виде равностороннего треугольника (фигура A) провести средние линии, получатся новые треугольники. Если продолжить этот процесс, проводя средние линии в каждом новом треугольнике, полученные таким образом фигуры называются *треугольниками Серпинского*.

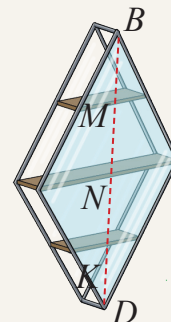


• Если сторона треугольника A равна 12 см, найдите сторону наименьшего треугольника в фигурах B , C и D .

• Какая закономерность существует между треугольниками, полученными на каждом шаге, и предыдущими треугольниками?

• Если продолжить этот процесс, начиная с фигуры D , какова будет сторона наименьшего треугольника в следующей фигуре?

- 44 Мастер изготовил книжные полки с каркасом в форме ромба из металлических прутьев. На переднюю и заднюю стороны шкафа он закрепил стеклянные панели в форме ромба.



Расстояние между полками одинаковое: $BM = MN = NK = KD$. M , N , K являются серединами сторон соответствующих полок.

• Если сторона ромба равна 50 см, сколько метров металлических прутьев потребуется для изготовления каркаса полки?

• Если длина большой полки равна 60 см, какова длина маленьких полок?

• Если большая диагональ ромба равна 80 см, какова площадь стеклянной панели?

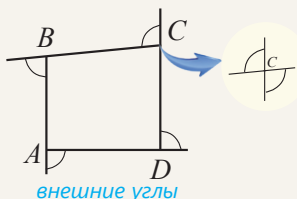
СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Аксиома (постулат) – утверждение, принимаемое без доказательства.

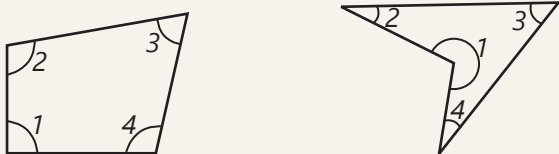
Бесконечная периодическая десятичная дробь – десятичная дробь, в которой одна или несколько цифр бесконечно повторяются. Период записывается в скобках

Например, $5,122... = 5,1(2)$

Внешний угол четырехугольника – угол, смежный с внутренним углом. Сумма внешних углов выпуклого четырехугольника равна 360° .

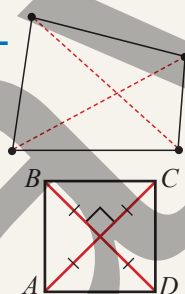


Внутренний угол четырехугольника – угол, образованный соседними сторонами и находящийся внутри четырехугольника.



Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° : $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$

Диагональ четырехугольника – отрезок, соединяющий противоположные вершины.

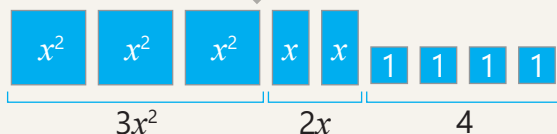


Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны, или ромб, у которого все углы прямые.



Коэффициент одночлена – числовой множитель в одночлене, записанном в стандартном виде.

Многочлен – сумма одночленов. Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Например: $3x^2 + 2x + 4$ – многочлен, а $3x^2$, $2x$ и 4 – его члены.



Многочлен: $3x^2 + 2x + 4$

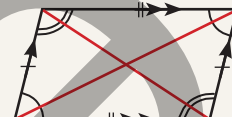
Члены многочлена: $3x^2$, $2x$, 4

Одночлен – выражение, состоящее из произведения чисел, переменных или их степеней с натуральными показателями.

ab $2m$ $2x \cdot 3xy$ $\frac{2}{3}ab^3$ $0,2x^3$ – одночлены.

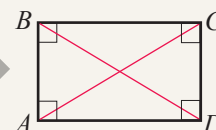
Основные понятия геометрии – понятия, принимаемые без определения. Точка, прямая и плоскость считаются основными понятиями.

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Подобные одночлены – одночлены, у которых буквенные части одинаковы. Например, $3x^2y$ и $-5x^2y$ – подобные одночлены.

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые. Диагонали прямоугольника равны.

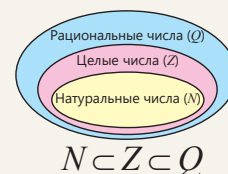


Разложение многочлена на множители – представление многочлена в виде произведения двух или более многочленов.

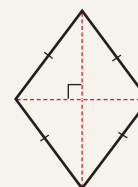
$$8a^2 - 18 = 2(4a^2 - 9) = 2((2a)^2 - 3^2) = 2(2a + 3)(2a - 3)$$

Рациональное число –

число, которое можно записать в виде $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$). На числовой прямой между любыми двумя рациональными числами находится бесконечно много рациональных чисел.



Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.



Свойства степени с натуральным показателем

$$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$$

$$a^n : a^m = a^{(n-m)} \quad (n > m, a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$$

Сложный процент – увеличение или уменьшение величины на определенный процент от ее значения за каждый прошедший год.

Средняя линия трапеции –

отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине их суммы.

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

$$MN = \frac{AC}{2}$$

Стандартный вид многочлена – многочлен, каждый член которого записан в стандартном виде и отсутствуют подобные члены.

$$a - b + 1 \quad 3x^3 + 2xy + 4 \quad c^3 - 2c^2 - 5$$

Стандартный вид одночлена – запись одночлена, в которой сначала стоит числовой множитель, а затем произведение степеней различных переменных.

Степень многочлена – наибольшая из степеней членов многочлена, записанного в стандартном виде.

Степени членов

$$4 + 1 = 5 \quad 1 + 2 = 3 \quad 1$$

$$2x^4y + 5xy^2 - x$$

Степень одночлена – сумма показателей степеней переменных в одночлене.

$$\text{Степень одночлена: } 3 + 4 = 7$$

$$-20a^3c^4$$

Коэффициент: -20 Буквальная часть: a^3c^4

Степень с натуральным показателем – произведение n (где $n > 1$) множителей, каждый из которых равен рациональному числу a .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$$

показатель степени основание степени

Теорема – утверждение, истинность которого обоснована с помощью логических рассуждений. *Обратная теорема* – это утверждение, полученное путем замены условия и заключения в данной теореме местами, и оно также является верным.

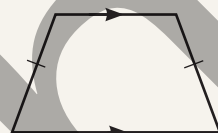
Тождественно равные выражения – выражения, значения которых равны при любых значениях переменных. Например,

$$4(a + b) \text{ и } 4a + 4b$$

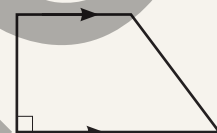
Тождество – равенство, которое верно при любых значениях переменных. Например,

$$(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$$

Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет. Если боковые стороны равны, трапеция называется *равнобедренной*. Если одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, трапеция называется *прямоугольной*.



Равнобедренная трапеция



Прямоугольная трапеция

Формулы сокращенного умножения – тождества, используемые для упрощения вычислений.

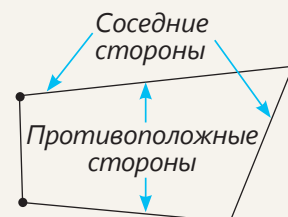
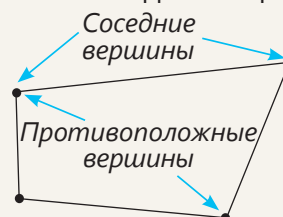
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

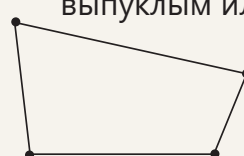
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

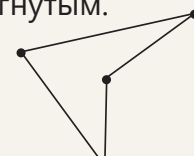
Четырехугольник – фигура, образованная четырьмя точками (вершинами), никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четырьмя отрезками (сторонами), последовательно соединяющими эти точки.



Четырехугольник может быть выпуклым или вогнутым.



Выпуклый четырехугольник



Вогнутый четырехугольник

ОТВЕТЫ

1-й раздел

- стр.8 8. г) $2\frac{1}{4}$ литра
9. б) -2 в) 14
11. 125 км
- стр.12 17. $2\frac{1}{3}$ м
18. б) $-\frac{5}{7}$
19. гусеница
- стр.16 16. 58,(3)%
18. $AB = BC < AC, \angle B > \angle A$
- стр.20 15. б) -3
16. $-\frac{7}{24}$
17. б) Японское, Азовское, Каспийское
- стр.21 2. б) $\frac{6}{11} > 0,(5)$
5. водолаз
6. 13,8(3) кг $\approx 13,833$ кг
8. В Сб. самый высокий, в Чт. самый низкий
- стр.22 3. а) -2 б) $1\frac{3}{4}$ в) $-2\frac{1}{3}$
- стр.23 5. в) $-6,7$ г) $-6\frac{4}{7}$ к) $-1\frac{11}{12}$
- стр.24 8. и) $\frac{4}{15}$ к) $-\frac{11}{12}$
- стр.25 10. в) $-\frac{2}{15}$
15. $-1,5^\circ\text{C}$
16. 5,2 и $-3\frac{3}{5}$; 8,8
- стр.26 1. к) $\frac{2}{3}$ м) 10
- стр.27 4. з) $-\frac{7}{9}$ и) -4
7. в) $\frac{3}{10}$
- стр.28 12. в) $-1,5$ д) $-\frac{3}{5}$ з) $-\frac{23}{45}$
13. 1°C , 3000 м
14. $-0,2$ мм рт. ст.
 $-0,2$ мм рт. ст.
- стр.30 7. а) $\frac{2}{15}$ б) $\frac{41}{110}$
- стр.31 9. з) $1\frac{11}{12}$
10. д) $\frac{2}{9}$ е) $\frac{1}{24}$
11. д) $\frac{16}{45}$
12. и) -2 к) $-\frac{4}{7}$
- стр.32 16. 234 см
17. 35,2 м²
18. 133,(3) N, 1350 N
- стр.34 3. а) -4 б) 5
7. д) $-\frac{53}{60}$

8. в) $1\frac{1}{4}$ г) $-\frac{13}{18}$ д) $-3\frac{1}{3}$

- стр.35 15. 355 м; $-319,5$
17. 0,652(7) литр $\approx$
 $\approx 0,653$ литр
18. 14,1(6) г соли не хватит
- стр.36 19. 1,12 качество низкое
Математический калейдоскоп
1. а) $\frac{3}{8}$ б) $\frac{4}{15}$
2. 2-й мешок
3. 62,5%

2-й раздел

- стр.38 7. а) 2400 л, г) 3000 л
8. 65 л
9. 600 л
10. на 10% меньше; 542
- стр.40 5. а) $-p^2 m^3$
- стр.41 10. 5,5 дм, 166,375 л
11. 257,8125 см³
12. 16 г; 64 : 2⁵; 5 минут
- стр.45 18. в) 7 г) 5
- стр.46 20. г) 216
21. а) 4 б) 27
22. а) 32 г) 25 ж) 216
23. 32 литр, 4 ч 16 мин
24. 8 мин 20 сек
25. 2³⁹ байт, 2³⁷ байт

- стр.48 5. а) 16 б) 216 д) 36
- стр.49 8. г) 9
9. а) 26 д) 25
- стр.51 1. а) 5070 л б) 6655 л
2. 2 185 454 человек
3. а) 4320 л, 5184 л

- стр.52 4. а) 1024 л б) 18225 л
5. 133 100
6. 1303,21 л
7. 15208,75 л
8. Тип В
9. 3380 л, 1656,2 л,
на 17,19% меньше
10. 10735,74 л

- стр.55 14. а) $(2^3)^{20}$ г) $(64^5)^2$
18. е) 125
20. г) 3 д) 2
- стр.56 22. Банк В, 88 л
Математический калейдоскоп
1. а) 30 б) 6
2. а) 4 б) 0 в) 2

3. $-p^2$, $-p$, $\frac{p}{3}$, p , p^2
4. Равны

3-й раздел

- стр.58 5. а) $3a+2,5b$
6. $2v+7,5$; 147,5 км
7. $6a+2,4$; 14,4 м
8. $6x+12$; 96 см²
- стр.61 14. д) $16b^8c^{12}$
- стр.62 19. а) $9b^4c$ б) $-128a^2b^2$
21. а) 3 б) 3
23. $3,375x^3$; $13,5x^2$; $7x^3$
- стр.65 12. $2b^2+4ab$; степень 2; 250 см²
13. $3-3a^3-1,6a^2$, степень 3,
2,225 воды осталось
- стр.68 9. г) $3a^2-3a-5$
13. $3x+6$; $2,55x+6$; $3x+6$
14. $\frac{1}{20}m+\frac{1}{10}n$, $\frac{1}{8}m+\frac{1}{2}n$
 $\frac{7}{40}m+\frac{3}{5}n$, $\frac{3}{40}m+\frac{2}{5}n$
- стр.69 6. а) -16 б) -16
9. а) $3ab^2$, $144m^2n$, $36x^2y$
б) $3b^2+10ab$, $72mn$,
 $12x^2+72xy$
- стр.71 5. а) $5n$ в) $2c^5-2c^3-12$
- стр.72 10. а) 1 б) 0,3
11. $8a^2-2a$, a^2+6a ,
 $2b^2-2b$, $6b^2+2b$
12. $3a^3+9a^2$
13. $3m+12$,
 $10m+20$, $2mk+4k$
14. $40a+36a^2$, $29m^2$
- стр.74 3. а) $a^2-2a-15$
4. ж) $3x^3+4x^2-5x-2$
6. д) $2m-n^3-m^2$
- стр.75 8. а) 20 б) 4
10. г) $p^3+p^2-21p-45$
11. в) $4a^2+4ab+b^2$
- стр.76 18. $a^3+7a^2+11a+5$,
 $7a^2+11a+5$; 55 м³
19. $x^2+210x+8000$,
 x^2+100x ; 90 см, 2 м
- стр.78 7. а) $34a^2-25a$;
б) $3b^2+3b+18$;
в) $2y^2+6y+4$; г) $3x^2+34x+4$
- стр.79 8. в) $3x-6$
11. б) -13
13. 16; 17
14. 11; 12; 13
17. а) -2 б) -3
18. 290 м, 110 м

стр.80 19. x^3+30x^2+200x ,
 x^3-100x ,
 $5x^2+100x+400$,
 $5x^2-100$,

Математический калейдоскоп

2. $2a^2-ab+b^2$

3. 60

4-й раздел

стр.82 8. $4a^2-4a+1$; $8b^2-0,5$;
 $3a^2+30a$; $10b^2+26b-12$

9. $x^2+60x+800$;
 3500 м^2 , 240 м

стр.84 1. к) $81-18p+p^2$
 4. е) $x^4y^2-x^2y+0,25$
 6. в) $2n^2+2n+1$
 г) $16n^2+16n+4$

стр.85 8. б) b^2-1 ; 8; $-0,99$

стр.86 19. $8x+16$; 16 см
 20. $0,4 \text{ м/с}$, $0,2 \text{ м/с}$

стр.88 8. б) -5 д) -4
 9. а) $288 \cdot 286 < 2872$

стр.89 12. б) $10x-25$
 15. $4x+4$; 324 м^2

стр.91 4. б) $18x^2+54$
 8. в) $c^3+\frac{1}{8}$

стр.92 9. в) $(m^2+3)(m^4-3m^2+9)$
 14. а) c^3-125 б) $8b^3-27$

стр.93 15. а) $(4-y)(16+4y+y^2)$
 19. а) $27a^3-1$ в) $\frac{1}{8}x^3-\frac{8}{27}$
 22. a^3-b^3 ; $27, 125 \text{ литр}$
 23. k^3 ; $(k+5)^3$; $(k-5)^3$;
 $2k^3+150k$

стр.94 6. а) -1 в) 1996 г) 49
 8. а) 49 б) 13 г) 7

стр.95 10. г) $c^6-3c^4+3c^2-1$
 16. 100 см
 17. $15-10n$; $n=0,5$

стр.97 4. а) $0,5$ б) 138 в) $4\frac{3}{4}$
 5. г) $(c-d)(a^2-b)$
 6. ж) $(y+z)(6+a+b)$

стр.98 9. б) $(m-1)(m-5)$
 11. в) $(x-2)(3x-2)$
 13. $4x-14$; 30 м

стр.99 2. в) $2(4a-5)(4a+5)$
 з) $2(3-2x^2)(9+6x^2+4x^4)$

стр.100 3. в) $(x+y)(x-y-1)$
 д) $(x-y-4)(x-y+4)$
 4. ж) $18(n^2+3)$
 5. в) $4(2x-5)(x-3)(x-2)$
 6. а) 0 б) 1
 8. $a(5a+1)(5a-1)$ и
 $(5a+1)(5a-1)$;
 $20a^2$; ширина: 9 м ,
 длина: 11 м

стр.103 15. а) 2 в) 49
 17. больше красных
 карандашей
 1 штука

Математический калейдоскоп

1. а) 39999 б) 2 в) 11110
 2. 11 ; 4
 4. $2x-24$, 12 см

5-й раздел

стр.106 1. $2,5 \text{ см}$
 3. а) 35 см^2 б) 57 см^2
 4. 24 см , 18 см
 5. а) 95° , 85° , 40°
 9. 400 плиток кафеля

стр.108 6. а) три б) шесть
 стр.112 4. а) 112° б) 126° г) 66°
 5. а) 47° , 94° , 83°
 6. а) 148° б) 62° г) 102°
 8. внутр. $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$
 внеш. $120^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 60^\circ$

стр.113 11. 174° , 87° , 93°
 13. 128° и 52° , 106° , 112°
 14. $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, 30 м^2

стр.114 1. а) 70° , 110° с) 5 ; 72°

стр.115 2. а) 75° , 105°
 3. а) 5 и 9 ; $P=28$
 5. в) 126° , 54°
 7. в) 3 ; 5

стр.116 8. а) 14 ; 12 в) 6 ; 10
 9. а) 15 см б) 11 см

стр.117 15. 32 см , 70° , 110°
 16. 58° , 122°

стр.119 2. а) 35° , 70° , 55°

стр.120 5. а) 55° , 55° , 70°
 7. а) 48 см б) 12 см
 8. а) 6 ; 70° , 110°

стр.121 15. б) 24 см

стр.123 2. в) 8 ; 16 ; 110°
 4. 8 см , 12 см , 12 см
 Параллельно основанию

стр.124 8. а) 6 см б) 18 см

стр.125 9. а) 4 ; 8 ; 6 в) 4 ; 8 ; 9
 10. г) 20 см

11. Стороны параллельны
 диагоналям ромба
 768 см^2

12. центр тяжести, 10 см
 13. 60 м

стр.126 1. а) 95° , 40°

стр.127 3. в) 60° , 120°
 5. 11 см

стр.128 7. б) 84° , 96° , 14
 8. а) 3 ; 7 в) 4 ; 10 ; 7
 11. а) 10 см б) 5 см
 12. 92 см
 13. 2520 м

стр.130 2. 8 см
 3. а) 110° , 80°
 5. в) 110° , 6 ; 9
 7. 32 см

стр.131 8. 30° , 75° , 45° , 30° , 75°
 10. 80° , 100° , 24 см
 11. 3 см , 18 см , 24 см^2 ,
 6 см^2 , $1:3$
 12. 16 см , 10 см , 6 см ,
 6 см , 4 см

стр.132 14. 4 оборота
 Математический калейдоскоп
 $\frac{7}{16}$ части
 5. Диагональ AC

Обобщающие задания за 1-е полугодие

стр.133 5. 1

9. а) 3 в) 5
 13. $\frac{15}{64}$
 15. д) 900

стр.134 16. а) 77 г) 27
 19. а) -85 б) 64 в) $1,5$
 20. а) 94 б) 35
 21. 21

22. б) -9 в) 4
 23. 28

26. $198,5 \text{ м}$, $1429,2 \text{ ф}$

стр.135 29. 221 м^2
 32. 40° , равнобедренный
 33. 72 см , 240 см^2
 38. 4 м , 3 м , 10 м , 33 м

стр.136 39. 3 м
 40. $1,12 \text{ м}^2$
 44. 4 м , 30 см , 240 см^2