

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

8

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$y = x^2$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

β

$$a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

\geq

α





Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin*,
sözləri *Əhməd Cavadındır*.

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

УЧЕБНИК

по предмету

МАТЕМАТИКА

для **8**-го класса общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием,
просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!



Radius

Оглавление

1

Квадратные корни. Действительные числа

Квадратные корни.	
Арифметический квадратный корень.....	7
Действительные числа.....	11
Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$	18
Свойства арифметического квадратного корня.....	21
Применение свойств арифметического квадратного корня.....	24
Степень с целым показателем.....	28
Обобщающие задания.....	32

2

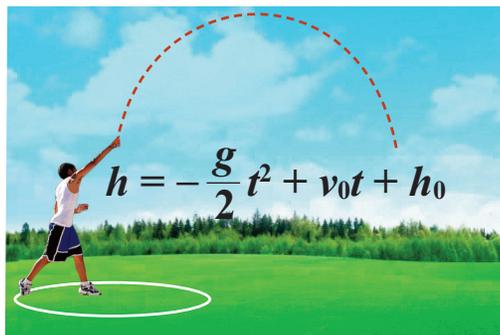
Теорема Пифагора

Теорема Пифагора.....	34
Применение теоремы Пифагора.....	38
Обобщающие задания.....	45

3

Квадратные уравнения

Квадратные уравнения.....	47
Решение квадратных уравнений методом разложения на множители.....	50
Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата.....	55
Решение квадратных уравнений графическим методом.....	57
Решение квадратных уравнений. Формула корней квадратного уравнения.....	59
Теорема Виета.....	63
Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям.....	66
Решение задач с помощью квадратных уравнений.....	67
Обобщающие задания.....	69



4

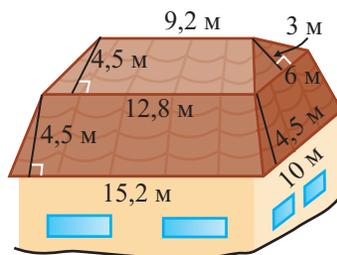
Четырёхугольники

Четырёхугольники.....	71
Внутренние и внешние углы четырёхугольников.....	72
Параллелограмм.....	75
Частные виды параллелограмма.....	79
Применение свойств параллелограмма.....	83
Средняя линия треугольника.....	85
Трапеция.....	86
Средняя линия трапеции.....	87
Обобщающие задания.....	90

5

Рациональные выражения

Рациональные выражения.....	93
Упрощение рациональных выражений.....	95
Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений.....	100
Сложение и вычитание рациональных выражений.....	103
Действия над рациональными выражениями.....	109
Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график.....	111
Обобщающие задания.....	114



6

Площади фигур

Аксиомы площадей.....	116
Площадь параллелограмма.....	117
Площадь треугольника.....	120
Площадь трапеции.....	123
Площадь ромба.....	126
Обобщающие задания.....	128

7

Рациональные уравнения

Рациональные уравнения	131
Решение задач с помощью рациональных уравнений	133
Обобщающие задания.....	137

8

Подобие фигур

Отношение, пропорция, масштаб.....	139
Пропорциональные отрезки.....	142
Подобные четырёхугольники, подобные треугольники.....	146
Признаки подобия треугольников	148
Подобие прямоугольных треугольников	153
Применение подобия треугольников.....	156
Площади подобных фигур	159
Обобщающие задания.....	161



9

Неравенства

Неравенства	163
Свойства неравенств	166
Сложение и умножение неравенств	171
Числовые промежутки.....	173
Решение линейных неравенств с одной переменной	175
Решение двойных неравенств	179
Простые неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.....	182
Обобщающие задания.....	184

10

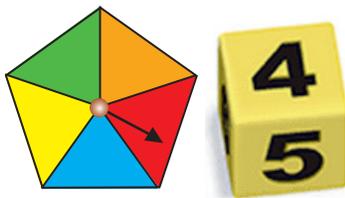
Тригонометрические
соотношения.
Метод координат.
Преобразования фигур

Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения.....	187
Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений	190
Тригонометрические тождества.....	194
Координаты середины отрезка.....	195
Уравнение прямой, проходящей через две точки	196
Преобразование фигур. Поворот	199
Преобразование подобия, гомотетия.....	203
Обобщающие задания.....	205

11

Сбор и представление
информации.
Вычисление вероятности

Сбор и представление информации..	207
Меры центральных тенденций.....	215
Обобщающие задания.....	217
Вычисление вероятности.....	218
Зависимые и независимые события..	222
Обобщающие задания.....	225
Обобщающие задания по разделам ..	227
Проверьте себя.....	232
Ответы.....	234



1

Квадратные корни

Действительные числа

В этом разделе вы научитесь:

- различать рациональные и иррациональные числа;
- упрощать выражения, содержащие квадратные корни;
- решать задания на извлечение квадратного корня.

Это интересно!

Имя Пифагора ассоциируется с прямоугольным треугольником и соотношением между его сторонами. Греческий учёный Пифагор, живший в VI веке до нашей эры, является основателем школы, в которой преподавались музыка, гимнастика, философия и геометрия. Ученики школы называли себя Пифагорейцами. Они размышляли над господством целых чисел и полученных из них отношений в природе, но не верили в существование иррациональных (не рациональных) чисел. Как не старались Пифагорейцы они не смогли скрыть, что число $\sqrt{2}$, выражающее длину гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами равными единице, не является рациональным числом. По легенде, чтобы не раскрыть данный секрет, они не колеблясь бросили в море одного из учеников Гипаса, который смог аргументированно доказать, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.



Гимн пифагорейцев восходящему солнцу.
Федор Брунников. 1869 год.

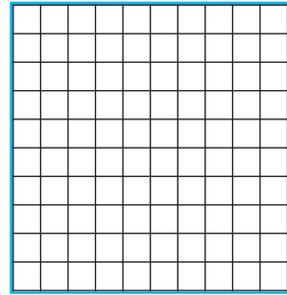
Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Задача. Площадь большого квадрата, состоящего из 100 одинаковых маленьких квадратов, равна 49 кв.ед.

Площадь 49 кв.ед.

- а) Найдите длину стороны большого квадрата.
б) Найдите длину стороны маленького квадрата.

Решение: а) Обозначим сторону квадрата через x . По условию, $x^2 = 49$, т.е. надо найти число, квадрат которого равен 49. Это или число 7 или -7 . Так как длину можно измерить только положительным числом, берем число 7.



б) Площадь одного маленького квадрата $\frac{49}{100}$ кв.ед. Запишем дробь $\frac{49}{100}$

как квадрат положительного числа: $\frac{49}{100} = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \left(\frac{7}{10}\right)^2$

Значит, сторона маленького квадрата $\frac{7}{10}$ ед.

Исследование. Найти площадь квадрата с заданной стороной можно, возведя ее длину в квадрат. При помощи какого действия можно найти сторону квадрата по заданной площади?

Арифметический квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a .

Квадратный корень для отрицательного числа не существует.

0 - единственное число квадрат которого равен нулю.

Для положительного числа существует два квадратных корня: один из них положительный, другой-отрицательный. Например, числа 7 и -7 являются квадратными корнями 49: $(7)^2 = (-7)^2 = 49$.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a .

$$\sqrt{a} = b \\ b \geq 0, b^2 = a$$

Это записывается как \sqrt{a} и читается так: «арифметический квадратный корень из a ». Знак " $\sqrt{\quad}$ " - знак арифметического квадратного корня (или радикала). Обычно при чтении слово "арифметический" пропускают. Например, выражение $\sqrt{49}$ читается как "квадратный корень из 49". Выражение, стоящее под знаком корня называется подкоренным выражением. Подкоренное выражение не может быть отрицательным. Например, выражения $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ не имеют смысла.

Нахождение квадратного корня из числа называется извлечением квадратного корня.

Извлечение квадратного корня является обратным к возведению в квадрат.

Пример. $\sqrt{49} = 7$, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$;

$$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}, \text{ так как } 1\frac{1}{2} > 0 \text{ и } \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4};$$

$$\sqrt{0,64} = 0,8, \text{ так как } 0,8 > 0 \text{ и } 0,8^2 = 0,64;$$

$$\sqrt{0,(4)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \text{ так как } \frac{2}{3} > 0 \text{ и } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0,(4)$$

Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

По определению арифметического квадратного корня следует, что при $a \geq 0$ верны равенства $(\sqrt{a})^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = a$.

Пример. Вычислите: а) $(-2\sqrt{5})^2$; б) $\sqrt{3^2 + 2 \cdot \sqrt{36}}$; в) $\sqrt{3^2 + 4^2}$

Решение: а) $(-2\sqrt{5})^2 = (-2)^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$

б) $\sqrt{3^2 + 2 \cdot \sqrt{36}} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot \sqrt{6^2}} = 3 + 2 \cdot 6 = 15$

в) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

сначала вычисляются подкоренные выражения.

Обучающие задания.

1» 1) Число, которое равно квадрату натурального числа, называют полным квадратом. Из чисел, расположенных между числами 1 и 100, выберите и запишите числа, являющиеся полными квадратами. Найдите квадратные корни из данных чисел.

2) Используя результаты задания 1, найдите квадратные корни.

а) $\sqrt{0,01}$ б) $\sqrt{0,09}$ в) $\sqrt{0,36}$ г) $\sqrt{0,64}$ д) $\sqrt{0,81}$

е) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ж) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ з) $\sqrt{\frac{64}{81}}$ и) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ к) $\sqrt{\frac{49}{100}}$

2» 1) Из чисел, расположенных между числами 101 и 400, выберите и запишите числа, являющиеся полными квадратами.

2) Используя результаты пункта 1 и предыдущего задания, вычислите квадратные корни следующих чисел.

а) $\sqrt{0,0121}$ б) $\sqrt{0,0225}$ в) $\sqrt{3,24}$ г) $\sqrt{0,0324}$ д) $\sqrt{0,0256}$

е) $\sqrt{\frac{16}{169}}$ ж) $\sqrt{\frac{121}{256}}$ з) $\sqrt{\frac{361}{225}}$ и) $\sqrt{\frac{144}{361}}$ к) $\sqrt{\frac{289}{400}}$

3» В цветные квадратики запишите такие числа, чтобы равенства стали верными.

а) $\sqrt{\square} = 13$ б) $\sqrt{\square} = 1,9$ в) $\sqrt{\square} = 0,(6)$ г) $\sqrt{\square} = \frac{2}{5}$ д) $\sqrt{\square} = \frac{8}{11}$

4» Найдите значение корня.

а) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ б) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ в) $\sqrt{0,(4)}$ г) $\sqrt{2,(7)}$ д) $\sqrt{5,(4)}$

5» Заполните таблицу.

a	4	33	-25	1	2	-2	0,4	0,4	9	64
b	32	-8	26	0,21	0,25	11	0,09	-0,04	16	36
$\sqrt{a+b}$										

Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

6» Вычислите.

a) $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ b) $\sqrt{144 + 25}$ c) $\sqrt{11 + \sqrt{25}}$ d) $\sqrt{29 - \sqrt{16}}$
e) $\sqrt{289} - \sqrt{64}$ f) $\sqrt{289 - 64}$ g) $\sqrt{49 - \sqrt{169}}$ h) $\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}}$

7» Найдите значение выражения.

a) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$ b) $4 \cdot \sqrt{9} - 3 \cdot \sqrt{4}$ c) $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,25}$ d) $\sqrt{0,25 - 0,09}$
e) $\sqrt{\frac{49}{81}} : \sqrt{\frac{25}{9}}$ f) $\frac{5}{6} \cdot \sqrt{\frac{9}{25}} + \sqrt{5\frac{1}{16}}$ g) $\sqrt{1,(7)} + \sqrt{0,(4)}$ h) $\sqrt{1,(8) + 0,(8)}$

8» Имеет ли смысл выражение?

a) $\sqrt{25 \cdot 4}$ b) $\sqrt{(-25) \cdot (-4)}$ c) $\sqrt{(-5 \cdot 2)^2}$ d) $\sqrt{-5^2 \cdot 2^2}$

9» При каких значениях x справедливо равенство?

a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\sqrt{x-1} = 4$ c) $\sqrt{x} - 1 = 4$ d) $\sqrt{x} + 4 = 1$

10» Вычислите.

a) $(\sqrt{9})^2$ b) $(-2 \cdot \sqrt{4})^2$ c) $(3 \cdot \sqrt{5})^2$ d) $(-2 \cdot \sqrt{3})^2$
e) $\sqrt{17^2}$ f) $\sqrt{3,8^2}$ g) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt{\sqrt{289} - \sqrt{64}}$

11» Сравните числа.

a) $\sqrt{0,04}$ и $\sqrt{0,09}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ и $\sqrt{\frac{9}{16}}$ c) $\sqrt{2,56}$ и $\sqrt{3,24}$

12» Найдите значение выражений при $a = 64$, $b = 225$.

a) $a + \sqrt{b}$ b) $\sqrt{a} + b$ c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ d) $\sqrt{a + b}$

13» В цветные кружочки впишите соответствующие знаки сравнения ($>$, $<$, $=$).

a) $\sqrt{16 + 9}$ $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ b) $\sqrt{36 + 64}$ $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

Прикладные задания

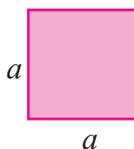
14» 1) Найдите сторону квадрата, площадь которого равна: а) 64 м^2 ; б) 81 мм^2 ; в) $0,36 \text{ см}^2$.

2) Площадь квадрата равна S . Выразите сторону квадрата через S .

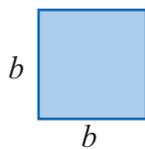
Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

- 15» Найдите измерения фигур по заданной площади.

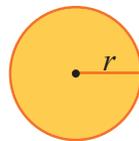
$$S = 256 \text{ м}^2$$



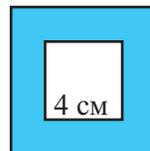
$$S = 2,25 \text{ км}^2$$



$$S = 625\pi \text{ м}^2$$



- 16» Фигура на рисунке состоит из двух квадратов. Площадь части фигуры, закрашенной синим цветом, равна 48 см^2 , сторона маленького квадрата 4 см. Найдите сторону большого квадрата.

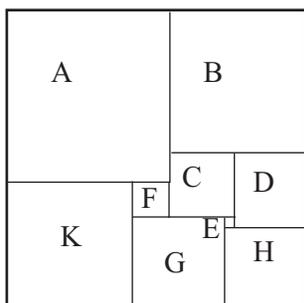


- 17» Эльвин разрезал лист бумаги прямоугольной формы с размерами 7,2 см и 1,8 см на части, которые затем хочет скрепить в форме квадрата.
- Сколько сантиметров будет равна сторона квадрата?
 - За какое наименьшее количество разрезов это возможно? Ответ обоснуйте при помощи рисунка с соответствующими размерами.

- 18» Площадь равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Найдите сторону треугольника, если его площадь равна $9\sqrt{3} \text{ см}^2$.

- 19» Найдите периметр прямоугольника площадью 48 см^2 , если его ширина составляет 75% от его длины.

- 20» Лоскутное шитье – это вид шитья, при котором лоскуты ткани скрепляются друг с другом в цельное изделие. В прошлом азербайджанские женщины никогда не выбрасывали кусочки ткани. Из них они делали чехлы для тюфячков, покрывала для кроватей, декоративные скатерти. Все эти вещи служили как для украшения дома, так и помогали сэкономить семейный бюджет. На схеме буквами обозначены части чехла для тюфячков, которое досталось Алие от её бабушки. Каждая часть, кроме А, имеет форму квадрата. По данным рисунка определите размеры одеяла, если оно имеет форму прямоугольника: площадь части D равна 49 см^2 , площадь части H равна 64 см^2 .



Действительные числа

Практическая работа 1. Великий греческий математик, физик, астроном и изобретатель Архимед хотел найти рациональное число, квадрат которого равен 3. С этой целью он выбрал числа $\frac{265}{153}$ и $\frac{1351}{780}$. Проверьте и вы, квадрат какого из данных чисел наиболее близок к числу 3. Придумайте ещё одно число, соответствующее данному условию.



Классификация чисел

Рациональные числа. Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Одно и то же рациональное число можно записать по-разному,

например: $4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{40}{10}$; $-0,6 = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5}$; $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{10}{30}$

Среди дробей, с помощью которых записывается данное рациональное число, всегда можно указать дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь несократима. Разделив числитель на знаменатель, дробь можно представить или в виде конечной десятичной дроби, или бесконечной периодической дроби.

Например: $\frac{9}{5} = 1,8$ $\frac{4}{9} = 0,4444... = 0,(4)$ $\frac{7}{15} = 0,4666... = 0,4(6)$

Так как любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с периодом 0, то каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Верно и обратное предположение. **Каждая бесконечная десятичная периодическая дробь выражает рациональное число.** Но есть такие числа, которые невозможно представить в виде десятичной периодической дроби.

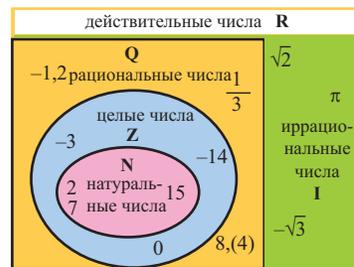
Иррациональные числа. Бесконечная десятичная непериодическая дробь выражает число, которое не является рациональным. Такие числа называются **иррациональными числами**. Иррациональное число невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$).

Приведём примеры иррациональных чисел:

- а) $0,1010010001...$ (количество нулей после каждой единицы увеличивается на один);
- б) $0,123456789101112...$ (в дробной части записана последовательность натуральных чисел);
- в) $\pi = 3,14159265...$ (выражает отношение длины окружности к диаметру).

Если n не является полным квадратом, то \sqrt{n} является иррациональным числом. Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ иррациональные. Заметим, что иррациональные числа получаются не только при извлечении квадратных корней. Например, число π не может быть получено извлечением корня из рационального числа.

Множество иррациональных чисел обозначается буквой **I**. Множество, состоящее из рациональных и иррациональных чисел, называется множеством действительных чисел, которое обозначается буквой **R**. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



Действительные числа

Пример 1. Запишите возможные названия соответствующих множеств, которым принадлежат данные числа :

a) 5; b) $-6,3(2)$; c) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; d) $\sqrt{10}$.

Решение: a) 5- натуральное, целое, рациональное и действительное число;

b) $-6,3(2)$ -рациональное и действительное число;

c) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ -рациональное и действительное число;

d) $\sqrt{10}$ -иррациональное (10 не является полным квадратом), действительное число.

Пример 2. Запишите действительные числа, расположенные между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$

Решение: на числовой оси число, являющееся серединой отрезка, концами которого являются заданные числа, удовлетворяет условию:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{5}{12}$$

Представив заданные числа в виде десятичной дроби, можно записать бесконечное множество чисел. Числа 0,34; 0,348; 0,35; 0,4; 0,45; 0,4798 и т.д. расположены между числами $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ и $\frac{1}{2} = 0,500\dots$

Действия над действительными числами и их свойства аналогичны действиям и свойствам для рациональных чисел. На практике для выполнения действий над иррациональными числами их заменяют приближенными значениями. При увеличении точности приближенных значений можно получить более точный результат. Для нахождения приближенного значения корня можно использовать клавишу $\sqrt{\quad}$ на калькуляторе.

Пример 3. Найдите значение суммы $a + b$, при $a = \sqrt{2}$ и $b = 0,(3)$

Решение: при помощи калькулятора находим, что $a \approx 1,41421356$. Возьмем приближенные значения слагаемых с точностью до 0,1: $a \approx 1,4$, $b \approx 0,3$. Получим: $a + b \approx 1,4 + 0,3 = 1,7$.

Если взять приближенные значения слагаемых с точностью 0,01, т.е. взяв $a \approx 1,41$, $b \approx 0,33$, получим $a + b \approx 1,41 + 0,33 = 1,74$.

Обучающие задания

1» Распределите числа на две группы: рациональные и иррациональные.

5; 2,3; $-\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; 0; π ; 4,(2); $\sqrt{3}$; $-2,3(4)$; $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{144}$;

0,21211211121... (количество цифр 1, следующих за каждой цифрой 2 увеличивается на одну).

2» Из следующих чисел выберите рациональные числа.

$\sqrt{64}$

$\frac{3}{5}$

$\sqrt{16}$

$\frac{7}{22}$

$\sqrt{12}$

0,8

$\sqrt{27}$

$\sqrt{8}$

π

$\sqrt{121}$

3» Верно ли?

a) $-7 \in \mathbb{Z}$

b) $-7 \notin \mathbb{Q}$

c) $-7 \in \mathbb{R}$

d) $5 \notin \mathbb{Z}$

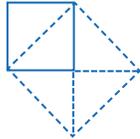
e) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Z}$

f) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$

g) $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$

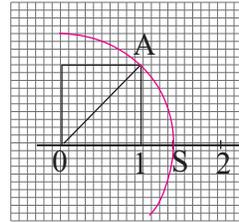
g) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$

Действительные числа

- 4» Ленту, длиной 25 м разрезали на равные части. Может ли длина каждой части быть выражена иррациональным числом?
- 5» Укажите такое натуральное значение n , при котором значение выражения $\sqrt{3n+1}$ будет: а) натуральным; б) иррациональным числом.
- 6» а) Запишите четыре действительных числа, расположенных между числами 2 и 2,1.
б) Сколько действительных чисел можно записать между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$?
- 7» Найдите приближенное значение корня при помощи калькулятора:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{30}$
- 8» Зная, что $a = 2,6$ и $b = \sqrt{3}$ округлите a и b до: а) десятых; б) сотых; в) тысячных и найдите приближенное значение суммы $(a + b)$ и разности $(a - b)$.
- 9» Найдите приближенное значение длины окружности, радиус которой равен 2,5 см. Округлите число $\pi = 3,14159265\dots$ до сотых.
- 10» Запишите **верно** или **ложно** каждое из следующих утверждений. Если утверждение ложно, то обоснуйте это на примерах.
1) Каждое натуральное число является целым числом.
2) Каждое рациональное число является также и действительным числом.
3) Все делители числа 7 являются нечётными числами.
4) Все отрицательные числа являются целыми числами.
- 11» Если a рациональное число, а b -иррациональное, то рациональным или иррациональным числом являются значения выражения:
а) $a + b$, б) $a - b$, в) ab , г) $a : b$? Обоснуйте своё мнение при помощи конкретных примеров. Рассмотрите случаи для $a \neq 0$ и $a = 0$
- 12» **Практическая работа.** 1) Начертите квадрат со стороной, равной единичному отрезку, и проведите диагональ данного квадрата. 2) На диагонали квадрата постройте новый квадрат. 3) Убедитесь, что площадь полученного квадрата в два раза больше площади единичного квадрата. 4) Покажите, что сторона полученного квадрата равна соответственно $\sqrt{2}$.
- 
- 13» а) В доказательстве, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным числом, вставьте соответствующие слова: **чётное, сократимая, несократимая**. Закончив доказательство теоремы, обсудите его в классе.
Доказательство. Докажем, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 2. Допустим обратное. Пусть существует дробь $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Отсюда $m^2 = 2n^2$. Т.к. $2n^2$ является числом, то и m^2 также является чётным числом, но тогда m также является чётным числом: $m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Учтём это в $m^2 = 2n^2$, получим $4k^2 = 2n^2$, а отсюда, что $n^2 = 2k^2$. Это означает, что n число. Отсюда получается, что дробь $\frac{m}{n}$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. То есть $\sqrt{2}$ является иррациональным числом.
б) Докажите, что $\sqrt{3}$ - иррациональное число

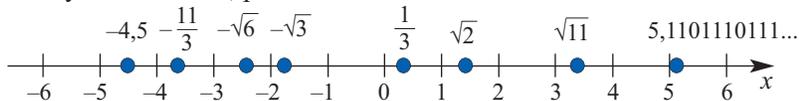
Действительные числа

Практическая работа. На координатной оси постройте квадрат, сторона которого равна единичному отрезку. Начертите окружность с центром в точке ноль, радиусом равным диагонали квадрата и отметьте точку пересечения с числовой осью. Объясните связь между соответствующим данной точке числом и длиной диагонали квадрата.



Действительные числа и числовая ось.

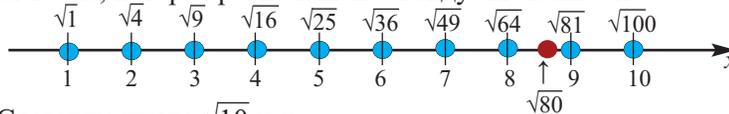
Каждой точке на числовой оси соответствует единственное число (рациональное или иррациональное), и каждому числу на числовой оси соответствует единственная точка. Число, соответствующее точке, которая расположена правее, больше числа, соответствующего точке, расположенной левее.



При $0 < a < b$ получим $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Это можно объяснить геометрически следующим образом: квадрат с большей площадью имеет большую сторону.

Пример 1. На числовой оси определите приблизительное расположение точки, соответствующей числу $\sqrt{80}$.

Решение: Числа 64 и 81 являются полными квадратами и $64 < 80 < 81$. Тогда $\sqrt{64} < \sqrt{80} < \sqrt{81}$, т.е. $8 < \sqrt{80} < 9$. Значит, числу $\sqrt{80}$ на числовой оси соответствует точка, которая расположена между числами 8 и 9.

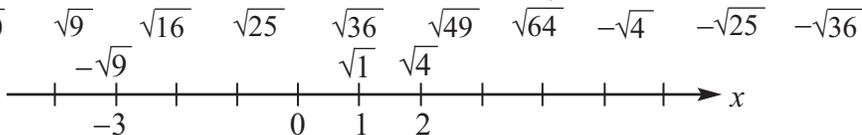


Пример 2. Сравните числа $\sqrt{10}$ и π .

Решение: используем представление чисел в виде бесконечной десятичной дроби. Так как $\sqrt{10} = 3,16227\dots$ и $\pi = 3,1415\dots$, то получим, что $\sqrt{10} > \pi$

Обучающие задания

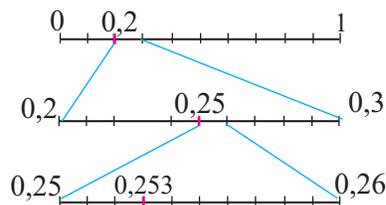
14 1) На числовой оси отметьте точки, соответствующие заданным числам.



2) Используя числовую ось из 1-задания, определите приблизительное расположение точек, соответствующих числам $\sqrt{27}$; $\sqrt{38}$; $\sqrt{53}$; $\sqrt{10}$.

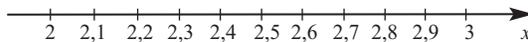
15 В соответствии с примером покажите расположение чисел 0,538; 0,674; 0,128 на числовой оси и запишите, какому интервалу соответствуют единичные отрезки.

Пример. Расположение каждой цифры после запятой в десятичной дроби 0,253 изображено шаг за шагом на рисунке. Единичные отрезки на числовой прямой соответствуют интервалам 0-1; 0,2-0,3; 0,25-0,26.



Действительные числа

- 16» Между какими двумя последовательными делениями расположены точки, соответствующие на числовой оси числам: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{7}$?



- 17» Сравните числа.

а) $-\pi$ $-4,3$ б) 3 $\sqrt{10}$ в) $1,5$ $\sqrt{2}$ д) $-\sqrt{8}$ -3

- 18» Расположите числа в порядке возрастания.

а) 9 ; $\sqrt{50}$; $\sqrt{84}$ б) $\sqrt{52}$; 7 ; $\sqrt{38}$ в) $\sqrt{27}$; $4,6$; $\sqrt{23}$ д) $\sqrt{47}$; 6 ; $\sqrt{37}$

- 19» Представьте и сравните каждое из двух чисел в виде:

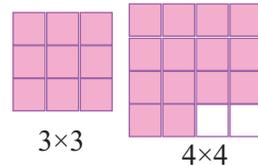
а) обыкновенной дроби; б) десятичной дроби.

1) $2,(6)$ и $\frac{17}{6}$ 2) $0,(3)$ и $\frac{2}{5}$ 3) $0,2(7)$ и $\frac{23}{65}$ 4) $0,(54)$ и $\frac{45}{88}$

- 20» Запишите три иррациональных числа, расположенных между числами.

1) 2 и 3 2) 3 и 4 3) 5 и 6 4) 8 и 9

Практическая работа. Какова наибольшая длина стороны квадрата, составленного из 14 одинаковых единичных квадратов? Как вы нашли результат? Между какими последовательными натуральными числами, являющимися точными квадратами, расположено число 14?

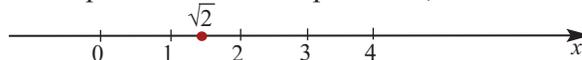


Приближённое значение квадратного корня

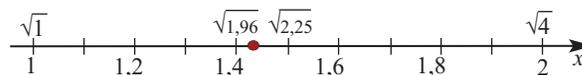
Приближённое значение корня можно вычислить при помощи калькулятора. Приближённое значение корня возможно также найти при помощи квадратов чисел и числовой оси.

Пример 1. Найдём приближённое значение $\sqrt{2}$ с точностью до сотых.

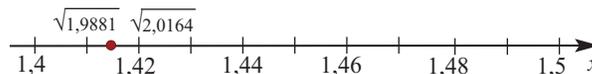
Решение: $1 < 2 < 3 < 4$, так как $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, то число $\sqrt{2}$ находится между числами 1 и 2 и можно приблизительно определить, что оно ближе к 1.



Так как $1,4^2 < 2 < 1,5^2$, то находим, что число $\sqrt{2}$ расположено между 1,4 и 1,5.



Для нахождения цифр в сотых долях последовательно возведем в квадрат десятичные дроби $1,41$; $1,42$; Так как $1,41^2 = 1,9881$ и $1,42^2 = 2,0164$, то находим, что число $\sqrt{2}$ расположено между числами 1,41 и 1,42.



Продолжая данный процесс, можно установить, что $\sqrt{2} = 1,4142\dots$. Рассмотренное правило позволяет найти квадратный корень с любой точностью. Приближённое значение $\sqrt{2}$ с точностью до сотых: $\sqrt{2} \approx 1,41$

Действительные числа

Пример 2. Найдем приближительное значение числа $\sqrt{14}$.

Решение: число 14 расположено между числами 9 и 16. Квадратные корни этих чисел соответственно равны 3 и 4: $\sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$.



Целая часть корня квадратного из 14 равна 3. Найдем приближительно дробную часть. На числовой оси от числа 14 до 9 пять единиц, от 9 до 16 семь единиц.



Взяв дробную часть числа $\sqrt{14}$ как $\frac{14 - 9}{16 - 9} = \frac{5}{7}$, получим приближительное значение $\sqrt{14} \approx 3 \frac{5}{7} \approx 3,714$. При вычислении при помощи калькулятора имеем: $\sqrt{14} \approx 3,741657$

Обучающие задания.

21» Определите, между какими двумя целыми последовательными числами расположен квадратный корень следующих чисел.

- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{17}$ d) $\sqrt{30}$ e) $\sqrt{51}$ f) $\sqrt{15}$ g) $\sqrt{44}$ h) $\sqrt{23}$

22» Изобразите следующую таблицу в тетради и заполните ее.

Квадратный корень числа	Квадратные корни из полных квадратов, наиболее близких к заданному числу	Между какими двумя последовательными целыми числами расположено число?	Приближительное значение в виде дроби	Приближительное значение в виде десятичной дроби	Значение, найденное при помощи калькулятора
$\sqrt{91}$	$\sqrt{81}$ и $\sqrt{100}$	9 и 10	$9 \frac{10}{19}$	9,526	9,539
$\sqrt{40}$					
$\sqrt{55}$					
$\sqrt{284}$					
$\sqrt{78}$					
$\sqrt{176}$					

23» Какое наибольшее значение имеет длина стороны квадрата, состоящего из 40 единичных квадратов? Сколько единичных квадратов останется лишними?

24» **Задание открытого типа.** Запишите четыре положительных целых числа, которые выражают площадь квадрата, длина сторон которого расположена между числами 5 и 6. Сравните полученные результаты.

25» Скольким приблизительно сантиметрам равна сторона квадрата, имеющего площадь: a) 18 см^2 ; b) 30 см^2 ? Запишите с точностью до 0,1 см.

Действительные числа

- 26» Способ приближительного нахождения квадратного корня древних вавилонян можно современным языком записать следующим образом: $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Например, так как $28 = 5^2 + 3$, то согласно формуле получим $\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5,3$.

Приближенное значение квадратного корня найдите различными способами. Сравните ответ с результатом, полученным на калькуляторе.

- а) $\sqrt{40}$ б) $\sqrt{19}$ в) $\sqrt{70}$ д) $\sqrt{85}$

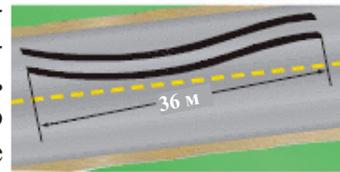
Прикладные задания.

- 27» Радиус круга с площадью S находится по формуле $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Каково приблизительно значение радиуса рамки круглой формы, если её площадь равна 42 см^2 ? Примите $\pi \approx 3$. Результат округлите до десятых.

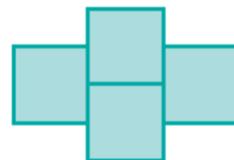
- 28» Футбольный мяч подброшен на высоту h метров. Время, за которое этот мяч падает с заданной высоты, можно найти по формуле $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, здесь $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$.

Найдите время t , если мяч подброшен на высоту: а) 20 м; б) 30 м.

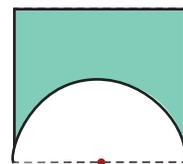
- 29» Исследователь для определения скорости движения автомобиля (в м/сек) измерил тормозной путь (в метрах) и использовал формулу $v \approx 5,5 \cdot \sqrt{0,75d}$. Найдите скорость автомобиля, тормозной путь (d) которого изображён на рисунке. Результат округлите до единиц.



- 30» Фигура на рисунке составлена из одинаковых по размеру квадратов. Площадь фигуры 128 квадратных единиц. Найдите приблизительно длину стороны квадрата.



- 31» От квадрата площадью 320 м^2 отделена часть в виде полукруга. Сколько квадратных метров составляет площадь полукруга? Результат округлите до десятых.



- 32» Расстояние между наблюдателем, находящимся на заданной высоте h , и горизонтом можно приблизительно вычислить найдя значение выражения $113\sqrt{h}$. Сколько приблизительно километров составляет расстояние до горизонта, если наблюдатель находится на:

- а) вершине горы высотой $h = 2,5 \text{ км}$;
б) вершине горы Эверест $h = 8,85 \text{ км}$;
в) вершине горы Шахдаг $h = 4,23 \text{ км}$.

Вычислите при помощи калькулятора. Результат округлите до десятых.

Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Практическое занятие.

1) Заполните таблицу

x	-4	-3	-2	1	0	1		3	
$y = x^2$	16			1	0	1	4		16

2) На координатной плоскости отметьте абсциссы x и соответствующие ординаты y точек из таблицы, и соедините их плавной линией, как показано на рисунке.

3) Задайте ещё несколько значений x , например, 1,5; 2,5 и т.д., и найдите соответствующие значения y . Уточните расположение на данной прямой точек, координаты которых соответствуют данным числам.

График функции $y = x^2$

Функция $y = x^2$ определена для всех значений x и принимает неотрицательные значения.

Множество точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, образует график.

График функции $y = x^2$ называется **параболой**.

Парабола расположена в верхней полуплоскости (выше оси x) и только одна точка $O(0;0)$ находится на оси абсцисс. Так как $(-x)^2 = x^2$, то каждой точке $A(x;y)$ параболы соответствует точка $B(-x;y)$, симметричная относительно оси ординат. Таким образом, ось ординат является осью симметрии параболы $y = x^2$. Точка пересечения параболы с её осью симметрии называют вершиной параболы. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

Пример. Сколько точек на параболе $y = x^2$ имеют ординаты, равные 7? Запишите точное и приближенные значения абсцисс данных точек.

Решение: парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 7$ в двух точках. Абсцисса одной из точек положительна и равна арифметическому корню из 7: $x_1 = \sqrt{7}$. Абсцисса другой точки число противоположного знака: $x_2 = -\sqrt{7}$

По графику можно определить, что $x_1 \approx 2,7$ и $x_2 \approx -2,7$.

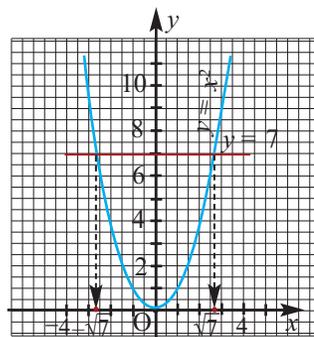
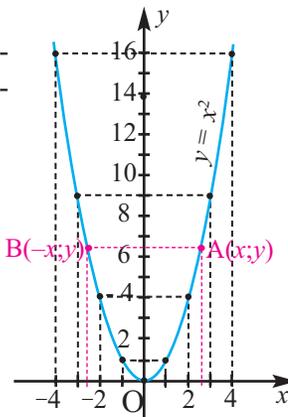
Вообще при $a > 0$ на параболе $y = x^2$ имеются две точки, ординаты которых равны a и абсциссы этих точек равны \sqrt{a} и $-\sqrt{a}$.

Вывод. Уравнение $x^2 = a$

при $a > 0$ имеет два различных корня: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$;

при $a < 0$ не имеет действительных корней.

при $a = 0$ уравнению удовлетворяет единственное число 0.



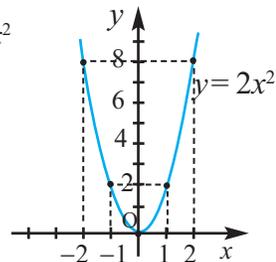
Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Обучающие задания.

- 1) Какие из точек М (-2; 4), N (1,2; 1,44), К (3; -9) расположены на параболе $y = x^2$?
- 2) По графику функции $y = x^2$ найдите:
а) приблизительные значения y , если $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = -1,5$;
б) приблизительные значения x , если $y = 2$, $y = 3$, $y = 6$.
- 3) В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 4$. При каких значениях x точки параболы находятся: а) выше; б) ниже прямой?
- 4) Найдите несколько значений x , при которых значение функции $y = x^2$ будет: а) больше 9; б) меньше 9.
- 5) Запишите координаты точек, симметричных точке А(2; 4) относительно:
а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат. Какая из этих точек расположена на параболе $y = x^2$?

- 6) Исследуйте алгоритм построения функции $y = 2x^2$ и постройте графики функций: а) $y = 3x^2$;
б) $y = -2x^2$; в) $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



- 7) При помощи графического калькулятора, расположенного по адресу <http://go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html>, постройте графики функции $y = ax^2$ при положительных и отрицательных значениях a . Обсудите, как расположение графика параболы зависит от знака a .
- 8) Решите уравнение и при помощи параболы $y = x^2$ найдите приблизительное значение корней.
а) $x^2 = 3$ б) $x^2 = 5$ в) $x^2 = 8$ г) $x^2 = 10$

Практическая работа.

1) При помощи калькулятора вычислите значения \sqrt{x} при заданных значениях x . Округлите их до десятых и заполните таблицу.

x	0	0,5	1	2	3	4	5	7	9
\sqrt{x}	0		1			2			3

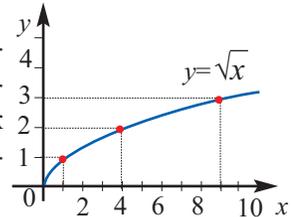
- 2) На координатной плоскости отметьте точки из таблицы, с соответствующими координатами, и соедините их плавной линией.
- 3) Может ли x принимать отрицательные значения?
- 4) Как изменяются соответствующие значения \sqrt{x} , при увеличении значений x ?

Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Функция $y = \sqrt{x}$ определена при всех неотрицательных значениях аргумента ($x \geq 0$) и принимает неотрицательные значения (т.к. не существует квадратного корня из отрицательного числа и арифметический корень принимает неотрицательные значения).

График функции $y = \sqrt{x}$ представляет собой ветвь параболы. При $x = 0, y = 0$, т.е. начало координат принадлежит графику. При $x > 0, y > 0$, т.е. график расположен в I четверти. Большому значению x соответствует большее значение y .
Например, $\sqrt{3} > \sqrt{2}$; $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ и т.д.



Обучающие задания

- 9**» Какая из точек A(9; 3), B(64; 8), C(-81; 9), D(81; -9) принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$?
- 10**» В одной системе координат постройте графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ и покажите точки пересечения.
- 11**» По графику функции $y = \sqrt{x}$, найдите:
а) y при $x = 10$; б) x при $y = 2,5$.
- 12**» Используя график функции $y = \sqrt{x}$, сравните числа.
а) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{11}$ б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{4}$ в) $\sqrt{12}$ и $\sqrt{15}$ г) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{9}$
- 13**» В цветные кружочки вставьте соответствующие знаки сравнения.
а) $\sqrt{17} \bullet 4$ б) $\sqrt{12} \bullet 3$ в) $7 \bullet \sqrt{50}$ г) $\sqrt{0,1} \bullet 0,3$
- 14**» Определите знак разности.
а) $\sqrt{10} - \sqrt{14}$ б) $\sqrt{7} - \sqrt{8}$ в) $1,4 - \sqrt{2}$ г) $1,8 - \sqrt{3}$
- 15**» Расположите числа в порядке возрастания.
а) $\sqrt{2}; \sqrt{5}; 1,4; \sqrt{3}; 1,8$ б) $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; -\sqrt{7}; -3; -1,7$
- 16**» Расположите числа в порядке убывания.
а) $0,5; \sqrt{0,5}; (0,5)^2$ б) $\frac{4}{9}; \sqrt{\frac{4}{9}}; (\frac{4}{9})^2$
- 17**» Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$ или $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где r — радиус, d — диаметр окружности.
Задайте зависимость: а) r от S ; б) d от S .

Свойства арифметического квадратного корня

Практическая работа Найдите значение выражений $\sqrt{25 \cdot 4}$ и $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$

Верно ли равенство? $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$

Проверьте, что соответствующее равенство верно для любых двух неотрицательных чисел.

Квадратный корень из произведения и частного

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих же множителей. Это свойство верно и для более двух множителей.

$$\text{при } a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

$$\text{при } a \geq 0, b > 0 \\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Пример 1. Вычислите: а) $\sqrt{64 \cdot 0,25}$; б) $\sqrt{\frac{25}{144}}$

Решение: а) $\sqrt{64 \cdot 0,25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} = 8 \cdot 0,5 = 4$ б) $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$

При перестановке левой и правой части в равенствах $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ получим: } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ и } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Пример 2. Вычислите: а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18}$; б) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

Решение: а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{25 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

Обучающие задания

1» Найдите значение выражения.

а) $\sqrt{64 \cdot 121}$ б) $\sqrt{0,01 \cdot 144}$ в) $\sqrt{81 \cdot 36}$ д) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04}$

2» Найдите значение корня.

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$ б) $\sqrt{\frac{25}{121}}$ в) $\sqrt{5 \frac{1}{16}}$ д) $\sqrt{5 \frac{4}{9}}$

3» Вычислите значение корня.

а) $\sqrt{9 \cdot 81 \cdot 0,36}$ б) $\sqrt{1,44 \cdot 25 \cdot 64}$ в) $\sqrt{5 \frac{4}{9} \cdot 6 \frac{1}{4}}$ д) $\sqrt{3 \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{50}}$

4» Вычислите.

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ б) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ в) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ д) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1,6}$

5» Вычислите.

а) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ б) $\sqrt{122^2 - 22^2}$ в) $\sqrt{313^2 - 312^2}$ д) $\sqrt{5^2 + 12^2}$

Свойства арифметического квадратного корня

6» Вычислите.

a) $\sqrt{72 \cdot 50}$ b) $\sqrt{50 \cdot 18}$ c) $\sqrt{90 \cdot 3,6}$
 d) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4}$ e) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$ f) $\sqrt{45 \cdot 80}$

Пример:

$$\begin{aligned} \sqrt{72 \cdot 32} &= \sqrt{36 \cdot 2 \cdot 32} = \\ &= \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = \\ &= 6 \cdot 8 = 48 \end{aligned}$$

7» Завершите представленное ниже доказательство равенства $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geq 0, b \geq 0$.

Предположение	Обоснование
1. $a \geq 0, b \geq 0$ 2. $\sqrt{a} \geq 0, \sqrt{b} \geq 0$ 3. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ 4. $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$ 5. $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$ 6. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	1. Дано. 2. 3. 4. Степень произведения 5. Согласно тождествам $(\sqrt{a})^2 = a, (\sqrt{b})^2 = b$ 6. По определению арифметического квадратного корня.

8» Найдите значение выражения.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$ b) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$ c) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$ d) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6}$
 e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ f) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{52}}$ g) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$ h) $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

9» Представьте выражение в виде произведения корней.

a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{30}$ d) $\sqrt{35}$ c) $\sqrt{21}$ e) $\sqrt{42}$ f) $\sqrt{56}$ h) $\sqrt{14}$

10» Представьте выражение в виде частного корней.

a) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ b) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{7}}$ d) $\sqrt{\frac{3}{a}}$

11» Вычислите приближённое значение корня, зная что $\sqrt{3} \approx 1,73$:

a) $\sqrt{75}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{48}$ d) $\sqrt{0,0003}$

12» Вычислите.

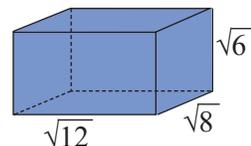
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,(2)}$ b) $\sqrt{0,(2)} \cdot \sqrt{0,(8)}$ c) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{1,(4)}}$ d) $\frac{\sqrt{1,(7)}}{\sqrt{0,(4)}}$

13» Вычислите, применив формулу сокращённого умножения.

a) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$ b) $\sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}$ c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$

14» Найдите площадь прямоугольника с длиной $\sqrt{48}$ см и шириной $\sqrt{12}$ см.

15» Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда по данным на рисунке.



Свойства арифметического квадратного корня

Исследование. Равенство $\sqrt{a^2} = a$ справедливо по определению арифметического квадратного корня при $a \geq 0$. Как можно упростить $\sqrt{a^2}$ при $a < 0$?

Квадратный корень степени

Для любого a справедливо равенство $a^2 = |a|^2$. По определению арифметического квадратного корня имеем $\sqrt{|a|^2} = |a|$, т.е.

$\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|$. Значит, для любых значений a справедливо равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

По определению абсолютного значения, т.к.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0 \\ -a, & \text{при } a < 0 \end{cases}, \text{ при } a \geq 0 \text{ получаем } \sqrt{a^2} = a, \\ \text{при } a < 0 \text{ получаем } \sqrt{a^2} = -a$$

$$\begin{aligned} \sqrt{8^2} &= |8| = 8 \\ \sqrt{(-9)^2} &= |-9| = 9 \\ \sqrt{4a^2} &= |2a| = 2|a| \\ \sqrt{\frac{x^2}{9}} &= \left| \frac{x}{3} \right| = \frac{|x|}{3} \end{aligned}$$

Если подкоренное выражение можно представить в виде квадрата определенного выражения, то можно воспользоваться тождеством $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример. Упростите: а) $\sqrt{64a^2}$, $a \geq 0$; б) $\sqrt{25c^6}$, $c < 0$; в) $\sqrt{c^2 - 2c + 1}$

Решение: а) при $a \geq 0$ получим $\sqrt{64a^2} = \sqrt{(8a)^2} = |8a| = 8|a| = 8a$
 б) при $c < 0$ получим $\sqrt{25c^6} = \sqrt{(5c^3)^2} = |5c^3| = 5|c^3| = -5c^3$
 в) $\sqrt{c^2 - 2c + 1} = \sqrt{(c-1)^2} = |c-1| = \begin{cases} c-1, & \text{при } c \geq 1 \\ 1-c, & \text{при } c < 1 \end{cases}$

Обучающие задания

16 Верно ли?

а) $\sqrt{1,5^2} = 1,5$ | б) $\sqrt{(-3,2)^2} = -3,2$ | в) $\sqrt{(-15)^2} = 15$ | д) $\sqrt{(-32)^2} = |-32|$

17 Заполните таблицу.

x	5	6	0	-3	-9	-5	-6	1,2	-1,2
$\sqrt{x^2}$									

18 Вычислите.

а) $\sqrt{(-3)^6}$ б) $\sqrt{(-6)^4}$ в) $\sqrt{3^6 \cdot (-5)^2}$ д) $\sqrt{(-8)^2 \cdot 3^4}$

19 Упростите выражение при $a > 0$.

а) $3\sqrt{a^2}$ б) $\sqrt{16a^2}$ в) $0,5 \cdot \sqrt{4a^2}$ д) $-4 \cdot \sqrt{0,25a^2}$

20 Упростите выражение при $c < 0$.

а) $2\sqrt{c^2}$ б) $\sqrt{25c^2}$ в) $5 \cdot \sqrt{9c^2}$ д) $-2 \cdot \sqrt{0,36c^2}$

21 Упростите выражение.

а) $\sqrt{49x^6}$, $x > 0$ б) $\sqrt{36x^6}$, $x < 0$ в) $\sqrt{0,01y^8}$ д) $\sqrt{25x^4}$

22 Вычислите.

а) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$ б) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$

23 а) Найдите сторону квадрата при $x > 1$, если его площадь равна $(1-x)^2$.

б) Упростите выражение $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$ при $1 < x < 3$.

Применение свойств арифметического квадратного корня

Вынесение множителя из-под знака корня

Внесение множителя под знак корня

Пример 1. Сравните числа $\sqrt{50}$ и $4\sqrt{2}$.

Решение: Так как $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2} > 4\sqrt{2}$, то $\sqrt{50} > 4\sqrt{2}$

При решении мы заменили $\sqrt{50}$ на $5\sqrt{2}$. Такое преобразование называется вынесением множителя из-под знака корня.

Пример 2. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{8a^3}$.

Решение: $\sqrt{8a^3} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a} = 2|a| \cdot \sqrt{2a} = 2a\sqrt{2a}$ (выражение $\sqrt{8a^3}$ имеет смысл при $a \geq 0$)

Пример 3. Сравните числа $\sqrt{73}$ и $6\sqrt{2}$.

Решение: Заменяем число 6 на $\sqrt{36}$. $6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72} < \sqrt{73}$.

Мы заменили $6\sqrt{2}$ на $\sqrt{72}$. Такое преобразование называется внесением множителя под знак корня. Положительный множитель возводится в квадрат и вносится под знак корня. Если множитель отрицательный, то сначала его представляют в виде произведения положительного числа и -1 , после чего положительный множитель вносится под знак корня, а знак “ $-$ ” оставляют перед знаком корня.

Пример 4. а) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

б) $-4\sqrt{3} = -1 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{48}$

в) $a\sqrt{2} = |a| \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$, при $a > 0$

г) $a\sqrt{2} = -|a| \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$, при $a < 0$

$$\begin{aligned} a &= |a| = \sqrt{a^2}, \text{ при } a \geq 0, \\ a &= -|a| = -\sqrt{a^2}, \text{ при } a < 0 \end{aligned}$$

Обучающие задания

- 1) Вынесите множитель из-под знака корня.
а) $\sqrt{12}$ б) $\sqrt{80}$ в) $\sqrt{48}$ г) $\sqrt{18}$ е) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$ ф) $-3\sqrt{12}$
- 2) Вынесите множитель из-под знака корня.
а) $\sqrt{50x^3y^2}$, $y > 0$ б) $\sqrt{18x^2y^4}$, $x < 0$ в) $\sqrt{12x^5y^2}$, $y < 0$
- 3) Внесите множитель под знак корня.
а) $2\sqrt{3}$ б) $-4\sqrt{3}$ в) $3\sqrt{2}$ г) $-4\sqrt{5}$ е) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$ ф) $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$
- 4) Внесите множитель под знак корня.
а) $c\sqrt{3}$, $c > 0$ б) $c\sqrt{3}$, $c < 0$ в) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ г) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$
- 5) Сравните числа.
а) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$ б) $2\sqrt{5}$ и $5\sqrt{2}$ в) $5\sqrt{2}$ и $4\sqrt{3}$
- 6) Расположите числа в порядке возрастания.
а) $6\sqrt{2}$; $\sqrt{58}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{11}$ б) $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{29}$
- 7) Определите знак разности.
а) $7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ б) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ в) $3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$
- 8) Определите, между какими двумя целыми последовательными числами расположены заданные числа.
а) $7\sqrt{2}$ б) $5\sqrt{5}$ в) $-3\sqrt{2}$ г) $4\sqrt{5}$

Применение свойств арифметического квадратного корня

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Выражения $a\sqrt{b}$ и $c\sqrt{b}$ с одинаковыми подкоренными выражениями называются подобными корнями (радикалами). Например, $2\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$ являются подобными корнями. Их сложение и вычитание выполняется по правилу упрощения выражений $2x$ и $5x$. Т.е., если $2x + 5x = 7x$, то $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

Например, если каждый из двух деревянных кусков имеет длину $\sqrt{14}$ см, то общая длина равна $\sqrt{14} + \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$ см.



$\sqrt{14}$

$\sqrt{14}$

Пример 1. Упростите: а) $3\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + \sqrt{50}$; б) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{24}$

Решение: а) $3\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4 \cdot 2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{25 \cdot 2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (6 - 4 + 5) = 7\sqrt{2}$

б) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{24} = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - \sqrt{4 \cdot 6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = 5$

Пример 2. Сократите дробь $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{\sqrt{63} - 3}$

Решение: $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{\sqrt{63} - 3} = \frac{\sqrt{2 \cdot 7} - \sqrt{2}}{\sqrt{9 \cdot 7} - 3} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{7} - 3} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - 1)}{3 \cdot (\sqrt{7} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Обучающие задания

9 Упростите.

а) $2\sqrt{14} + 5\sqrt{14}$

б) $1,5\sqrt{17} - 0,8\sqrt{17}$

в) $12\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 7\sqrt{6}$

д) $4,5\sqrt{3} - 0,7\sqrt{3}$

е) $\frac{8}{11}\sqrt{17} - \frac{5}{11}\sqrt{17}$

ф) $1,5\sqrt{13} + 1,7\sqrt{13} - 4\sqrt{13}$

10 Найдите целую часть числа, в соответствии с образцом.

а) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

б) $\sqrt{75} - \sqrt{48}$

в) $\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$

д) $3\sqrt{18} + 4\sqrt{2}$

е) $5\sqrt{3} - \sqrt{27}$

ф) $5\sqrt{2} + \sqrt{18}$

г) $2\sqrt{54} + 7\sqrt{24}$

д) $3\sqrt{20} + 2\sqrt{45}$

Пример. Найдите целую часть числа $\sqrt{3} + \sqrt{75}$.

Решение: $\sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{3} + \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot (1 + 5) = 6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$, т.к. $10 < \sqrt{108} < 11$, целая часть заданного числа равна 10.

11 Упростите выражения.

а) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$

б) $3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$

в) $\sqrt{16n} + \sqrt{25n} - \sqrt{9n}$

д) $\sqrt{3a} - 2\sqrt{12a} + 3\sqrt{75a}$

12 Упростите.

а) $\sqrt{2x} + \sqrt{9y} + \sqrt{18x}$

б) $2\sqrt{27} + \sqrt{48x} + \sqrt{12x}$

в) $\sqrt{24} + \sqrt{12} - \sqrt{6} + \sqrt{3}$

д) $\sqrt{4} + \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{36}$

Применение свойств арифметического квадратного корня

13» Выполните действия.

a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{2})$

b) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$

c) $(4\sqrt{3} - \sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}$

d) $(\sqrt{12} + 2\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

14» Сравните.

Пример: $\sqrt{2} + \sqrt{8} \bullet \sqrt{10}$
 $\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} \bullet \sqrt{10}$
 $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \bullet \sqrt{10}$
 $3\sqrt{2} \bullet \sqrt{10}$
 $\sqrt{9 \cdot 2} \bullet \sqrt{10}$
 $\sqrt{18} > \sqrt{10}$

1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} \bullet \sqrt{20}$

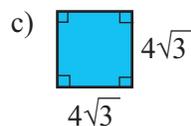
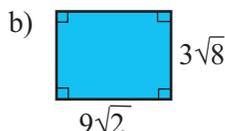
2) $\sqrt{18} + \sqrt{8} \bullet \sqrt{54}$

3) $\sqrt{63} + \sqrt{28} \bullet \sqrt{168}$

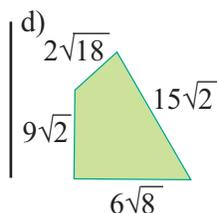
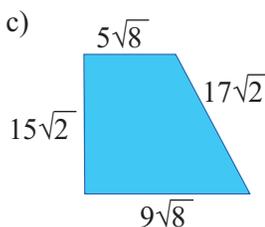
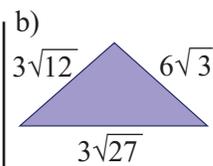
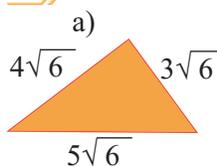
4) $\sqrt{200} + \sqrt{200} \bullet \sqrt{400}$

5) $5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} \bullet 9\sqrt{2}$

15» Найдите периметры и площади фигур.



16» Найдите периметры фигур.



17» Упростите.

a) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

b) $\sqrt{60} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2$

18» Вычислите значение выражения.

a) $x^2 - 4x + 5$, при $x = \sqrt{5} + 2$;

b) $y^2 + 2y + 3$, при $y = \sqrt{3} - 1$

19» Разложите на множители, применив формулу разности квадратов.

a) $x^2 - 3$

b) $4y^2 - 5$

c) $2 - c^2$

d) $4 - a$, $a > 0$

20» Сократите дробь.

a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{20}}$

c) $\frac{10 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{20} - 2}$

d) $\frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{8} + 2}$

Применение свойств арифметического квадратного корня

Освобождение знаменателя от иррациональности

Сумма, разность, произведение (кроме умножения на «0») и отношение рационального и иррационального чисел является иррациональным числом. А вот сумма, разность, произведение и отношение двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

Пример 1: а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$; б) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$

При $a \geq 0, b \geq 0$ верно равенство $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ и $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ называются сопряженными множителями. В частном случае \sqrt{a} является сопряженным числом для числа \sqrt{a} . Для избавления от иррациональности в знаменателе, надо числитель и знаменатель дроби умножить на выражение, сопряженное знаменателю.

Пример 2: $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{6}$ и упростим.

$$\frac{3}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{18 - 3} = \frac{3\sqrt{2} + 3}{5}$$

Умножим числитель и знаменатель на $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ По формуле сокращённого умножения Упростим.

Обучающие задания

21» Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби.

1) $\frac{2}{5\sqrt{3}}$ 2) $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$ 3) $\frac{17}{3\sqrt{2} + 1}$ 4) $\frac{4}{2\sqrt{5} + \sqrt{12}}$ 5) $\frac{7}{\sqrt{18} + 2\sqrt{2} + 1}$

22» Значения каких выражений является иррациональным числом?

$$a = \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}, \quad b = \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}, \quad c = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

23» Сравните:

1) $a = \sqrt{7} + \sqrt{6}$ и $b = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ 3) $a = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ и $b = \sqrt{7} - \sqrt{6}$

2) $a = \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{10}}$ 4) $a = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ и $b = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

24» а) Запишите число, взаимно обратное с числом $2 - \sqrt{3}$.

б) Найдите сумму чисел обратного и противоположного числу $\sqrt{5} - 2$.

25» Вычислите.

1) $\frac{4 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{4 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ 2) $\frac{3 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}} + \frac{3 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Указание: сначала избавьте от иррациональности знаменатель каждой дроби.

26» Докажите равенство.

$$\frac{1}{3 + \sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = 1$$

Степень с целым показателем

Степень с целым отрицательным показателем

Запишем последовательно $0; 1; 2$ и т.д. степени числа 10 : $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$.

В этой строке каждое число в 10 раз меньше следующего. Если продолжить запись влево, в соответствии с данным правилом, то получим следующее: перед числом 10^0 стоит число $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ число $\frac{1}{10^2}$ и т.д.

$$\dots \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$$

Степень каждого числа в этой строке, стоящего справа от числа 10^0 , на единицу меньше степени следующего числа. Применив данное правило к числам, стоящим слева от числа 10^0 , получим отрицательные степени числа 10 , которые запишем так: вместо $\frac{1}{10^1}$ запишем 10^{-1} , вместо $\frac{1}{10^2}$ запишем 10^{-2} и т.д.

Обобщив полученное, примем $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при $a \neq 0$.

На самом деле, сохраняя основное свойство степени при $a \neq 0$,

примем $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, так как $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$.

Пример. а) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ б) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ в) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$

Обучающие задания

- 1**» Замените степень с целым отрицательным показателем дробью. **2**» Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем.
- а) 10^{-4} б) a^{-2} в) $(ab)^{-3}$ а) $\frac{1}{10^5}$ б) $\frac{1}{a^3}$ в) $\frac{1}{a}$
- 3**» а) Представьте числа $16; 8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ в виде степени с основанием 2 .
б) Представьте числа $\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1; 3; 9; 27$ в виде степени с основанием 3 .
- 4**» Вычислите.
- а) 6^{-2} б) $(-1)^{-10}$ в) $(-3)^{-4}$ г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ д) -4^{-2} е) $(-4)^{-2}$ ф) $-(-3)^{-2}$ ж) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-3}$
- 5**» Сравните с нулём значение степени.
- а) 7^{-3} б) $1,6^{-4}$ в) если $a < 0$ и n - отрицательное чётное число, то $a^n > 0$;
с) $(-3,2)^{-2}$ д) $(-6,1)^{-5}$ г) если $a < 0$ и n - отрицательное нечётное число, то $a^n < 0$?
- 6**» Верно ли, что:
- 7**» Представьте выражения в виде дроби, не содержащей степень с отрицательным показателем. а) $2 \cdot x^{-3}$ б) $5ab^{-3}$ в) $3 \cdot x^{-1}y^{-2}$
- 8**» Представьте дробь в виде произведения.
- а) $\frac{2}{b^2}$ б) $\frac{3}{x^4}$ в) $\frac{a}{b^{-3}}$ **9**» Вычислите.
- а) $10 \cdot 2^{-2}$ б) $3 \cdot 10^{-2}$
с) $2^{-2} + 3^{-1}$ д) $0,5^{-2} + 0,2^{-1}$
- 10**» Расположите числа $0,8^{-2}; 2^{-5}; 1; \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ в порядке убывания.

Степень с целым показателем

Свойства степени с целым показателем

Для любых действительных чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ и для любых целых чисел m и n справедливы следующие свойства степеней.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Действия над степенями с целым показателем выполняются по тем же правилам, что и над степенями с натуральным показателем.

Пример 1. $a^{-14} \cdot a^{17} = a^{-14+17} = a^3$

К такому же результату можно прийти по определению степени с отрицательным показателем и по свойству степени с натуральным показателем.

$$a^{-14} \cdot a^{17} = \frac{1}{a^{14}} \cdot a^{17} = \frac{a^{17}}{a^{14}} = a^3$$

Пример 2. $(3a^2b^{-3})^{-2} = 3^{-2} \cdot (a^2)^{-2} \cdot (b^{-3})^{-2} = \frac{1}{9} a^{-4}b^6 = \frac{b^6}{9a^4}$

Обучающие задания

11» Найдите значение выражения.

a) $5^{-2} \cdot 5^4$

b) $2^{-6} \cdot 2^4 \cdot 2^0$

c) $3^5 \cdot 3^{-3}$

d) $2^2 : 2^{-3}$

e) $3^{-2} : 3^{-4}$

f) $(2^3)^{-2} \cdot (2^{-2})^{-4} \cdot (2^{-2})^0$

12» В закрасненные ячейки впишите соответствующие числа.

$$a^{\blacksquare} \cdot a^4 = a^3$$

$$(a^{\blacksquare})^4 = a^{-8}$$

$$(a^2b^{\blacksquare})^4 = a^8b^{-12}$$

$$(a^3b^6)^{\blacksquare} = \frac{1}{a^9b^{18}}$$

$$(b^2)^{-4} = \frac{1}{b^{\blacksquare}}$$

$$a^{\blacksquare} \cdot a^8 = a^6$$

13» Представьте выражение в виде произведения степеней с одинаковым основанием и найдите его значение.

a) $16 \cdot 2^{-3}$

b) $\frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$

c) $8^{-1} \cdot 4^2$

d) $9^{-4} \cdot 27^3$

14» Вычислите. a) $8^{-2} \cdot 4^3$ b) $9^{-2} \cdot 27^2$ c) $\frac{16^{-12}}{4^{-21} \cdot 8^{-3}}$ d) $\frac{3^{-12} \cdot 9^4}{27^{-2}}$

15» Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

16» Вычислите.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(-1 \frac{4}{5}\right)^{-3}$

17» Найдите значение выражения.

a) $\frac{3^{-2} \cdot 5^{-3}}{15^{-3}}$

b) $\frac{27^{-2} \cdot 4^{-1}}{6^{-5}}$

c) $\frac{81^2 \cdot 6^{-4} \cdot 21^{-5}}{14^{-5}}$

18» Упростите.

a) $2ab^{-3} \cdot 5a^{-2}b$

b) $3 \frac{1}{3} a^5b^{-16} \cdot 0,6a^{-1}b^{18}$

c) $2,4 a^{-5}b^2 : (0,2a^{-3}b^{-2})$

19» Представьте выражения в виде дроби, не содержащей степень с отрицательным показателем.

a) $(2^{-3} \cdot b^3)^{-2}$

b) $(6a^{-3}b)^{-1}$

c) $\left(\frac{2}{3}x^{-5}q^2\right)^{-2}$

Степень с целым показателем

Стандартный вид числа

В науке и технике наряду с очень большими положительными числами встречаются и очень маленькие положительные числа. Например, объём Земли выражается гигантским числом $1083000000000 \text{ км}^3$, а диаметр молекулы очень маленьким числом $0,000000003 \text{ м}$. Большие и малые числа неудобно записывать в виде обыкновенных или десятичных дробей и выполнять какие-либо действия над ними. В этом случае их представляют в виде $a \cdot 10^n$.

Например, $137000 = 1,37 \cdot 10^5$ или $0,0000012 = 1,2 \cdot 10^{-6}$

Запись числа в виде $a \cdot 10^n$ называется стандартным видом числа, где $1 \leq a < 10$ и n целое число, число a называется значащей частью, n - порядком.

Пример. 1) $4350000 = 4,35 \cdot 10^6$ (порядок равен 6).
2) $0,00000028 = 2,8 \cdot 10^{-7}$ (порядок равен -7).

20» Выразите числа в виде степени числа 10.

- a) 0,01 b) 10000000 c) 0,000001 d) 0,00000001

21» Запишите числа в стандартном виде.

- a) 48000000 b) 287000 c) 0,0000063 d) 0,00029
e) $57 \cdot 10^4$ f) $682 \cdot 10^7$ g) $0,21 \cdot 10^{-4}$ h) $127 \cdot 10^{-8}$

22» Выполните действия.

- a) $(3,5 \cdot 10^4) \cdot (4 \cdot 10^{-3})$ b) $(8,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^7)$ c) $(8,4 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

Пример. 1) $(2,5 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-8}) = (2,5 \cdot 6) \cdot (10^5 \cdot 10^{-8}) = 15 \cdot 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^{-2}$
2) $(8,2 \cdot 10^{-8}) : (4 \cdot 10^{-10}) = (8,2 : 4) \cdot (10^{-8} : 10^{-10}) = 4,05 \cdot 10^2$

23» Расположите числа в порядке возрастания.

- $8,5 \cdot 10^{-1}$ $3,6 \cdot 10^8$ $5,85 \cdot 10^{-3}$ $2,5 \cdot 10^{-1}$ $8,5 \cdot 10^8$

24» Числа, представленные в нестандартном виде, запишите в стандартном виде

- 1) $50 \cdot 10^{-5}$ 2) $8,1 \cdot 10^{-2}$ 3) 1 200 000 4) $0,2 \cdot 10^3$ 5) $35 \cdot 10^{-6}$

25» Выполните действия.

- a) $8,5 \cdot 10^{-6} + 4,2 \cdot 10^{-6}$ b) $2,3 \cdot 10^{-4} - 1,8 \cdot 10^{-4}$
c) $6,3 \cdot 10^{-8} - 1,8 \cdot 10^{-9}$ d) $5,4 \cdot 10^{-7} + 2,3 \cdot 10^{-8}$

Пример.

- 1) $4,5 \cdot 10^{-7} + 8,2 \cdot 10^{-7} = (4,5 + 8,2) \cdot 10^{-7} = 12,7 \cdot 10^{-7} = 1,27 \cdot 10^{-6}$
2) $6,4 \cdot 10^{-3} - 4,1 \cdot 10^{-4} = 64 \cdot 10^{-4} - 4,1 \cdot 10^{-4} = (64 - 4,1) \cdot 10^{-4} = 59,8 \cdot 10^{-4} = 5,98 \cdot 10^{-3}$

Прикладные задания

26» Плотность железа $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Найдите массу железной пластины длиной 5 м, шириной $8 \cdot 10^{-1} \text{ м}$ и толщиной $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

27» Один астрономический световой год - это расстояние длиной $9,461 \cdot 10^{12} \text{ км}$, которое проходит свет за 1 год. Сколько цифр содержит число, выражающее это расстояние в километрах?

Степень с целым показателем

28» Баррель - мера объёма жидких веществ, которая в основном используется для измерения объёма нефти. 1 баррель нефти приблизительно равен 159 л. Запишите данные из текста в стандартном виде. В течение 2014 года посредством трубопровода БТД было экспортировано 34,8 млн. тонн (218 млн. баррелей) сырой нефти, которая в Джейхане была погружена на 362 танкера». Сколько баррелей нефти было погружено на каждый танкер, если известно, что на каждый из них было погружено одинаковое количество нефти?

29» Здоровье. У Рейхан аллергия на цветочную пыльцу. Диаметр цветочной пыльцы колеблется от $1,2 \cdot 10^{-5}$ м до $9 \cdot 10^{-5}$ м. Фильтр кондиционера может нейтрализовать частицы пыли больше $3 \cdot 10^{-7}$ м. Сможет ли этот фильтр нейтрализовать частицы цветочной пыльцы?



30» Миля - единица длины, которую используют в США и Великобритании. 1 миля $\approx 1,6$ км. Световой луч за секунду проходит 186000 миль или $3 \cdot 10^5$ км. Найдите путь, пройденный световым лучом за: а) $5 \cdot 10^5$ секунд; б) 365 дней(1 год) и выразите его в километрах и милях. Ответ запишите в стандартном виде.

31» Физика. Самые маленькие частицы - атомы, из которых состоит вещество, в свою очередь также состоят из еще более мелких частиц: протонов, электронов и нейтронов.

Масса протона: $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, масса нейтрона: $1,68 \cdot 10^{-27}$ кг,

масса электрона: 0,00000000000000000000000000000911 кг.

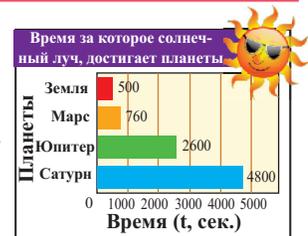
Какая из частиц легче?

32» Компьютер. В таблице даны единицы измерения информации памяти компьютера.

Объём CD-ROM 512 MB, объём DVD-ROM 64 GB. Во сколько раз объём DVD больше объёма CD?

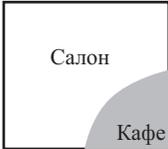
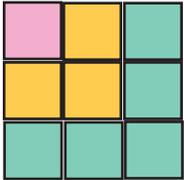
Память компьютера	
1 килобайт (KB)	≈ 1000 байт
1 мегабайт (MB)	= 1 миллион байт
1 гигабайт (GB)	= 1 миллиард байт

33» Астрономия. Солнечный луч за минуту проходит приблизительно $3 \cdot 10^8$ м. На барграфе показано время, за которое солнечный луч достигает каждую планету. На основе этих данных вычислите расстояние между Солнцем и планетами.



34» Состав крови. Тромбоциты участвуют в процессе свёртывания крови. На каждый миллилитр крови приблизительно приходится $2,7 \cdot 10^8$ тромбоцитов. а) Сколько тромбоцитов в 6 миллилитрах крови? б) В теле подростка приблизительно 5 литров крови. Сколько приблизительно тромбоцитов у человека в этом возрасте? Ответ запишите в стандартном виде.

Обобщающие задания

- 1**» Значение какого выражения является иррациональным числом?
2) $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ 3) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^2$ 4) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
- 2**» Вычислите.
а) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$ б) $\sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{16}}}}$
- 3**» Расположите числа в порядке возрастания.
1) $5\sqrt{2}; 4\sqrt{3}; \sqrt{47}; \frac{3}{2}\sqrt{8}$ 2) $-\sqrt{8}; -2\sqrt{3}; -3; -\sqrt{\frac{27}{4}}$
- 4**» В одной координатной плоскости постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 6$. Найдите абсциссы точек пересечения и определите, между какими двумя последовательными целыми числами они находятся.
- 5**» Установите соответствие.
1) $\sqrt{7} - 3$ А) положительное число В) отрицательное число
2) $\sqrt{7} - 2$ С) рациональное число D) равно 0
3) $\sqrt{1,(\overline{7})} - 1,(\overline{3})$
- 6**» В салоне книжного магазина, имеющего форму квадрата, площадью 256 м^2 , середины двух соседних сторон в одном углу соединены в виде сектора под кафе. Найдите площадь кафе.
- 
- 7**» Дан прямоугольник со сторонами $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$.
1) Найдите периметр и площадь данного прямоугольника.
2) Сравните площади прямоугольника и квадрата с данным периметром. Какая из площадей больше и на сколько?
3) Сравните периметры прямоугольника и квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника.
- 8**» Число $\sqrt{150}$ выразите через a и b , если $\sqrt{3} = a$, $\sqrt{2} = b$
- 9**» Учитель математики на вопрос «Сколько вам лет?» ответил так: «Мой возраст может быть представлен в виде суммы последовательных нечётных чисел, начиная с 1». Сколько лет может быть учителю? Может ли рисунок справа помочь в решении?
- 
- 10**» а) Найдите значение выражения $2b^2 - 14b + 1$, если $b + \sqrt{b} - 3 = 0$.
б) Найдите $|a - b|$, если $a + b = 2\sqrt{6}$, $ab = 2$

Обобщающие задания

- 11**» Скорость (в м/сек) разбега спортсмена по прыжкам в высоту находится по формуле $v \approx 8\sqrt{h}$. Найдите скорость, если высота, которую должен преодолеть спортсмен, равна $h = 6$ м. Вычислите при помощи калькулятора. Результат округлите до десятых.



- 12**» Порядок числа x в стандартном виде равен 8, порядок числа y равен -5 . Чему может равняться порядок произведения xy ?

- 13**» Установите соответствие.

- | | |
|---|-----------------|
| 1) 0,000012 | A) порядок -4 |
| 2) $0,072 \cdot 10^{-2} + 28 \cdot 10^{-5}$ | B) порядок -5 |
| 3) $5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-8}$ | C) порядок -3 |

- 14**» **Биология.** Тело новорожденного ребёнка состоит приблизительно из 26 000 000 000 клеток. В теле молодого человека этих клеток приблизительно в $1,9 \cdot 10^3$ раз больше. Сколько клеток в теле молодого человека?

- 15**» Вычислите.

a) $\sqrt{1,2 \cdot 3,7} \cdot \left(\sqrt{\frac{3,7}{1,2}} - \sqrt{\frac{1,2}{3,7}} \right)$ b) $\left(\sqrt{\frac{7}{6}} - \sqrt{\frac{6}{7}} \right) : \sqrt{42}$

- 16**» Запишите два иррациональных числа, чтобы:

- a) их сумма была рациональным числом;
b) их произведение было рациональным числом.

- 17**» Найдите значение выражения.

a) $|\sqrt{3} - 3| + |\sqrt{3} + 3|$ b) $|2 + \sqrt{5}| - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$
c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

- 18**» Вычислите.

a) $(\sqrt{2} - 1)^{-2} + (3 + 2\sqrt{2})^{-2}$ b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-2} - (5 - 2\sqrt{6})^{-1}$

- 19**» Во сколько раз сторона квадрата, площадь которого равна 825 дм^2 , больше стороны квадрата с площадью 33 см^2 .

- 20**» Упростите.

a) $\sqrt{4c^2 + 3c}$, при $c < 0$ b) $\sqrt{9c^2 + 2c}$, при $c > 0$

- 21**» Вычислите.

a) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{17}}$ b) $\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} - \sqrt{1,2} \cdot \sqrt{20}$

- 22**» **Задача Ал-Караджи.** Найдите такое число, при умножении которого на $(3 - \sqrt{5})$ получится 1.

2

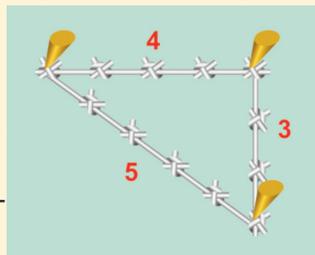
Теорема Пифагора

В этом разделе вы научитесь:

- теорему Пифагора;
- как применять теорему Пифагора для решения задач.

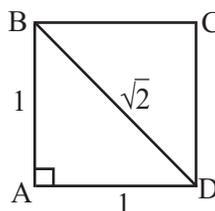
Это интересно!

Древние египтяне для построения прямоугольного треугольника связывали концы веревки, разделенной на 12 одинаковых частей и растягивали ее на три стороны. Полученный треугольник, стороны которого относились как 3:4:5, являлся прямоугольным. Такой треугольник применяли для построения прямых углов, а также для построения пирамид. Возможно Пифагор при помощи этого треугольника смог обобщить свою теорему для всех прямоугольных треугольников.



Исследование.

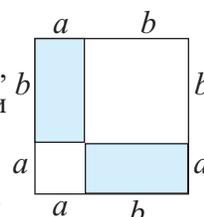
Изобразите квадрат ABCD со стороной равной единице и проведите диагональ BD. Диагональ делит квадрат на два конгруэнтных треугольника. Так как длина диагонали квадрата, со стороной равной 1, равна $\sqrt{2}$, то длина каждого из катетов AB и AD в $\triangle ABD$ равна 1, а длина гипотенузы равна $\sqrt{2}$, и справедливо следующее равенство: $AB^2 + AD^2 = BD^2$. Т.е. в $\triangle ABD$ сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы. Справедливо ли данное предположение для любого прямоугольного треугольника?



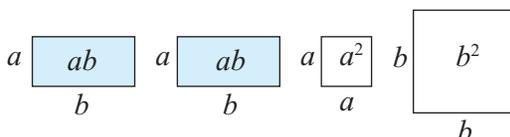
Практическая работа.

Шаг 1. Вырежьте из картона два одинаковых квадрата.

Шаг 2. На стороне одного из них отметьте отрезки a и b , как показано на рисунке, и разрежьте его на два квадрата и два прямоугольника.

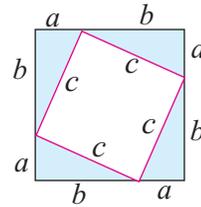


Шаг 3. Полученные фигуры расположите, как показано на рисунке.



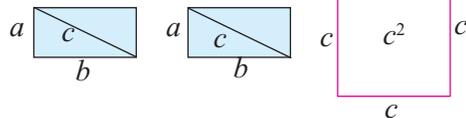
Теорема Пифагора

Шаг 4. На сторонах другого квадрата отметьте отрезки a и b , как показано на рисунке, и отрежьте четыре прямоугольных треугольника.



Шаг 5. Что вы можете сказать о конгруэнтности данных треугольников? К какому виду четырехугольника относится оставшаяся фигура после того, как вы отрезали треугольники и убрали их? Чему равен каждый внутренний угол данного четырёхугольника?

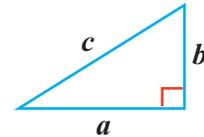
Шаг 6. Расположите полученные фигуры, как показано на рисунке.



Шаг 7. Сравните результаты, которые вы получили на 3 и 6 шагах. К какому выводу вы пришли?

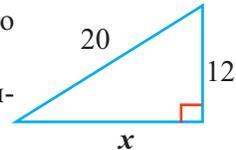
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. $c^2 = a^2 + b^2$



Если в прямоугольном треугольнике заданы две стороны, то третью сторону можно найти по теореме Пифагора.

Пример. Найдём длину катета треугольника, изображенного на рисунке:



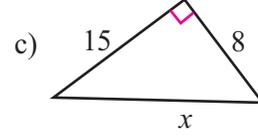
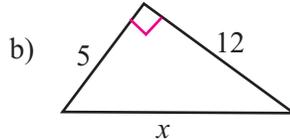
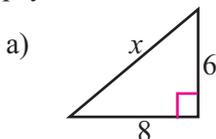
Решение: По теореме Пифагора имеем:

$$x^2 = 20^2 - 12^2; \quad x^2 = 400 - 144 = 256; \quad x = 16$$

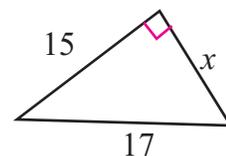
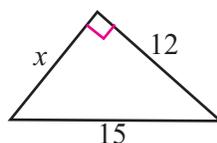
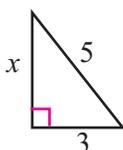
Примечание: если в условии задачи или на рисунке не указаны единицы измерения, то имеется в виду, что все рассматриваемые отрезки заданы в одинаковых единицах и в ответе задачи также единицы измерения не указываются.

Обучающие задания.

1» При помощи теоремы Пифагора найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по заданным катетам.

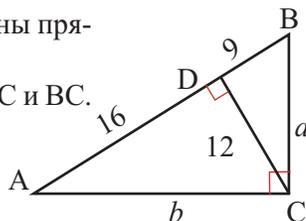


2» При помощи теоремы Пифагора найдите неизвестный катет прямоугольного треугольника.

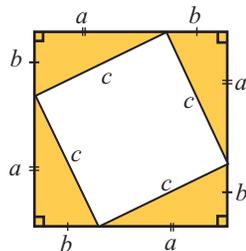


Теорема Пифагора

- 3» В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD.
- а) по данным рисунка найдите длины катетов AC и BC.
- б) для $\triangle ABC$ на рисунке запишите теорему Пифагора и проверьте данное равенство.

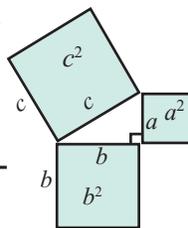


- 4» Известно до 400 различных доказательств теоремы Пифагора. Докажите теорему, используя рисунок справа.

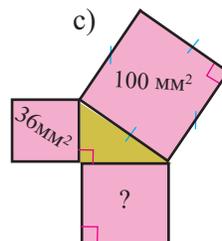
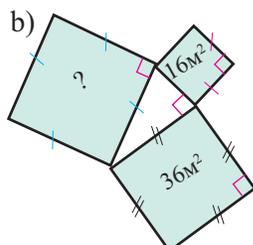
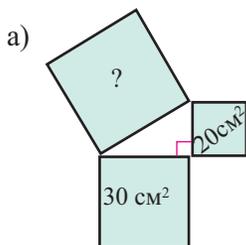


- 5» При помощи каких натуральных чисел можно выразить катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $\sqrt{50}$? Сколько возможных способов существует?

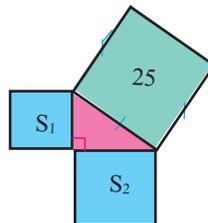
Если рассмотреть площади квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника, то теорему Пифагора можно перефразировать так: **в прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах:**

$$c^2 = a^2 + b^2$$


- 6» Найдите площадь квадрата, обозначенного вопросительным знаком.



- 7» Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 25 квадратным единицам. Найдите периметр треугольника, если разность площадей квадратов, построенных на катетах равна 7 квадратным единицам.



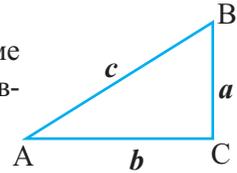
- 8» Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, в 4 раза больше площади квадрата, построенного на одном из катетов, и на 1 квадратную единицу больше площади квадрата, построенного на другом катете. Найдите стороны треугольника.

Теорема Пифагора

Обратная теорема

Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник является прямоугольным треугольником.

Если $c^2 = a^2 + b^2$ то, $\triangle ABC$ - прямоугольный.



Прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются натуральными числами, называются Пифагоровыми треугольниками. Самый распространённый прямоугольный треугольник имеет стороны 3; 4; 5. Древние египтяне повсеместно пользовались этим треугольником для измерений. Такой треугольник называется Египетским треугольником. Треугольники со сторонами 5,12,13; 8,15,17; 7,24, 25, ... также являются треугольниками Пифагора. А эти числа называются Пифагоровыми тройками. Если числа a, b, c являются Пифагоровыми тройками, то и числа ak, bk, ck ($k > 0$) также являются Пифагоровыми тройками.

9) Какие группы чисел могут выражать стороны прямоугольного треугольника?

1) 8, 15, 17 2) 7, 24, 25 3) 20, 21, 31 4) 37, 12, 34

5) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$ 6) 10, 12, $\sqrt{22}$ 7) 2, 3, 4 8) $\sqrt{7}, 8, \sqrt{71}$

10) 1) Если три натуральных числа не имеют общего множителя кроме единицы и являются сторонами прямоугольного треугольника, то эти числа называются простыми Пифагоровыми тройками. Запишите простые Пифагоровы тройки в таблице.

a	b	c
5	12	13
10	24	?
15	?	39
?	48	52

2) Если числа a, b, c являются Пифагоровыми тройками, то и числа ak, bk, ck ($k > 0$) также являются Пифагоровыми тройками. Основываясь на это, заполните таблицу.

3) Для каждой простой Пифагоровой тройки запишите соответствующие новые тройки.

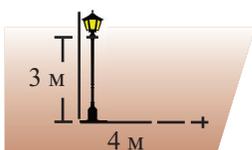
1) 8; 15; 17;

2) 9; 40; 41;

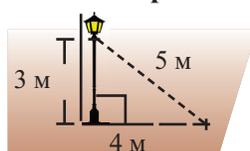
3) 7; 24; 25.

11) Длины двух сторон прямоугольного треугольника равны 7 см и 10 см. Найдите возможные значения длины третьей стороны.

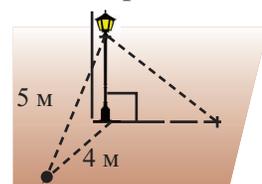
12) **Исследование.** Как можно при помощи Пифагоровых троек проверить, перпендикулярен ли столб со светильником поверхности земли, если его высота равна 3 м? Ответ запишите с объяснением отдельно для каждого случая на рисунках.



I измерение.

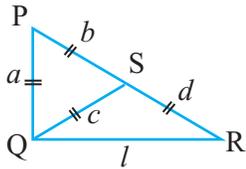


II измерение.

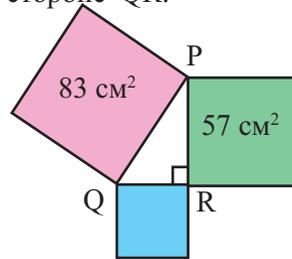


Применение теоремы Пифагора

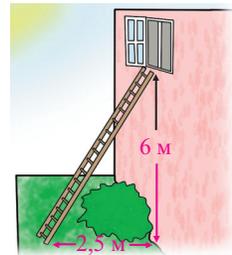
- 1**» Дано: $\triangle PQR$ $a = b = c = d$
 1) Докажите, что $\angle PQR = 90^\circ$
 2) Найдите значение l , при $a = 1$.



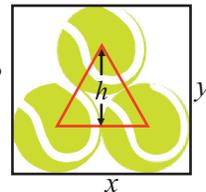
- 2**» По данным рисунка найдите площадь квадрата, построенного на стороне QR.



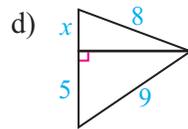
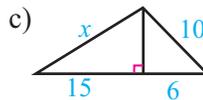
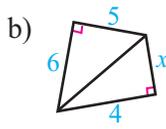
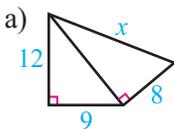
- 3**» Окно второго этажа находится на высоте 6 м. Для того, чтобы подняться на второй этаж, на расстоянии 2,5 м от стены можно поставить лестницу. Какой длины должна быть эта лестница?



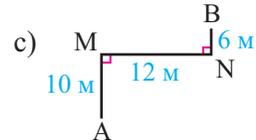
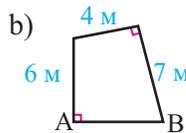
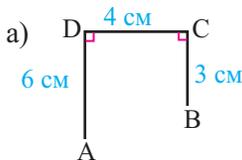
- 4**» Теннисные мячи сложены в коробку по правилу, как показано на рисунке. Диаметр каждого мяча равен 6 см.
 1) Найдите размер коробки, обозначенный через x .
 2) Может ли дно коробки иметь квадратную форму? Обоснуйте ответ, найдя y .



- 5**» По данным рисунка найдите x .



- 6**» Найдите расстояние между точками А и В.



- 7**» Можно ли утверждать, что окно, высота которого равна 180 см, ширина 240 см, а диагональ 300 см имеет форму прямоугольника?

- 8**» Длины сторон прямоугольного треугольника выражены последовательными четными числами. Найдите стороны треугольника.

Применение теоремы Пифагора

9 **Исследование.** Многие Пифагоровы тройки начинаются с нечётных чисел.

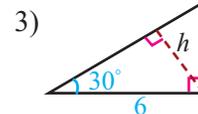
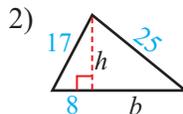
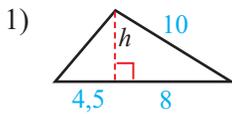
1) Возведите в квадрат первое число Пифагоровой тройки. Есть ли связь между ним и двумя другими числами?

2) Приняв Пифагоровы тройки за $x, y, y+1$, запишите результат, полученный в пункте 1, выразив y через x .

3) Можно ли по результатам пункта 2 утверждать, что существует бесконечное число Пифагоровых чисел?

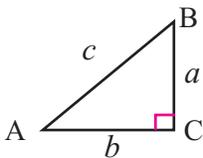
4) При помощи программы Excel составьте таблицу всех Пифагоровых троек, если первое число находится в интервале от 3 до 31.

10 По данным рисунка найдите высоту h и периметр треугольника



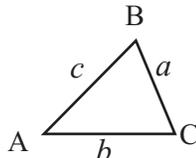
Определение вида треугольника по длинам его сторон

Пусть a, b, c стороны треугольника и $a \leq b \leq c$



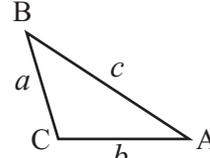
Если $c^2 = a^2 + b^2$,
то $\angle C = 90^\circ$.

$\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник.



Если $c^2 < a^2 + b^2$,
то $\angle C < 90^\circ$.

$\triangle ABC$ - остроугольный треугольник.



Если $c^2 > a^2 + b^2$,
то $\angle C > 90^\circ$.

$\triangle ABC$ - тупоугольный треугольник.

Пример. Определите вид треугольника со сторонами: а) 7; 8; 10; б) 5; 8; 10

Решение: а) так как $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113 > 10^2$, то треугольник остроугольный

б) так как $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89 < 10^2$, то треугольник тупоугольный.

11 Можно ли построить треугольник по данным сторонам?

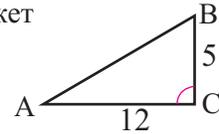
Если это возможно, определите, является ли он прямоугольным, остроугольным или тупоугольным.

Указание: обоснуйте ответ, записав неравенство треугольника.

- а) 16; 18; 26 б) 1; 3; $2\sqrt{2}$ в) 6; 7; 8 д) 8; 12; $4\sqrt{3}$
 е) 15; 8; 17 ф) 12; 36; 35 г) $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$

Применение теоремы Пифагора

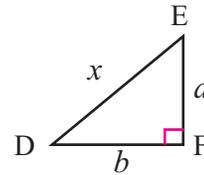
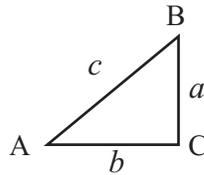
- 12** В $\triangle ABC$ $AC = 12$, $BC = 5$. Какие целые значения может принимать длина стороны AB , если:
 а) $\angle C = 90^\circ$; б) $\angle C > 90^\circ$; в) $\angle C < 90^\circ$?



- 13** Закончите доказательство теоремы, обратной теореме Пифагора.

Дано: $\triangle ABC$, $c^2 = a^2 + b^2$

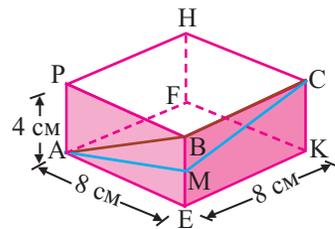
Докажите, что $\angle C = 90^\circ$



Начертим прямоугольный треугольник DEF с катетами a и b . Обозначим гипотенузу через x .

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x^2 = ?$ 2. $c^2 = a^2 + b^2$ 3. $c = x$ 4. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 5. $\angle C$-прямой угол 6. $\triangle ABC$-прямоугольный треугольник | <ol style="list-style-type: none"> 1. В $\triangle DEF$ по теореме Пифагора: 2. По условию 3. <u> ?</u> 4. \triangle конгруэнтны по признаку <u> ?</u> 5. <u> ?</u> 6. <u> ?</u> |
|---|--|

- 14** В прямоугольной призме показаны два различных пути между точками A и C . Точка M является серединой ребра BE . Какой из путей короче, путь ABC или AMC ?

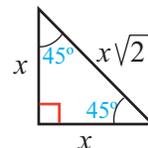


Особые прямоугольные треугольники

При помощи теоремы Пифагора можно записать правило, которое связывает стороны треугольников с углами 45° ; 45° ; 90° и 30° ; 60° ; 90° .

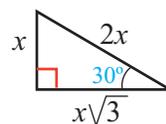
Теорема 1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов в $\sqrt{2}$ раза.

Отношение сторон: $1 : 1 : \sqrt{2}$



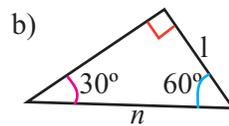
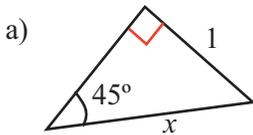
Теорема 2. В прямоугольном треугольнике с острым углом 30° гипотенуза в 2 раза больше меньшего катета. Большой катет длиннее меньшего катета в $\sqrt{3}$ раза.

Отношение сторон: $1 : \sqrt{3} : 2$

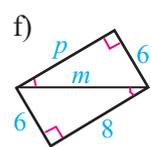
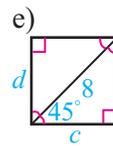
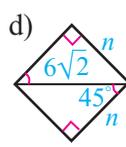
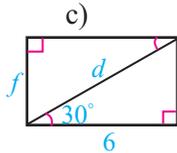
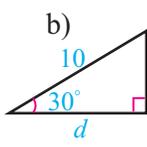
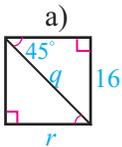


Применение теоремы Пифагора

15 Проверьте теоремы 1 и 2 при помощи решения следующих задач.



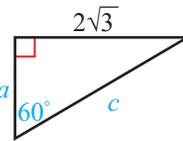
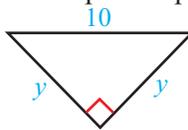
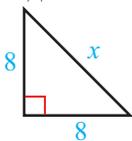
16 Найдите неизвестные длины сторон и диагоналей на рисунках.



17 По данным условиям найдите длины требуемых сторон. При необходимости, ответ округлите до десятых.

- 1) Начертите равносторонний треугольник со стороной 6 см и найдите его высоту.
- 2) Найдите диагональ квадрата, периметр которого равен 24 см.
- 3) Диагонали квадрата равны 16 мм. Найдите стороны квадрата.

18 Найдите длины неизвестных сторон на рисунке.



19 **Вопрос открытого типа:** начертите прямоугольник, диагональ которого в 2 раза больше ширины. Затем найдите длину прямоугольника при помощи теоремы Пифагора. Запишите ширину, длину и отношение диагоналей. Сравните полученные ответы.

20 Докажите теоремы об особых прямоугольных треугольниках.

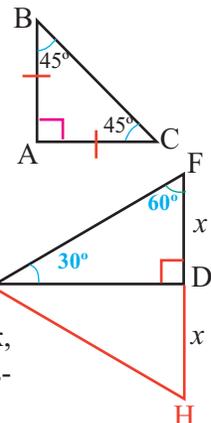
1) **Дано:** $\triangle ABC$ равнобедренный прямоугольный треугольник

Докажите: гипотенуза в $\sqrt{2}$ раза больше длины каждого из катетов.

2) **Дано:** $\triangle EFD$ прямоугольный треугольник с углом 30° .

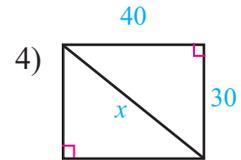
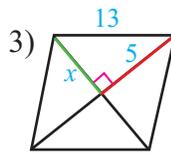
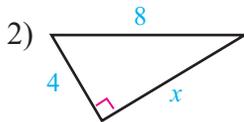
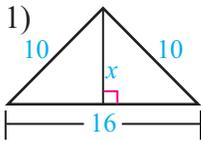
Докажите: Гипотенуза в 2 раза больше меньшего катета, больший катет в $\sqrt{3}$ раза длиннее меньшего.

План для доказательства: постройте треугольник, конгруэнтный $\triangle EFD$. Докажите, что $\triangle HFE$ является равнобедренным треугольником.

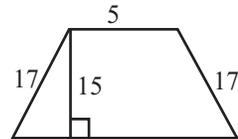


Применение теоремы Пифагора

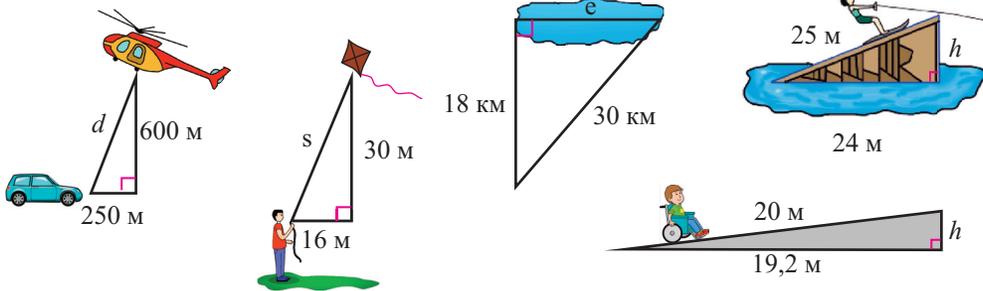
21 По данным рисунка найдите x .



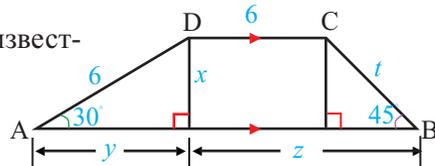
22 По данным рисунка найдите периметр равнобедренной трапеции.



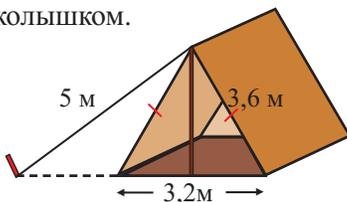
23 По данным рисунка найдите неизвестные значения переменных.



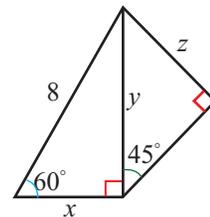
24 По данным на рисунке найдите неизвестные значения переменных.



25 Для того, чтобы увеличить устойчивость палатки, её закрепили железной проволокой, на конце которой находится деревянный кольшечек, закопанный в землю. Найдите наименьшее расстояние между палаткой и кольшечком.



26 По рисунку найдите значения x , y , и z .

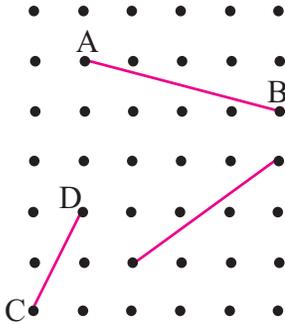


27 Эльчин совершает прогулку по участку прямоугольной формы размерами $90 \text{ м} \times 120 \text{ м}$. За одну секунду он проходит $1,5 \text{ м}$. Он движется то по периметру, то по диагонали. На сколько меньше времени затратит Эльчин на перемещение из одного угла парка до другого по диагонали, чем на движение по периметру за один период.

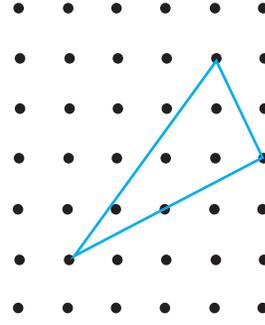
Применение теоремы Пифагора

28» Гасан начал движение на автомобиле со скоростью 60 км/ч от железнодорожного вокзала в восточном направлении в 14:00. Через час, в направлении на север, со скоростью 50 км/ч из той же точки начал движение Башир. Какое расстояние будет между ними в 16:00?

29» Не пользуясь линейкой, определите, скольким единицам равна длина каждого отрезка на рисунке.



30» Не пользуясь линейкой, определите, скольким единицам равен периметр треугольника на рисунке.



31» При помощи теоремы Пифагора на листе бумаги в клетку изобразите отрезки заданной длины.

a) $\sqrt{17}$

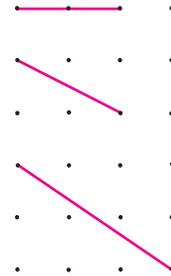
b) $\sqrt{13}$

c) $\sqrt{10}$

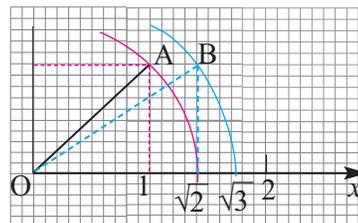
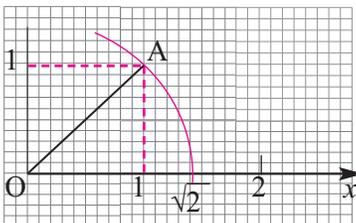
d) $\sqrt{8}$

32» Отрезки на рисунке изображены на листе в клетку. Выполните следующие задания.

- Определите, скольким единицам равна длина каждого отрезка.
- Можно ли из данных отрезков построить треугольник?
- Если треугольник построить возможно, то каким он будет: прямоугольным, остроугольным или тупоугольным?



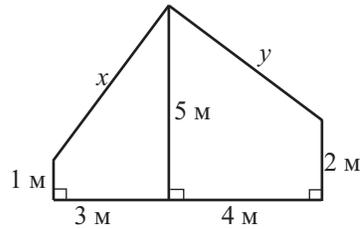
33» На рисунках ниже показано, как построены отрезки длиной $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, и как на числовой оси отмечены точки, соответствующие данным числам. Исследуйте рисунки. Постройте отрезки длиной $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и на числовой оси отметьте точки, соответствующие данным числам.



Применение теоремы Пифагора

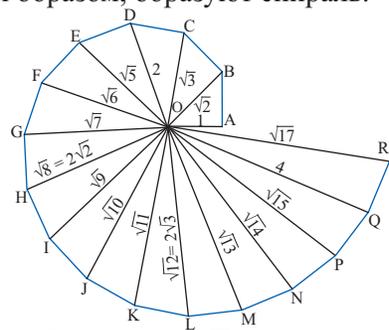
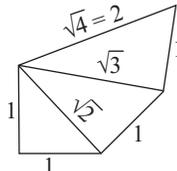
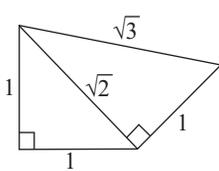
34) На рисунке показана конструкция, которая используется при сооружении крыши дома.

- 1) Найдите длины балок, отмеченных в конструкции как x и y .
- 2) Определите вид угла, образованного данными балками.



3) Найдите длину всех балок, используемых в данной конструкции, принимая во внимание, что теряется приблизительно 2% материала.

35) **Задание для долгосрочного выполнения. Построение отрезка длиной \sqrt{n} ($n \in \mathbb{N}$). Спираль Теодора.** Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 1, равна $\sqrt{2}$. Построим треугольник, один из катетов которого равен гипотенузе данного треугольника, а другой равен 1. На его гипотенузе вновь построим прямоугольный треугольник и т.д. Треугольники, построенные таким образом, образуют спираль.



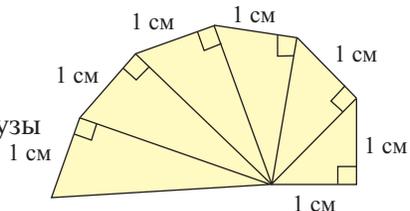
Греческий ученый Теодор, живший через 100 лет после Пифагора, создал математическую модель спиральной формы из прямоугольных треугольников. Эта форма названа его именем **Спираль Теодора**. В природе можно наблюдать формы, похожие на спираль Теодора.



Вы также при помощи спирали Теодора нарисуйте и раскрасьте разные рисунки.

36) По спирали Теодора на рисунке выполните следующие задания.

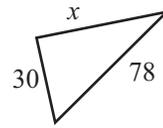
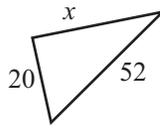
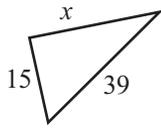
- Для каждого прямоугольного треугольника на рисунке определите, квадратным корнем из какого числа является его гипотенуза.
- Вычислите квадратный корень при помощи калькулятора с точностью до десятых.
- Измерьте длину каждой гипотенузы линейкой.
- Сравните результаты пунктов б и с.



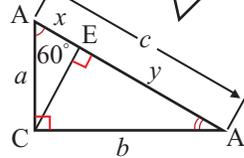
Обобщающие задания

- 1) Вычислите неизвестные стороны следующего треугольника, найдя простые пифагоровы тройки, соответствующие данным числам.

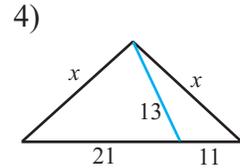
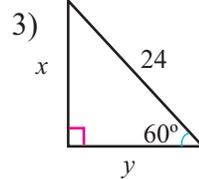
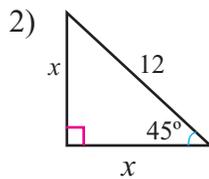
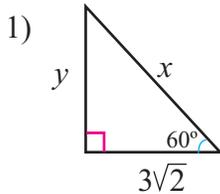
Указание: найдите общий делитель заданных чисел.



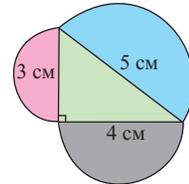
- 2) 1) Если $a = 10$, то найдите y и CE .
2) Если $x = 8$, то найдите a , b , и y .



- 3) Найдите длины неизвестных сторон треугольников.

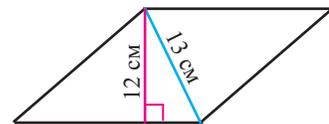


- 4) Найдите площади полукругов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника. Обобщите и запишите свое мнение о данных площадях.



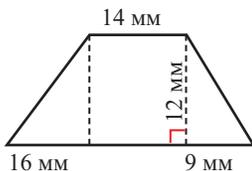
- 5) а) Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a .
б) Найдите периметр равностороннего треугольника с высотой h .

- 6) По данным рисунка найдите сторону ромба.

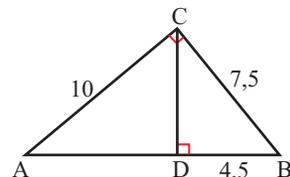


- 7) По заданным сторонам проведите классификацию треугольников по углам: 1) 4; 4; 7 2) 8; 8; $8\sqrt{2}$ 3) 20; 15; 21

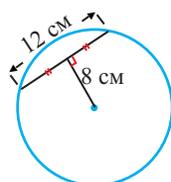
- 8) По данным рисунка найдите периметр трапеции.



- 9) По данным рисунка найдите длину AD.



- 10) Расстояние от центра окружности до середины хорды равно 8 см. Длина хорды равна 12 см. Найдите радиус окружности. **Указание:** изобразите радиусы и примените свойство медианы равнобедренного треугольника.



3

Квадратные уравнения

В этом разделе вы научитесь:

- решать квадратные уравнения различными способами;
- применять квадратные уравнения для решения задач.

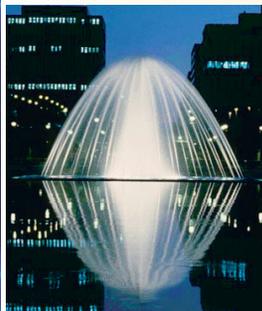
Квадратные уравнения широко применяются в строительстве, финансах и дизайне.

Это интересно!

“Отцом” алгебры называют гениального математика Аль-Хорезми, который родился в 780 году в городе Хивы ныне Узбекистан и жил в Багдаде, за то, что он систематизировал алгебру.

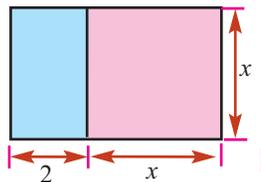


Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата впервые было предложено аль - Хорезми. Его имя, звучавшее на латинском как “Alkhorizmi”, на французском - “Algorithme”, на английском - “Augrim”, дало название термину «Алгоритм», который широко используется в настоящее время во всех языках. Слово «Алгебра» взято из его труда “*Al-jabr w'al muqabala*”. Аль - Хорезми впервые в математике использовал цифру «ноль», а также систематизировал все, на тот момент известные, знания по алгебре с научной и методической точки зрения. На рисунке изображена марка, которая выпущена в честь 1200-летнего юбилея учёного.



Квадратные уравнения

Исследование. Если от прямоугольника отрезать полосу шириной 2 единицы, то площадь оставшегося квадрата будет на 15 квадратных единиц больше площади полосы. Как можно найти площадь прямоугольника? Обозначив сторону квадрата через x , получим



уравнение, $x^2 = 2x + 15$ или $x^2 - 2x - 15 = 0$. В полученном уравнении одна переменная, наивысшая степень которой равна 2. Такие уравнения называются квадратными уравнениями. Чтобы решить уравнения данного вида, мы должны научиться различным методам решения квадратных уравнений.

Квадратные уравнения

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ называется квадратным уравнением. Здесь a, b, c - постоянные, x - неизвестная.

a - первый (или старший) коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член. Например, в уравнении $3x^2 - x - 7 = 0$, $a = 3, b = -1, c = -7$.

Разделив обе части квадратного уравнения на число a , получим уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Здесь, обозначив $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$, можно записать $x^2 + px + q = 0$. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется приведённым квадратным уравнением.

Например, разделив уравнение $2x^2 - 6x - 8 = 0$ на 2, получим равносильное ему приведённое квадратное уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Обучающие задания

1 Выберите квадратные уравнения и для каждого из них запишите коэффициенты.

- a) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $\frac{3}{4}x^2 - 2x - 3 = 0$ c) $x - 4 = 5$
 d) $\frac{6}{x^2} - x + 2 = 0$ e) $6x^2 + x = 0$ f) $-x^2 + 5 = 0$

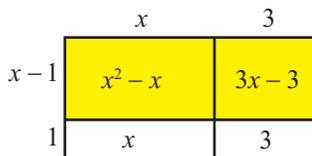
2 Представьте уравнения в виде $ax^2 + bx + c = 0$.

- 1) $(x - 2)(x + 1) = (2x - 5)^2 + 1$ 4) $(2x - 1)^2 = (x - 1)(x + 7)$
 2) $-2(x + 5)(x - 8) = 0$ 5) $4(x - 1)^2 + 9 = 0$
 3) $(x + 3)^2 + 3(2x + 1)^2 - 54 = 0$ 6) $(3x - 2)^2 - 15(2x - 2)^2 + 12 = 0$

3 Замените квадратное уравнение равносильным приведённым квадратным уравнением.

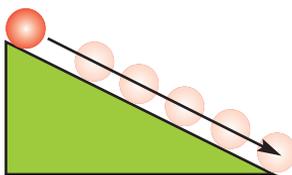
- a) $3x^2 + 6x - 12 = 0$ b) $2x^2 - 10x + 12 = 0$
 c) $5x^2 - 4x - 1 = 0$ d) $-x^2 + 6x + 3 = 0$

4 На рисунке площадь закрашенной части равна 21 кв. ед. Запишите квадратное уравнение, которое поможет найти длины сторон прямоугольника.



Квадратные уравнения

Исследование. На уроке физики был проведён опыт по изучению движения мяча по наклонной плоскости, как показано на рисунке. Высоту, на которой находится мяч в любой момент времени t , можно найти по формуле $h = -4,9t^2 + 4$.



Для нахождения времени, за которое мяч коснется земли, примите $h = 0$ и решите уравнение $-4,9t^2 + 4 = 0$. Подумайте, какая величина более реальна в данной формуле вместо числа 4.

Неполные квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется неполным квадратным уравнением.

Уравнения $ax^2 = 0$ ($b = c = 0$), $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0, b \neq 0$), $ax^2 + c = 0$ ($b = 0, c \neq 0$) являются неполными квадратными уравнениями.

1) Решение уравнений вида $ax^2 = 0$. Разделив обе части уравнения на число $a \neq 0$, получим уравнение $x^2 = 0$. Его корнями являются $x_1 = x_2 = 0$.

Пример 1. Разделим обе части уравнения $3x^2 = 0$ на 3: $x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$.

2) Решение уравнений вида $ax^2 + bx = 0$. Для решения таких уравнений применяют вынесение общего множителя за скобку: $x \cdot (ax + b) = 0$.

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, т.е. $x = 0$ или $ax + b = 0$. Отсюда следует, что уравнение $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня, один из которых всегда равен «0»: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$

Пример 2. Решите уравнение $2x^2 - 5x = 0$.

Решение: Левую часть уравнения разложим на множители: $x \cdot (2x - 5) = 0$. Отсюда $x = 0$ или $2x - 5 = 0$. Решив уравнение $2x - 5 = 0$, находим $x = 2,5$. Значит, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$; $x_2 = 2,5$.

3) Решение уравнений вида $ax^2 + c = 0$.

Запишем уравнение $ax^2 + c = 0$ в виде $ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Если a и c имеют одинаковые знаки, то действительных корней нет (почему?). Если a и c имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Пример 3. Решите уравнение $4x^2 - 8 = 0$.

Решение: $4x^2 = 8$, $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$

Обучающие задания

5» Решите уравнение.

1) $2x^2 = 0$; 2) $x^2 - 16 = 0$ 3) $-2x^2 = -50$ 4) $8x^2 = 2x^2$

5) $x^2 - 3 = 0$; 6) $2x^2 + x = 0$; 7) $2x^2 + 8 = 0$ 8) $3x = 2x^2$

6» Решите уравнение.

a) $4x^2 = 8$ b) $\frac{x^2}{25} - 4 = 5$ c) $7x^2 - 10 = 18$

d) $6x^2 + 3x = 3x^2 - x$ e) $2x^2 - 18 = 3x^2 + 7$ f) $x^2 = 2x^2 + 2x$

Квадратные уравнения

7» Найдите такие значения k , при котором данное уравнение станет неполным квадратным уравнением. Запишите уравнение при соответствующих значениях k и решите его.

а) $2x^2 + (k - 2)x - (k + 6) = 0$ б) $2x^2 - (k + 1)x - 15 + k = 0$

8» Запишите уравнение вида $x^2 + c = 0$ так, чтобы оно: а) имело два различных корня; б) имело два равных корня; с) не имело действительных корней.

9» Покажите, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ имеют одинаковые корни.

10» Решите уравнение.

а) $\frac{x^2 - 1}{3} + \frac{x^2 + 1}{2} = 3,5$

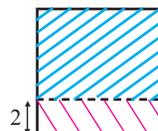
б) $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x^2 + 5}{6} = \frac{1}{2}$

с) $x^2 + 2x = \frac{2x^2 + 9x}{6}$

д) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$

Прикладные задания

11» От квадрата отрезали полосу шириной 2 см так, что площадь полосы оказалась в 2 раза меньше площади оставшейся части. Найдите сторону квадрата.

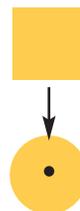


12» 1) Квадрат какого натурального числа равен его утроенному произведению?

2) Найдите периметр прямоугольника, площадь которого 100 м^2 , а длина в 4 раза больше ширины.

3) Чему равен радиус круга, площадь которого равна $16\pi \text{ см}^2$?

13» Садовник хочет превратить клумбу квадратной формы со стороной 7 м, в клумбу круглой формы. При этом площадь должна остаться неизменной.



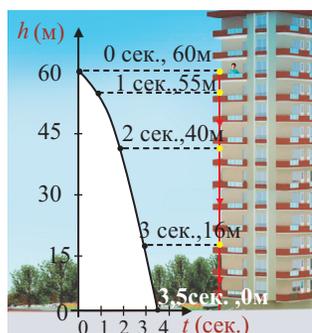
1) Чему приблизительно равен радиус новой клумбы?

2) Запишите зависимость между стороной квадрата (a) и радиусом круга (r) одинаковой площади в общем виде.

14» При свободном падении тела, расстояние (m) между телом и поверхностью Земли можно найти по формуле $h = -4,9t^2 + h_0$ (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

Здесь h_0 - показывает высоту, с которой оно начало падать. Когда тело достигает поверхности Земли $h = 0$.

На рисунке изображена траектория движения тела, брошенного горизонтально с высоты 60 м. Решите уравнение $-4,9t^2 + 60 = 0$ и найдите, через сколько секунд тело упадет на Землю.



Верно ли предположение, что: «Данная задача имеет одно положительное и одно отрицательное решение»? Найдите, приблизительно через сколько секунд тело, находящееся на высоте: а) 120 м ; б) 250 м , упадет на Землю?

Решение квадратных уравнений методом разложения на множители

Практическая работа. Разложение на множители при помощи алгебраических карт.

Из цветной бумаги подготовьте алгебраические карты как показано на рисунке.

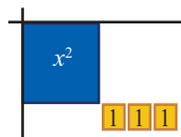


Пример 1. Решите уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$ методом разложения на множители.

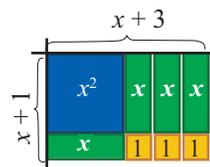
Решение: При помощи алгебраических карт разложим трёхчлен $x^2 + 4x + 3$ на множители.



1. Сначала разместим карту x^2 . Затем разложим в форме прямоугольника карты с единицами. В этом случае, так как число 3 является простым числом, его можно представить единственным образом в виде прямоугольника (1×3) .



2. Теперь достроим прямоугольник при помощи карт с x -ом. Ширина прямоугольника будет равна $(x+1)$, а длина $(x+3)$. Тогда $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$. Записав уравнение в виде $(x+3)(x+1) = 0$, имеем, $x+3 = 0$ или $x+1 = 0$. Отсюда находим: $x_1 = -3$; $x_2 = -1$.

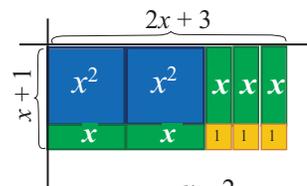


Пример 2. Решите уравнение $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Решение: Аналогичным образом можно разложить на множители трёхчлен $2x^2 + 5x + 3$.

$2x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x+1)$. Записав уравнение в виде $(2x+3)(x+1) = 0$, имеем, $2x+3 = 0$ или $x+1 = 0$.

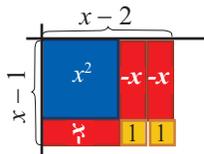
Отсюда $x_1 = -1,5$; $x_2 = -1$.



Пример 3. Решите уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$

Решение: Как показано на рисунке $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Записав уравнение в виде $(x-1)(x-2) = 0$, имеем, $x-1 = 0$ или $x-2 = 0$. Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.



Обучающие задания

1» Для следующих примеров начертите модель площади и запишите соответствующий квадратный трёхчлен.

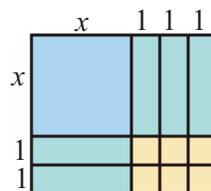
Пример. $(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$

1) $(x+2)(x+6)$

3) $(x+4)(x+3)$

2) $(x+1)(x+4)$

4) $(2x+1)(x+3)$



2» На основе приведённых выше примеров решите уравнение методом разложения на множители.

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

b) $x^2 - 4x - 5 = 0$

c) $x^2 + 5x + 4 = 0$

d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

e) $x^2 - 2x - 8 = 0$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

3» Разложите левую часть на множители построив при помощи алгебраических карт прямоугольник и решите уравнение.

1) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

2) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

Решение квадратных уравнений методом разложения на множители

Решение уравнения $x^2 + bx + c = 0$ методом разложения на множители

Для разложения левой части уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на множители надо найти два числа m и n (если это возможно), чтобы их произведение было равно c , а сумма b . Если c и b являются целыми числами, то m и n - также целые числа. В этом случае, если $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, то заданное уравнение можно записать в виде: $(x + m)(x + n) = 0$

Рассмотрим примеры, соответствующие различным случаям знаков коэффициентов b и c .

Пример 1. Решите уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Решение: $b = 6, c = 8$. b и c положительны, т.е. надо найти два положительных числа, произведение которых равно 8, а сумма 6. Это числа 2 и 4.

Так как $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$, запишем уравнение вида $(x + 2)(x + 4) = 0$. Получим: $x + 2 = 0$ или $x + 4 = 0$. Отсюда находим, $x_1 = -2, x_2 = -4$.

Множители числа 8	Сумма множителей
1 и 8	9
2 и 4	6

Пример 2. Решите уравнение $x^2 - 9x + 18 = 0$.

Решение: $b = -9, c = 18$. b -отрицательно, c - положительно. Т.е. надо найти такие отрицательные числа, произведение которых равно 18, а сумма -9 . Это числа -3 и -6 . Так как $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$, запишем уравнение вида $(x - 3)(x - 6) = 0$. Отсюда $x_1 = 3, x_2 = 6$.

Множители числа 18	Сумма множителей
-2 и -9	-11
-3 и -6	-9

Пример 3. Решите уравнение $x^2 + 5x - 14 = 0$.

Решение: $b = 5, c = -14$. Числами, произведение которых равно -14 , а сумма 5, являются числа -2 и 7, тогда $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$ и корнями уравнения $(x - 2)(x + 7) = 0$ являются числа $x_1 = 2, x_2 = -7$.

Множители числа 14	Сумма множителей
2 и -7	-5
-2 и 7	5

Пример 4. Решите уравнение $x^2 - 4x - 21 = 0$.

Решение: так как $x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$, то из уравнения $(x - 7)(x + 3) = 0$ находим $x_1 = 7, x_2 = -3$.

Множители числа 21	Сумма множителей
7 и -3	4
-7 и 3	-4

Обучающие задания

4» Решите квадратные уравнения, методом разложения на множители.

1) $x^2 = 64$

5) $x^2 - 4x + 3 = 0$

9) $x^2 - 3x + 2 = 0$

2) $x^2 - 100 = 0$

6) $x^2 + 2x - 3 = 0$

10) $-x^2 + 6x = 0$

3) $x^2 - 9x = 0$

7) $x^2 - 3x - 10 = 0$

11) $x^2 + 18x = -81$

4) $4x^2 - 25 = 0$

8) $x^2 - 6x + 5 = 0$

12) $x^2 + 3x = 18$

5» Запишите вместо k такие числа, чтобы уравнение можно было решить методом разложения на множители.

1) $x^2 + kx + 24 = 0$

2) $x^2 + kx + 12 = 0$

3) $x^2 + kx + 27 = 0$

Решение квадратных уравнений методом разложения на множители

6 m_1 и m_2 корни квадратного уравнения, левая часть которого разложена на множители как $(x - m_1)(x - m_2) = 0$. Запишите квадратное уравнение по заданным корням.

- 1) 1 и -3 2) -8 и -2 3) 3 и -3 4) -5 и 2
 5) 2 и $-\frac{1}{3}$ 6) $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$ 7) $\frac{5}{4}$ и $\frac{1}{2}$ 8) 9 и $\frac{1}{6}$

Пример. 1) 1 и -3; $(x - 1)(x + 3) = 0$; $x^2 + 3x - x - 3 = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$

7 Решите уравнения методом разложения на множители.

$x^2 + 3x + 2 = 0$	$z^2 - 3z - 4 = 0$	$m^2 - 5m - 14 = 0$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 - 13x + 12 = 0$	$x^2 + x - 20 = 0$
$x^2 + 7x + 10 = 0$	$r^2 - 11r + 18 = 0$	$x^2 - 3x - 40 = 0$
$x^2 + 10x + 16 = 0$	$x^2 - 10x + 24 = 0$	$c^2 + 2c - 63 = 0$
$y^2 + 13y + 36 = 0$	$n^2 - 12n + 27 = 0$	$x^2 + 10x - 75 = 0$
$x^2 + 22x + 40 = 0$	$x^2 - 13x + 36 = 0$	$t^2 - 7t - 44 = 0$

8 Фарид, Эльмир и Сона записали квадратные уравнения, зная, что его корни равны -7 и 5. Кто из них выполнил задание верно?

Фарид

Эльмир

Сона

$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

9 Корни каких уравнений не являются целыми числами?

- a) $x^2 - 3x - 18 = 0$ b) $n^2 - 3n + 9 = 0$ c) $r^2 + 2r - 63 = 0$
 d) $x^2 + x - 12 = 0$ e) $x^2 + 2x - 13 = 0$ f) $x^2 + 8x + 15 = 0$

10 Решите уравнения, разложив левые части на множители, используя формулы сокращённого умножения.

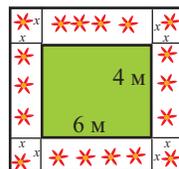
- 1) $0,25t^2 - 0,16 = 0$ 2) $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 54 = 0$
 3) $3600z^2 - 4900 = 0$ 4) $(x - 2)^2 - 15(x - 2) + 56 = 0$

Прикладные задачи

11 Площадь прямоугольника равна 28 м^2 . Какие целые числа могут являться сторонами (в метрах) этого прямоугольника?

12 Размеры декоративной деревянной панели $24 \text{ см} \times 16 \text{ см}$. По краям панели приклеена деревянная рамка, площадью 276 см^2 . Найдите ширину рамки. Нарисуйте соответствующий рисунок.

13 Дядя Таир, по краям сада, размеры которого $4 \text{ м} \times 6 \text{ м}$, посадил цветы. Тем самым он увеличил площадь участка на величину, равную площади сада. Найдите ширину цветника.



14 1) Как при разложении трёхчлена $x^2 + bx + c$ на множители учитывается знак коэффициента c ? Обобщите, подобрав соответствующие примеры.
 2) При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx + 7 = 0$ являются целыми числами?

Решение квадратных уравнений методом разложения на множители

Решение уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ методом разложения на множители

Для разложения левой части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на множители надо найти такие числа m и n , чтобы $mn = ac$, $m + n = b$. В этом случае, так как

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c = x(ax + m) + (nx + c) = x(ax + m) + \frac{n}{a}(ax + m) = (ax + m)\left(x + \frac{n}{a}\right),$$

заданное уравнение можно записать в виде $(ax + m)\left(x + \frac{n}{a}\right) = 0$.

Пример 1. Решите уравнение $2x^2 + 6x + 4 = 0$.

Решение: $2x^2 + 6x + 4 = 2x^2 + mx + nx + 4$.

В этом случае $mn = 2 \cdot 4 = 8$, $m + n = 6$.

2 и 4 - числа произведение которых равно 8,

а сумма 6. Так как $2x^2 + mx + nx + 4 = 2x^2 + 2x + 4x + 4 =$

$= (2x^2 + 2x) + (4x + 4) = 2x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(2x + 4)$, записав уравнение в виде $(2x + 4)(x + 1) = 0$ получим: $2x + 4 = 0$ или $x + 1 = 0$.

Отсюда, $x_1 = -2$; $x_2 = -1$

Пример 2. Решите уравнение $4x^2 - 13x + 10 = 0$.

Решение: $a = 4$, $b = -13$, $c = 10$. $ac = 4 \cdot 10 = 40$. Так как произведение ac положительно, а b отрицательно, то каждое из чисел m и n должно быть отрицательно. Подберем пару отрицательных целых чисел, произведение которых равно 40, а сумма -13 . Это числа -5 и -8 .

$$4x^2 - 13x + 10 = 4x^2 - 5x - 8x + 10 =$$

$$= x(4x - 5) - 2(4x - 5) = (4x - 5)(x - 2).$$

Получим уравнение $(4x - 5)(x - 2) = 0$, тогда: $4x - 5 = 0$

или $x - 2 = 0$. Отсюда $x_1 = 1,25$; $x_2 = 2$

Пример 3. В трехчлене $4x^2 - 5x + 4$ $mn = 16$

$m + n = -5$. Составим список целых отрицательных чисел, которые являются множителями числа 16. Как видно, не существует чисел, удовлетворяющих условию $mn = 16$, $m + n = -5$. Значит, разложить данный трехчлен на множители, используя целые числа, невозможно.

Множители числа 8	Сумма множителей
1 и 8	9
2 и 4	6

Множители числа 40	Сумма множителей
-4 и -10	-14
-5 и -8	-13

Множители числа 16	Сумма множителей
-4 и -4	0
-2 и -8	-10
-1 и -16	-17

Обучающие задания

15» Начертите в тетради таблицу и заполните её.

Множители квадратного трёхчлена	$ax^2 + mx + nx + c$	$ax^2 + bx + c$	$m + n = b$	$mn = ac$
$(2x + 1)(x + 4)$	$2x^2 + 8x + x + 4$	$2x^2 + 9x + 4$	$8 + 1 = 9$	$8 \cdot 1 = 8$
$(x + 1)(2x - 4)$				
$(2x - 1)(4x + 1)$				
$(3x + 1)(x + 5)$				
$(4x - 3)(2x - 1)$				

Решение квадратных уравнений методом разложения на множители

16» Решите уравнение методом разложения на множители.

1) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

7) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

2) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

5) $4x^2 - 7x - 11 = 0$

8) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

3) $2x^2 - 7x + 5 = 0$

6) $3x^2 - 13x - 30 = 0$

9) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

17» Решите, если это возможно, следующие квадратные уравнения, разложив левую часть на множители при помощи целых чисел, а если это невозможно, поставьте знак *.

$4x^2 + 7x + 14 = 0$

$2x^2 - 3x - 9 = 0$

$3x^2 - 8x + 11 = 0$

$2x^2 + 7x + 6 = 0$

$5x^2 + 3x + 4 = 0$

$4x^2 + 22x + 10 = 0$

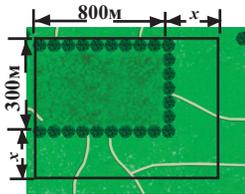
$4x^2 - 12x + 5 = 0$

$3x^2 - 2x - 8 = 0$

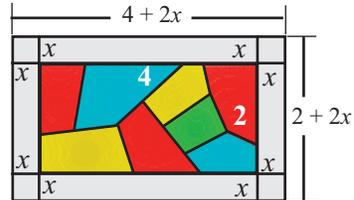
$3x^2 - 8x + 15 = 0$

Прикладные задачи

18» Озеленённый участок размерами 300 м × 800 м намечено увеличить в 1,5 раза, как показано на рисунке. Определите размеры будущего участка.



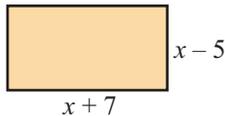
19» Дизайнер хочет по краям окна вида шебеке сделать рамку из простого стекла. Найдите ширину рамки, если размеры окна шебеке 2 м и 4 м, площадь рамки из простого стекла 7 м².



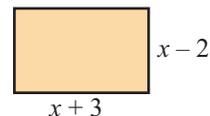
20» Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 319 см², если известно, что ширина прямоугольника на 18 см меньше длины.

21» Найдите значение переменной x по данным рисунка.

Площадь:
64 кв. ед.



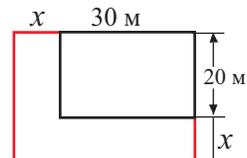
Площадь:
36 кв. ед.



22» Наила вышила узоры на ткани, размеры которой 40 см × 48 см. Для окантовки она купила в магазине ленту, площадь которой равна 180 см². Найдите ширину ленты.

23» Древняя китайская задача. Для измерения двери используют палку, длина которой неизвестна. Длина палки больше ширины двери на 4 ch'ih и больше высоты на 2 ch'ih. Диагональ двери равна длине палки. Найдите размеры двери. **Примечание:** 1ch'ih приблизительно 30 см и до сих пор используется в Китае в качестве меры длины.

24» **Вопрос открытого типа.** Составьте задачу по рисунку и решите её.



Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата

Исследование. Рисунок из алгебраических карт соответствует выражению $x^2 + 6x$

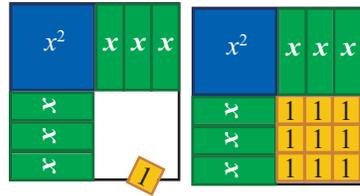
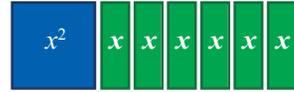
1. Карты с x разделите на две части и расположите, как указано на рисунке.

2. Чтобы дополнить модель до квадрата, потребуется 3×3 единичные карты.

3. Достроенному квадрату соответствует трёхчлен $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

4. Придумайте аналогичный пример.

5. Есть ли связь между дополнительными единичными картами и коэффициентом b ? Определите эту зависимость.



Метод выделения полного квадрата

Если к двухчлену вида $x^2 + bx$ добавить член $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, то его можно дополнить до полного квадрата:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Пример 1. Решите уравнение $x^2 - 5x - 6 = 0$.

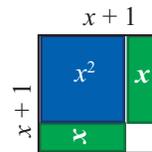
Решение: запишем уравнение в виде $x^2 - 5x = 6$ и прибавив к обеим частям $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}. \quad \text{Отсюда } x - \frac{5}{2} = \pm \frac{7}{2}$$

т.е., записав $x = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$, находим: $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6$; $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$

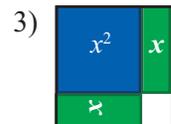
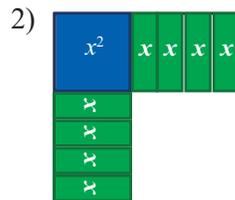
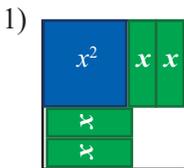
Пример 2. Решите уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$ методом выделения полного квадрата.

Решение: сначала перепишем уравнение в виде $x^2 + 2x = 3$. Выражению левой части соответствует модель площади, в которой для того, чтобы она превратилась в квадрат, не хватает 1 соответствующей единичной алгебраической карты. К обеим частям уравнения добавим 1. Запишем левую часть в виде квадрата двухчлена: $x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$, $(x + 1)^2 = 4$. Отсюда получаем $x + 1 = \pm 2$. Записав в виде $x = -1 \pm 2$, находим: $x_1 = -1 + 2 = 1$, $x_2 = -1 - 2 = -3$.



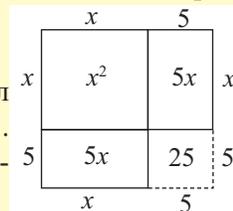
Обучающие задания

1 Достройте модели до квадрата. Запишите выражения для площади квадрата и его стороны.



Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата

Историческая справка. Левую часть уравнения $x^2 + 10x = 39$ аль - Хорезми привёл к полному квадрату следующим образом. С обеих сторон уравнения он добавил $(10/2)^2$ и получил следующее:
 $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \quad (x + 5)^2 = 64 \quad x + 5 = \pm 8$
 $x_1 = 3, x_2 = -13$. В качестве ответа аль - Хорезми выбрал $x = 3$, не приняв при этом во внимание корень -13 . Своё решение он также проиллюстрировал геометрически, как показано на рисунке.



2 В закрашенные квадраты впишите такие числа, чтобы выражения можно было представить в виде квадрата двухчлена. Решение представьте в виде моделей площади квадрата.

$$x^2 + 8x + \blacksquare$$

$$x^2 + 4x + \blacksquare$$

$$x^2 + 10x + \blacksquare$$

$$x^2 - 12x + \blacksquare$$

$$x^2 - x + \blacksquare$$

$$x^2 + 3x + \blacksquare$$

3 Решите квадратное уравнение методом выделения полного квадрата.

a) $x^2 - 2x = 8$

b) $x^2 - 4x = 21$

c) $x^2 + 6x = 16$

d) $x^2 + 2x - 3 = 0$

e) $x^2 + 6x - 7 = 0$

f) $x^2 + 3x - 10 = 0$

g) $x^2 - 20x + 36 = 0$

h) $x^2 - 3x = 4$

i) $x^2 - x = 12$

4 Разделите левую и правую часть уравнения на первый коэффициент и решите уравнение методом выделения полного квадрата.

a) $3x^2 - 2x = 1$

b) $2x^2 - 8x + 8 = 32$

c) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

d) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

e) $0,2x^2 - 1,2x + 1,8 = 5$

f) $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$

Пример. $2x^2 - 8x - 24 = 0$. Запишем уравнение как $2x^2 - 8x = 24$ и разделим обе части уравнения на 2 и добавим $(\frac{4}{2})^2$ к каждой стороне:

$$x^2 - 4x = 12; \quad x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 12$$

$$x^2 - 4x + 4 = 16; \quad (x - 2)^2 = 16; \quad x - 2 = \pm 4; \quad x_1 = 6, \quad x_2 = -2$$

5 Сумма, которую получит вкладчик через 2 года под r % годовых, вычисляется по формуле $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$, где P – первоначальный взнос в банк. Эта формула называется формулой сложного процента. Если вклад за два года вырос с 800 манат до 882 маната, то какова процентная ставка за год?

6 После двух последовательных снижений на r процентов цена костюма снизилась с 240 манат до 135 манат. На сколько процентов каждый раз снижалась цена костюма?

Решение квадратных уравнений графическим методом

Графический метод

Запишем уравнение $x^2 + px + q = 0$ в виде $x^2 = -px - q$. Тогда решением уравнения будут абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = -px - q$. При этом прямая может пересекаться с параболой (тогда уравнение имеет два различных корня), может касаться параболы (в этом случае уравнение удовлетворяется при единственном значении неизвестного) или может вообще не иметь общих точек с параболой (тогда уравнение не имеет действительных корней).

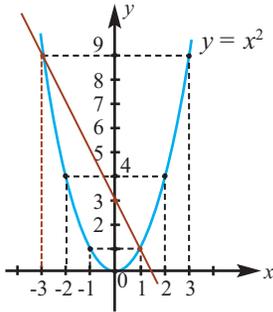
Пример 1.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 3 - 2x$$

x	0	± 1	± 2	± 3
$y = x^2$	0	1	4	9

x	0	1
$y = 3 - 2x$	3	1



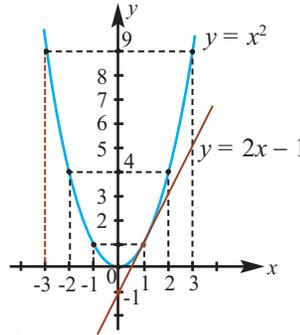
Графики пересекаются в двух точках. Абсциссы точек пересечения равны -3 и 1 . При проверке убеждаемся, что обе точки являются корнями уравнения.

Пример 2. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x^2 = 2x - 1$$

Для построения прямой $y = 2x - 1$ составим таблицу

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1



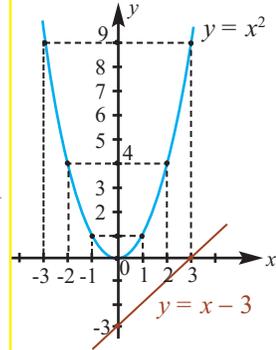
Абсцисса точки касания прямой и параболы равна 1 . Уравнение удовлетворяется при единственном значении неизвестного: $x = 1$.

Пример 3.

$$x^2 - x + 3 = 0$$

$$x^2 = x - 3$$

x	0	3
$y = x - 3$	-3	0



Графики не имеют точек пересечения. Это говорит о том, что данное уравнение не имеет действительных корней.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ удобнее решить графическим методом, представленным выше, разделив обе части на число $a \neq 0$, чтобы оно стало приведенным. Обычно графическим способом находят приближенные значения корней.

Обучающие задания

1» Используя графический метод решения, определите, имеет ли уравнение действительные корни. Если корни существуют, то найдите их точное или приближительное значение.

a) $x^2 = 6 - x$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $x^2 - x + 4 = 0$ d) $x^2 - 2x - 6 = 0$

2» Решите уравнение графически.

a) $x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 - 2 = 0$ c) $x^2 + 4x = 0$ d) $x^2 + 4 = 0$

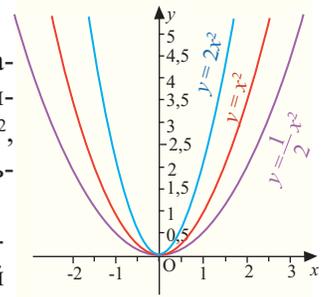
3» Данные уравнения сначала преобразуйте в приведенные, а затем решите графически.

a) $2x^2 - 2x - 4 = 0$ b) $-2x^2 + 4x + 6 = 0$ c) $-x^2 + 5x = 4$

Решение квадратных уравнений графическим методом

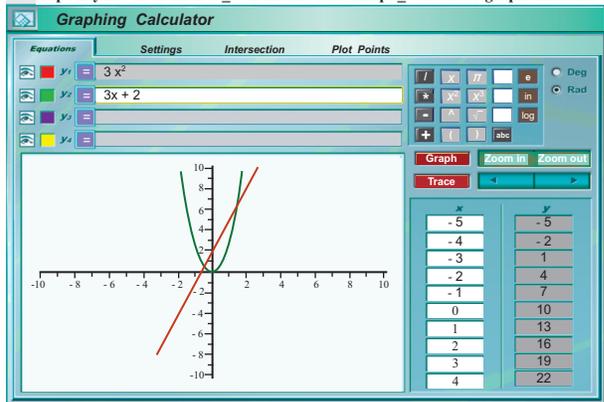
Калькулятор для построения графиков

Используя онлайн калькуляторы для построения графиков можно построить различные графики. На рисунке представлены графики функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, построенные при помощи графического калькулятора www.meta-calculator.com/online.



Решить квадратное уравнение также можно при помощи графического калькулятора, построив в одной системе координат параболу и прямую. http://my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html

На рисунке корни уравнения $3x^2 - 3x - 2 = 0$, записанного в виде $3x^2 = 3x + 2$, найдены графически при помощи графического калькулятора www.my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html. По графику найдите приближенные значения корней уравнения.



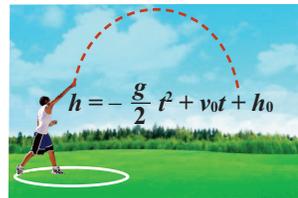
4) Решите заданные уравнения при помощи графического калькулятора.

$x^2 - 3x + 2 = 0$	$4x^2 - 13x + 3 = 0$	$5x^2 + 7x + 2 = 0$
$-2x^2 - 2x + 4 = 0$	$-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 9 = 0$	$0,5x^2 + 4x + 6 = 0$

5) Выберите один из методов и решите уравнения.

$x^2 - 8x + 15 = 0$	$3x^2 - 8x + 5 = 0$	$2x^2 - 5x - 7 = 0$
$x^2 - 4x - 5 = 0$	$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$5x^2 + 4x - 1 = 0$
$x^2 - 4x + 1 = 0$	$3x^2 + 4x - 7 = 0$	$7x^2 - 8x - 12 = 0$

6) Тело брошено вверх. Зависимость между расстоянием до Земли h (метр) и временем t (сек.) задаётся в виде формулы $h = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + h_0$ где v_0 (м/сек.) - начальная скорость, а h_0 - начальная высота.



Школьники соревнуются в метании диска.

Эльчин также принимает участие в соревновании. Его рост равен 1,6 м.

1) Через сколько секунд диск, брошенный Эльчином с начальной скоростью 24 м/сек, упадёт на Землю?

2) На какой минуте диск находился на высоте 20 м?

Здесь h_0 - рост Эльчина, $g \approx 10$ м/сек²

7) Расстояние от Земли до тела, брошенного вертикально вверх, с начальной скоростью 30 м/сек в момент времени t можно найти по формуле $h = -5t^2 + 30t$. Через сколько секунд тело будет находится на расстоянии 40 м от земли?

Решение квадратных уравнений

Формула корней квадратного уравнения

Для нахождения корней любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ методом выделения полного квадрата можно записать обобщённую формулу.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Разделим обе части уравнения на a .

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Вычтем из обеих частей $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Для выделения в левой части уравнения полного квадрата прибавим к каждой части $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Левую часть запишем в виде квадрата суммы двух выражений, правую часть упростим.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Если правая часть неотрицательна, найдём корень из левой и правой части.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Вычтем из обеих частей уравнения $\frac{b}{2a}$.

Таким образом, получаем формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Если в формуле для нахождения корней квадратного уравнения принять $D = b^2 - 4ac$, то её можно записать как $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Наличие действительных корней уравнения зависит от знака D . D называется дискриминантом (определителем) квадратного уравнения.

- 1) Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.
- 2) Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня. $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- 3) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_1 \neq x_2$

Пример. В уравнении $4x^2 + 7x + 3 = 0$, $a = 4$, $b = 7$, $c = 3$.

Тогда $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1 > 0$, а это значит, что уравнение имеет два различных действительных корня.

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} \quad x_1 = \frac{-7 + 1}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \quad x_2 = \frac{-7 - 1}{8} = -1$$

В уравнении $x^2 + px + q = 0$ т.к. $a = 1$, $b = p$, $c = q$, то дискриминант приведённого квадратного уравнения находится по формуле $D = p^2 - 4q$. При $D \geq 0$ для корней приведённого квадратного уравнения верны следующие формулы:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Решение квадратных уравнений

Обучающие задания

1) Найдите дискриминант и определите наличие действительных корней квадратного уравнения.

a) $3x^2 + x + 5 = 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $2x^2 - x - 6 = 0$

d) $x^2 + x - 7 = 0$

2) Решите уравнение.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

c) $5x^2 + 8x + 3 = 0$

b) $5x^2 + 6x + 1 = 0$

d) $2x^2 - 9x + 7 = 0$

3) Решите квадратные уравнения, применив формулу для корней приведённого квадратного уравнения.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 + 14x + 40 = 0$

c) $x^2 - 7x + 6 = 0$

d) $x^2 - 11x + 10 = 0$

4) Решите уравнение.

a) $5t^2 - 11t + 2 = 0$

b) $35y^2 + 2y - 1 = 0$

c) $2z^2 + 7z + 4 = 0$

d) $x^2 - x - 1 = 0$

5) При каком значении x :

a) Значение трёхчлена $x^2 - 11x + 32$ равно 2-м;

b) Значение трёхчлена $3x^2 - 2x + 5$ равно значению двухчлена $7x - 1$;

c) Значения многочленов $3x^2 - 4x + 2$ и $x^2 + x$ равны.

6) Решите уравнения различными способами.

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$x^2 - 4x = 3$

$(3p - 5)(p + 1) = -4$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$-24 = -2y^2 + 2y$

$3x(x - 2) = 24$

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$9y^2 - 12y - 5 = 0$

$m(m + 10) = 2$

7) Выберите один из известных вам методов и решите уравнение.

$t^2 + 8t + 15 = 0$

$m^2 + 6m + 8 = 0$

$t^2 - \frac{2}{5}t = 0$

$p^2 + 4p + 1 = 0$

$q^2 + 2q + 1 = 0$

$n(n - 4) = n$

$2a^2 + 4a + 1 = 7$

$3a^2 + 6a - 3 = 0$

$n^2 - \frac{2}{3}n = \frac{8}{9}$

8) 1) Найдите два натуральных числа, если их произведение равно 84, а разность 5.

2) Найдите число, если его квадрат больше четырехкратного значения этого числа на 5.

3) Удвоенный квадрат некоторого числа равен сумме пятикратного значения числа и числа 3. Найдите это число.

9) Если сторону квадрата увеличить на 4,5 см, то площадь увеличится в 2,25 раз. Найдите длину стороны квадрата.

Решение квадратных уравнений

- 10**» 1) Если к числу прибавить его удвоенный квадрат, то в сумме получится 6. Найдите это число.
 2) Произведение двух последовательных чисел равно 56. Найдите эти числа.
 3) Составьте аналогичную задачу так, чтобы она решалась при помощи квадратного уравнения, и решите её.

- 11**» Решите уравнения.
 а) $5x^2 - 4x = 9$ б) $x^2 + 51 = 52x$ в) $4 - x^2 = 5x$ д) $25 + x^2 = 26x$

- 12**» Двор имеет форму прямоугольника, длина которого на 1 м больше ширины. Если его длину увеличить на 5 м, а ширину на 4 м, то площадь станет равна 120 м². Найдите первоначальные размеры двора.

- 13**» Ширина прямоугольника 4 см, а длина 8 см. Если его длину и ширину увеличить на одну и ту же величину, то площадь увеличится в 3 раза. Найдите новые размеры прямоугольника.

- 14**» Решите уравнения, используя различные методы.

$x^2 + 6x = 7$	$16x^2 = 25x^2 + 7x - 2$	$3x^2 + 24x = 13x^2 + 13x + 1$
$8y^2 - 36y + 28 = 0$	$x^2 + 7x - 8 = 0$	$(2w + 5)(w - 1) = 9$
$2x(x - 6) = 14$	$3r^2 + 2r - 1 = 0$	$(3p - 5)(p + 1) = 3$

Если второй коэффициент квадратного уравнения является чётным числом (т.е. $b = 2k$), то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно записать в виде $ax^2 + 2kx + c = 0$. Тогда $D = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Обозначим $D_1 = k^2 - ac$, $D = 4 \cdot D_1$, тогда

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} \quad \text{здесь } D_1 = k^2 - ac$$

Пример. Решим уравнение $9x^2 - 14x + 5 = 0$.

$$a = 9 \quad b = -14 = 2 \cdot (-7), \quad k = -7, \quad c = 5$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 49 - 45 = 4$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9} = \frac{7 \pm 2}{9}; \quad x_1 = \frac{5}{9}, \quad x_2 = 1$$

- 15**» Решите уравнение.
 а) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ в) $5x^2 - 16x + 3 = 0$ д) $5x^2 + 26x - 24 = 0$
 б) $x^2 - 22x - 23 = 0$ г) $x^2 - 34x + 289 = 0$ е) $3x^2 + 32x + 80 = 0$

- 16**» Сначала обе части уравнения умножьте на такое число, чтобы коэффициенты стали целыми числами, а затем решите уравнения.

а) $x^2 - 2,5x + 1 = 0$ в) $0,4x^2 + x - 0,3 = 0$ е) $0,7x^2 = 1,3x + 3$

б) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 9$ д) $\frac{x^2}{3} - 7x = 1$ ф) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$

- 17**» При каком значении a значения квадратного трёхчлена ($a^2 + 7a + 6$) и двухчлена ($a + 1$) равны? Найдите значение трёхчлена при полученных значениях a .

Решение квадратных уравнений

18» Выберите различные методы для решения уравнения.

a) $7(x+3)^2 = 28$

b) $3x^2 - 10x = 7 - 6x$

c) $x^2 + 9 = 8x$

d) $10x^2 + 3x = 0$

e) $2x^2 - 12x + 7 = 5$

f) $21 = (x-2)^2 + 5$

19» Решите уравнения.

$400x^2 + 40x - 100 = 0$

$0,05x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$

$0,25x^2 - 0,16 = 0$

$x^2 + 1,3x - 0,4 = 0$

$4y^2 - 0,2y + 3,2 = 0$

$3600x^2 - 4900 = 0$

Прикладные задания.

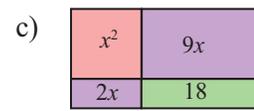
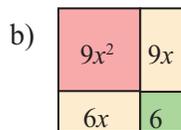
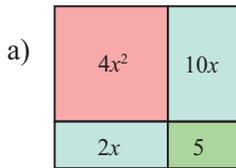
20» Владельцу книжного магазина стало ясно, что прибыль от продажи n книг можно найти по формуле $G = 0,02n^2 + 0,4n$. Здесь n показывает количество книг. Сколько книг он должен продать, чтобы прибыль составила 70 манатов?

21» Составьте выражение для нахождения площади в виде квадратного трёхчлена и разложите его на множители. Найдите периметр прямоугольника, зная его площадь.

Площадь: 165 кв.ед.

Площадь: 72 кв.ед.

Площадь: 144 кв.ед.



22» Докажите, что один из корней уравнения $ax^2 - (a+c)x + c = 0$ равен 1.

23» На какое натуральное число надо разделить 73, чтобы неполное частное было на 3 больше делителя, а остаток на 4 меньше делителя?

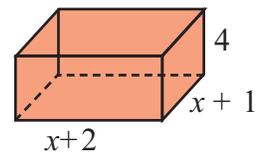
24» Размеры коробки в форме прямоугольного параллелепипеда на рисунке выражены в дециметрах.

a) Найдите размеры коробки объемом 9 дм³.

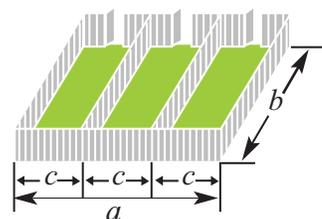
Верно ли предположение, что данная задача имеет два решения? Запишите свое мнение.

b) Найдите площадь поверхности коробки.

c) Сколько квадратных дециметров картона потребуется для изготовления коробки, если отходы составляют 10% материала?



25» Длина забора (периметр) вокруг участка, где фермер держит овец, равна 80 м. Он решил разделить этот участок на три равные части в виде прямоугольников. Зная, что общая площадь участка 300 м², найдите размеры полученных частей, при условии $a > b$.



Теорема Виета

Исследование. 1) Решите квадратное уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}; x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

2) Найдите сумму и произведение корней уравнения:

$$x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = -1$$

3) Сравните сумму корней с коэффициентом уравнения, стоящим перед x , а произведение корней со свободным членом. Сумма корней уравнения равна числу, обратному коэффициенту перед x , а произведение-свободному члену.

4) Справедливо ли аналогичное правило для любого приведенного уравнения?

Теорема Виета

Теорема: В приведённом квадратном уравнении сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение равно свободному члену.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Доказательство: Известно, что $x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$ корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Отсюда получим:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-p - \sqrt{D} - p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

Таким образом, для уравнения $x^2 + px + q = 0$ $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Если обе части любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ разделить на a , то получим равносильное приведённое квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тогда к нему можно будет применить теорему Виета.

Сумма корней $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$.

Теорема Виета остаётся в силе, если $D = 0$ (когда квадратное уравнение имеет два равных корня).

Пример: Найдите корни квадратного уравнения $x^2 - 9x + 20 = 0$ методом подбора.

Решение: По теореме Виета $x_1 + x_2 = 9$,
 $x_1 \cdot x_2 = 20$. Таким образом, корнями уравнения являются числа 4 и 5.

Множители числа 20	Сумма множителей
1 · 20	21
2 · 10	12
4 · 5	9

Обучающие задания

1) Найдите сумму и произведение корней уравнения по теореме Виета. Проверьте полученные результаты, решив уравнение.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 6x - 40 = 0$$

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$2d^2 + 12d - 16 = 0$$

Теорема Виета

2) Найдите корни уравнения методом подбора.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$

c) $x^2 - 8x + 12 = 0$

e) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$

d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

f) $x^2 - 2x - 48 = 0$

3) 1) Один из корней уравнения $x^2 + px - 35 = 0$ равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p .

2) Один из корней уравнения $x^2 - 13x + q = 0$ равен 1. Найдите другой корень и коэффициент q .

3) Один из корней уравнения $3x^2 + bx + 12 = 0$ равен 2. Найдите другой корень и коэффициент b .

4) Разность корней уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ равна 2. Найдите q .

4) Пусть x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$. Найдите значение выражений:

a) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $x_1^3 + x_2^3$

Пример. Найдите значение выражения $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$, если x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Решение: По теореме Виета $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1x_2 = 5$. Тогда $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = 5 \cdot 6 = 30$

5) Не решая уравнения, определите знаки его корней.

a) $x^2 - 17x + 16 = 0$

b) $2x^2 - x - 54 = 0$

c) $3x^2 - x - 1 = 0$

d) $x^2 + 13x + 12 = 0$

Теорема, обратная теореме Виета

Обратная теорема. Если сумма чисел m и n равна $-p$, а произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Эту теорему можно записать так: любые числа m и n являются корнями уравнения $x^2 - (m + n)x + m \cdot n = 0$.

Доказательство. На самом деле, если принять, что $x = m$, то получим: $m^2 - (m + n) \cdot m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0$, т.е. число m действительно удовлетворяет уравнению. Таким же образом можно показать, что число $x = n$ также является корнем уравнения.

Пример. Составьте приведённое квадратное уравнение, если известно, что числа $m = 3$ и $n = -5$ являются его корнями.

Решение: Так как $m + n = 3 + (-5) = -2$,
 $m \cdot n = 3 \cdot (-5) = -15$, то уравнение будет выглядеть как $x^2 + 2x - 15 = 0$.

6) Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа.

a) 3 и 4

b) 2 и 5

c) -3 и 6

d) -4 и 2

Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям

1) Решите уравнения методом введения новой переменной.

1) $(x + 2)^2 + 3(x + 2) - 54 = 0$

4) $(x - 2)^2 - 15(x - 2) + 56 = 0$

2) $6(x + 5)^2 - 5(x + 5) + 1 = 0$

5) $3(2x - 3)^2 + 17(2x - 3) + 10 = 0$

3) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

6) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Пример. Решите уравнение $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 54 = 0$.

Решение: Выполним замену $x + 3 = t$.

Тогда данное уравнение $t^2 + 3t - 54 = 0$ можно записать как $(t + 9)(t - 6) = 0$. Решив это уравнение, получим: $t_1 = -9$; $t_2 = 6$. Приняв во внимание замену, имеем: 1) $x + 3 = -9$, $x_1 = -12$; 2) $x + 3 = 6$, $x_2 = 3$. Выполнив проверку, убедитесь, что уравнение решено верно.

2) Решите уравнения.

a) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

b) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

Пример. Решите уравнение $x - \sqrt{x} - 6 = 0$.

Решение: Выполним замену $\sqrt{x} = t$, получим $x = t^2$. Тогда уравнение примет вид: $t^2 - t - 6 = 0$. Решив данное уравнение, получим $t_1 = 3$, $t_2 = -2$.

Выполним подстановку:

1) $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$, 2) $\sqrt{x} = -2$ корней нет.

Корнем данного уравнения является число 9.

3) Решите уравнения, выполнив следующую замену $|x| = t$.

a) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

b) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

4) При каких значениях m уравнение $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ удовлетворяется при единственном значении неизвестного?

5) Решите уравнения.

a) $(x + 1)(x + 2) = 18 + 3x$

c) $(x - 2)^2 + x(x + 4) = 22$

b) $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 10$

d) $8 - 3x = (x + 2)(x + 4)$

6) Найдите корни уравнения.

a) $(x + 1)(2x - 3) = 7$

c) $(x + 8)(x - 9) + 52 = 0$

b) $x(3x - 2) = (5x - 2)(x - 1)$

d) $x(x + 7) = (2 - x)(x + 2)$

7) Найдите корни уравнения.

a) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$

c) $x^3 + 8 = (x + 2)^3$

b) $\frac{6x + 1}{3} - \frac{4x^2 - 3}{2} = \frac{7}{3}$

d) $\frac{-7x - 5}{4} = \frac{4x^2 - 3}{2}$

8) Одна из сторон прямоугольника на 3 см меньше удвоенного значения другой стороны. Зная, что площадь прямоугольника равна 299 м^2 , найдите его периметр.

Решение задач с помощью квадратных уравнений

Задача. Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см больше другого и на 2 см меньше гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

1 этап – составление уравнения.

Обозначим длину одного из катетов через x , тогда длина другого катета будет $x - 2$, а гипотенуза будет равна $x + 2$.

2 этап – решение уравнения.

Согласно теореме Пифагора получим уравнение

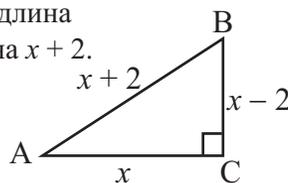
$$x^2 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2.$$

3 этап – решение уравнения.

Преобразуем уравнение $x^2 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$; $x^2 - 8x = 0$. Отсюда $x(x - 8) = 0$; $x = 0$ и $x = 8$.

4 этап – анализ результата.

Решению задачи соответствует корень $x = 8$, т.к. длины сторон выражаются положительными числами. Тогда длина другого катета будет $x - 2 = 8 - 2 = 6$ см, а длина гипотенузы $x + 2 = 8 + 2 = 10$ см. Периметр: $P = 6 + 8 + 10 = 24$ (см). **Ответ:** периметр треугольника равен 24 см.



- 1» Длина прямоугольника на 4 см больше ширины. Найдите его периметр, если площадь прямоугольника равна 60 см^2 .
- 2» Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел на 112 единиц больше суммы квадратов этих же чисел. Найдите эти числа.
- 3» Один из катетов прямоугольного треугольника на 1 см меньше, а другой на 8 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу.
- 4» Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии, и всего было сыграно 45 партий.
- 5» Из одного порта в одно и тоже время вышли два корабля. Один направился на восток, другой на север. Через час расстояние между ними было 40 км. Скорость корабля, который движется на север, на 8 км больше скорости корабля, движущегося на восток. Найдите скорости кораблей.
- 6» Площади двух участков, один из которых имеет форму прямоугольника, а другой форму квадрата, равны. Длина прямоугольного участка на 5 м больше удвоенного значения длины стороны квадрата, а ширина на 6 см меньше стороны квадрата. Найдите длину стороны квадрата.
- 7» Две грузовые машины одновременно начали движение из одной точки вдоль дорог, пересекающихся под прямым углом. Скорость одной из машин на 5 км/час больше скорости другой. Через 2 часа, расстояние между ними составило 50 км. Найдите скорости грузовых машин.

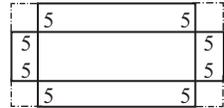
Решение задач с помощью квадратных уравнений

8» Нармин гуляет по саду прямоугольной формы, двигаясь то вдоль диагонали, то вдоль периметра. От одного угла до другого по диагонали она проходит 15 м, а за один оборот по периметру 42 м. Найдите размеры сада.

9» Высота ящика в форме прямоугольного параллелепипеда равна 0,5 м, а ширина основания в 2 раза меньше длины. Найдите размеры и объём ящика, если площадь боковой поверхности (сумма площадей боковых граней) на $1,08 \text{ м}^2$ больше площади основания. Сколько решений имеет задача?

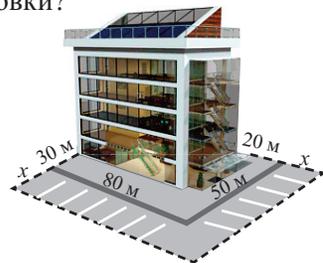
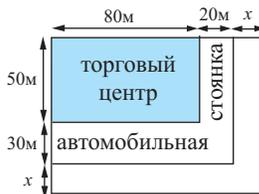


10» От картонного листа в форме прямоугольника, длина которого в 2 раза больше ширины, с каждого угла отрезали квадраты со стороной 5 см. После чего картон сложили и склеили из него коробку в форме прямоугольного параллелепипеда, без верха. Зная, что объём коробки 1500 см^3 , найдите размеры картонного листа.



11» После двух последовательных понижений цены фотоаппарата на один и тот же процент, её стоимость снизилась с 300 манат до 192 манат. Найдите, на сколько процентов каждый раз уменьшалась цена товара.

12» Администрация торгового центра решила увеличить площадку для парковки автомобилей в 2 раза, как показано на рисунке. Если известно, что размеры здания торгового центра равны $50 \text{ м} \times 80 \text{ м}$, то на сколько при этом увеличатся размеры участка для парковки?



13» Ученики 8^а класса в качестве праздничного подарка подарили друг другу книги. Сколько учащихся в классе, если всего было подарено 380 книг?

14» Для того, чтобы найти высоту, на которой находится спортсмен при прыжке с 10-ти метрового трамплина, в момент времени t используют формулу $h = -5t^2 + 3t + 10$. Здесь t показывает время в секундах, h - высоту в метрах. Через сколько секунд спортсмен войдёт в воду?



Обобщающие задания

1) Решите уравнения.

$$2x^2 - 5 = 0$$

$$-(x - 2)^2 + 1 = 0$$

$$1,5(x - 4)^2 = 6$$

$$-x^2 + 3 = 0$$

$$-3(x + 3)^2 + 48 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + 1)^2 = 8$$

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$\frac{4}{9}x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 4)^2 = \frac{1}{4}$$

2) 1) Запишите приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 3 и -4.

2) Один из корней уравнения $x^2 + bx + 20 = 0$ равен 5. Найдите другой корень и коэффициент b .

3) Решите уравнения методом разложения на множители.

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$3x^2 + 15x + 18 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$5x^2 + 21x + 22 = 0$$

4) Решите уравнения методом выделения полного квадрата.

$$x^2 - 18x + 81 = 49$$

$$x^2 + 20x + 100 = 64$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 16$$

$$36x^2 + 12x + 1 = 18$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 4$$

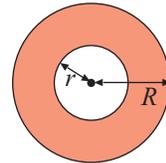
$$25x^2 + 40x + 16 = 28$$

$$4x^2 - 28x + 49 = 64$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 81$$

$$100x^2 - 60x + 9 = 121$$

5) Радиус большого круга R , радиус маленького круга r . Зная, что $2R = 3r$ и площадь закрашенной части равна $20\pi \text{ см}^2$, найдите площадь маленького круга.



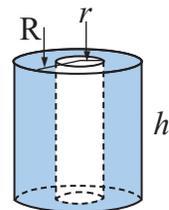
6) Одним из корней уравнения $x^2 - (m - 5)x + n = 0$ является число 5, а одним из корней уравнения $x^2 - (2m - 1)x + k = 0$ является число -3. Найдите значение m , если вторые корни данных уравнений равны.

7) В кинотеатре количество мест в каждом ряду на 8 больше количества рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в кинотеатре 884 места?

8) Объем цилиндра, радиус основания которого равен R , а высота h , вычисляется по формуле $V = \pi R^2 h$.

а) Запишите выражение, показывающее объем закрашенной части.

б) Найдите r , если объем закрашенной части равен $48\pi \text{ м}^3$, $h = 3 \text{ м}$, $R = 5 \text{ м}$.



9) При каком значении m уравнение $x^2 + (2m - 3)x + m - 2 = 0$ имеет два равных корня?

10) Зная, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, составьте квадратное уравнение, корнями которого являются:

а) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$; б) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$.

Обобщающие задания

11) Высота Девичьей Башни 28 м. За сколько минут тело, брошенное с этой высоты, достигнет земли? Используйте формулу $h = -4,9t^2 + h_0$.

12) Площадь ковра, который находится на одинаковом расстоянии от каждой стены в комнате, равна половине площади комнаты. Зная, что размеры ковра равны 4 м × 6 м, найдите площадь комнаты. Решение задачи проиллюстрируйте рисунком.

13) Стеклопанную пластину размером 40 см × 60 см обрезали на одинаковом расстоянии от каждой стороны. При этом её площадь уменьшилась в 3 раза. Найдите новые размеры пластины.

14) Звук, издаваемый при ударе о поверхность воды камня, брошенного в колодезь, был услышен через 4,25 секунды с момента падения камня. Найдите глубину колодца, зная, что скорость звука составляет 320 м/с.
Указание. Если t – время, за которое камень достигнет поверхности воды, то по закону свободного падения глубина колодца будет равна $\frac{gt^2}{2}$ метрам. Здесь $g \approx 10$ м/сек².

15) Решите уравнения.

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

c) $(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 21$

d) $(x^2 - 2x)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x)$

16) Парашютист при прыжке с самолета некоторое время до раскрытия парашюта находится в свободном падении. На какой высоте (в метрах) он окажется через время t при прыжке с высоты 1600 м, можно найти по формуле $h = -5t^2 + 1600$.



1) На какой высоте окажется парашютист через 8 секунд после прыжка?

2) Сколько времени парашютист находился в свободном падении, если его парашют раскрылся на высоте 1100 м?

17) а) Один из корней уравнения $2x^2 + bx - 10 = 0$ равен 5. Найдите другой корень и коэффициент b .

б) Один из корней уравнения $3x^2 + bx + 24 = 0$ равен 3. Найдите другой корень и коэффициент b .

18) Установите соответствие для квадратных уравнений ($m \in \mathbb{R}$).

1) $x^2 + mx + m - 1 = 0$ А) при $m = 2$ имеет два равных корня.

2) $x^2 + mx - 1 = 0$ В) при $m = 2$ имеет два разных корня.

3) $x^2 + mx + m = 0$ С) при $m = 2$ не имеет действительных корней.

Д) при $m = 0$ имеет два равных корня.

4

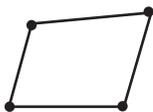
Четырёхугольники

В этом разделе вы научитесь:

- классифицировать четырёхугольники;
- проводить классификацию параллелограммов;
- исследовать общие и различные свойства параллелограммов;
- решать задачи, применяя свойства четырёхугольников.

Четырёхугольники

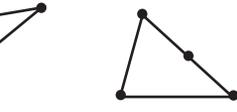
Четырёхугольником называется фигура, состоящая из **четырёх точек, каждые три из которых не расположены на одной прямой, последовательно соединённых четырьмя отрезками**. В этом случае отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются **вершинами** четырёхугольника, а соединяющие их отрезки – **сторонами** четырёхугольника.



четырёхугольник



четырёхугольник

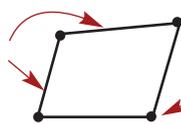


не четырёхугольник



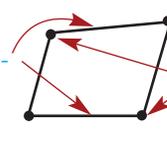
не четырёхугольник

соседние стороны - стороны имеющие общую точку



соседние вершины - точки концов любой стороны

противоположные стороны - стороны, не имеющие общей точки



противоположные вершины - точки вершине не принадлежащих одной и той же стороне

Четырёхугольник делит точки плоскости, которой он принадлежит, на два множества: внутренняя конечная часть и внешняя часть. Конечная часть плоскости, ограниченная четырёхугольником, называется **плоским четырёхугольником**.

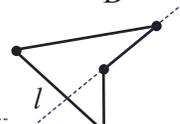
Если на прямых, содержащих стороны четырёхугольника, нет точек, принадлежащих его внутренней области, то четырёхугольник называется **выпуклым**, если есть такие точки, то он называется **невыпуклым (вогнутым)**.

Отрезок, соединяющий любые две точки, расположенные внутри выпуклого четырёхугольника, целиком расположен внутри четырёхугольника.

Отрезки, соединяющие противоположные вершины четырёхугольника, называются **диагоналями**. Диагонали выпуклого четырёхугольника расположены внутри четырёхугольника.



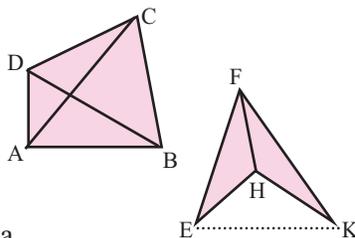
выпуклый



невыпуклый (вогнутый)

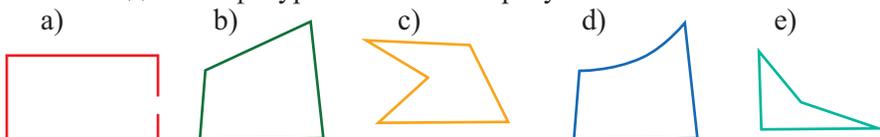
Четырёхугольники

У невыпуклого четырёхугольника одна из диагоналей находится во внешней области. Каждая из двух диагоналей выпуклого четырёхугольника делит его на два треугольника, а у невыпуклого только одна диагональ, делит его на два треугольника. Если геометрическую фигуру можно разделить на конечное число плоских треугольников, то она называется простой. Четырёхугольник-простая фигура.



Обучающие задания.

1) Какие из данных фигур являются четырёхугольниками?



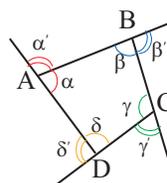
2) Начертите в тетради выпуклый и невыпуклый четырёхугольник и проведите диагонали.

3) Периметр четырёхугольника равен 42 см, а длины сторон четырёхугольника относятся как 2:3:4:5. Найдите стороны четырёхугольника.

- 4) 1) Можно ли построить четырёхугольник со сторонами 5 см, 7 см, 8 см, 11 см и диагональю 13 см?
2) Можно ли построить четырёхугольник со сторонами 3 см, 5 см, 7 см, 14 см и диагональю 13 см?

Внутренние и внешние углы

Угол, смежный любому углу выпуклого четырёхугольника, называется внешним углом. Из любой вершины четырёхугольника можно провести два внешних угла, которые являются вертикальными углами и соответственно равны друг другу. Поэтому, говоря о внешнем угле четырёхугольника, мы будем иметь в виду, один из них. На рисунке для внутренних углов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, углы $\alpha', \beta', \delta', \gamma'$ являются внешними.



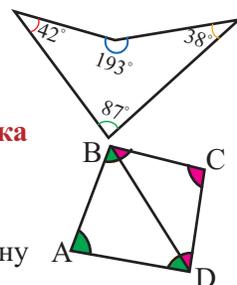
Каждый внутренний угол выпуклого четырёхугольника меньше 180° . Градусная мера внутреннего угла невыпуклого четырёхугольника может быть больше 180° .

Сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника

Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360° . $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

Доказательство. Если в четырёхугольнике провести одну из диагоналей, то он разбивается на два треугольника.

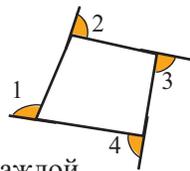
Сумма внутренних углов треугольника равна 180° , тогда сумма внутренних углов четырёхугольника будет равна $2 \cdot 180^\circ$, т.е. 360° .



Четырёхугольники

Сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника

Теорема. Сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника равна 360° .



Доказательство. Сумма внешнего и внутреннего угла при каждой вершине равна 180° : $\alpha' + \alpha = 180^\circ$

$$\beta' + \beta = 180^\circ$$

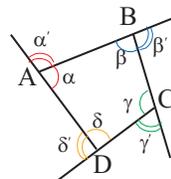
$$\gamma' + \gamma = 180^\circ$$

$$\delta' + \delta = 180^\circ$$

Сложим данные равенства почленно:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4 \cdot 180^\circ.$$

Т.к. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, то получим: $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$

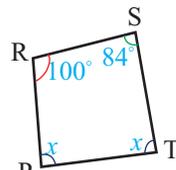
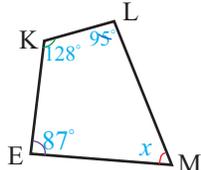
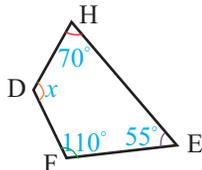
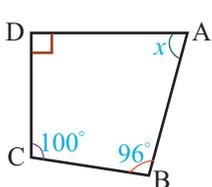


Пример. Найдите внутренние и внешние углы четырёхугольника, если внутренние углы выпуклого четырёхугольника относятся как 3:4:5:6.

Решение: в четырёхугольнике ABCD $\angle A = 3x$, $\angle B = 4x$, $\angle C = 5x$, $\angle D = 6x$. Согласно условию $3x + 4x + 5x + 6x = 360^\circ$. Отсюда $x = 20^\circ$. Значит, внутренние углы четырёхугольника равны $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 100^\circ$, $\angle D = 120^\circ$. Зная, что каждый внешний угол является смежным с внутренним, получим, что внешние углы при вершинах A, B, C и D соответственно равны 120° , 100° , 80° и 60° .

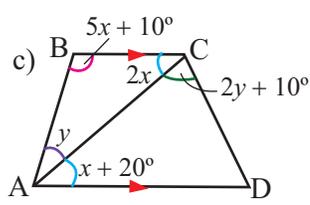
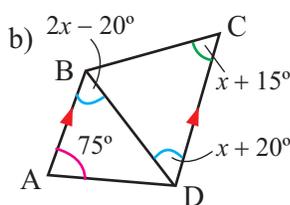
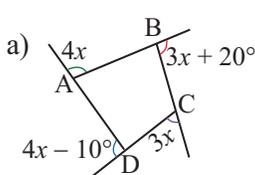
Обучающие задания.

5 Найдите градусную меру неизвестного угла четырёхугольника.

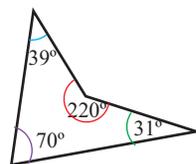
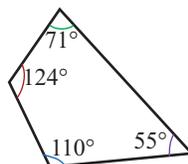


6 Найдите градусную меру внутренних и внешних углов четырёхугольника.

Примечание. Стрелка на прямой указывает на то, что прямые параллельны.

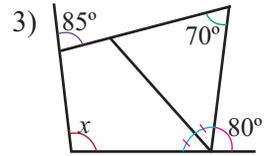
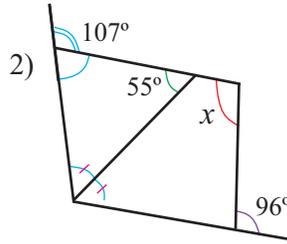
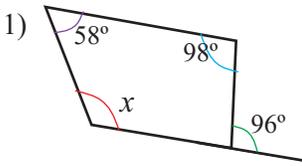


7 **Исследование.** Можно ли применить теорему о внутренних углах четырёхугольника к невыпуклому четырёхугольнику? Используйте полученные вами знания о треугольниках.



Четырёхугольники

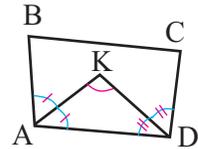
8) Найдите значение x по данным рисунка.



9) Докажите, что градусная мера одного из углов, образованного биссектрисами двух углов, прилежащих к одной стороне выпуклого четырёхугольника, равна половине градусной меры суммы двух других внутренних углов.

В четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке K .

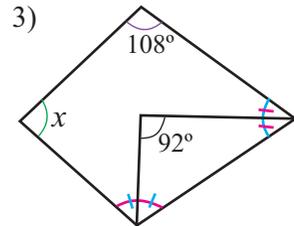
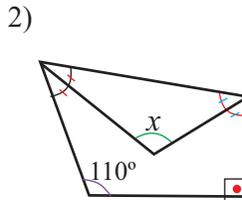
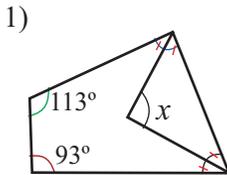
Докажите, что $\angle K = \frac{\angle B + \angle C}{2}$



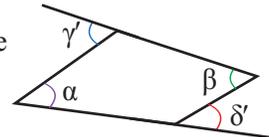
Указание: Используйте равенства

$$\angle K + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle D}{2} = 180^\circ \text{ и } \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2} = 180^\circ$$

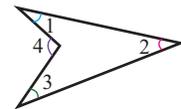
10) Из двух углов, прилежащих к одной стороне четырёхугольника, проведены биссектрисы. По данным рисунка найдите значение x .



11) а) Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике $\alpha + \beta = \gamma' + \delta'$.



б) Докажите, что в невыпуклом четырёхугольнике $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.



12) 1) Градусные меры внутренних углов выпуклого четырёхугольника относятся как 1:2:3:4. Найдите градусные меры внешних и внутренних углов данного четырёхугольника.

2) Существует ли такой выпуклый четырёхугольник, у которого все внутренние углы: а) острые; б) прямые; с) тупые ?

Параллелограмм

Параллелограмм и его свойства

Определение. Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

В параллелограмме $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

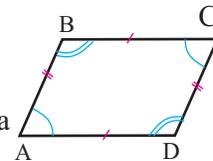
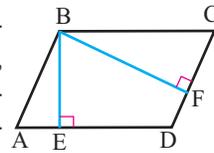
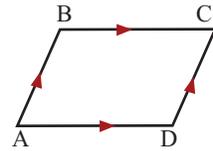
Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный из точки одной стороны к прямой, содержащей противоположную сторону. На рисунке BE и BF высоты: $BE \perp AD$, $BF \perp CD$. Так как расстояние между двумя параллельными прямыми всегда остается постоянным, то все высоты параллелограмма, проведенные к одной и той же стороне, равны.

Теорема 1. Сумма внутренних углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180° .

Доказательство: сумма внутренних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, равна 180° . В параллелограмме $ABCD$ углы $\angle A$ и $\angle B$, полученные при пересечении прямой, содержащей сторону AB , параллельных сторон BC и AD , являются внутренними углами. Значит, $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Аналогично, $\angle C + \angle D = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$.

Теорема 2. Противоположные углы параллелограмма конгруэнтны. $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

Теорема 3. Противоположные стороны параллелограмма конгруэнтны. $AB \cong CD$, $AD \cong BC$



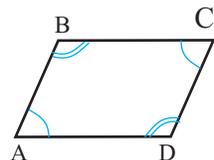
Обучающие задания

1 Записав вместо точек в двухстолбчатой таблице соответствующие предложения, докажите теорему 2 в тетради.

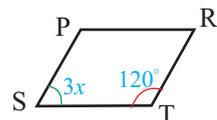
Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Докажите: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

Предположение	Обоснование
1. $ABCD \square$.	1. Дано
2. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$ $\angle C + \angle D = 180^\circ$, $\angle D + \angle A = 180^\circ$	2.
3. $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$	3. По свойству равенства



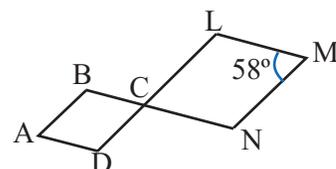
2 Найдите значение переменной x в параллелограмме $PRTS$.



3 Отрезки BN и DL пересекаются в точке C . $ABCD$ и $CLMN$ параллелограммы.

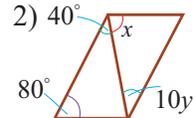
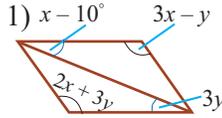
Если $\angle M = 58^\circ$, то:

- найдите градусную меру $\angle A$;
- можно ли найти градусную меру $\angle B$?



Параллелограмм

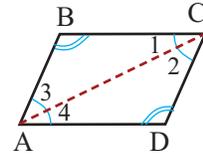
- 4) По данным рисунка найдите значение x и y .



- 5) Найдите неизвестные углы параллелограмма ABCD.
 а) $\angle B = 130^\circ$ | б) $\angle C : \angle B = 2 : 7$ | в) $\angle A + \angle C = 140^\circ$ | д) $\angle B - \angle A = 40^\circ$

- 6) Биссектриса угла параллелограмма пересекает противоположную сторону под углом 55° . Найдите градусные меры углов параллелограмма.

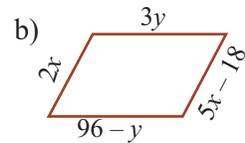
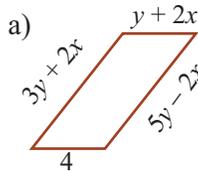
- 7) Доказательство теоремы 3 дополните соответствующими предложениями вместо точек в двух-столбчатой таблице и запишите в тетради.



Дано: ABCD – параллелограмм.
 Докажите: $AB \cong CD, AD \cong BC$

Предположение	Обоснование
1. ABCD \square - параллелограмм	1. Дано
2. Проведём диагональ AC	2. Через две точки проходит только одна прямая
3. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$	3.
4. $\angle BCA \cong \angle DAC, \angle DCA \cong \angle CAB$	4.
5. $AC \cong AC$	5. По свойству конгруэнтности
6. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	6.
7. $AB \cong CD, AD \cong BC$	7. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников

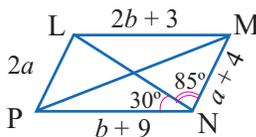
- 8) Для параллелограмма на рисунке найдите значение переменных x и y .



- 9) Периметр параллелограмма со сторонами a и b находится по формуле $P = 2(a + b)$. Согласно условиям найдите стороны параллелограмма ABCD, периметр которого равен 96 см: а) $AB : AD = 3 : 5$; б) сторона AD на 4 см больше стороны AB; в) $AB + BC + CD = 64$ см

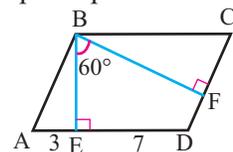
- 10) В параллелограмме PLMN найдите:

- 1) $\angle PLM$
 2) $\angle LMN$
 3) PL
 4) LM
 5) периметр



- 11) В параллелограмме ABCD BE и BF высоты. Найдите требуемые размеры.

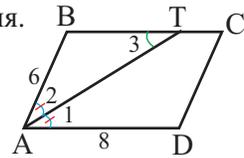
- 1) $\angle A$
 2) AB
 3) CF
 4) BE
 5) BF



Параллелограмм

- 12) Исследуйте данную задачу и решение при помощи обсуждений. Запишите вместо точек соответствующие предположения.

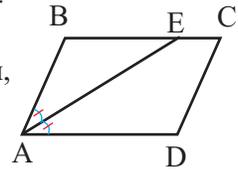
Задача. В параллелограмме ABCD биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке T. Найдите длину отрезка TC, если $AD = 8$ см, $AB = 6$ см.



- Решение:** 1) $\angle 1 \cong \angle 2$ (по условию AT биссектриса)
 2) $\angle 1 \cong \angle 3$ (внутренние накрест лежащие углы)
 3) $\angle 2 \cong \angle 3$, $\triangle ABT$ равнобедренный.
 4) $AB = BT = 6$ см (боковые стороны равнобедренного треугольника)
 5) $BC = AD = 8$ см (.....)
 6) $TC = BC - BT = 8 - 6 = 2$ (см) **Ответ:** 2 см

- 13) Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке E.

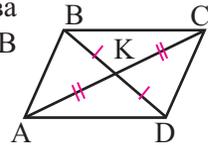
- 1) Найдите длины отрезков BE и EC, если $AB = 7$ см, $AD = 12$ см.
 2) Найдите периметр параллелограмма, если $BE = 9$ см, $EC = 5$ см.



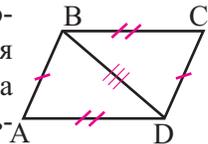
Свойства параллелограмма

Теорема 4. Диагонали параллелограмма делят его на два конгруэнтных треугольника. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

Теорема 5. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. $AK \cong KC$, $BK \cong KD$



Доказательство теоремы 4. В параллелограмме ABCD проведем диагональ BD. $AB \cong CD$, $AD \cong BC$ так как они являются противоположными сторонами параллелограмма, а сторона BD - общая, то по признаку ССС конгруэнтности треугольников $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. Проведите диагональ AC и самостоятельно докажете, что $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

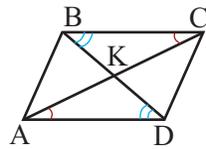


- 14) Докажите теорему 5.

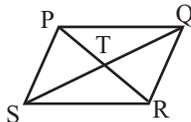
Дано: $\square ABCD$

Докажите: $AK \cong KC$, $BK \cong KD$

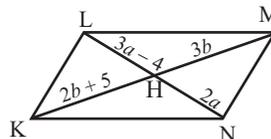
План для доказательства: используйте свойства углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей и признаком УСУ конгруэнтности треугольников.



- 15) Если $\triangle TSP \cong \triangle TQR$, то докажите, что четырёхугольник PQRS является параллелограммом. Запишите доказательство в виде текста.



- 16) В параллелограмме KLMN найдите длины отрезков:
 1) LH 2) LN 3) KH 4) KM



Параллелограмм

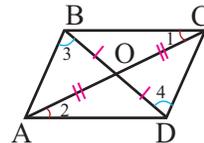
Признаки параллелограмма

Теорема 1. Четырёхугольник, у которого две противоположные стороны конгруэнтны и параллельны, есть параллелограмм.

Теорема 2. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны которого конгруэнтны, является параллелограммом.

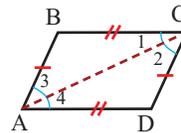
Теорема 3. Если диагонали четырёхугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник есть параллелограмм.

Доказательство теоремы 3: $AO \cong OC$, $BO \cong OD$ - по условию. $\angle AOD \cong \angle COB$, так как они являются вертикальными углами. Тогда по признаку СУС $\triangle AOD \cong \triangle COB$. Соответствующие углы конгруэнтных треугольников равны:

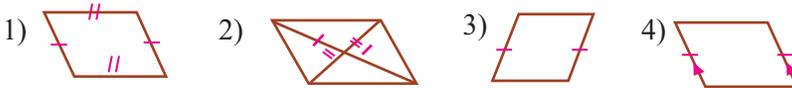


$\angle 1 \cong \angle 2$. Из равенства внутренних накрест лежащих углов $BC \parallel AD$. Аналогично, так как $\triangle AOB \cong \triangle COD$, то $\angle 3 \cong \angle 4$ и, значит, $AB \parallel CD$. Так как противоположные стороны попарно параллельны, то четырёхугольник ABCD является параллелограммом.

17 Докажите теорему 2. План доказательства теоремы: используйте признаки параллельности прямых и конгруэнтность треугольников.

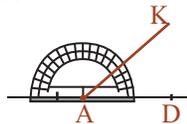


18 Данные каких рисунков позволяют установить, что данная фигура действительно является параллелограммом?

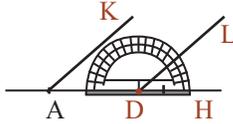


19 Исследуйте алгоритм построения параллелограмма по сторонам и углу.

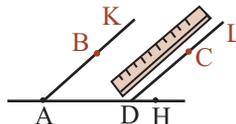
1. На прямой отметьте отрезок AD, длина которого равна одной из сторон и постройте заданный $\angle KAD$.



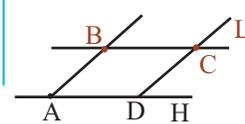
2. Примите точку D за вершину и постройте такой же угол - $\angle LDH$.



3. На лучах AK и DL отметьте отрезки, длины которых равны другим сторонам параллелограмма AB и DC.



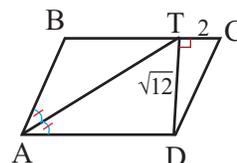
4. Соедините точки B и C. ABCD параллелограмм построен.



20 а) Постройте параллелограмм ABCD, если $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 60^\circ$.

б) Постройте параллелограмм ABCD, если $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $BD = 9$ см.

21 Найдите периметр параллелограмма ABCD по данным на рисунке.



Частные виды параллелограмма

Прямоугольник

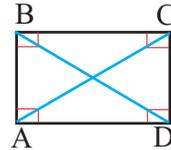
Определение. Параллелограмм, все углы которого прямые, называется прямоугольником.

Все свойства параллелограмма относятся к прямоугольнику.

Наряду с этим прямоугольник имеет следующее свойство.

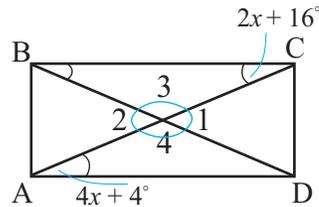
Теорема. Диагонали прямоугольника конгруэнтны. $AC \cong BD$

Признак прямоугольника. Параллелограмм, у которого диагонали конгруэнтны, есть прямоугольник.



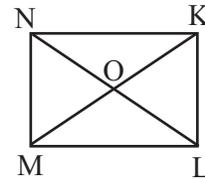
1) По данным прямоугольника ABCD найдите:

- 1) Значение x ;
- 2) Углы $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.



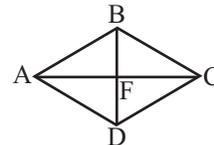
2) MNKL прямоугольник. По данным рисунка найдите:

- 1) ОК, если $NO = 3x + 4$, $OL = 4x - 3$;
- 2) НК, если $ML = 4x - 4$, $NK = 3x + 7$;
- 3) $\angle LKM$, если $\angle MNL = 2x - 3$, $\angle LNK = x + 6$.



3) 1) ABCD параллелограмм. Какая информация о $\angle BAD$ даёт возможность доказать, что этот параллелограмм является прямоугольником?

2) ABCD параллелограмм. Какая информация о BD и AC даёт возможность доказать, что этот параллелограмм является прямоугольником?



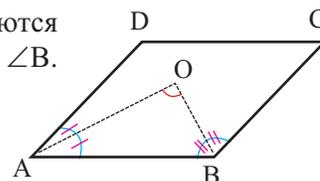
4) Биссектриса прямоугольника делит его сторону на отрезки 6 см и 8 см. Найдите периметр данного прямоугольника. Рассмотрите все возможные случаи.

5) Для постройки нового здания школы выделен участок земли длиной 120 м и площадью 1,2 га. Начертите план этого участка в масштабе 1:1000.

6) а) Начертите и найдите угол между биссектрисами углов, прилежащих к одной стороне прямоугольника.

б) В параллелограмме ABCD AO и BO являются соответственно биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$. Докажите, что $\angle AOB = 90^\circ$.

Указание: для доказательства используйте равенство $\angle A + \angle B = 180^\circ$.



Частные виды параллелограмма

Ромб и свойства ромба

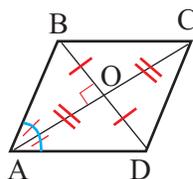
Определение. Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны, называется ромбом.

Все свойства параллелограмма относятся к ромбу.

Наряду с этим, ромб обладает следующими свойствами.

Теорема 1. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов и пересекаются под прямым углом.

$\angle BAC \cong \angle DAC$, $\angle ABD \cong \angle CBD$, $AC \perp BD$.



Теорема 2 (Обратная теорема). Параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны, есть ромб.

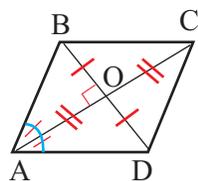
Если $AC \perp BD$, то параллелограмм ABCD является ромбом.

Доказательство теоремы 1.

Дано: ABCD ромб.

Докажите, что $\angle BAC \cong \angle DAC$, $\angle ABD \cong \angle CBD$, $AC \perp BD$.

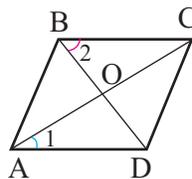
Доказательство (словесное): По определению ромба $AB \cong BC \cong CD \cong AD$. При этом, так как ромб является параллелограммом, а диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, тогда можно записать, что $BO \cong OD$. В равнобедренном $\triangle ABD$ медиана AO (так как $BO \cong OD$) является также и биссектрисой и высотой. Т.е. $\angle BAC \cong \angle DAC$. Так как $\angle BOC$ является прямым углом, то $AC \perp BD$. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то высота BO является и биссектрисой. Значит, $\angle ABD \cong \angle CBD$.



Пример. $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle 1 = 35^\circ$, $\angle 2 = 55^\circ$, $CD = 5$ см.

Найдите периметр четырехугольника ABCD.

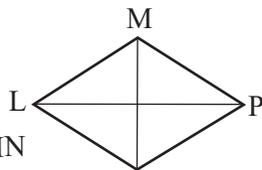
Решение: так как по условию диагонали делятся точкой пересечения пополам, то четырехугольник ABCD параллелограмм. Значит, $AD \parallel BC$. Из равенства накрест лежащих углов имеем $\angle ADB = 55^\circ$. В $\triangle AOD$ $\angle AOD = 180^\circ - (\angle 1 + \angle ADO) = 180^\circ - (35^\circ + 55^\circ) = 90^\circ$. Значит, $AC \perp BD$. Так как диагонали перпендикулярны, то параллелограмм ABCD является ромбом. Стороны ромба конгруэнтны. Так как $CD = 5$ см, получим, что периметр ромба $P = 4 \cdot CD = 4 \cdot 5 = 20$ см.



Обучающие задания

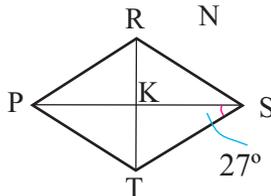
7 В ромбе LMPN $\angle MLN = \frac{1}{2} \angle LMP$, $MP = 12$

Найдите: 1) $\angle MPL$ 2) $\angle MLN$ 3) $\angle LMP$ 4) MN



8 В ромбе PRST $\angle TSP = 27^\circ$
 $PK = 5n - 2$, $KS = 3n + 2$.

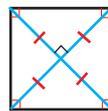
Найдите: 1) $\angle RPK$ 2) $\angle PTS$ 3) $\angle PTK$
 4) PS 5) PK



Частные виды параллелограмма

Квадрат

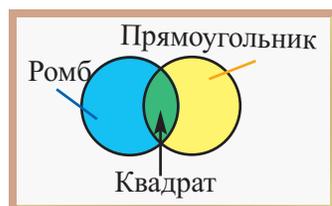
Определение. Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны конгруэнтны.



По определению прямоугольник - параллелограмм, т.е. квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т.е. он ромб. Поэтому все свойства прямоугольника и ромба относятся к квадрату.

- Все углы прямые.
- Все стороны конгруэнтны.
- Диагонали конгруэнтны, взаимно перпендикулярны, делятся точкой пересечения пополам и являются биссектрисами углов.

- 9) Поместите свойства фигур в соответствующие области диаграммы Венна. Начертите диаграмму на большом листе бумаги и подготовьте презентацию.



- 10) Эльгюн отрезал деревянный кусок в форме четырёхугольника со стороной 18 см. Какие ещё измерения необходимо выполнить, чтобы убедиться, что он имеет квадратную форму?

- 11) а) Покажите, что все высоты ромба конгруэнтны.
б) Найдите периметр и высоту ромба, один из углов которого равен 120° , а меньшая диагональ равна 8 см.
с) Найдите периметр и высоту ромба, диагонали которого равны 12 см и 16 см.

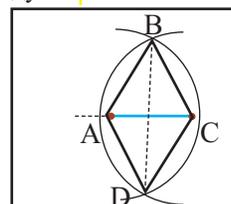
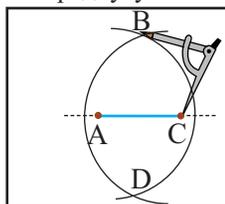
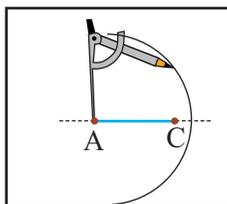
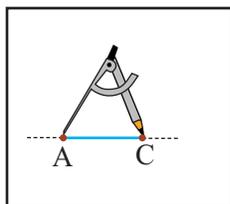
- 12) 1) Исследуйте последовательность построения ромба по диагонали и стороне.

На прямой отметьте отрезок длиной равной длине диагонали AC.

Изобразите дугу с центром в точке A, радиусом, равным стороне ромба.

Установив острый конец циркуля в точке C, начертите дугу, пересекающую ранее изображённую дугу, и имеющую радиус, равный радиусу этой же дуги.

Соедините точки A, B, C, D отрезками.

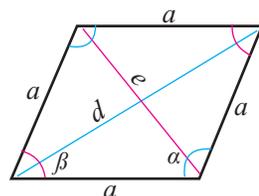


- 2) Обоснуйте, что четырёхугольник ABCD, построенный в пункте 1, - ромб.
3) Используя свойство ромба “Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам”, постройте ромб, диагонали которого равны 4 см и 6 см. Шаги построения определите при помощи обсуждения.

Частные виды параллелограмма

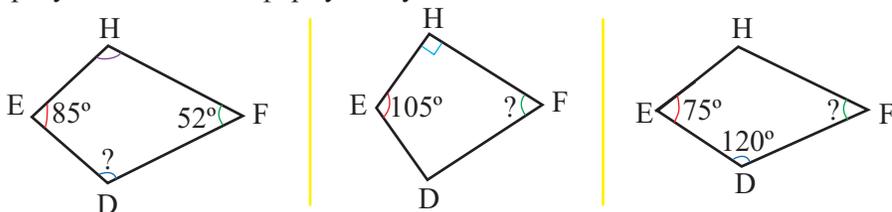
13» Постройте ромб по заданному условию

- 1) $a = 50$ мм, $\alpha = 110^\circ$ 2) $a = 4$ см, $\beta = 60^\circ$
 3) $d = 4$ см, $e = 3$ см 4) $d = 8$ см, $e = 6$ см



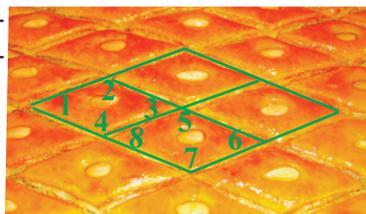
14» **Исследование:** при построении ромба Самир сначала начертил диагонали. Он знает, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. При построении он забыл, что точка пересечения делит обе диагонали пополам. Однако его очень обрадовало, что форма полученной фигуры напоминала воздушного змея. Докажите, что одна пара противоположных углов четырёхугольника в форме воздушного змея равны.

15» Найдите градусные меры недостающих углов на рисунке, если четырёхугольник имеет форму воздушного змея.



16» Пахлаву нарезают на куски в форме конгруэнтных ромбов. Решите задачи, используя углы, отмеченные на рисунке.

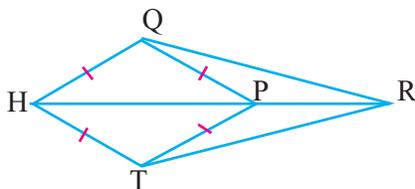
- а) Докажите, что $\angle 3$ и $\angle 6$ соответствующие углы.
 б) Докажите, что $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$



17» а) Конгруэнтны ли ромбы, если стороны одного ромба конгруэнтны сторонам другого ромба?
 б) Конгруэнтны ли квадраты, если стороны одного квадрата конгруэнтны сторонам другого квадрата?

18» Рашад собирается построить дом на участке в форме квадрата, площадью 400 м^2 . Он начертил план этого участка в масштабе 1:200. Начертите и вы этот план.

19» Докажите, что $RQ \cong RT$, если $HQPT$ ромб, HP диагональ ромба, а точка R находится на прямой, содержащей диагональ HP .



20» Какие из следующих утверждений верны *всегда*, какие - *иногда*, а какие - *никогда*?

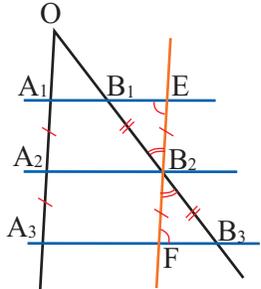
- 1) Прямоугольник есть параллелограмм. 5) Ромб есть квадрат.
 2) Параллелограмм есть ромб. 6) Ромб есть прямоугольник.
 3) Квадрат есть ромб. 7) Прямоугольник есть четырёхугольник.
 4) Квадрат есть прямоугольник. 8) Прямоугольник есть квадрат.

Применение свойств параллелограмма

- 1) а) Запишите в тетради доказательство теоремы, заполнив пропущенные строки. **Теорема Фалеса.** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне конгруэнтные отрезки, то они отсекают конгруэнтные отрезки и на другой его стороне. Если $A_1A_2 \cong A_2A_3$, тогда $B_1B_2 \cong B_2B_3$

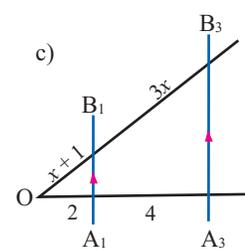
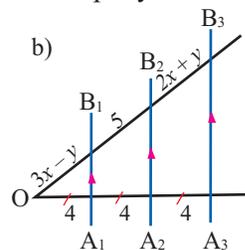
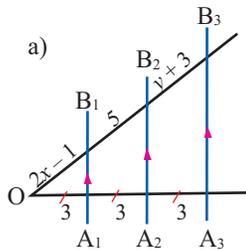
Доказательство: через точку B_2 проведем параллельную прямую к прямой OA_3 .

Предположение	Обоснование
1. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 \cong A_2A_3$	1. Дано.
2. $A_1A_2 \cong EB_2$, $A_2A_3 \cong B_2F$	2.
3. $EB_2 \cong B_2F$	3. $A_1A_2 \cong A_2A_3$
4. $\angle E \cong \angle F$	4.
5. $\angle EB_2B_1 \cong \angle FB_2B_3$	5. Вертикальные углы
6. $\triangle EB_2B_1 \cong \triangle FB_2B_3$	6. Признак УСУ
7. $B_1B_2 \cong B_2B_3$	7.



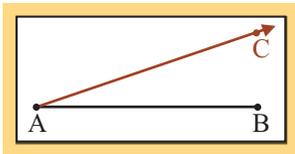
б) Останется ли результат теоремы Фалеса тем же, если в условии вместо сторон угла взять две произвольные прямые?

- 2) Найдите неизвестные по данным рисунка.

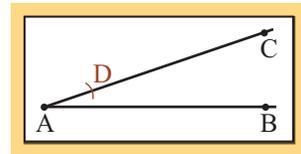


- 3) а) Выполните в тетради деление отрезка на конгруэнтные части.

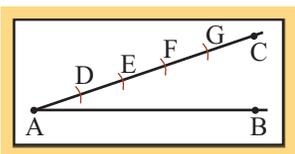
1. Изобразите отрезок AB . На луче, который образует со стороной AB острый угол, отметьте любую точку C .



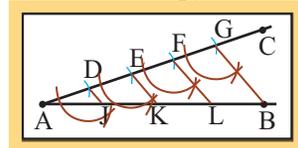
2. Установите циркуль в точке A , изобразите дугу, пересекающую AC , и отметьте точку пересечения буквой D .



3. Не меняя раствора циркуля вновь изобразите дуги, пересекающие отрезок AC . Обозначьте последовательно точки пересечения через E, F, G .



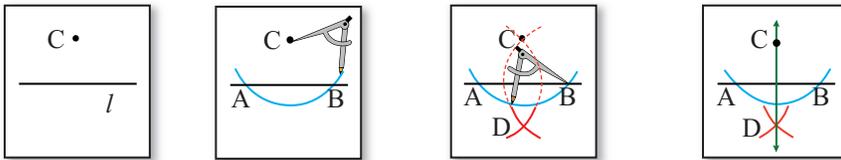
4. Начертите отрезок GB . Через точки D, E и F начертите отрезки, параллельные отрезку GB . Почему можно утверждать, что отрезки AJ, JK, KL, LB конгруэнтны?



б) Изобразите отрезок AB и разделите его на 5 конгруэнтных частей.

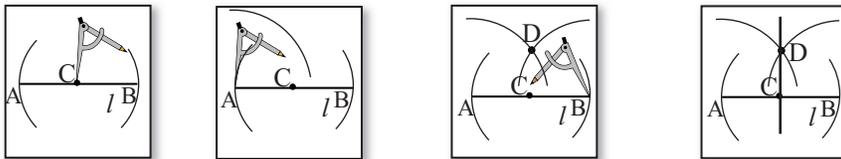
Применение свойств параллелограмма

4» Построение перпендикуляра к данной прямой из заданной точки.



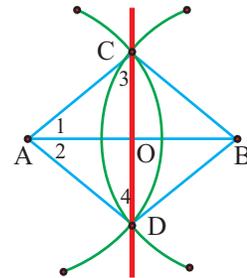
1. Проведём прямую l и отметим точку C , не принадлежащую данной прямой.
2. Установим остриё циркуля на точке C и начертим дугу, пересекающую прямую в двух точках. Обозначим точки пересечения буквами A и B .
3. Не меняя раствора циркуля, проведём окружности с центрами в точках A и B . Точку их пересечения, лежащую в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка C , обозначим буквой D .
4. Через точки C и D проведём прямую $CD \perp AB$.

5» а) Исследуйте последовательность построения перпендикуляра к точке, расположенной на прямой.



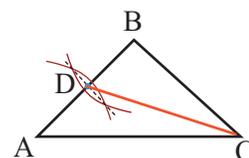
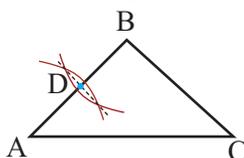
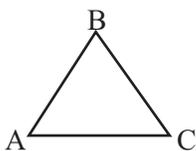
- б) Как построить перпендикуляр к прямой через точку, которая расположена на данной прямой, вы можете узнать, посмотрев интернет страницу <http://www.mathopenref.com/constperplinepoint.html>.
Выполните данные построения самостоятельно в тетради.

6» а) По построению на рисунке $\triangle ACB \cong \triangle BDA$ и $\triangle ACD \cong \triangle BDC$. Докажите, что CD является средним перпендикуляром отрезка AB .



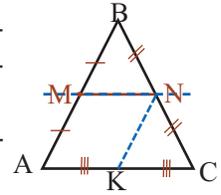
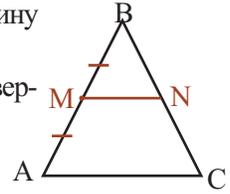
б) Построение медианы треугольника при помощи построения точки, которая является серединой отрезка.

1. Построим $\triangle ABC$
2. Построим точку D , которая является серединой стороны AB .
3. Соединим точки C и D . Отрезок CD является медианой $\triangle ABC$.



Применение свойств параллелограмма

- Исследование:** 1) В треугольнике $\triangle ABC$ через точку M - середину стороны AB , проведите прямую, параллельную AC : $MN \parallel AC$.
 2) Измерьте и сравните длины отрезков BN и NC . Можно ли утверждать, что $BN = NC$?



Средняя линия треугольника

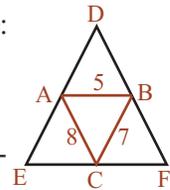
Определение: Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией этого треугольника.

Теорема. Средняя линия, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна третьей стороне и равна ее половине: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$.

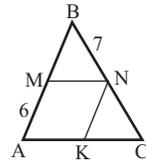
Доказательство. Пусть дан треугольник $\triangle ABC$ и его средняя линия MN . Проведём через точку M прямую, параллельную стороне AC . По теореме Фалеса она проходит через середину стороны AB , т.е. совпадает со средней линией MN . Т.е. средняя линия MN параллельна стороне AC . Теперь проведём среднюю линию NK . Т.к. $NK \parallel AB$, то четырёхугольник $AMNK$ является параллелограммом. По свойству параллелограмма $MN \cong AK$. По теореме Фалеса $AK \cong KC$. Тогда $MN = \frac{AC}{2}$. Теорема доказана.

Обучающие задания.

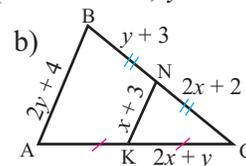
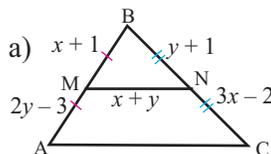
- 7** Найдите стороны треугольника, вершины которого являются серединами сторон треугольника со сторонами 4 см, 6 см и 8 см.
- 8** а) Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 40 см, а средняя линия 5 см.
 б) Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 28 см, а средняя линия 4 см. Сколько решений имеет задача?
- 9** Точки A, B и C – середины сторон треугольника DEF . Найдите:
 а) длины сторон DE, DF, EF ;
 б) периметр $\triangle DEF$;
 в) отношение периметров $\triangle DEF$ и $\triangle ABC$;
 г) докажите, что средние линии треугольника делят его на 4 конгруэнтных треугольника.



- 10** Точки M, N, K являются серединами сторон $\triangle ABC$. Зная, что $AM = 6$ см, $BN = 7$ см и периметр $\triangle ABC$ равен 36 см, найдите периметр четырёхугольника $AMNK$.



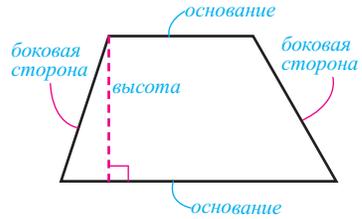
- 11** По данным рисунка найдите значения переменных x, y и периметр $\triangle ABC$.



Трапеция

Трапеция

Определение. Четырёхугольник, у которого только две стороны параллельны, называется трапецией. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, не параллельные стороны называются **боковыми сторонами**.

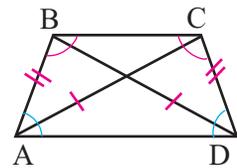


Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания до прямой содержащей другое основание.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной (или равнобокой) трапецией**.

Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основанию, называется **прямоугольной трапецией**.

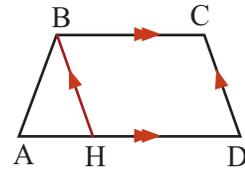
Теорема 1. В равнобедренной трапеции углы, прилежащие к основанию, конгруэнтны. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle C$



Теорема 2. Диагонали равнобедренной трапеции конгруэнтны. $AC \cong BD$

Доказательство теоремы 1:

Проведем $BH \parallel CD$. $BCHD$ -параллелограмм: $BH \cong CD$. $\triangle ABH$ равнобедренный: $\angle A \cong \angle AHB$. С другой стороны для соответствующих углов $\angle AHB \cong \angle D$. Тогда $\angle A \cong \angle D$. Сумма углов, прилежащих к одной стороне трапеции 180° , и т.к. $\angle A \cong \angle D$, то получим $\angle B \cong \angle C$.



1) Закончите доказательство теоремы 2.

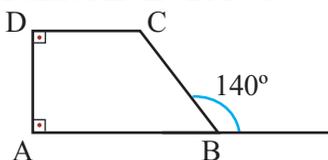
Дано: ABCD равнобокая трапеция. $AB \cong CD$

Доказать: $AC \cong BD$

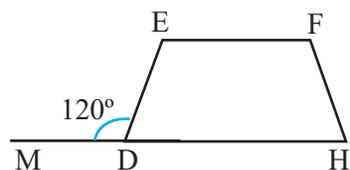
Предположение	Обоснование
$AB \cong CD$	Дано
$\angle A \cong \angle D$
$AD \cong DA$	общая сторона $\triangle BAD$ и $\triangle CDA$
$\triangle BAD \cong \triangle CDA$	По признаку конгруэнтности СУС треугольников
$AC \cong BD$

2) Найдите градусные меры внутренних углов трапеции.

1) В трапеции ABCD боковая сторона AD перпендикулярна основанию AB. $\angle CBM = 140^\circ$



2) DEFH-равнобедренная трапеция, $\angle EDM = 120^\circ$



Трапеция

3» Исследуйте данную задачу и решение.

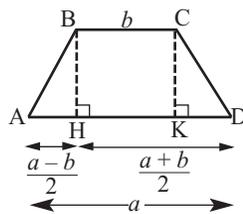
Задача. ABCD-равнобедренная трапеция, $AD = a$, $BC = b$, BH высота.

Покажите, что $AH = \frac{a-b}{2}$, $HD = \frac{a+b}{2}$

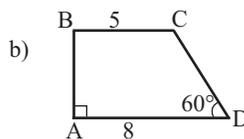
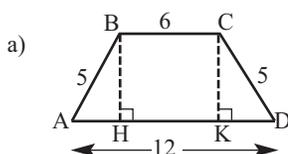
Решение: проведем высоту $CK:CK \perp AD$.

Четырехугольник $HBCK$ -прямоугольник: $HK = BC = b$. По катету и гипотенузе $\triangle ABH$ и $\triangle DCK$ конгруэнтны: $KD = AH = \frac{AD - HK}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Тогда $HD = AD - AH = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$



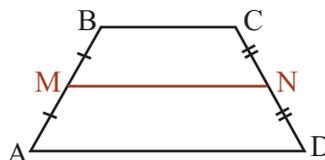
4» По данным рисунка найдите высоту трапеции.



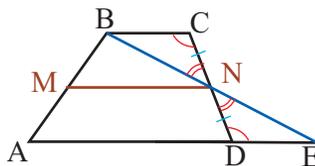
Средняя линия трапеции

Определение. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



$AM = MB$,
 $CN = ND$,
MN-средняя линия трапеции



$MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$,
 $MN = \frac{AD + BC}{2}$

Доказательство:

Через точку B и точку N , являющийся серединой CD , проведём прямую и обозначим точку пересечения со стороной AD через E .

Предположение	Обоснование
1. $CN \cong ND$	1. Согласно построению
2. $\angle C \cong \angle EDN$	2. Внутренние накрест лежащие углы
3. $\angle CNB \cong \angle DNE$	3. Вертикальные углы
4. $\triangle CNB \cong \triangle DNE$	4. По признаку УСУ
5. $BC \cong DE$, $BN \cong NE$,	5. Соответствующие стороны в конгруэнтных треугольниках
6. $MN \parallel AE$, $MN = \frac{AE}{2}$	6. Отрезок MN -средняя линия $\triangle ABE$
7. $MN = \frac{AD + DE}{2}$	7. $AE = AD + DE$
8. $MN = \frac{AD + BC}{2}$	8. $DE \cong BC$

Трапеция

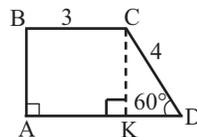
Пример. ABCD прямоугольная трапеция. Зная, что $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60^\circ$ найдите длину средней линии.

Решение: проведем $CK \perp AD$. Так как ABCK прямоугольник, то $AK = BC = 3$. В $\triangle CKD$ $\angle KCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, отсюда

$$KD = \frac{CD}{2} = 2.$$

Тогда $AD = AK + KD = 3 + 2 = 5$.

Длина средней линии: $\frac{AD + BC}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$ см.



Обучающие задания.

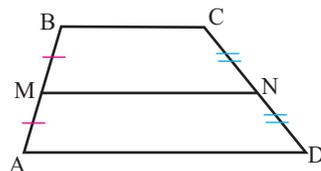
5) Найдите длину средней линии трапеции, если её основания равны 0,6 м и 2,4 м.

6) MN-средняя линия трапеции ABCD.

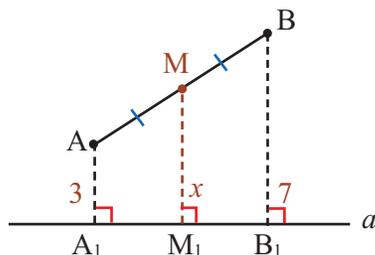
Найдите:

а) длину основания AD, если $BC = 18$ см, $MN = 24$ см;

б) периметры трапеций AMND и MBCN, если $AD = 16$ см, $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $CD = 14$ см.

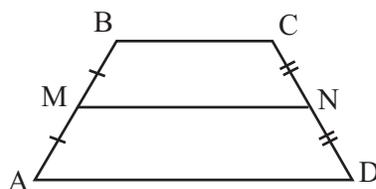


7) а) Концы отрезка находятся на расстоянии 3 см и 7 см от прямой a . Найдите расстояние от середины отрезка до прямой.

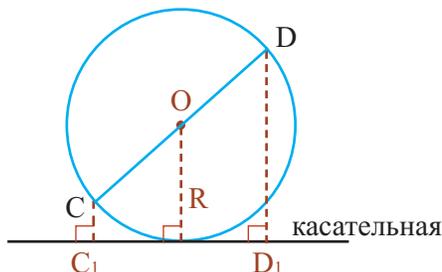


б) Решите соответствующую задачу, если отрезок AB пересекает прямую a .

8) MN-средняя линия трапеции ABCD. Найдите основания трапеции, если $BC:AD=2:3$ и $MN=5$ см.

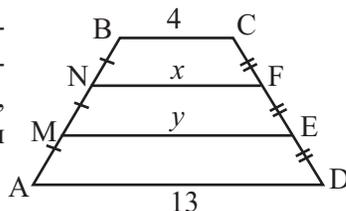


9) Найдите радиус окружности, если расстояния от концов диаметра до касательной равны 4 см и 8 см.

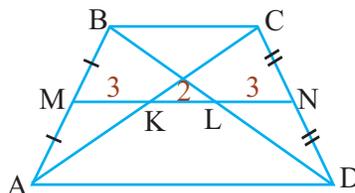


Трапеция

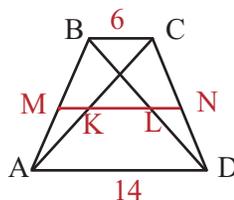
- 10» В трапеции ABCD точки M и N делят боковую сторону AB на три конгруэнтных отрезка, через которые проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите длины отрезков ME и NF.



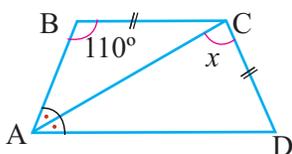
- 11» MN - средняя линия трапеции. По данным рисунка найдите основания трапеции.



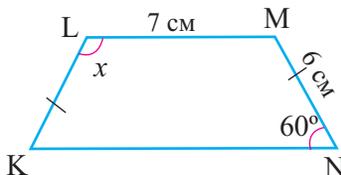
- 12» Основания трапеции равны 6 см и 14 см. Найдите длину отрезка KL средней линии, заключённого между диагоналями.



- 13» Дано: ABCD трапеция
BC = CD
AC-биссектриса.
Найдите: $\angle ACD$

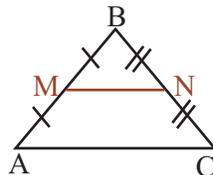


- 14» Дано: KLMN равнобедренная трапеция,
 $\angle KNM = 60^\circ$, LM = 7 см, NM = 6 см
Найдите: $\angle KLM$ и среднюю линию трапеции

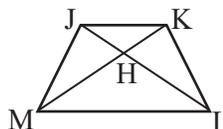


- 15» Начертите равносторонний треугольник и проведите в нём среднюю линию. Запишите своё мнение от полученных треугольника и трапеции.

- 16» MN- средняя линия $\triangle ABC$. Найдите периметр трапеции AMNC, если AB = 10 см, BC = 12 см, AC = 14 см

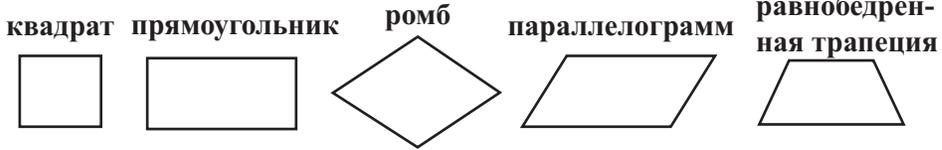


- 17» Наргиз должна доказать, что если в трапеции MJKL $JM \cong KL$, то $\triangle MJL \cong \triangle LKM$. Решите и вы эту задачу.



Обобщающие задания

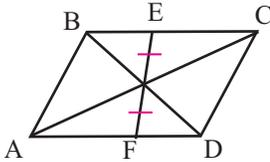
- 1) Начертите в тетради следующие фигуры и все возможные оси симметрии данных фигур. Сколько осей симметрии имеет каждая фигура?



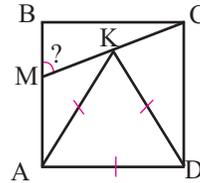
- 2) Найдите углы параллелограмма, если разность двух углов равна:
а) 80° , б) 100° .

- 3) Параллелограмм, периметр которого равен 28 см, разделён диагоналями на 4 треугольника. Разность периметров двух треугольников равна 2 см. Найдите стороны параллелограмма.

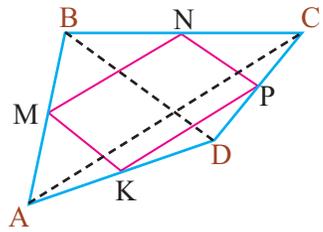
- 4) Докажите, что: 1) отрезок прямой между параллельными сторонами параллелограмма, проходящей через точку пересечения диагоналей, делится в этой точке пополам; 2) точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.



- 5) На рисунке ABCD квадрат, $\triangle AKD$ -равносторонний. Найдите $\angle BMC$.



- 6) В четырёхугольнике ABCD точки M, N, P, K являются соответственно серединами его сторон.
а) Что вы можете сказать о взаимном расположении отрезков MN и PK.
б) К какому виду четырёхугольников относится фигура MNPК?



- с) Найдите периметр четырёхугольника MNPК, если в четырёхугольнике ABCD диагональ $AC=8$ см, а $BD=7$ см.

- 7) Докажите, что если соединить середины сторон прямоугольника, получится ромб и наоборот, если соединить середины сторон ромба, получится прямоугольник.

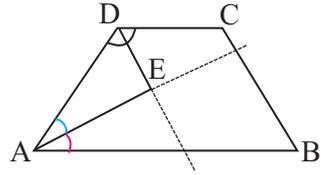
- 8) Параллелограмм на рисунке составлен из двух конгруэнтных равнобедренных трапеций, длина боковых сторон которых равна 8 см и средних линий - 12 см.



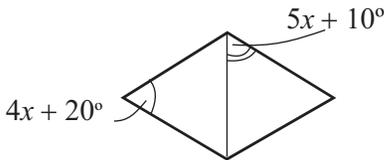
- 1) Разделите параллелограмм на две трапеции при помощи одной прямой линии.
2) Найдите периметры этих трапеций.
3) Найдите периметр параллелограмма.

Обобщающие задания

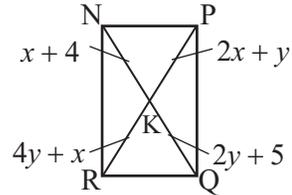
- 9» В трапеции ABCD биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle CDA$ пересекаются в точке E и $DE \parallel CB$. Найдите длину CD, если $DE \parallel CB$, $DE = 3$ см, $AE = 4$ см, $AB = 12$ см.



- 10» По данным рисунка найдите значение переменной в ромбе.



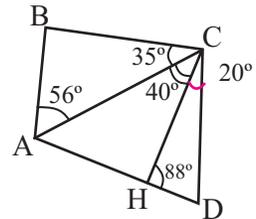
- 11» По данным рисунка найдите длину диагонали NQ прямоугольника RNPQ.



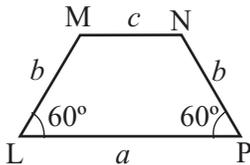
- 12» а) Найдите среднюю линию трапеции, если её периметр равен 24 см, а боковые стороны, соответственно, равны 4 см и 5 см.
 б) Средняя линия трапеции равна $\frac{2}{3}$ части большего основания. Во сколько раз средняя линия трапеции больше её меньшего основания?

- 13» По данным рисунка в закрашенные кружочки впишите знаки $<$, $>$, $=$. Обоснуйте своё мнение.

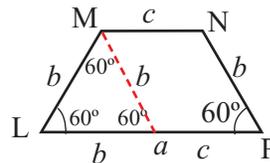
- CD CH
 BC AB
 AC CD



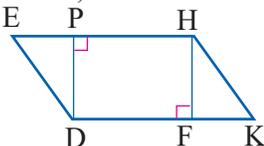
- 14» В равнобедренной трапеции LMNP $LM + NP = LP + MN$. По данным рисунка найдите отношение $a:c$. **Указание:** через вершину M проведите прямую, параллельную стороне NP.



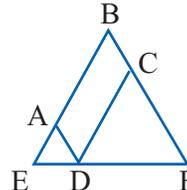
Указание:



- 15» Дано: \square DENK, $FH \perp DK$, $DP \perp EN$. Докажите, что: $\triangle DPE \cong \triangle HFK$.



- 16» Дано: \square ABCD, $EB \cong EF$. Докажите, что $\angle F \cong \angle ADC$.



5

Рациональные выражения

В этом разделе вы научитесь:

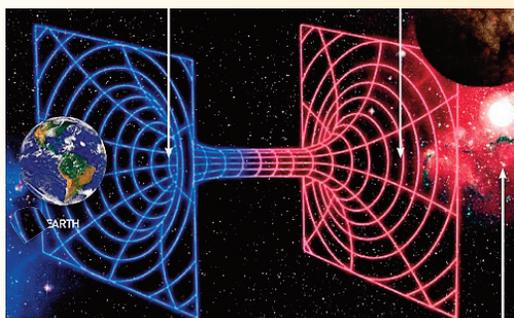
- упрощать рациональные выражения;
- выполнять действия над рациональными выражениями;
- решать задачи, которые требуют составления рациональных выражений;

Рациональные выражения широко используются для решения проблем в различных областях, таких как экономика, медицина, транспорт, космические исследования, энергетика, акустика и т.д.

Это интересно!

Бельгиец Марсель Толковский в возрасте 21 год придумал точную математическую модель для огранки бриллиантов. В ней он определил такие пропорции, при которых камень был прозрачен, имел идеальную круглую форму и при этом свет, входящий в бриллиант, отражался максимально.

Благодаря математической модели Марселя Толковского, процесс огранки бриллиантов был автоматизирован. На сегодняшний день Бельгия является ведущей страной по обработке бриллиантов.

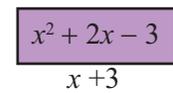
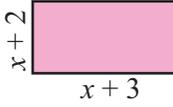


Рациональные выражения

Исследование. Опишите общие и различные свойства выражений.

1) Площадь прямоугольника со сторонами $(x + 2)$ и $(x + 3)$: $S = (x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 5x + 6$

2) Ширина прямоугольника с площадью $x^2 + 2x - 3$ и длиной $(x + 3)$: $\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$



Рациональные выражения

Сумма и разность многочленов является многочленом (в частном случае одночленом). Произведение многочленов также является многочленом. Отношение многочленов не всегда является многочленом. Например, отношение $(x^4 - 4)$ к $(x^2 + 2)$ является многочленом, т.к. существует такой многочлен, произведение которого с многочленом $(x^2 + 2)$ равно $(x^4 - 4)$: $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 4$. Однако отношение многочленов $(x^4 + 4)$ и $(x^2 + 2)$ не является многочленом, т.к. нет такого многочлена, произведение которого с $(x^2 + 2)$ равно $(x^4 + 4)$.

Отношение двух многочленов называется рациональным выражением.

Примеры: $(2a^2 + 3ab) : (2a + 1)$; $\frac{2y^3 + y^2 - 1}{4y^2}$; $\frac{3}{x - 5}$

Любой многочлен можно представить в виде дроби со знаменателем 1.

Например, $3x^2 + x + 4 = \frac{3x^2 + x + 4}{1}$. Таким образом, многочлен также является рациональным выражением. Сумма, разность, произведение и отношение рациональных выражений также являются рациональными выражениями, то есть их можно преобразовать в дробь, у которой числитель и знаменатель некоторые многочлены (в частном случае одночлены).

Дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами, называется также **рациональной алгебраической дробью**.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называются областью допустимых значений переменных (ОДЗ).

Многочлен имеет смысл при всех значениях переменной. При некоторых значениях переменных в знаменателе дроби может не иметь смысла. Например, выражение $\frac{x + 3}{x - 1}$ не имеет смысла при $x = 1$, так как при $x = 1$ знаменатель превращается в ноль.

На ноль делить нельзя! Поэтому, если знаменатель дроби содержит одну или несколько переменных, то они не могут принимать значения, которые обращают знаменатель в ноль.

Пример. Найдите возможные значения переменного в дроби $\frac{3}{x(x - 1)}$.

Решение: Чтобы найти, при каких значениях x знаменатель дроби обращается в ноль, надо решить уравнение $x(x - 1) = 0$. Это уравнение имеет два корня: 0 и 1. Значит, допустимыми значениями являются любые числа, кроме 0 и 1. Для дроби $\frac{3}{x(x - 1)}$ ОДЗ записывается как $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

Рациональные выражения

Обучающие задания

- 1) Запишите выражения в виде дроби (при помощи дробной черты).
а) $(x^2 + 7) : (x - 2)$ б) $(2x + 5) : (x + 1)$ в) $(5x^2 - 1) : (2x - 3)$
- 2) Из следующих выражений выберите многочлены и запишите их в тетрадь.
а) $2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - 7$ б) $\frac{2}{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 5$ в) $3x^2 - \frac{1}{4}x + 2$
- 3) Ляtif утверждает, что выражение $\frac{x+6}{3}$ не является рациональным выражением, а выражение $\frac{3}{x+6}$ является. А как думаете вы? Для каждого выражения запишите ОДЗ.
- 4) Какое численное значение не может принимать переменная в выражениях?
а) $(x + 3) : x$ б) $(x + 5) : (x - 3)$
в) $(a + 5) : (a - 1)$ д) $(x^2 + 2x + 5) : (2x + 1)$
- 5) Какое численное значение не может принимать переменная?
а) $\frac{2x+1}{x-2}$ б) $\frac{3x^2-3}{x}$ в) $\frac{a^2+1}{a-1}$ д) $\frac{c^3+8}{c+2}$
- 6) Найдите значение дроби $\frac{y-3}{y}$ при $y = 3; 1; -1$.
- 7) При каком значении переменной значение дроби $\frac{x-2}{x-1}$ равно:
а) 2; б) 0; в) -1; д) 0,5?
- 8) Запишите такие рациональные выражения, которые не имеют смысла при значении переменной: а) 1; б) -2.
- 9) Поезд за t часов прошёл s километров. Выразите среднюю скорость v (км/ч) через s и t и найдите значение скорости v при:
а) $t = 4; s = 180$ б) $t = 1,5; s = 120$
- 10) На путь по течению реки моторная лодка затратила 3 часа. Найдите, сколько времени t (часов) потребуется лодке на обратный путь, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде v (км/ч).
Найдите t при: а) $v = 14$ км/ч б) $v = 10$ км/ч
- 11) Автомобиль Мусы на каждые 12 км на магистральной дороге и на каждые 8 км в городе расходует 1 литр бензина. Муса за день израсходовал, a литров бензина на магистральной дороге и b литров бензина в городе. Запишите выражение, которое показывает, сколько в среднем километров можно проехать, используя 1 литр бензина.
- 12) У Сулеймана в аквариуме есть золотые рыбки. Он поместил в аквариум ещё 5 дискусов. Запишите выражение, которое показывает, какую часть дискусы составляют от всех рыб. Если Сулейман купит ещё 4 неоновые рыбки и поместит их в аквариум, то какую часть будут составлять дискусы от всех рыб?



Упрощение рациональных выражений

Тождественно равные (эквивалентные выражения)

Два выражения называются тождественно равными или эквивалентными, если они имеют одинаковые значения при всех допустимых значениях переменных. Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, т.е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$ справедливо следующее равенство: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Аналогичное свойство верно и для рациональных выражений. При умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля выражение, получается выражение, эквивалентное данному выражению при всех допустимых значениях переменной.

Пример. Покажите эквивалентность дробей $\frac{2}{x}$ и $\frac{2x+2}{x^2+x}$.

Решение: 1. Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{x}$ на выражение $(x+1)$ (здесь $x \neq -1$). Получим $\frac{2}{x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2+x}$, где $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

2. Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{2x+2}{x^2+x}$ на выражение $(x+1)$ (здесь $x \neq -1$). Получим $\frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2}{x}$, где $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

Внимание! При определении возможных значений переменных *эквивалентных выражений* надо учитывать существование каждой из дробей в левых и правых частях равенства.

Обучающие задания

1» В закрашенные квадраты впишите такие числа или выражения, чтобы выражения были попарно эквивалентны.

a) $\frac{3}{5}$, \blacksquare c) $\frac{2}{5}$, \blacksquare
b) $\frac{4}{\blacksquare}$, $\frac{20}{35}$ d) $\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{4x+8}{\blacksquare}$

2» Проверьте эквивалентность пар заданных выражений. Объясните, как одна из дробей была преобразована в другую. Укажите ОДЗ.

a) $\frac{10x}{15x^2}$, $\frac{2}{3x}$ c) $\frac{2x}{x^2-x}$, $\frac{2}{x-1}$
b) $\frac{24ax}{18a^2}$, $\frac{4x}{3a}$ d) $\frac{2(x+1)}{x^2-1}$, $\frac{2}{x-1}$

3» Для следующих дробей запишите по три эквивалентные дроби, умножив или разделив числитель и знаменатель на одно и то же выражение. Укажите ОДЗ.

a) $\frac{4xy}{6x^2}$ b) $\frac{12x^2y}{18xy}$ c) $\frac{2x}{x^2+x}$ d) $\frac{2x-4}{8x}$

4» Зохра утверждает, что равенство $\frac{2x}{x^2-2x} = \frac{2}{x-2}$ верно при всех значениях, кроме $x = 2$. Что вы думаете по этому поводу?

5» Для одного и того же рационального выражения можно записать несколько эквивалентных выражений. Например, выражение $\frac{2x}{3}$ эквивалентно как выражению $\frac{10x}{15}$, так и выражению $\frac{4x^3-2x^2}{6x^2-3x}$ при $x \neq 0$, $x \neq 0,5$. Покажите, каким образом данные выражения были получены из выражения $\frac{2x}{3}$.

Упрощение рациональных выражений

Сокращение рациональных дробей

Для упрощения рациональных дробей надо: 1. Разложить числитель и знаменатель на множители (если это возможно); 2. Определить общий множитель; 3. Разделить числитель и знаменатель на общий множитель.

Пример. Сократите дробь: а) $\frac{2x^2+4x}{2x^2}$ б) $\frac{x^2-36}{x^2+6x}$ в) $\frac{1-y}{y^2-1}$

Решение: а) $\frac{2x^2+4x}{2x^2} = \frac{\cancel{2x}(x+2)}{\cancel{2x}x} = \frac{x+2}{x}, x \neq 0,$

б) $\frac{x^2-36}{x^2+6x} = \frac{(x-6)\cancel{(x+6)}}{x\cancel{(x+6)}} = \frac{x-6}{x}, x \neq -6, x \neq 0$

в) $\frac{1-y}{y^2-1} = \frac{(1-y)}{(y+1)(y-1)} = \frac{\cancel{-(y-1)}}{(y+1)\cancel{(y-1)}} = \frac{-1}{y+1} = -\frac{1}{y+1}, y \neq \pm 1.$

Внимание! При изменении знака числителя (или знаменателя) дроби и знака перед дробью получается дробь, эквивалентная данной.

Обучающие задания

6 Упростите.

а) $\frac{aby}{abx}$

с) $\frac{21a(b+3)}{14b(b+3)}$

б) $\frac{-6p}{3q}$

д) $\frac{x(y-3)}{5(y-3)}$

7 Сократите дробь, разложив числитель и знаменатель на множители.

а) $\frac{y^2-16}{3y+12}$

с) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$

б) $\frac{(c+2)^2}{5c^2+10c}$

д) $\frac{3x^2-9yx}{x^2-9y^2}$

8 Упростите.

а) $\frac{3a-12b}{6ab}$

б) $\frac{15b-10c}{10b}$

с) $\frac{2a+4}{3(a+2)}$

д) $\frac{5xy+15x}{6y+18}$

е) $\frac{10a-10b}{15b-15a}$

9 Найдите значение выражения.

а) $\frac{12a^2+8ab}{3ab+2b^2}$ а = 0,5;
б = 0,2

б) $\frac{x^2-6xy+9y^2}{2x^2-6xy}$ x = 1,5;
y = -0,5

10 Укажите множество допустимых значений переменных и упростите выражение.

а) $\frac{x^2-9}{3x+9}$

б) $\frac{x^2-4}{2x-4}$

с) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

д) $\frac{7y-49}{y^2-49}$

11 Из следующих выражений $\frac{-x}{-y}$; $\frac{-x}{y}$; $\frac{x}{-y}$; $-\frac{-x}{y}$ выберите те, которые:

а) равны выражению $\frac{x}{y}$;

б) противоположны выражению $\frac{x}{y}$.

12 В каких рациональных выражениях числитель и знаменатель тождественно равны, а в каких – противоположны? Упростите выражения.

а) $\frac{-a+3}{3-a}$

б) $\frac{x^2-1}{1-x^2}$

с) $\frac{y^2-xy-3}{3+xy-y^2}$

д) $\frac{x^2-3+y}{y+x^2-3}$

Упрощение рациональных выражений

13 Упростите. а) $\frac{2x + cx - 2y - cy}{4x - 4y}$ б) $\frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2 + ax - ac - cx}$

14 Запишите частное в виде дроби и сократите её.
 а) $(4x^2 - a^2) : (2x - a)$ б) $(x^3 - 8) : (x^2 + 2x + 4)$ в) $(x^2 + 3x) : (x^3 + 27)$

15 Упростите. а) $\frac{3a + 36}{12b + ab}$ б) $\frac{25 - x^2}{3x + 15}$ в) $\frac{2 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$

16 Упростите. а) $\frac{(2x - 6)^2}{x - 3}$ б) $\frac{(3a + 6)^2}{a + 2}$ в) $\frac{4x^2 - 4}{(2x - 2)^2}$

17 Упростите. а) $\frac{a^5 + a^3}{a^4 + a^2}$ б) $\frac{b^6 + b^4}{b^4 + b^2}$ в) $\frac{y^7 - y^4}{y^2 - y^5}$

Разложение трёхчлена на множители и сокращение рациональных дробей

Если числитель или знаменатель рационального выражения является трёхчленом, то для сокращения дроби применяют различные методы разложения на множители. Если для трёхчлена $x^2 + bx + c$ возможно найти такие числа m и n , чтобы их произведение было равно c , а сумма была равна b , то в этом случае:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n).$$

Пример 1. Сократите дробь $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3}$

Решение: Для сокращения дроби сначала надо разложить числитель и знаменатель на множители.

Для разложения на множители трёхчлена $x^2 + 5x + 6$ надо найти два положительных числа, произведение которых равно 6, а сумма 5. Это числа 2 и 3: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Множители числа 6	Сумма множителей
1 и 6	7
2 и 3	5

Для разложения на множители трёхчлена $x^2 + 2x - 3$ надо найти два числа, произведение которых равно -3 , а сумма 2. Так как эти числа 3 и -1 , тогда имеем $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

Множители числа -3	Сумма множителей
-3 и 1	-2
3 и -1	2

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x + 2)\cancel{(x + 3)}}{\cancel{(x + 3)}(x - 1)} = \frac{x + 2}{x - 1}, \quad x \neq -3, \quad x \neq 1$$

Для разложения на множители трёхчлена $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), надо найти такие числа m и n , чтобы $mn = ac$, а $m + n = b$.

Пример 2. Сократите дробь $\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3}$

Множители числа -12	Сумма множителей
-2 и 6	4
-3 и 4	1

Решение: Так как числами, произведение которых равно -12 , а сумма 1, являются числа -3 и 4, то числитель заданной дроби можно записать в виде $2x^2 + x - 6 =$

$$= 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(2x - 3). \text{ Тогда получим:}$$

$$\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3} = \frac{(x + 2)\cancel{(2x - 3)}}{\cancel{2x - 3}} = x + 2 \quad x \neq \frac{3}{2}$$

Упрощение рациональных выражений

Обучающие задания

18 Упростите выражения, разложив числитель и знаменатель на множители.

a) $\frac{x^2 - 7x + 12}{4x^2 - 12x}$

b) $\frac{x^2 - x - 6}{2x - 6}$

c) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}$

d) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{4x - 2}$

e) $\frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

f) $\frac{4x^2 + 5x - 6}{x^2 - 2x - 8}$

19 Сократите дробь, разложив многочлены на множители различными способами.

a) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 8}$

c) $\frac{x^2 - 6x + 9 - y^2}{x^2 - 3x + xy}$

20 Упростите и укажите ОДЗ.

a) $\frac{(x + 4)^2 - 4(x + 4) + 4}{x^2 - 4}$

b) $\frac{(x + 2)^2 - 2(x + 2) - 8}{x^2 - 16}$

21 В решении следующего задания допущены ошибки. Запишите заново решение и найдите эти ошибки.

$$\frac{6x^2 - x - 1}{9x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (3x - 1)}{(3x + 1)(3x - 1)} = \frac{2x^2 + 1}{3x + 1}, \quad x \neq -\frac{1}{3}$$

22 Приведите следующие дроби к знаменателю $12a^2b$.

a) $\frac{5b}{6a}$

c) $\frac{2a}{3b}$

b) $\frac{3}{4ab}$

d) $\frac{5b}{12}$

Пример. Приведём дробь $\frac{3b}{4a}$ к знаменателю $12a^2b$.

Так как $12a^2b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b$, то числитель и знаменатель дроби надо умножить на дополнительный множитель $3ab$.

$$\frac{3b}{4a} \cdot \frac{3ab}{3ab} = \frac{9ab^2}{12a^2b}$$

23 а) Представьте дробь $\frac{7x}{6y}$ в виде дроби со знаменателем $12x^2y^3$.

б) Представьте дробь $\frac{4}{x-y}$ в виде дроби со знаменателем $y-x$.

в) Представьте дробь $\frac{a}{a-1}$ в виде дроби со знаменателем a^2-1 .

24 Упростите.

a) $\frac{2x - 2}{x^2 + 9x - 10}$

b) $\frac{y^2 - 6y + 8}{y^2 + 3y - 10}$

c) $\frac{2x^2 + 2x - 12}{4x^2 + 12x}$

d) $\frac{3x - 6}{2x^2 + x - 10}$

25 Покажите, что выражения $\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ и $x + 5$ эквивалентны. Какое условие должно выполняться для этого?

Упрощение рациональных выражений

Прикладные задания

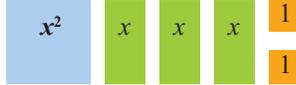
- 26**» При помощи алгебраических карт разложите трёхчлен на множители и упростите рациональные выражения.

а) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

б) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

с) $\frac{x^2 + 7x + 6}{x + 1}$

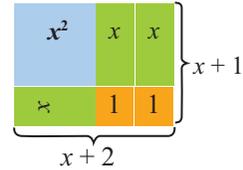
Пример: $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$



Расположите данные алгебраические карты так, чтобы получился прямоугольник со стороной $(x+1)$. Тогда другая сторона будет $(x+2)$.

Значит, $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{x+1}} = x + 2$$



- 27**» Площадь прямоугольника равна $(x^2 + 5x + 4)$ кв. ед., а ширина равна $(x + 1)$ ед. Запишите выражение для нахождения периметра.

- 28**» На листе квадратной формы начертите круг с наибольшим радиусом. Сторону квадрата обозначьте через $2x$.

а) Запишите рациональное выражение, которое показывает отношение площади квадрата к площади круга. б) Сколько процентов приблизительно занимает круг на данном листе? Ответ округлите до десятых.

- 29**» В мешке n красных шаров и m белых. В мешок положили жёлтые шары, по количеству равных удвоенному значению количества всех шаров. Запишите рациональное выражение, которое показывает вероятность того, что вынутый случайным образом из мешка шар будет: а) красным; б) белым; в) жёлтым. Упростите, если возможно, полученное выражение.

- 30**» Запишите две задачи, при решении которых требуется составить рациональные выражения. Задачи могут быть на нахождение площади, на движение, на вероятность и т.д.

Творческое применение. Как посчитать, сколько метров ковролина в рулоне?

- 31**» Для определения длины ковролина в рулоне выполните следующие шаги.

1. Обозначьте радиус картонного цилиндра, вокруг которого скатан рулон через r , а радиус всего рулона через R . Запишите выражение для нахождения площади лицевой части (поперечного сечения) ковролина круглой формы.

2. Обозначьте толщину ковролина через d , а длину ковролина в одном рулоне через l . Запишите выражение, которое показывает площадь прямоугольника с размерами l и d .

3. Для ковролина толщиной d запишите выражение, которое показывает длину ковролина l . Какая связь между d , l , R , r ?



Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений

Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений выполняется по тем же правилам, что и соответствующие действия с обыкновенными дробями.

Умножение рациональных выражений. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$ здесь A, B, C, D некоторые

Пример 1. $\frac{8ab}{5cd} \cdot \frac{6cx}{7ay} = \frac{8\cancel{a}b \cdot 6\cancel{c}x}{5\cancel{c}d \cdot 7\cancel{a}y} = \frac{48bx}{35dy}$ многочлены.

Деление рациональных выражений.

Чтобы разделить дробь, на дробь надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Это правило верно и, тогда, когда делимое или делитель являются многочленами.

Пример 2. $\frac{x-2}{x+1} : \frac{x^2-4}{x^2+x} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot x \cdot \cancel{(x+1)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{x}{x+2}$

Возведение рациональных дробей в степень: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$

Пример 3. $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^3 = \frac{(2x^2)^3}{y^3} = \frac{2^3(x^2)^3}{y^3} = \frac{8x^6}{y^3}$

Обучающие задания

1» Выполните умножение.

a) $\frac{9a}{8b} \cdot \frac{4b}{3}$ b) $\frac{6b^2}{15} \cdot \frac{10}{3b^2}$ c) $\frac{x^2}{21c} \cdot \frac{14c}{xb}$ d) $\frac{9a}{6b} \cdot 12b$

2» Выполните деление.

a) $\frac{5a}{4b} : \frac{25a^2}{8}$ b) $\frac{3ab}{4xy^2} : \left(-\frac{21ab}{10x^2y}\right)$ c) $\left(-\frac{6x^2}{m^3n}\right) : \left(-\frac{x}{3mn^2}\right)$

3» Выполните действия.

a) $\frac{2ab}{3x} \cdot \frac{6x^2y}{4ax^2} \cdot \frac{6a}{15b}$ b) $\frac{12m^2n^2}{35p^2} \cdot \frac{14n^2}{m^3} \cdot \frac{5mp}{21n^6}$ c) $\frac{3x}{5y^2} : \frac{9x^2}{2y} : \frac{3x}{5y}$

4» Возведите в степень.

a) $\left(\frac{x}{2a}\right)^2$ b) $\left(\frac{3a^2}{b}\right)^3$ c) $\left(\frac{2n^2}{a^3}\right)^{-2}$

5» Выполните действия.

a) $\left(\frac{8x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{4x}\right)^3$ b) $\left(\frac{9y}{c^2}\right)^2 : \left(\frac{c}{3y}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2 : \left(\frac{4x^3}{3y^2}\right)^2$

6» Выполните действия.

a) $-\frac{5x}{16a^2b} \cdot 12ab^2$ b) $\frac{11a^4}{6b^2} \cdot \frac{5a}{6b^3} : \frac{11b^3}{12a^3}$ c) $-\frac{3x^2}{5y^3} : \frac{9x^3}{2y^2} \cdot \frac{5y}{3x}$

Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений

7» Выполните умножение.

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x}{y} \cdot \frac{y^2}{x} \quad \text{b) } \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{3ab}{ab-b^2} \quad \text{c) } (3x-15y) \cdot \frac{4}{x^2-25y^2}$$

$$\text{d) } \frac{a}{a^2-4} \cdot (a^2-4a+4) \quad \text{e) } \frac{c^2-16}{15bc} \cdot \frac{5b}{c+4} \quad \text{f) } \frac{(x+3)^2}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9}$$

8» Выполните деление.

$$(10x-15y) : \frac{(2x-3y)^2}{2x} \quad \left| \quad \frac{a^2-3ab}{3b} : (7a-21b) \quad \left| \quad (a^2-4b^2) : \frac{5a-10b}{a} \right.$$

9» Выполните действия.

$$\text{a) } \frac{b-a}{a} \cdot \frac{3a}{a^2-b^2} \quad \text{b) } \frac{a^2-1}{a-b} \cdot \frac{3a-3b}{a^2+a} \quad \text{c) } \frac{6a}{x^2-x} : \frac{3ax}{2x-2}$$

$$\text{d) } \frac{(a+2)^2}{a^2-9} \cdot \frac{2a-6}{2a+4} \quad \text{e) } \frac{c^2+2c}{c^2-1} : \frac{2c+4}{3c-3} \quad \text{f) } \frac{(x+1)^2}{2x+4} : \frac{x^2-1}{3x+6}$$

10» Упростите выражение и найдите соответствующее значение при заданном значении переменной.

$$\text{a) } \frac{(x+1)^2}{2x+4} \cdot \frac{4x+8}{x^2-1} \quad \text{при } x=1,5; \quad \text{b) } \frac{c^2+3c}{c^2-4} : \frac{2c+6}{c-2} \quad \text{при } c=-1,5.$$

11» Упростите.

$$\frac{x-1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x^3+1}{x^2-1} \quad \left| \quad \frac{x+1}{x^2+x+1} : \frac{x^2+2x+1}{x^3-1} \quad \left| \quad \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : \frac{a^2+ab+b^2}{2a+2b} \right.$$

12» Выполните действия.

$$\text{a) } \frac{2a-8}{3a+3} : \frac{2a^2-4a-16}{a+1} \quad \left| \quad \text{b) } \frac{2x+4}{x^2-7x+10} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} \quad \left| \quad \text{c) } \frac{a^3+b^3}{-3a+3b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ab-a^2-b^2} \right.$$

13» а) Запишите дробь $\frac{2}{x}$ в виде произведения двух дробей.

б) Запишите выражение, показывающее отношение дроби $\frac{x^2}{x^2-9}$ к дроби $\frac{x}{x-3}$.

14» Упростите.

$$1) (x-5) : \frac{x^2-11x+30}{x^2+7x+12} \cdot \frac{x-6}{x+4} \quad 2) \frac{a^2+11a}{a-4} : (a^2+6a) \cdot \frac{a^2-4a}{a+11}$$

- 15**» Разберите пример. Упростите выражение. Запишите значения переменных, при которых выражение имеет смысл. Равны ли значения переменных, которые обращают в ноль знаменатель в данном выражении и в выражении после упрощения?

а) $\frac{2x^2 - 10x}{x + 1} \cdot \frac{x + 2}{3x^2 - 15x}$ б) $\frac{x^2 - 14x + 48}{x^2 - 6x} : (x^2 - 8x)$

Пример: $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+3)} : \frac{(x-4)^2}{(x-1)(x-3)} =$
 $= \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)\cancel{(x-4)}(x-4)} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)(x-4)}, (x \neq \pm 3, x \neq 4, x \neq 1)$

Прикладные задания

- 16**» Площадь комнаты Гюльназ равна $(x^2 + 3x + 2)$ кв.ед. Для покраски пола площадью $(x^2 + 2x + 1)$ кв.ед. достаточно одной банки краски. Запишите рациональное выражение, которое показывают сколько банок краски необходимо для того, чтобы покрасить пол в комнате Гюльназ.

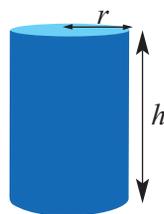
- 17**» Доски рассортированы по толщине и сложены в блоки. Высоту блока с количеством досок, равным $(2n + 1)$, можно выразить по формуле $\frac{4n^2 - 1}{n + 2}$. Выразите толщину досок в блоке.



- 18**» 1) Площадь полной поверхности сосуда в форме цилиндра находится по формуле $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, а объём по формуле $V = \pi r^2 h$, где r – радиус основания сосуда, а h – его высота.

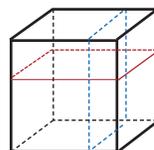
Чем больше вместимость сосуда, сделанного из тонкого металлического листа, тем он выгоднее. При заданных значениях r и h найдите и сравните площадь металлического листа, который потребуется для изготовления сосудов, а так же объёмы полученных сосудов. Какой сосуд выгоднее:

- а) сосуд, с размерами $r = 12$ см и $h = 16$ см;
 б) сосуд, с размерами $r = 16$ см и $h = 5$ см?

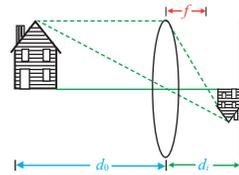


- 19**» Скульптор отсёк от мраморного блока в виде куба с ребром x сначала пласт толщиной $\frac{1}{2}$ м, а затем с боковой стороны пласт толщиной $\frac{2}{3}$ м.

- 1) Запишите рациональное выражение, которое показывает объём оставшейся части куба.
 2) Запишите выражение для изначальной массы мраморного блока, если масса оставшейся части равна 65 кг.



Сложение и вычитание рациональных выражений



Для того, чтобы получить точную фотографию важно уметь правильно выбрать фокусное расстояние (расстояние от фокуса-точки, в которой собираются исходящие от объекта и проходящие через линзу параллельные лучи света, до линзы). Это расстояние можно вычислить по формуле.

$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i}$. Здесь f - фокусное расстояние, d_0 - расстояние от объекта до линзы фотоаппарата, d_i - расстояние от линзы фотоаппарата до ленты. Представьте себе, что расстояние от объекта, который вы хотите сфотографировать, до линзы фотоаппарата 50 см, а расстояние от линзы до ленты 8 см. Чему в данном случае будет равно фокусное расстояние?

Сложение и вычитание рациональных выражений

Сложение и вычитание рациональных выражений выполняется по правилам сложения и вычитания обыкновенных дробей.

Сложение и вычитание рациональных выражений с одинаковыми знаменателями: $\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$, здесь A, B, C - некоторые многочлены

Пример. Найдите сумму $\frac{x^2 - 7}{x - 2} + \frac{3}{x - 2}$

Решение:

$$\frac{x^2 - 7}{x - 2} + \frac{3}{x - 2} = \frac{x^2 - 7 + 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2$$

Сложение и вычитание рациональных выражений с разными знаменателями: $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} \pm \frac{BC}{BD} = \frac{AD \pm BC}{BD}$, здесь A, B, C, D - некоторые многочлены

Пример. Найдите разность. $\frac{x}{x - 4} - \frac{4}{x + 4}$

Решение: Числитель и знаменатель первой дроби умножим на $(x + 4)$, а числитель и знаменатель второй дроби на $(x - 4)$, приведём дроби к общему знаменателю, а затем выполним вычитание.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x - 4} - \frac{4}{x + 4} &= \frac{x(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} - \frac{4(x - 4)}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{x(x + 4) - 4(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 4x - 4x + 16}{x^2 - 4^2} = \frac{x^2 + 16}{x^2 - 16}, \quad x \neq \pm 4 \end{aligned}$$

Обучающие задания

1» Выполните действия.

a) $\frac{a}{3} + \frac{b}{3}$ b) $\frac{x}{6} + \frac{a-x}{6}$ c) $\frac{a+c}{a} + \frac{a-c}{a}$ d) $\frac{x+3}{y} + \frac{2-x}{y}$

Сложение и вычитание рациональных выражений

2» Выполните действия.

a) $\frac{a-2}{8} + \frac{2a+5}{8} - \frac{3-a}{8}$ б) $\frac{3x-2y}{2x} + \frac{5x-3y}{2x} - \frac{x-5y}{2x}$

3» Упростите.

a) $\frac{16}{x-4} - \frac{x^2}{x-4}$ б) $\frac{25}{b+5} - \frac{b^2}{b+5}$ в) $\frac{y-3}{y^2-64} + \frac{11}{y^2-64}$
д) $\frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{a^2-9}$ е) $\frac{x^2+4}{x+2} + \frac{4x}{x+2}$ ф) $\frac{a^2-6a}{a-3} + \frac{9}{a-3}$

4» Найдите значение выражения.

a) $\frac{x^2+1}{x-2} - \frac{5}{x-2}$, при $x = 98$; б) $\frac{a-7}{a^2-9} + \frac{4-2a}{a^2-9}$, при $a = 3,1$.

5» Выполните сложение и вычитание.

a) $\frac{2y}{y-1} + \frac{2}{1-y}$ б) $\frac{a^2-8a}{a-4} - \frac{16}{4-a}$ в) $\frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{4}{(2-x)^2}$

6» Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной на ОДЗ выражения.

a) $\frac{3x+1}{2x-3} + \frac{x+4}{3-2x}$ б) $\frac{5x-8}{4x-8} - \frac{3x-8}{8-4x}$ в) $\frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{2}{1-a^2}$

7» Выполните действия.

a) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$ б) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ в) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ д) $\frac{8b+y}{4b} - \frac{6y+b}{3y}$
е) $3a - \frac{a}{3}$ ф) $\frac{x-2}{2} - x + \frac{x+2}{2}$ г) $\frac{a^2+c}{a} - a$
h) $p - \frac{p^2-1}{p}$ и) $\frac{(a-b)^2}{a} + 4b$ к) $a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b}$

8» Выполните действия.

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x}$ б) $\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1}$ в) $\frac{y}{y-2} - \frac{y}{y+2}$

9» а) Сумма двух чисел равна 20, а сумма чисел, противоположных данным, равна $\frac{5}{24}$. Найдите произведение этих чисел.

б) Числа x и $x+2$ являются двумя последовательными чётными числами. Разность чисел, обратных данным, равна $\frac{1}{12}$. Найдите произведение данных чисел.

Сложение и вычитание рациональных выражений

Нахождение простейшего общего знаменателя

Часто удаётся найти более простой общий знаменатель, чем произведение знаменателей. Чтобы найти простейший общий знаменатель для дробей с разными знаменателями, сначала необходимо разложить знаменатель каждой дроби на множители. Простейший общий знаменатель равен произведению, составленному из НОК коэффициентов знаменателей и различных множителей, взятых с большей степенью.

Пример 1. Сложите дроби $\frac{7x}{15y^2}$ и $\frac{y}{18xy}$

Решение: $15y^2 = 3 \cdot 5y^2$; $18xy = 2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y$

Тогда простейший общий знаменатель будет: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x \cdot y^2 = 90xy^2$

Каждое рациональное выражение запишем в виде эквивалентной дроби со знаменателем $90xy^2$ и выполним сложение.

$$\frac{7x}{15y^2} + \frac{y}{18xy} = \frac{7x \cdot 6x}{15y^2 \cdot 6x} + \frac{y \cdot 5y}{18xy \cdot 5y} = \frac{42x^2}{90xy^2} + \frac{5y^2}{90xy^2} = \frac{42x^2 + 5y^2}{90xy^2}$$

Пример 2. Найдите разность дробей $\frac{x+12}{4x-16}$ и $\frac{x+4}{2x-8}$.

$$\begin{aligned} \frac{x+12}{4x-16} - \frac{x+4}{2x-8} &= \frac{x+12}{4(x-4)} - \frac{x+4}{2(x-4)} = \frac{x+12}{4(x-4)} - \frac{2(x+4)}{2 \cdot 2(x-4)} = \\ &= \frac{(x+12) - 2(x+4)}{4(x-4)} = \frac{x+12-2x-8}{4(x-4)} = \frac{-x+4}{4(x-4)} = \frac{-(x-4)}{4(x-4)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Разложим знаменатель на множители *Простейший общий знаменатель: $4(x-4)$*
Приведём к общему знаменателю и раскроем скобки *Приведём подобные члены* *Сократим общие множители*

10 Запишите простейший общий знаменатель для дробей.

$$\frac{1}{6a^2b} \text{ и } \frac{1}{4ab^3} \quad \left| \quad \frac{1}{x^2-2x} \text{ и } \frac{1}{(x-2)^2} \quad \left| \quad \frac{2}{a^2-a} \text{ и } \frac{1}{a^2-1}$$

11 Выполните действия.

a) $\frac{5a-3}{3a} + \frac{a+2}{2a}$ b) $\frac{x+6}{14x} + \frac{2x-9}{21x}$ c) $\frac{2b+1}{4b} - \frac{3b-2}{6b}$

12 Выполните сложение и вычитание.

$$\frac{b}{a^2} + \frac{1}{a} \quad \left| \quad \frac{5a-3b}{a^2b} + \frac{4a-5b}{ab^2} \quad \left| \quad \frac{2xy-1}{2x^3} - \frac{3y+4}{3x^2} \quad \left| \quad \frac{b}{2x} - \frac{b}{x^2}$$

13 Выполните действия.

a) $\frac{x}{3(a-1)} - \frac{x}{4(a-1)}$ b) $\frac{a}{2(a+2)} - \frac{a}{a(a+2)}$ c) $\frac{3x}{2(x+y)} - \frac{2y}{3(x+y)}$
d) $\frac{b}{a(a-b)} - \frac{a}{b(a-b)}$ e) $\frac{x}{2x+2} - \frac{x}{3x+3}$ f) $\frac{x}{5x-10} + \frac{x}{3x-6}$

Сложение и вычитание рациональных выражений

14 Упростите.

a) $\frac{x+5}{5x-25} - \frac{3x+5}{x^2-25}$ б) $\frac{y-8}{4y-16} + \frac{4}{y^2-4y}$ в) $\frac{b-6}{4-b^2} + \frac{2}{2b-b^2}$

15 Выполните сложение и вычитание.

a) $\frac{a^2-9}{3a-9} - \frac{(a+3)^2}{3a+9}$ б) $\frac{(y+5)^2}{y^2+5y} + \frac{(y-5)^2}{y^2-5y}$ в) $\frac{y^2+4y+4}{y^2-4} - \frac{y^2-4}{y^2+4y+4}$

16 Упростите.

a) $\frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{xy+y^2}$ б) $\frac{1}{x^2-xy} - \frac{1}{xy-y^2}$ в) $\frac{a+6}{a^2-4} - \frac{2}{a^2+2a}$

17 Упростите и найдите соответствующие значения при заданных значениях переменной.

a) $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x}$ при $x=3$ б) $\frac{2}{c^2-4} - \frac{1}{c^2-2c}$ при $c=0,5$.

18 Выполните действия.

a) $\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1} + \frac{8}{x^2-1}$ б) $\frac{a}{a-2} - \frac{1}{a+2} + \frac{a^2}{4-a^2}$ в) $\frac{4k-12}{k^2+k-12} + \frac{k}{k+4}$
d) $\frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2+3x} - \frac{x+1}{x^2-9}$ e) $\frac{2}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{x+3}{x^2-1}$

19 Выполните сложение и вычитание дробей.

a) $\frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{9-a^2}$ б) $\frac{a^2}{a-1} + \frac{1}{1-a}$ в) $\frac{10a-12}{2a-6} + \frac{6a}{6-2a}$
d) $\frac{b-16}{2b-12} - \frac{-3b+8}{2b-12}$ e) $\frac{15x}{5x+1} + \frac{-3}{-1-5x}$ f) $\frac{2}{x+7} - \frac{-5}{x+7}$

20 Выполните действия.

a) $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x}$ б) $\frac{7}{6a^2} + \frac{5}{3a}$ в) $\frac{x^2-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x-1}$ д) $\frac{18}{y^2-9} + \frac{3}{3-y}$
e) $\frac{3a+3}{6-3a} - \frac{a+2}{a^2-4}$ ф) $\frac{1-x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1}$ г) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{x+4}{x^2+3x-4}$

21 а) Составьте два рациональных выражения с переменной n , одно из которых не имеет смысла при $n = -1$, а другое при $n = 2$ и найдите их сумму.

б) Составьте два различных рациональных выражения с переменной x , которые не имеют смысла при $x = -1$ и $x = 2$ и найдите их разность.

Сложение и вычитание рациональных выражений

22 Докажите, что при всех допустимых значениях переменной, значение выражения не зависит от переменной.

a) $\frac{4x+5}{2x-1} + \frac{6x+4}{1-2x}$ б) $\frac{5x+1}{x-4} + \frac{x+17}{4-x}$ в) $\frac{3x+5}{2x+2} + \frac{4x+7}{3x+3}$

23 Представьте следующие рациональные выражения в виде суммы или разности двух рациональных, используя тождества $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$

a) $\frac{a+3}{b}$ б) $\frac{x^2-3}{x}$ в) $\frac{12a+x}{6ax}$

Прикладные задания

24 Фермера беспокоит малый вес новорожденных телят. Для того, чтобы увеличить вес телёнка на m кг за каждую неделю, он перевел телят на особый режим кормления. В результате фермер заметил, что вес за каждую неделю увеличивается на $(m+2)$ кг. Решите следующие задачи, зная, что прибавка в весе у телёнка в среднем должна составить 20 кг.

1) Какую информацию содержат выражения $\frac{20}{m}$ и $\frac{20}{m+2}$?

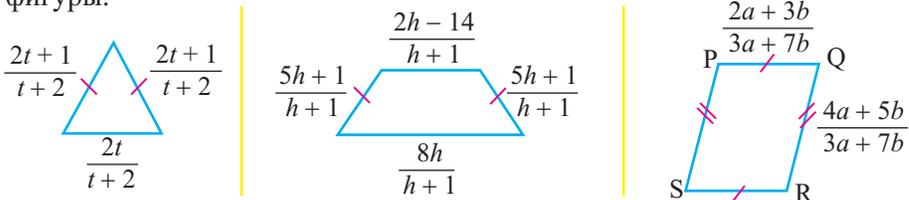
2) Запишите выражение, которое показывает разность между запланированным и фактическим временем (количеством недель). Упростите полученное выражение.

25 В Древнем Египте использовали дроби, у которых в числителе присутствовала только единица $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Все другие дроби представлялись только при помощи таких дробей. Например, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

При упрощении следующих дробей должны получиться рациональные выражения с числителем, равным единице. Проверьте данное предположение.

a) $\frac{5x+6}{10x^2+12x} - \frac{2x}{8x^2}$ б) $\frac{3x-2}{9x^2-6x} + \frac{4x}{24x^2}$ в) $\frac{2x+1}{4x^2+2x} - \frac{3x}{9x^2}$

26 По данным рисунка запишите выражения для нахождения периметра фигуры.



27 Для прямоугольника запишите выражение, соответствующее:

a) длине; б) периметру.

$S = x^2 - 4$

 $\left. \vphantom{\frac{x^2-x-2}{x+1}} \right\} \frac{x^2-x-2}{x+1}$

28 a) Вычислите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ при $\frac{a-b}{b} = 3$.

б) Вычислите значение выражения $\frac{6ab}{2a+b}$ при $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 4$.

Сложение и вычитание рациональных выражений

29» а) При скольких целых значениях k значение выражения $\frac{2k^2 - 3k + 6}{k}$ является целым числом?

б) При скольких целых значениях m значение выражения $\frac{4m - 8}{m^2 - 3m + 2}$ является целым числом?

30» Используя различные алгоритмы, можно убедиться в правильном принципе работы калькулятора. Значения эквивалентных выражений проверяются для заданных значений переменных. Для заданных пар выражений докажите, что второе эквивалентно первому.

$$1) \frac{A}{B} + \frac{C}{D}; \quad \frac{\frac{AD}{B} + C}{D} \quad 2) \quad AB + DG + EF; \quad \left[\frac{\left(\frac{AB}{D} + G \right) D}{F} + E \right] F$$

31» 1) Самир, Гюляр и Орхан хотят представить $\frac{x^2 + 7x - 25}{x - 5}$ в виде суммы или разности многочлена и дроби. Какой из представленных ответов верен?

Самир

$$x + 5 + \frac{7x}{x + 5}$$

Гюляр

$$x + 12 + \frac{35}{x - 5}$$

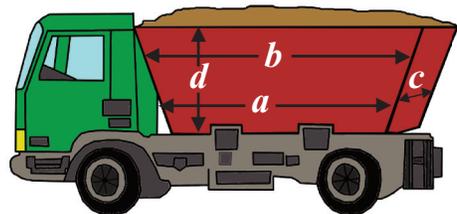
Орхан

$$x + 8 + \frac{4x + 15}{x - 5}$$

2) Представьте $\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ в виде суммы или разности многочлена и дроби.

32» Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска. Длина дороги на подъёме составляет s км, а на спуске $2s$ км. Скорость пешехода на подъёме v км/ч, а на спуске $2v$ км/ч. Сколько времени t (в часах) затратит пешеход на дорогу из пункта А в пункт В и обратно?

33» Для закладки фундамента при строительстве нового дома строительная площадка должна быть очищена от мусора. Мусор должен вывозиться на грузовой машине, изображенной на рисунке. Вместимость грузовой машины можно вычислить по формуле $V = \frac{d(a + b)}{2} c$.



1) Выразите вместимость грузовой машины в кубических метрах, если размеры грузовой машины по технической документации равны $a = 10$ фут, $b = 17$ фут, $c = 4$ фут, $d = 3,5$. 1 фут $\approx 0,3$ м (фут-единица измерения длины, которая используется в некоторых странах Европы и США).

2) Если на стройплощадке 40 м^3 мусора, то сколько рейсов должна сделать грузовая машина, чтобы очистить площадку?

Действия над рациональными выражениями

Рассмотрим примеры на различные действия над рациональными выражениями.

Пример 1. Выполните действия. $x + 1 - \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x}$

1. Выполним умножение $\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)} \cdot x} = \frac{x-3}{x}$

2. Вычтем результат из многочлена $(x+1)$

$$x + 1 - \frac{x-3}{x} = \frac{x(x+1) - (x-3)}{x} = \frac{x^2+3}{x}$$

Пример 2. Упростите.

$$\frac{\frac{x^2y^2}{a}}{\frac{x^2y}{a^3}} = \frac{x^2y^2}{a} : \frac{x^2y}{a^3} = \frac{x^2y^2}{a} \cdot \frac{a^3}{x^2y} = \frac{x^{\cancel{1}y^{\cancel{1}}}}{\cancel{a}} \cdot \frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{x^{\cancel{1}}y^{\cancel{1}}}} = a^2y$$

Представим в виде частного *Выполним умножение* *Сократим*

Обучающие задания

1 Выполните действия.

a) $\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) \cdot \frac{bc}{b-c}$

b) $\frac{3a-18}{a^2-25} \cdot \left(1 - \frac{1}{6-a}\right)$

c) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \frac{2a}{a+1}$

d) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{2ab}{a^2-b^2}$

e) $\frac{1-2x}{2x+1} + \frac{x^2+3x}{4x^2-1} : \frac{3+x}{4x-2}$

f) $\frac{2x-y}{xy} - \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$

2 Упростите, умножив числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение.

a) $\frac{\frac{m+n}{5}}{\frac{m^2-n^2}{5}}$

b) $\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}$

c) $\frac{\frac{2a-b}{b} + 1}{\frac{2a+b}{b} - 1}$

d) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$

3 Докажите, что при всех допустимых значений переменной, значение выражения не зависит от переменной.

$$\left(\frac{2}{n} + 1\right) \cdot \left(n + \frac{4}{n} - 2\right) : \left(\frac{8}{n^2} + n\right) \quad \Bigg| \quad \frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$$

4 Упростите рациональные выражения.

a) $\frac{(x+y) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}{(x-y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$

b) $\frac{\frac{n-3}{n+3} + \frac{n+3}{n-3}}{\frac{4n}{n^2-9}}$

c) $\frac{\frac{1}{x-1} + \frac{4-x}{x^2-x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-x}}$

Действия над рациональными выражениями.

5 Упростите.

a) $\frac{1 - \frac{9}{t}}{1 - \frac{81}{t^2}}$

b) $\frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

c) $\frac{x+4 + \frac{9}{x-2}}{x+6 + \frac{15}{x-2}}$

6 Упростите рациональные выражения.

a) $\frac{2 - \frac{6}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}}$

b) $\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{t}}{\frac{t}{t+6} - \frac{1}{t}}$

c) $\frac{\frac{3}{m} - \frac{3}{2m+3}}{\frac{3}{m^2} + \frac{1}{2m+3}}$

d) $\frac{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4}}{\frac{x}{x^2-16} + \frac{1}{x+4}}$

7 Значение какого выражения не зависит от переменной?

a) $\frac{a}{1 - \frac{3}{a}} + \frac{a}{\frac{3}{a} - 1}$

b) $\frac{a - \frac{3}{2}}{b} - \frac{a + \frac{2}{3}}{b}$

c) $\frac{\frac{1}{2} + 2a}{b-1} + \frac{2a + \frac{1}{2}}{1-b}$

Прикладные задания

8 Представьте в виде дроби.

a) $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

b) $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}}$

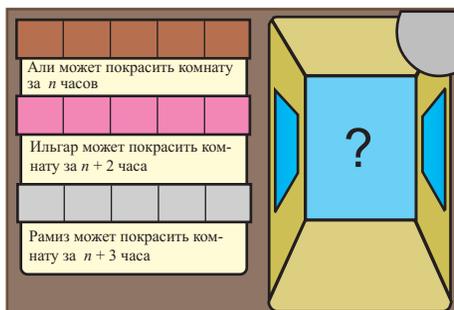
c) $3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{x}}}$

9 Выразите переменную y через π , r , x , если $y = \frac{2\pi}{d}$ и $x = dr$.

10 Али, Ильгар и Рамиз представили в виде рисунка информацию о том, как быстро каждый из них может покрасить комнату.

a) Запишите выражение, которое показывает, за какое время покрасят комнату двое из них (рассмотрите все возможные варианты).

b) Какие два мальчика смогут закончить эту работу за 2 часа при $n = 3$?



11 Упростить выражения, в которых переменная находится под знаком корня, можно при помощи введения новой переменной. Выполните замену $\sqrt{x} = z$ и упростите выражение.

a) $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

b) $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

c) $\left(\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} + \frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{a-\sqrt{x}}{a^2+x}$

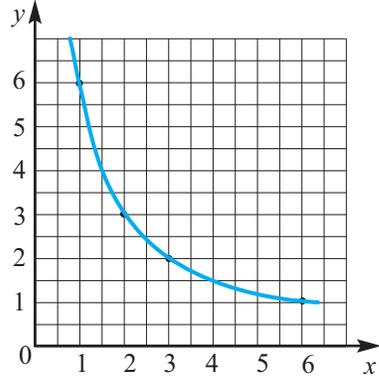
Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

Исследуем зависимость между сторонами прямоугольника с площадью 6 см². Выразив длину через x см, а ширину через y см, эту зависимость можно записать в виде $y = \frac{6}{x}$. Так как в данном задании x и y выражают измерения длины и ширины прямоугольника, то они могут принимать только положительные значения. Составим таблицу, в которой будем задавать значения x и находить соответствующие значения y . Из таблицы видно, что во сколько раз значение x увеличивается, во столько же раз значение y уменьшается, т.е. переменные x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью.

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

На координатной плоскости отметим точки, указанные в таблице, и соединим их плавной линией, как показано на рисунке.

Произведение абсциссы и ординаты (длины и ширины прямоугольника) любой точки на графике остаётся постоянным и в данном случае равно 6-ти (площади прямоугольника).



Пример 1. Переменные x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью и при $x=4$, $y=7$. Запишите формулу данной зависимости.

Так как произведение переменных, связанных обратно пропорциональной зависимостью, всегда остаётся постоянным, то обозначим эту постоянную через k , тогда $xy=k$. В нашем случае $k = 4 \cdot 7 = 28$. Тогда соответствующую зависимость можно записать в виде формулы так: $y = \frac{28}{x}$.

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \frac{k}{x}$, в которой переменная принимает как положительные, так и отрицательные значения.

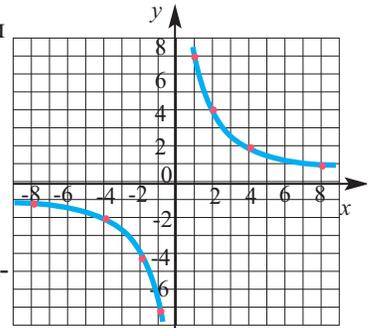
Пример 2. Составим таблицу значений функции $y = \frac{8}{x}$ и построим её график.

x	-8	-4	-2	-1	0	1	2	4	8
y	-1	-2	-4	-8	Не определена	8	4	2	1

Определение: функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, называется функцией обратно пропорциональной зависимости. Где x - независимая переменная, k - число,

отличное от нуля. Функция $y = \frac{k}{x}$ определена для всех x , кроме нуля ($x \neq 0$).

График функции $y = \frac{k}{x}$ симметричен относительно начала координат. Если точка $A(a;b)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-a;-b)$ также принадлежит графику функции. График функции $y = \frac{k}{x}$ называется **гиперболой**. Гипербола состоит из двух ветвей. При $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III четверти, а при $k < 0$ расположены во II и IV четверти. Чем больше абсолютное значение абсциссы на графике, тем ближе эта точка расположена к оси абсцисс.

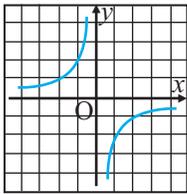


Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

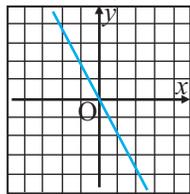
Обучающие задания

- 1» Составьте таблицу значений для функций $y = \frac{4}{x}$ и постройте её график.
- 2» Постройте график функции $y = \frac{-8}{x}$. По графику найдите:
а) соответствующие значения y при $x = 4; 2,5; -2,5$;
б) соответствующие значения x при $y = 8; -2$.
- 3» Переменные x и y изменяются в обратно пропорциональной зависимости.
а) если при $x = 8, y = 24$, то найдите y при $x = 6$.
б) если при $y = 2,7, x = 8,1$, то найдите x при $y = 0,9$.
в) если при $x = \frac{1}{2}, y = 16$, то найдите x при $y = 32$.
- 4» Зная, что точка $A(3;4)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$, найдите k и постройте график этой функции.
- 5» Точка $A(6;2)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Запишите в цветные клетки соответствующие координаты, если точки $B(\text{■}; 4)$, $C(-4; \text{■})$, $D(0,5; \text{■})$ принадлежат данному графику.

- 6» На каком рисунке изображён график прямо пропорциональной функции, а на каком - обратно пропорциональной?



а)



б)

- 7» Какие из зависимостей относятся к прямо пропорциональным, какие к обратно пропорциональным, а какие вообще ни к одной из вышеуказанных?

а) $y = 5x$ б) $y = \frac{2}{x}$ в) $y = \frac{1}{2}x$

д) $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x}$ е) $y = \frac{1}{3}x + 3$

- 8» В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = 7 - x$. С помощью графика определите координаты точек пересечения.
- 9» Запишите зависимости между двумя величинами в виде функции.
а) x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью так, что при $x = 5, y = 40$. Найдите y при $x = 8$.
б) x и y связаны прямо пропорциональной зависимостью так, что при $x = 5, y = 10$. Найдите y при $x = 20$.

Прикладные задания

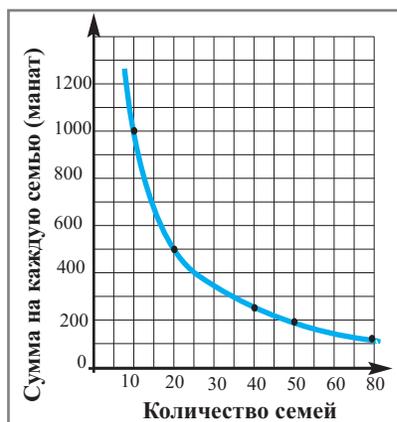
- 10» Два человека стоят на концах доски, находящейся в равновесии. Масса одного из них 50 кг и он находится на расстоянии 1,5 м от центра равновесия. На каком расстоянии от центра должен находиться другой человек, массой 60 кг, чтобы не нарушить равновесие?

Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

- 11** Шестеро работников магазина могут заполнить и украсить витрины за 8 часов. 1) Если сегодня на эту работу отведено 6 часов, то сколько работников нужно привлечь дополнительно?
2) Если сегодня на работу не пришли двое работников, сколько вре потребуется оставшимся для того, чтобы выполнить данную работу?
3) если 6 рабочих будут работать 4 часа, то сколько рабочих потребуется, чтобы выполнить оставшуюся работу за 3 часа?

- 12** Жители посёлка решили отремонтировать футбольное поле. Расходы на ремонт составляют 10 000 манатов. Чем больше жителей поддержат данный план, тем меньше будут расходы каждой семьи. Эта зависимость представлена в виде графика. Используя график, выполните следующие задания:

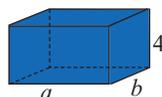
- 1) Сколько манатов израсходует каждая семья, если в ремонте примут участие:
а) 10 семей; б) 20 семей?
2) Сколько семей должны принять участие в ремонте, если расход каждой семьи будет: а) 400 манатов; б) 200 манатов?
3) Составьте таблицу, в которой будет отражена информация о точках на графике. Запишите соответствующую обратно пропорциональную зависимость.
4) Представьте информацию, соответствующую координатам (5;2000).



- 13** Решите задачи на обратно пропорциональную зависимость.
а) Запас корма, имеющегося на ферме, хватит 60 коровам на 10 дней. На сколько дней хватит этого корма, если фермер продаст 10 коров?
б) Водитель может проехать расстояние между двумя пунктами за 7 часов, двигаясь со скоростью 60 км/ч. Но он подумал, что если будет ехать со скоростью 75 км/ч, то сэкономит минимум 1,5 часа. Верно ли его предположение?
с) Ширина дачного участка прямоугольной формы 14 м, а длина 60 м. Длина второго участка, площадь которого равна площади первого, равна 42 м. Сколько метров составит ширина второго участка?

- 14** Какая из зависимостей является обратно пропорциональной зависимостью?
1) Для школьного праздника было запланировано купить подарков на 200 манатов. Число подарков зависит от их цены;
2) Студентка Наиля ежедневно тратит на обед 2 маната. Расходы Наили зависят от количества учебных дней.

- 15** Объём прямоугольного параллелепипеда 8 куб.ед. По данным рисунка запишите формулу зависимости b от a .



Обобщающие задания

1) При каких условиях рациональное выражение имеет смысл?

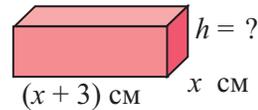
a) $\frac{2(x-1)}{x^2-x}$ б) $\frac{2d(d+1)}{(d+1)(d-4)}$ в) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}$

2) Речные пристани А и В, между которыми курсирует катер, расположены на расстоянии s км друг от друга. Скорость катера в стоячей воде равна v км/ч, а скорость течения реки равна 5 км/ч. Сколько времени t (в часах) потребуется катеру на путь от А до В и обратно? Найдите t , если: а) $s = 60$; $v = 25$; б) $s = 120$; $v = 35$.

3) Запишите два рациональных выражения, которые не имеют смысла при значении переменной, равной: а) -2 ; б) -4 и 2 .

4) Составьте рациональное выражение, содержащее переменную a в знаменателе, чтобы оно имело смысл при всех значениях переменной a .

5) На рисунке указаны размеры основания прямоугольного параллелепипеда. Найдите высоту параллелепипеда, если объём равен $(x^3 + 5x^2 + 6x)$ см³.



6) Учитель математики обобщил ошибки, которые учащиеся допускали при сложении и вычитании дробей. Найдите ошибки, исправьте и объясните их.

a) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ б) $\frac{ac+bc}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$ в) $\frac{1}{b-a} = \frac{-1}{a+b}$

d) $\frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{1}{a-b}$ е) $\frac{c}{5} - \frac{4-b}{5} = \frac{c-4-b}{5}$

7) Зная, что $a^2 - 2a - 6 = 0$, найдите значение выражения $\frac{a^3 + 8}{2a + 4}$.

8) Найдите значение выражения $\frac{6-ab^2}{3+b^2} + \frac{2b^2-3a}{3+b^2}$ при $a = -3$, $b = 0,5$.
Есть ли в задании лишние данные?

9) Выполните действия.

a) $\frac{x^2-x-6}{4x+4} \cdot \frac{x+1}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2d+8}{d^2+5d+6} : \frac{d+4}{d^2-4}$

c) $\frac{x^3+5x^2-x-5}{x^2-25} : (x+1)$

d) $\frac{n^3-m^3}{n^2-m^2} \cdot \frac{n^2+2nm+m^2}{n^2+nm+m^2}$

10) Выполните действия.

a) $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$

b) $\frac{12}{a^2-9} - \frac{3}{a+3} + \frac{2}{3-a}$

Обобщающие задания

11» Выполните действия.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{k^2 - 4}{k^2 - 2k} - \frac{k^2 - 4}{k^2 + 2k} & \text{b)} \frac{m^2 - 1}{(m + 1)^2} - \frac{m^2 - 1}{(m - 1)^2} & \text{c)} \frac{a}{a^2 + 2a} + \frac{a}{a^2 - 2a} \\ \text{d)} a - \frac{a^2 - 1}{a} & \text{e)} \frac{a^2}{a + 1} - a + 1 & \text{f)} \frac{-3}{a - 6} - \frac{-18}{a^2 - 6a} \end{array}$$

12» Упростите.

$$\text{a)} \frac{x + 1}{x + 2} - \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x} \quad \text{b)} \frac{2 - x}{x - 4} + \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x}$$

13» Найдите a и b из тождества $\frac{5}{x^2 + x - 6} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 3}$.

14» Самир и Фидан ищут способ, при помощи которого на числовой оси можно найти число, расположенное на одинаковом расстоянии от двух заданных чисел. Наконец, они установили, что такое число является средним арифметическим данных чисел. Покажите на различных примерах, что данное предположение верно, а также найдите дробь, равноудалённую от дробей $\frac{4}{x}$ и $\frac{5}{2x}$.

15» Упростите.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{a^3 + a^7}{a^{-3} + a^{-7}} & \text{b)} \frac{x + 1}{x - 1 - 2x^{-1}} \\ \text{c)} (a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-1} & \text{d)} (a - b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2}) \\ \text{e)} \left(1 + \frac{2}{k(k + 3)}\right) \cdot \left(\frac{k + 1}{k + 3}\right)^{-1} & \text{f)} \left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right)^{-1} : \frac{n + 2}{n + 1} \end{array}$$

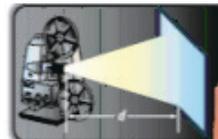
16» Работая с одинаковой производительностью 15 человек могут собрать 240 кг клубники за 4 часа. Сколько человек потребуется, чтобы, работая с той же производительностью, собрать 160 кг клубники за 8 часов?

17» При каких значениях k и b гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = kx + b$ пересекаются в точке: а) $A(2; 1)$; б) $B(-1; 2)$?

18» В рамках третьего Международного фестиваля Искусств «Девичья Башня», проводимого в Баку по инициативе Фонда Гейдара Алиева, при помощи видео-мэппинг (3D mapping) технологий на Девичьей Башне были созданы цветные изображения. Вокруг памятника в 7 различных точках были установлены 30 проекторов, с помощью которых проецировалось изображение.



Во время освещения проектором интенсивность света на экране была обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника: $I = \frac{k}{d^2}$, где k постоянная, d расстояние. Проекторы А и В освещают Девичью Башню с одинаковой интенсивностью. Расстояние от А до экрана составляет 5 м, от В до экрана 8 м. Если коэффициент k проектора А равен 27 ед., определите коэффициент k проектора В.



6

Площади фигур

В этом разделе вы научитесь:

- по каким формулам находят площади треугольников и четырёхугольников;
- применять формулы площадей при решении задач;
- находить площадь сложных фигур, разделяя их на простые геометрические фигуры.

Аксиомы площадей

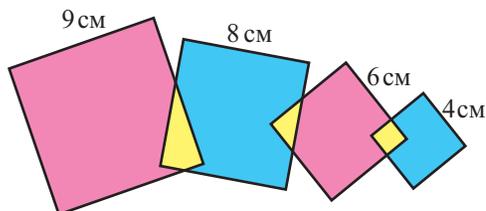
Аксиома существования площадей. Каждая простая фигура имеет положительную площадь, выраженную в выбранной единице измерения.

Аксиома равенства площадей. Площади конгруэнтных фигур равны.

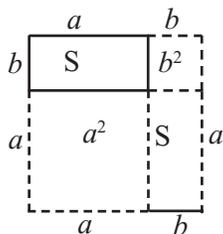
Аксиома сложения площадей. Площадь фигуры, разделённой на части, не имеющих общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.

Аксиомы единицы площадей. Площадь квадрата со стороной a равна a^2 .

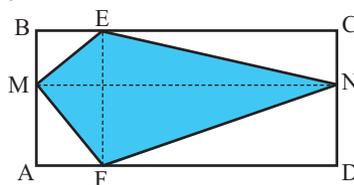
- 1» На рисунке изображены квадраты, стороны которых равны 9 см, 8 см, 6 см и 4 см. Если сумма площадей частей красного цвета равна 95 см^2 , найдите сумму площадей синих частей.



- 2» Обоснуйте формулу площади $S = ab$ прямоугольника со сторонами a и b при помощи рисунка.



- 3» ABCD-прямоугольник, если $MN \parallel AD$, $EF \parallel AB$, то докажите, что площадь четырёхугольника MENF равна половине площади прямоугольника ABCD.

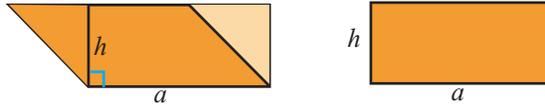


- 4» Прямоугольник разделен на четыре части параллельными линиями. Если площади трех частей соответственно равны 18, 24 и 30, то найдите площадь 4-ой части.

18	24
30	?

Площадь параллелограмма

Практическая работа. Начертите на листе бумаги параллелограмм и его высоту. Разрежьте параллелограмм по высоте, как показано на рисунке, и приклейте к правой стороне. Выскажите своё мнение о полученной фигуре. Запишите формулу нахождения площади прямоугольника. Обобщите мнение о том, что такое площадь параллелограмма.

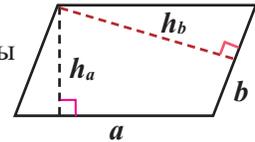


Так как длина стороны параллелограмма равна длине прямоугольника, а высота параллелограмма равна ширине прямоугольника, то площадь параллелограмма равна площади прямоугольника.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны и высоты, проведённой к данной стороне:

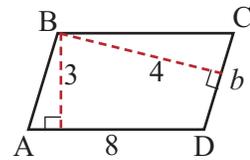
$$S = ah_a \text{ или } S = bh_b$$



Пример. По данным рисунка найдите площадь и периметр параллелограмма ABCD.

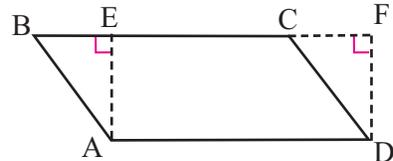
Решение: площадь параллелограмма найдем по формуле: $S = 8 \cdot 3 = 24$ (кв.ед.). С другой стороны, так как $S = b \cdot 4$, то $b = S : 4 = 24 : 4 = 6$.

Периметр параллелограмма: $P = 2 \cdot (8 + 6) = 28$.



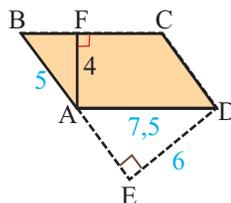
Обучающие задания

1 По рисунку, докажите, что площадь параллелограмма ABCD равна площади прямоугольника AEFB. **Указание:** используйте конгруэнтность $\triangle ABE$ и $\triangle DCF$ и аксиомы площадей.

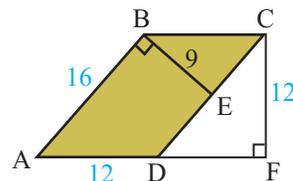


2 На листе бумаги в клетку начертите три различных параллелограмма с основанием 6 единиц и высотой 4 единицы. Сравните их площади.

3 1) Для того, чтобы найти площадь параллелограмма ABCD, примите за основание сторону AB. Какую высоту нужно использовать для нахождения площади данного параллелограмма?



2) Найдите площадь параллелограмма ABCD на рисунке двумя способами.

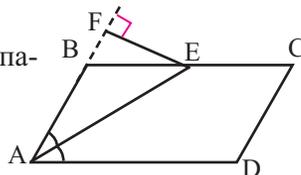


Площадь параллелограмма

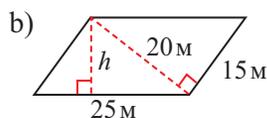
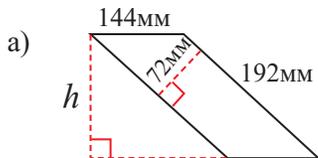
4) Площадь параллелограмма равна 48 см^2 , а расстояния от точки пересечения диагоналей до сторон равны 2 см и 3 см. Найдите длины сторон параллелограмма и его периметр.

5) Стороны параллелограмма равны 15 см и 12 см, а одна из высот равна 10 см. Найдите длину другой высоты. Сколько решений имеет данная задача?

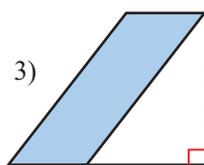
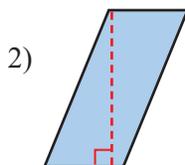
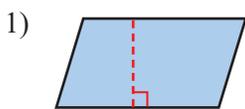
6) AE – биссектриса угла $\angle A$. Найдите площадь параллелограмма, если $EF=12 \text{ см}$, а $AD=24 \text{ см}$.



7) Найдите высоту h параллелограмма.

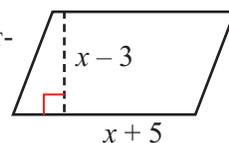


8) Выполните соответствующие измерения и вычислите площади параллелограммов на рисунке. Какой из параллелограммов имеет большую площадь?



9) Какой из следующих квадратных трёхчленов соответствует площади параллелограмма на рисунке?

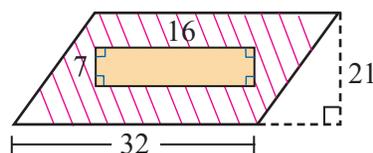
1) $x^2 + 2x - 15$ 2) $x^2 - 2x + 15$ 3) $2x^2 - x + 15$



10) Выразите периметр прямоугольника через x , если одна сторона равна $(2x + 3)$ единицам, а площадь $(2x^2 + 7x + 6)$ квадратным единицам.

11) Стороны параллелограмма равны 12 мм и 16 мм, а одна из высот 14 мм. К какой стороне проведена эта высота? Найдите площадь параллелограмма.

12) По данным рисунка найдите площадь заштрихованной части.

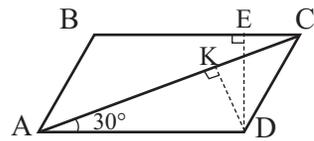


Площадь параллелограмма

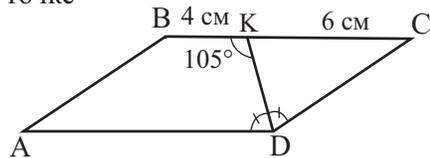
- 13** **Исследование.** Дан прямоугольник с периметром 12 м.
 1) Запишите периметр прямоугольника в виде $2x + 2y = 12$ и найдите y . Подставьте y в формулу площади $S = xy$ и упростите.
 2) В полученном выражении выделите полный квадрат.
 3) Найдите размеры прямоугольника с наибольшей площадью.
 4) Как можно найти возможные значения размеров прямоугольника, площадь которого равна 5 м^2 ?

- 14** Найдите размеры прямоугольника а) периметр которого равен 20 ед, а площадь 24 кв.ед. б) периметр которого равен 72 ед, а площадь 288 кв.ед.

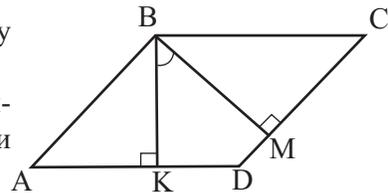
- 15** **Дано:** ABCD-параллелограмм
 $DE \perp BC$, $DE = 8 \text{ м}$, $DK \perp AC$, $DK = 5 \text{ м}$
 $\angle CAD = 30^\circ$
Найдите: площадь параллелограмма



- 16** В параллелограмме ABCD биссектриса угла $\angle D$ пересекает сторону BC в точке K. Если $\angle BKD = 105^\circ$, $BK = 4 \text{ см}$, $KC = 6 \text{ см}$, то найдите:
 а) периметр;
 б) углы;
 в) площадь параллелограмма.

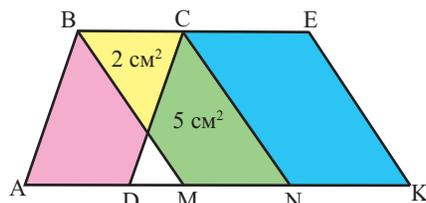


- 17** В параллелограмме ABCD угол между высотами BK и BM равен 45° и $AK : KD = 3 : 2$. Найдите площадь параллелограмма, если средняя линия трапеции KBCD равна 7 мм.



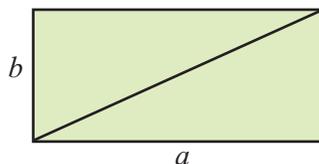
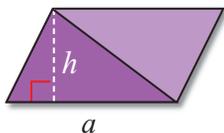
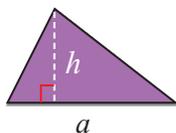
- 18** Периметр параллелограмма ABCD равен 64 см, а высоты равны 7 см и 9 см. Найдите площадь параллелограмма.

- 19** На рисунке $BE \parallel AK$, $AB \parallel CD$, $BM \parallel CN \parallel EK$, $MN : NK = 2 : 3$. Площадь желтой части равна 2 см^2 , площадь зеленой части 5 см^2 . Найдите площадь:
 а) параллелограмма ABCD;
 б) параллелограмма NCEK.



Площадь треугольника

Практическая работа 1. 1) На листе бумаги в клетку начертите треугольник и вырежьте его. Положите его на бумагу и снова вырежьте конгруэнтный ему треугольник. Приклейте эти треугольники на другой лист, как показано на рисунке. Какая фигура при этом получилась? Выскажите и запишите своё мнение о том, какая связь существует между площадью треугольника и параллелограмма. 2) Начертите прямоугольник и разрежьте его по диагонали. Докажите, что данные треугольники конгруэнтны методом наложения друг на друга и методом геометрических рассуждений. Выскажите своё мнение о том, какая связь существует между площадью треугольника и прямоугольника.



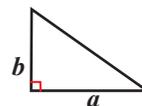
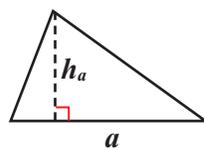
Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты, проведённой к данной стороне. $S = \frac{1}{2} ah_a$

Обозначим высоты, проведённые к сторонам a, b, c , соответственно как h_a, h_b, h_c :

$$S = \frac{1}{2} ah_a \quad S = \frac{1}{2} bh_b \quad S = \frac{1}{2} ch_c$$

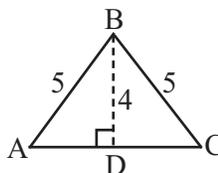
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. $S = \frac{1}{2} ab$



Пример. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5 см, а высота, проведённая к основанию, равна 4 см.

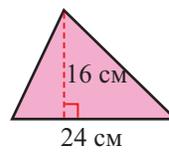
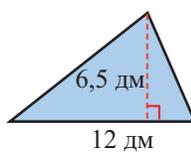
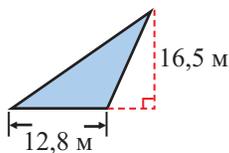
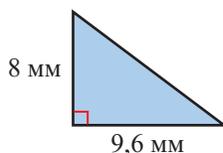
Решение: проведем высоту BD равнобедренного треугольника $\triangle ABC$, боковая сторона которого равна 5 см: $BD \perp AC$. По условию $BD = 4$ см.

Высота BD $\triangle ABC$ делит его на два конгруэнтных треугольника и ее можно найти из $\triangle ABD$ по теореме Пифагора: $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). Тогда $AC = 6$ см. Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ см²



Обучающие задания

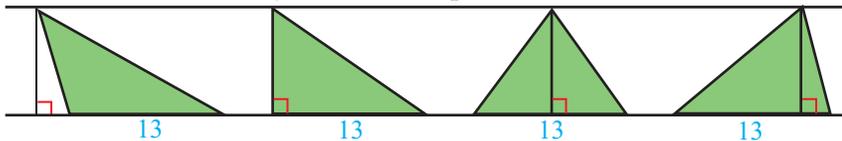
1» По данным рисунка найдите площади фигур.



2» Площадь треугольника 24 см², а высота 8 см. Найдите длину стороны, к которой эта высота проведена.

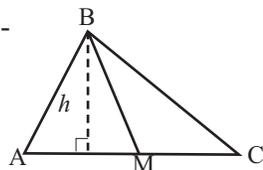
Площадь треугольника

- 3) **Исследование.** Площадь треугольника равна 52 см^2 , а сторона 13 см . Найдите высоту, проведённую к этой стороне. На рисунке изображены различные треугольники с соответствующими задаче сторонами и высотами. Начертите ещё несколько тупоугольных или остроугольных треугольников с соответствующими измерениями.

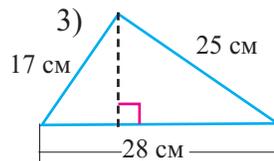
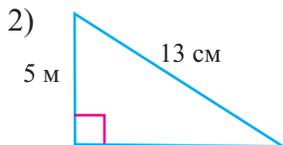
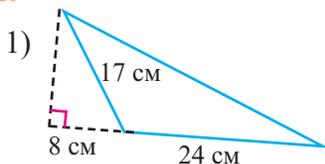


- 4) **Вопрос открытого типа.**
 а) Начертите прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 8 см , а площадь 24 см^2 . б) Начертите несколько треугольников стороной 8 см и площадью меньше 24 см^2 . в) Начертите несколько треугольников с основанием 4 см и одной из боковых сторон 3 см и сравните их площади. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольников?
- 5) 1) В треугольнике $\triangle ABC$ основание равно 4 ед. , а высота 8 ед. В треугольнике $\triangle DEF$ основание и высота в 2 раза больше соответственно. Найдите отношение площадей этих треугольников.
 2) В треугольнике $\triangle ABC$ основание равно 15 ед. , а высота 12 ед. В треугольнике $\triangle DEF$ основание и высота в 3 раза меньше соответственно. Найдите отношение площадей этих треугольников.

- 6) Найдите площади $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$. Сравните отношение площадей треугольников и отношение $AM : MC$. а) $h = 5$, $AC = 8$, $AM = 6$
 б) $h = 7$, $AC = 10$, $AM = 5$



- 7) Найдите площади треугольников.



Формула Герона для нахождения площади треугольника

Для треугольника со сторонами a, b, c верна формула нахождения площади $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Эта формула называется формулой Герона. Здесь

p — полупериметр треугольника: $p = \frac{a+b+c}{2}$

Пример. Найдём площадь треугольника со сторонами 13 см , 14 см и 15 см .

Решение: Дано: $a = 13 \text{ см}$, $b = 14 \text{ см}$, $c = 15 \text{ см}$, $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$

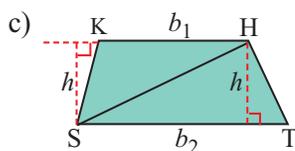
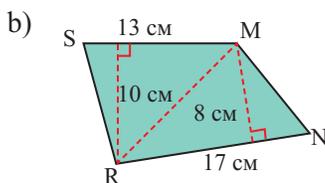
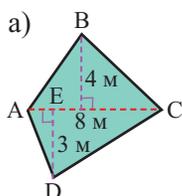
По формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84 \text{ (см}^2\text{)}$$

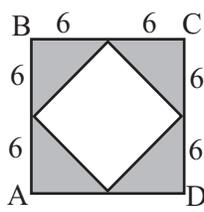
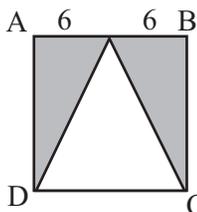
Площадь треугольника

- 8**» Найдите площади треугольников со сторонами:
 а) 26 см, 30 см, 28 см; б) 10 см, 13 см, 13 см; в) 6 мм, 25 мм, 29 мм;
- 9**» Найдите высоты равнобедренного треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 16 см.
- 10**» Найдите площадь и высоты параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 10 см, а одна из диагоналей равна 6 см.
- 11**» 1) Найдите площадь равностороннего треугольника, если: а) $P = 24$ см; б) $a = 5$ см.
 2) Выведите формулу для вычисления площади равностороннего треугольника со стороной a .
 3) Если стороны треугольника равны 20 см и 35 см, то какое максимальное значение может принимать его площадь?
 4) Найдите площадь прямоугольного треугольника и высоту, проведённую к гипотенузе, если его катеты равны 15 см и 20 см. Постройте равнобедренный треугольник, площадь которого равна площади этого треугольника.

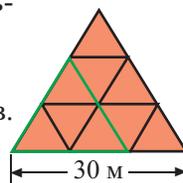
- 12**» Найдите площади четырёхугольников, разделив их на треугольники.



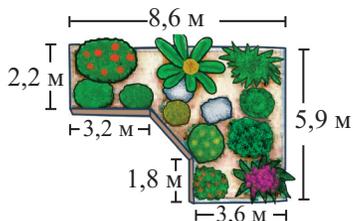
- 13**» По данным найдите площадь:
 а) части, закрашенной серым цветом;
 б) части, закрашенной белым цветом. (ABCD - квадрат)



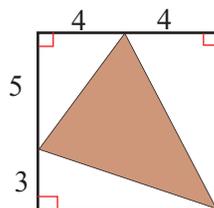
- 14**» Модель на рисунке состоит из конгруэнтных треугольников.
 а) Найдите площадь большого треугольника.
 б) Найдите площадь одного из маленьких треугольников.
 в) Найдите площадь треугольника, обведённого зелёной линией.



- 15**» Начертите план сада и найдите его площадь.

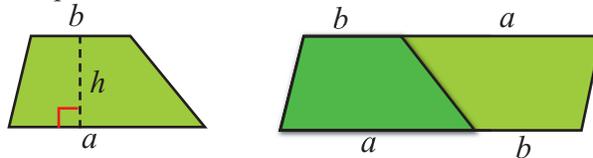


- 16**» По рисунку найдите площадь закрашенной части.



Площадь трапеции

Практическая работа. Начертите на листе бумаги трапецию и вырежьте её. Положите вырезанную фигуру на лист бумаги и начертите конгруэнтную данной трапеции трапецию, а затем вырежьте её. Приклейте полученные трапеции на лист бумаги, как показано на рисунке. Какая фигура при этом получилась? Выскажите и запишите своё мнение о том, как связаны площадь параллелограмма и трапеции?



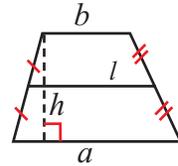
Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению половины суммы оснований и высоты:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Площадь трапеции равна произведению средней линии и высоты:

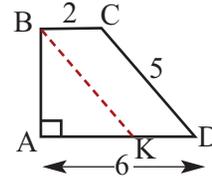
$$S = lh$$



Пример. По данным рисунка найдите площадь прямоугольной трапеции.

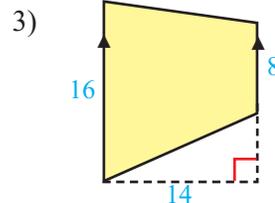
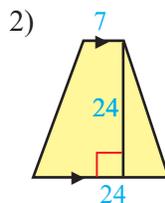
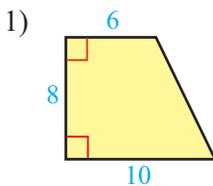
Решение: в трапеции ABCD из вершины B проведем линию BK, параллельно стороне CD. Так как BCDK параллелограмм, то противоположные стороны конгруэнтны. Значит, KD = 2, BK = 5. Тогда AK = 4. Из $\triangle ABK$ по теореме Пифагора находим: $AB = \sqrt{BK^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Площадь трапеции: $S = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = 12$



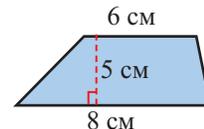
Обучающие задания

1) Найдите площади трапеций на рисунке.

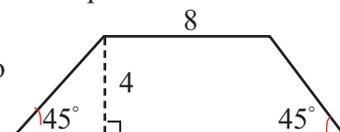


2) Исследуйте, как изменится площадь трапеции согласно следующим условиям:

- 1) При увеличении нижнего основания в 2 раза;
- 2) При увеличении верхнего основания в 2 раза;
- 3) При увеличении высоты в 2 раза;
- 4) При увеличении обоих оснований и высоты в 2 раза.

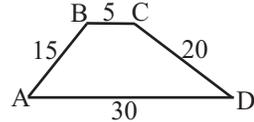
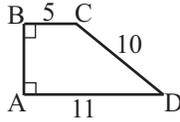
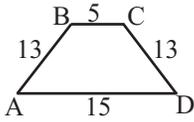


3) Найдите периметр и площадь трапеции по данным рисунка.



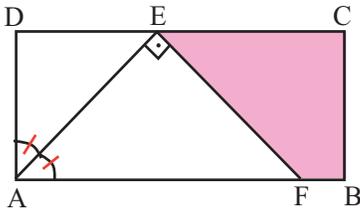
Площадь трапеции

- 4) По данному рисунку найдите площадь трапеции ABCD.



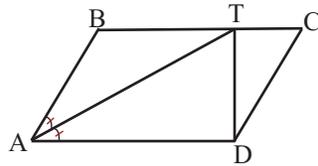
- 5) Дано: ABCD-прямоугольник
 $AB = 15$ см, $AD = 4$ см,
 $\angle DAE \cong \angle EAF$

Найдите: площадь трапеции FBCE



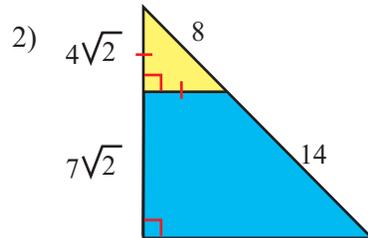
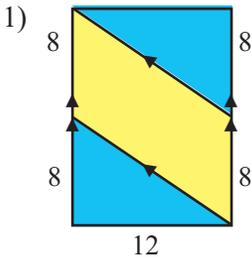
- 6) Дано: ABCD-параллелограмм
 $\angle BAT \cong \angle DAT$, $DT \perp BC$,
 $TC = 3$ см, $CD = 5$ см

Найдите: площадь трапеции ATCD

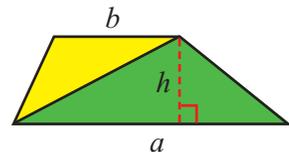


- 7) Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а основания равны 8 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

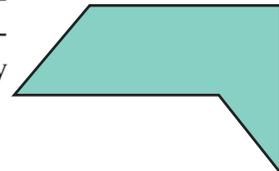
- 8) Вычислите площади синих и жёлтых частей.



- 9) Докажите, что площадь трапеции находится по формуле $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Для этого используйте формулу нахождения площади треугольника и аксиому сложения площадей.



- 10) При помощи линейки произведите соответствующие измерения и найдите площадь фигуры на рисунке различными способами, разделив фигуру прямой линией на: а) две трапеции; б) параллелограмм и треугольник.

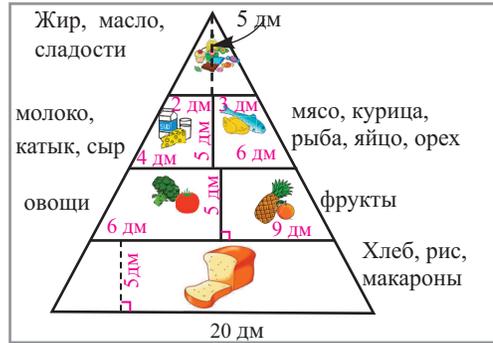


- 11) Обоснуйте следующие предложения, выполнив соответствующие рисунки.
 1) Площадь равнобедренной трапеции можно выразить через сумму площадей 2 конгруэнтных трапеций.
 2) Площадь трапеции можно выразить через сумму площадей прямоугольника и двух прямоугольных треугольников.

Площадь трапеции

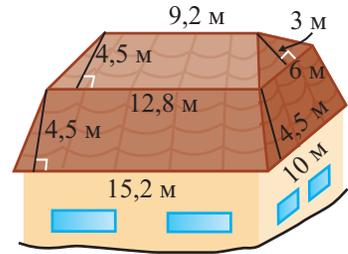
- 12) На витрине в форме пирамиды продукты расположены по группам. По данным рисунка найдите площади, отведённые для:

- масла и сладостей;
- фруктов;
- хлеба, риса, макарон.



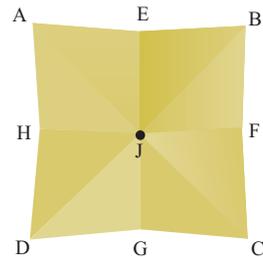
- 13) **Работа над небольшим проектом.** Сколько квадратных метров черепицы потребуется для покрытия крыши дома на рисунке?

- Если 1 лист черепицы имеет площадь $2,8\text{ м}^2$ и стоит 8,6 манатов, то сколько денег потребуется, чтобы покрыть черепицей всю крышу? Зная, что 10% материала уйдёт на отходы, посчитайте, сколько листов черепицы потребуется? Результат округлите до целого.
- Два мастера должны были закончить работу по покрытию крыши дома черепицей за месяц. Но, проработав 20 дней, они закончили всего четвертую часть намеченной работы. Для того, чтобы закончить работу в срок, хозяин дома решил нанять ещё двух мастеров. За сколько времени закончат работу четверо мастеров?
- За один месяц черепица подорожала в два раза: в первый раз на 3,6%, второй раз на 4,8%. Найдите, сколько процентов составят лишние расходы, если клиент купит черепицу по новой цене?



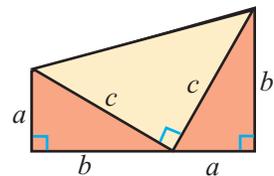
- 14) На рисунке представлен лист бумаги в форме квадрата ABCD. Точки H, E, F, G являются серединами сторон квадрата. 1) Зная, что $AB=8$ ед., найдите площади:

- Прямоугольника ABFH;
- Трапеции ABFJ;
- Треугольника AEJ.



- 15) Существует много различных способов доказательства теоремы Пифагора. Одно из них принадлежит президенту США Джеймсу Гарфилду. Проанализируйте доказательство теоремы в соответствии с планом, представленным ниже и запишите доказательство в тетради.

- Выразил площадь трапеции через a и b .
- Площади трёх прямоугольных треугольников выразил через a , b , c .
- По аксиоме равенства площадей результат, полученный в пункте 1 и 2, приравнял и упростил.



Площадь ромба

Практическая работа. Проведите диагональ ромба или фигуры в форме воздушного змея. Разрежьте фигуру по диагонали на треугольники. Чтобы убедиться, что треугольники конгруэнтны, наложите их друг на друга. Исследуйте, какая связь существует между площадью ромба или фигуры в форме воздушного змея и полученными треугольниками.

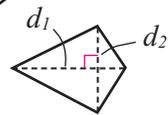
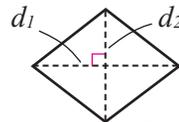
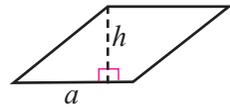
Площадь ромба

1. Площадь ромба равна произведению стороны и высоты: $S = ah$

Отметим что высоты ромба равны.

2. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

3. Площадь любого произвольного выпуклого четырёхугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$



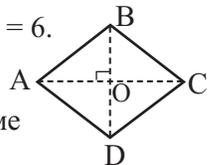
Пример. Найдите площадь и высоту ромба с диагоналями 6 и 8.

Решение: изобразим ромб ABCD с диагоналями AC = 8, BD = 6.

По формуле площади ромба $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

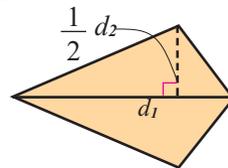
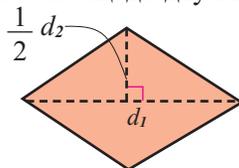
Так как AO = AC : 2 = 4, BO = BD : 2 = 3, то из $\triangle AOB$ по теореме Пифагора найдем сторону ромба:

$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Высоту ромба площадью 24 и стороной 5 найдем из формулы $S = ah$: $h = S : a = 24 : 5 = 4,8$

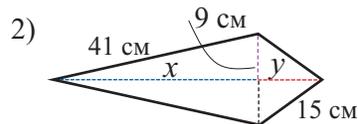
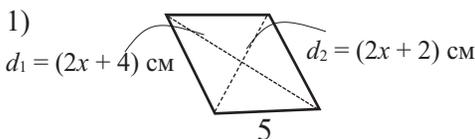


1 Докажите формулу $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ нахождения площади ромба или фигуры в форме воздушного змея по плану представленному ниже.

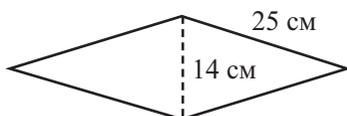
План для доказательства. 1. Докажите, что диагональ ромба или фигуры в форме воздушного змея делит его на два конгруэнтных треугольника. 2. Сложите площади двух треугольников.



2 Найдите площадь ромба или фигуры в форме воздушного змея по данным рисунка.



3 1) Найдите площадь ромба.



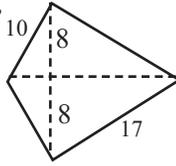
2) Площадь фигуры в форме воздушного змея равна 180 m^2 . Найдите другую диагональ.



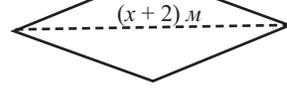
Площадь ромба

4

1) Найдите площадь фигуры в форме воздушного змея.



2) Площадь ромба $(4x^2 + 8x)m^2$. Выразите другую диагональ через x .

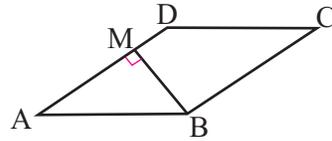


5

Высота ромба 6 см. Она делит противоположную сторону AD точкой M в отношении $AM:MD = 4:1$. Найдите площадь ромба.

Указание: обозначьте $MD = x$, $AM = 4x$ и

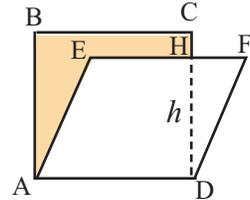
для нахождения сторон используйте прямоугольный треугольник AMB.



6

Площадь квадрата ABCD равна 625 см^2 , а площадь ромба Aefd 500 см^2 . Найдите площадь закрашенной части.

Указание: определите высоту ромба и найдите площадь $\triangle DHF$.



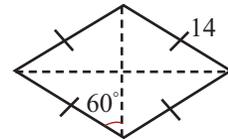
7

1) Площадь прямоугольника ABCD равна 60 см^2 . Найдите площадь ромба, вершины которого являются серединами сторон данного прямоугольника.

2) Найдите площадь ромба, если его периметр равен 80 см, а одна из диагоналей 24 см.

8

По данным рисунка найдите периметр и площадь ромба.



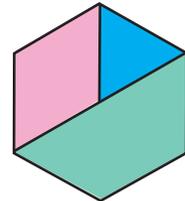
9

1) Найдите периметр ромба, площадь которого равна $9,6 \text{ м}^2$, а одна из диагоналей 3,2 м.

2) Диагонали ромба относятся как 3:4, а площадь равна 54 см^2 . Найдите длины диагоналей ромба.

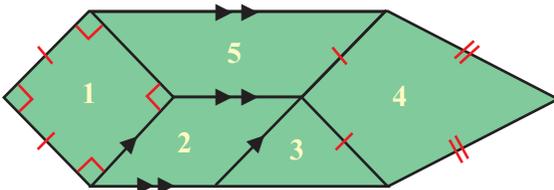
10

При помощи линейки произведите необходимые измерения с точностью до 1 мм и вычислите площади закрашенных частей, а также площадь всей фигуры.



11

Для каждой пронумерованной фигуры выберите соответствующую формулу нахождения площади.



A) $S = a^2$

B) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

C) $S = \frac{1}{2} ah$

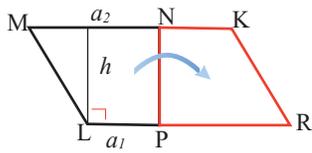
D) $S = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$

E) $S = ah$

Обобщающие задания

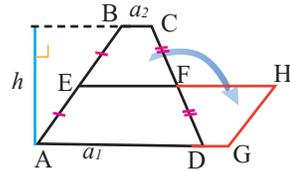
- 1» Дано: LMNP-трапеция.
LMNP \cong KRPN

Докажите, что: $S_{LMNP} = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$



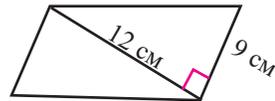
- 2» Дано: ABCD-трапеция.
EBCF \cong HGDF

Докажите, что: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$

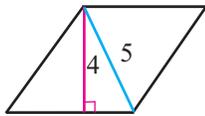


- 3» Для посадки помидоров дядя Расим загородил специальными щитами участок прямоугольной формы размером 15 м \times 25 м. Потом он решил увеличить площадь участка так, чтобы он стал квадратной формы и при этом не покупать новых щитов. На сколько квадратных метров увеличится площадь участка?

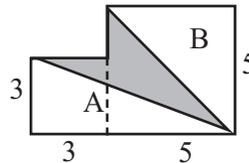
- 4» Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне. Найдите площадь параллелограмма по данным рисунка.



- 5» По данным рисунка найдите площадь ромба.

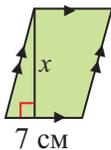


- 6» Найдите площадь закрашенной части на рисунке. А и В-квадраты

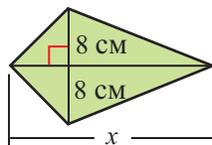


- 7» Найдите x по данным рисунка.

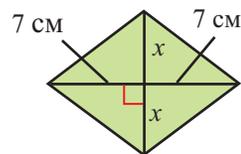
$S = 63 \text{ см}^2$



$S = 168 \text{ см}^2$



$S = 56 \text{ см}^2$



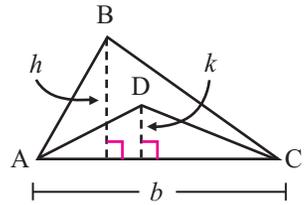
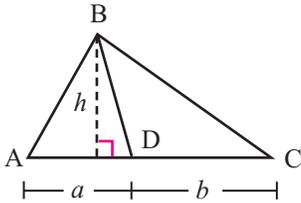
- 8» 1) Найдите площадь равностороннего треугольника с высотой h .
2) Найдите катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 13 см, а площадь 30 см².
3) Найдите площадь остроугольного треугольника с высотой 7 см, если высота делит противоположную сторону на отрезки 3 см и 9 см.

- 9» Докажите, что отношение сторон обратно пропорционально отношению высот, т.е. $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Обобщающие задания

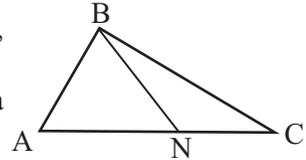
10» Исследование. Исследуйте отношение площадей двух треугольников в различных случаях.

- 1) Если равны длины высот. 2) Если равны длины оснований.



11» 1) Найдите площадь $\triangle ABN$, если $S_{\triangle ABC} = 90 \text{ см}^2$, $AN : NC = 3 : 2$.

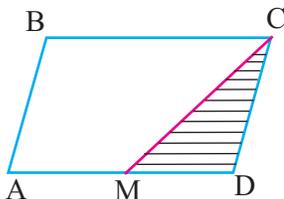
2) Найдите площадь $\triangle ABN$, если BN - медиана, а $S_{\triangle ABC} = 60 \text{ см}^2$.



12» Дано: ABCD - параллелограмм.

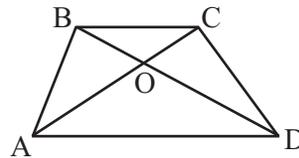
$AM = MD$; $S_{\triangle CMD} = 8 \text{ мм}^2$

Найдите: S_{ABCD}

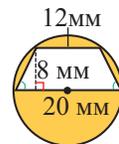
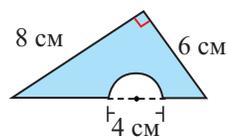
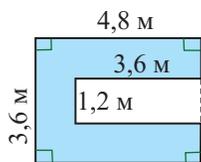
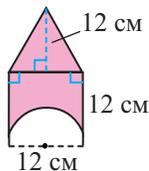


13» Дано: ABCD трапеция
 $S_{\triangle BOC} = 2 \text{ см}^2$, $S_{\triangle ABO} = 4 \text{ см}^2$

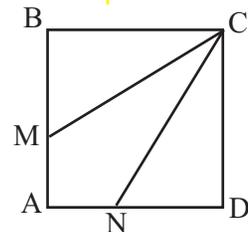
Найдите: S_{ABCD}



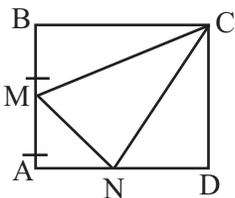
14» По данным рисунка найдите площадь закрашенной части.



15» Квадрат со стороной 3 см разделён отрезками CM и CN на три равные по площади части. Найдите длину отрезка CM .



16» Площадь прямоугольника ABCD составляет 72 кв.ед. Точки M и N являются серединами сторон прямоугольника. Найдите площадь $\triangle CMN$. **Указание:** используйте, что $S_{\triangle CMN} = S_{ABCD} - S_{\triangle BMC} - S_{\triangle CND} - S_{\triangle AMN}$. Обозначьте $AD = a$, $AB = b$ и выразите площади через ab .



7

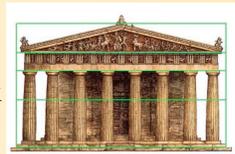
Рациональные уравнения

В этом разделе вы научитесь:

- решать рациональные уравнения и различные задачи при помощи рациональных уравнений;

Это интересно!

Золотое сечение веками считалось самым прекрасным соотношением с точки зрения искусства и архитектуры. Золотая пропорция была обнаружена в красоте архитектуры Парфенона, а также ряде других произведений искусства.



Эвклид в своей работе “Начало”, объясняя золотую пропорцию предлагал делить отрезок на два отрезка длинами a и b ($a > b$) так, что отношение $a + b$ к a было равно отношению a к b .

$$\begin{array}{c} \text{---} a \text{---} \quad \text{---} b \text{---} \\ | \text{---} a + b \text{---} | \end{array} \quad \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

В равенстве $\frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$ примем $\frac{a}{b} = \varphi$. Тогда получим уравнение

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Умножим обе части на число φ и решим уравнение $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

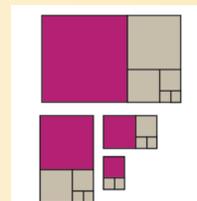
Положительный корень уравнения $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618034\dots$

является иррациональным числом. Обозначение φ было предложено в честь скульптора Фидия, творившего в V веке до н.э.

Записывая каждый раз в знаменателе вместо φ выражение $1 + \frac{1}{\varphi}$, можно представить число φ в виде бесконечной цепной дроби.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}, \quad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

Это геометрическое представление того, что стороны меньшего прямоугольника, полученного путем отделения квадрата от прямоугольника, стороны которого имеют золотую пропорцию, также относятся в золотой пропорции.



Рациональные уравнения

Уравнение, содержащее в левой и правой частях рациональные выражения называется рациональным уравнением. Во многих задачах приходится решать рациональные уравнения, содержащие переменную в знаменателе. В этом случае необходимо указывать область допустимых значений переменных (ОДЗ).

Пример 1. Решите уравнение $\frac{1}{x-3} = 2$

Решение: В данном уравнении ОДЗ $x \neq 3$. Учитывая, что $x \neq 3$, умножим обе части уравнения на $(x-3)$. $\frac{(x-3)}{x-3} = 2(x-3)$. Отсюда $1 = 2(x-3)$, $x = 3,5$

Подставим полученное значение в уравнение: $\frac{1}{3,5-3} = \frac{1}{0,5} = 2$, $2 = 2$

Таким образом, $x = 3,5$ является корнем уравнения. Данное уравнение не имеет других корней.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{12}{x+5} = \frac{4}{x+2}$

Решение: ОДЗ $x \neq -5, x \neq -2$. Используя свойство пропорции, имеем:

$$12(x+2) = 4(x+5) \\ 12x + 24 = 4x + 20, \quad 8x = -4, \quad x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}, \quad x = -0,5$$

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x^2-3x}{x-2} = \frac{2}{2-x}$

Решение: ОДЗ $x \neq 2$. Запишем уравнение в виде $\frac{x^2-3x}{x-2} = \frac{-2}{x-2}$ и умножим обе стороны на общий множитель $(x-2)$. Получим $x^2-3x = -2$. Отсюда $x^2-3x+2=0$, $x_1=1, x_2=2$

При проверке убеждаемся, что $x=2$ не удовлетворяет уравнению, т.к. превращает знаменатель в «0». Таким образом, корнем данного уравнения является только $x=1$.

Внимание! После решения рационального уравнения, содержащего переменную в знаменателе, нужно обязательно выполнить проверку корней.

Пример 4. Решите уравнение $\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3} = \frac{-8}{(x-1)(x-3)}$

Решение: ОДЗ данного уравнения $x \neq 1, x \neq 3$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $(x-1)(x-3)$.

$$(x-1)(x-3) \cdot \frac{x+5}{x-1} - (x-1)(x-3) \cdot \frac{x+1}{x-3} = \frac{-8(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} \quad \text{Согласно равенству}$$

$$(x+5)(x-3) - (x+1)(x-1) = -8 \quad \text{После сокращения}$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые}$$

$$x = 3$$

При $x=3$ данное уравнение не имеет смысла (так знаменатель при этом превращается в «0»). Это говорит о том, что данное уравнение не имеет корней.

Рациональные уравнения

Обучающие задания

1) Решите уравнения, применяя свойства пропорции.

$$a) \frac{4}{a} = \frac{3}{a-2}$$

$$c) \frac{10}{2x-3} = x-1$$

$$e) \frac{x^2+4x}{x+2} = \frac{2x}{3}$$

$$b) \frac{x}{x+1} = \frac{x-6}{x-1}$$

$$d) \frac{3}{x^2+2} = \frac{1}{x}$$

$$f) \frac{3}{3n-1} = \frac{2}{2n-1}$$

2) Решите уравнения.

$$a) \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{5x-6}{x^2-4}$$

$$d) \frac{m-1}{m+1} - \frac{2m}{m-1} = -1$$

$$b) \frac{x^2-6x}{x-5} = \frac{5}{5-x}$$

$$e) \frac{2n}{n-1} + \frac{n-5}{n^2-1} = 1$$

$$c) \frac{2}{3} + \frac{4}{x} = \frac{x}{12}$$

$$f) \frac{a}{3a+6} - \frac{a}{5a+10} = \frac{2}{5}$$

3) Решите уравнения.

$$a) \frac{1}{4} - \frac{1}{2t} + \frac{2}{t^2} = 0$$

$$c) \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{1}{t-2} + \frac{1}{t+2} = \frac{2}{3}$$

$$d) \frac{5z-7}{2z-2} - \frac{3z+2}{z+1} = 0$$

4) Решите уравнения.

$$a) x = \frac{4}{x} - \frac{x}{9} + 2$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{9}{x^2}$$

5) а) Найдите число, если число, обратное данному, в 8 раз больше его квадрата.

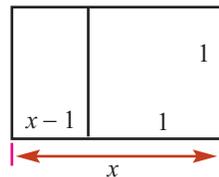
б) Сумма числа и числа, обратного данному, равна $\frac{10}{3}$. Найдите это число.

в) Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 3 больше числителя. Если числитель увеличить на 7, а знаменатель на 5, то дробь увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

6) При каких значениях переменной: а) значение выражения $\frac{x^2+2x}{x+6}$ равно 1;

б) Разность выражений $\frac{6}{x-3}$ и $\frac{x+1}{x+3}$ равна произведению этих же выражений?

7) Если от “Золотого прямоугольника” отрезать самый большой квадрат, то отношение сторон оставшегося меньшего прямоугольника будет равно отношению сторон исходного прямоугольника. Найдите длину золотого прямоугольника, ширина которого равна единице.



Решение задач с помощью рациональных уравнений

Задачи на проценты и отношения

- 1) Команда Ахмеда из 20 игр, сыгранных до настоящего дня, выиграла 8 игр. Сколько ещё игр подряд должна выиграть команда, чтобы достичь 75%-го положительного результата?

План для решения: 1. Отношение выигранных игр ко всем играм равно $\frac{8}{20}$

2. Если сыграть ещё x игр и выиграть их подряд, то отношение выигранных игр ко всем играм станет : $\frac{8+x}{20+x}$

3. Уравнение: $\frac{8+x}{20+x} = 0,75$

- 2) Алия из 20 теннисных партий выиграла 12. Сколько подряд партий может проиграть Алия, чтобы её результат составлял 50%?

- 3) В классе 8 мальчиков и 18 девочек. После того, как в класс пришли ещё несколько мальчиков, вероятность того, что случайным образом выбранный ученик является мальчиком, стала равна $\frac{1}{3}$. Сколько мальчиков было принято в класс?

- 4) В 10 тоннах сока 60 % чистого фруктового экстракта. Сколько фруктового экстракта нужно добавить в сок, чтобы его содержание составило 75%?

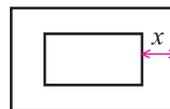
- 5) Сколько соли нужно добавить к 40 граммам 10%-ного раствора, чтобы он стал 20%-ным?

- 6) Есть два раствора 30%-ый и 10%-ный. Сколько килограмм 30%-го раствора надо добавить к 1 кг 10%-го раствора, чтобы раствор стал 22%-ным?

Геометрические задачи

- 7) 1) Одна сторона прямоугольника на 14 см больше другой, а диагональ равна 34 см. Найдите стороны прямоугольника.
2) Один из катетов прямоугольного треугольника на 3 см , а другой на 6 см меньше гипотенузы. Найдите длину гипотенузы.
3) Длина прямоугольника на 7 см больше ширины, а площадь равна 60 см². Найдите периметр прямоугольника.

- 8) По периметру садового участка прямоугольной формы длиной 8 м и шириной 4 м, на одинаковом расстоянии от каждой из сторон разбит цветник. Зная, что площадь сада вместе с цветником составляет 165 м², найдите ширину цветника.



- 9) При увеличении на одинаковую длину всех сторон прямоугольника размерами 2 м × 4 м его площадь увеличилась в 3 раза. Найдите новые размеры участка.

- 10) Площадь треугольника, основание которого на 20 см больше высоты, равна 78 см². Найдите основание треугольника.

Решение задач с помощью рациональных уравнений

Задачи на работу

Задача. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 12 дней. За сколько дней каждый рабочий выполнит эту работу в отдельности, если одному из них для выполнения этой работы потребуется на 10 дней больше, чем другому? **Решение:** Пусть 2-ой рабочий может выполнить работу за x дней, тогда 1-ый рабочий выполнит её за $(x + 10)$ дней.

Первый рабочий за 1 день выполняет $\frac{1}{x+10}$ - ую часть работы, 2-ой $-\frac{1}{x}$ - ую.

Вместе за 1 день они выполняют $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x}$ часть работы. Зная, что вместе за 1 день они выполняют $\frac{1}{12}$ часть работы (согласно условию), составим уравнение $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$. Умножим обе части уравнения на $12x(x+10)$.

Получим, $12x + 12(x+10) = (x+10) \cdot x$. После упрощения имеем $x^2 - 14x - 120 = 0$. Решением данного уравнения являются числа $x_1 = 20$ и

$x_2 = -6$ (не удовлетворяет условию, т.к. $x > 0$). Итак $x = 20$, $x + 10 = 30$.

Ответ: 2-ой рабочий выполняет работу за 20 дней, а 1-ый – за 30 дней.

-
- 11**» Фарид может выполнить работу за 3 часа, а вместе с Кямраном ту же работу за 2 часа. За сколько времени выполнит эту работу Кямран, работая один?
- 12**» Две бригады работая вместе, закончили ремонт за 6 дней. За сколько дней закончит этот же ремонт каждая бригада в отдельности, если одной из них для этого понадобится на 5 дней больше, чем другой?
- 13**» Два тракториста могут вспахать поле за 4 часа. За сколько часов вспашет это же поле каждый из трактористов в отдельности, если одному из них для выполнения этой работы потребуется на 6 часов больше, чем другому?
- 14**» Через одну трубу бассейн наполняется в 2 раза быстрее, чем через другую. Если открыть обе трубы, то бассейн наполнится за 4 часа. За сколько времени наполняет бассейн каждая труба в отдельности?
- 15**» Через одну трубу бассейн наполняется в 3 раза быстрее, чем через другую. Чтобы наполнить бассейн сначала на 1 час открыли только первую трубу, а затем на 4 часа открыли только вторую трубу. За сколько времени наполняют бассейн обе трубы вместе?
- 16**» Двое работников за 2 часа обрабатывают некоторую информацию и посылают её по электронной почте. Сколько времени потребуется для выполнения этой же работы каждому работнику в отдельности, если один из них выполняет её в 3 раза быстрее другого?
- 17**» Два компьютера могут подсчитать зарплату работников фирмы за 3 часа. Один из компьютеров, используя более современную программу для расчётов, может закончить работу на 3 часа раньше другого. Сколько времени потребуется каждому компьютеру, чтобы закончить работу? Результат округлите до сотых.

Решение задач с помощью рациональных уравнений

Задачи на движение

Задача. Путь длиной 480 км проходит по асфальтовой и по просёлочной дороге. Автомобиль расстояние 80 км по просёлочной дороге прошёл со скоростью на 40 км/час меньше, чем по асфальтовой дороге. Зная, что на весь путь он затратил 7 часов, найдите время, которое потратил автомобиль при движении по просёлочной дороге.

Решение:

1 способ:

Путь	Пройденный путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)	Путь = скорость × время
По просёлочной дороге	80	v	t	$vt = 80$
По асфальтовой дороге	400	$v + 40$	$7 - t$	$(v + 40)(7 - t) = 400$

1-й способ: Из 2-ой строки таблицы: $v = \frac{80}{t}$
Из 3-ей строки таблицы: $v + 40 = \frac{400}{7 - t}$, $v = \frac{120 + 40t}{7 - t}$

Отсюда получаем рациональное уравнение $\frac{80}{t} = \frac{120 + 40t}{7 - t}$

Разделим обе части уравнения на 40: $\frac{2}{t} = \frac{3 + t}{7 - t}$

Получим $t^2 + 5t - 14 = 0$; $t_1 = 2$; $t_2 = -7$ (противоречит условию задачи)

Ответ: по просёлочной дороге 2 часа

2-ой способ: Автомобиль ехал по дороге, покрытой асфальтом $\frac{400}{v + 40}$ часов, а по просёлочной дороге - $\frac{80}{v}$ часов.

Зная, что на весь путь он потратил 7 часов, составим уравнение:

$\frac{400}{v + 40} + \frac{80}{v} = 7$ Решив данное уравнение, получим $v = 40$ км/ч. Тогда по просёлочной дороге он двигался $80 : 40 = 2$ часа.

18» Автомобиль, двигаясь со скоростью v км/ч, преодолел расстояние между пунктами А и В за 10 часов. Если половину всего пути автомобиль двигался со скоростью $\frac{v}{2}$, а вторую половину пути со скоростью $\frac{v}{3}$, то за сколько времени он преодолеет путь от города А до города В?

19» Автомобиль, двигаясь из пункта А в пункт В, через два часа после начала движения увеличил скорость на 10 км и оставшийся путь проехал за 4 часа. Зная, что расстояние между пунктами А и В равно 460 км, найдите скорость, с которой двигался автомобиль первые два часа.

20» Один из лыжников дистанцию в 20 км проходит на 20 минут быстрее другого. Найдите скорость каждого лыжника, если скорость одного из них на 2 км/ч больше скорости другого.

21» Поезд прошёл $\frac{1}{4}$ часть пути длиной 600 км, после чего он сделал остановку на 1 час 30 минут. Чтобы вовремя прибыть на последнюю станцию, он увеличил скорость на 15 км/час. Сколько часов поезд находился в пути?

Решение задач с помощью рациональных уравнений

Задача. Моторная лодка за 2 часа прошла 27 км по течению и 6 км против течения. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч.

Решение: пусть скорость лодки в стоячей воде x км/ч. Тогда скорость по течению будет $(x + 3)$ км/ч, а скорость против течения $(x - 3)$ км/ч.

Лодка 27 км по течению прошла за $\frac{27}{x+3}$ часов, а 6 км против течения

за $\frac{6}{x-3}$ часов. Значит, на весь путь лодка затратила

$(\frac{27}{x+3} + \frac{6}{x-3})$ часов.

По условию задачи на весь путь лодка затратила 2 часа. Значит,

$$\frac{27}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 2.$$

Решив данное уравнение, найдем корни $x_1 = 1,5$ и $x_2 = 15$. По условию задачи скорость лодки в стоячей воде должна быть больше скорости течения. Корень $x_1 = 1,5$ не удовлетворяет условию, а корень $x_2 = 15$ удовлетворяет. **Ответ:** 15 км/час.

22» Эльшан занимается спортивной греблей. Он проплыл 15 км по течению и 4 км по озеру. На весь путь он затратил 2 часа. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

23» Турист проехал на моторной лодке вверх по течению 25 км, а затем спустился вниз. Движение вниз заняло на 10 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде равна 12 км/ч.

24» Одновременно по течению начали двигаться катер и плот. Пройдя 30 км катер повернул обратно и через 21 км встретился с плотом. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

25» Лодка за некоторое время прошла по течению путь длиной в 48 км. На обратный путь она потратила на 1,6 часа больше. Скорость течения реки равна 4 км/ч.

1) Найдите скорость лодки в стоячей воде.

2) За какое время лодка прошла путь туда и обратно?

26» Турист на лодке для гребли проделал путь длиной 20 км по течению реки и вернулся обратно. На весь путь он потратил 7 часов. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде равна 7 км/ч.

Обобщающие задания

1) Решите уравнения.

a) $\frac{x-3}{x} = \frac{x-3}{x-6}$

b) $\frac{4}{a} = \frac{3}{a-2}$

c) $\frac{3}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{6}{1-x^2}$

d) $\frac{5}{4} + \frac{3y}{2} = \frac{7y}{6}$

e) $\frac{3}{x} = \frac{1}{x-2}$

f) $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$

2) Оператор мобильной связи объявил ежемесячную абонентскую плату в размере 10 манатов, и 50 гяпик за каждую минуту разговора с любой страной. Запишите выражение, которое показывает, сколько в среднем будет стоить минута разговора пользователя сотовой связи, если за месяц он разговаривал x минут? Сколько минут говорил пользователь, если минута разговора за месяц составила в среднем 60 гяпик?

3) Решите уравнения.

$$\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x-6}{x-1}$$

$$\frac{5}{y-2} - \frac{4}{y-3} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{3}{y-2} + \frac{7}{y+2} = \frac{10}{y}$$

$$\frac{3x-3}{x^2-1} + \frac{2}{x} = 2$$

$$\frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1$$

$$\frac{4x}{2x+3} - \frac{2x}{2x-3} = 1$$

$$\frac{4}{x^2-9} + \frac{x+1}{x-3} = 1$$

$$\frac{2n}{n-1} + \frac{n-5}{n^2-1} = 1$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

4) Рахила и Сона вместе убрали квартиру за 2 часа. За какое время убрала бы квартиру Рахила, если известно, что Сона одна выполняет эту работу на 3 часа быстрее?

5) По данным на рисунке выполните следующие задания.

1) Запишите рациональное выражение, которое показывает разность длины и ширины прямоугольника.



2) Запишите выражение нахождения площади прямоугольника.

$$\frac{x^2+5x}{x+1}$$

3) Найдите значение переменной x , если периметр прямоугольника равен 20 единиц.

6) В коробке находится 30 чёрных шаров и n белых. Найдите n , если вероятность того, что случайным образом вынутый из коробки шар является белым, равна $\frac{2}{5}$.

7) Сколько литров воды надо добавить к 40 гр 5%-ого раствора соли, чтобы он стал 4% -ным?

8) **Задача Омара Хайяма.** Решите уравнение разными способами.

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 \frac{1}{4}$$

Обобщающие задания

9) Мустафа совершает восхождение на склон горы и спускается вниз. Длина пути на подъеме 2 км. Скорость, с которой Мустафа совершает восхождение, v км/ч, а скорость в спуске больше на 2 км за час.

1) Запишите выражение для нахождения общего времени, затраченного Мустафой на подъем и спуск.

2) Сколько времени он потратит на путешествие, если $v = 3$ км/ч?

3) С какой скоростью Мустафа поднимался на склон, если на это путешествие он потратил 50 минут?

10) Решите уравнения, применив метод разложения квадратного трёхчлена на множители.

$$1) \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = -3 \quad 2) \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} + \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = x^2 - 3$$

$$3) \frac{3}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{3}{2x^2 + 6x} \quad 4) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$$

11) Через одну трубу цистерна с бензином может наполниться за n часов, а через другую – за m часов. За сколько часов наполнится цистерна, если открыть обе трубы?

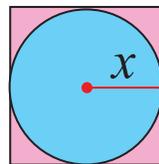
12) Растения пустыни экономно используют воду, накопленную в стволах. Вода испаряется от поверхности растений. Чем больше отношение площади поверхности растений к объёму воды содержащейся в растении, тем меньше вероятность выживания растения в пустыне. Кактус сорта «бочонок» имеет приблизительно форму сферы. Площадь сферы находится по формуле $S = 4\pi r^2$, а объём шара по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



1) Определите отношение площади поверхности к объёму жидкости, которая содержится в кактусе.

2) В каком случае кактус имеет более оптимальные размеры для выживания, при $r = 12$ см или $r = 8$ см?

13) Запишите отношение площадей круга и квадрата на рисунке.



14) а) Зная, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + (n - 1)x - n = 0$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$, найдите n и решите уравнение.

б) Зная, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - (n - 2)x + n = 0$ и $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$,

найдите n и решите уравнение. Сколько решений имеет задание?

8

Подобие фигур

В этом разделе вы научитесь:

- свойства подобных треугольников;
- свойства подобных четырехугольников;
- решать задачи, применяя признаки подобия треугольников;

Отношение, пропорция, масштаб

Свойства пропорции

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

1» Закончите запись: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то

а) $\frac{a+2b}{b} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$

б) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$

в) $\frac{a+b}{c+d} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$

2» Упростите отношения.

1) $\frac{3 \text{ м}}{12 \text{ км}}$

2) $\frac{60 \text{ см}}{1 \text{ м}}$

3) $\frac{350 \text{ г}}{1 \text{ кг}}$

4) $\frac{20 \text{ кг}}{4 \text{ г}}$

3» Верно ли, что:

1) если $\frac{c}{8} = \frac{d}{12}$, то $\frac{c}{d} = \frac{2}{3}$

2) если $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, то $\frac{b+4}{4} = \frac{c+4}{5}$

4» Найдите отношение расстояний между точками на числовой прямой.



1) $\frac{AB}{CD}$

2) $\frac{BD}{CF}$

3) $\frac{BF}{AD}$

4) $\frac{CF}{AB}$

5) $\frac{FD}{EC}$

Отношение, пропорция, масштаб

5) При проверке качества было обнаружено, что из 400 автомобилей 4 не прошли испытания, т.к. имели дефекты. Дайте прогноз, сколько автомобилей будут иметь дефект из 2000 испытуемых автомобилей.

6) Коэффициент передачи ведущих колёс к ведомым колёсам измеряется отношением зубцов на колёсах. Найдите количество зубцов ведомого колеса, если количество зубцов ведущего колеса равно 60, а коэффициент передачи равен 5:2.



7) Найдите разность между наибольшим и наименьшим из углов треугольника, градусные меры углов которого относятся как 2:3:4.

8) Страус за 60 минут пробегает 55 км. За сколько минут с той же скоростью он пробежит путь равный 22 км?

9) 1) В группе альпинистов количество девочек составляет $\frac{3}{8}$ от количества мальчиков. Сколько девочек в группе, если мальчиков на 20 больше, чем девочек.

2) $\frac{2}{3}$ части денег у Дилары составляет $\frac{1}{2}$ часть денег Джавида. Найдите отношение денег Дилары к деньгам Джавида.

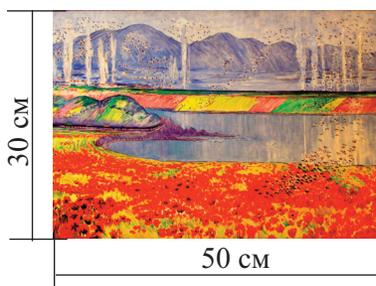
3) Отношение количества книг у Лалы к количеству книг Мурада 1: 2. Если Лала купит ещё 12 книг, то это отношение станет 2 : 1.

а) Сколько книг у Мурада?

б) Как изменится это отношение, если Мурад купит ещё 4 книги?

10) Самир за каждую проданную книгу зарабатывает 40 гяпик, при этом продав 50 книг он получает ещё 4 маната. Сколько заработал Самир, если он продал 775 книг?

11) В магазине продаётся репродукция известной картины Сатгара Бахлулзаде «Мечта Земли», оригинал которой находится в Национальном музее искусств Азербайджана. Найдите реальную длину картины, если её ширина равна 1,5 м.



12) Участники флешмоба «Вам есть письмо» раздали гражданам последнее письмо, которое написал отцу и матери Национальный Герой Азербайджана Мубариз Ибрагимов, совершив беспрецедентный по храбрости поступок в успешных боях за целостность Азербайджана. Зачитав прощальное письмо они отправились на Аллею Шехидов к могиле героя. $\frac{2}{3}$ участников флешмоба были молодые люди в возрасте от 16 до 25 лет. После того, как к акции присоединились ещё 55 молодых людей, отношение количества молодёжи ко всем участникам составило 5:7. Сколько молодёжи участвовало в флешмобе?

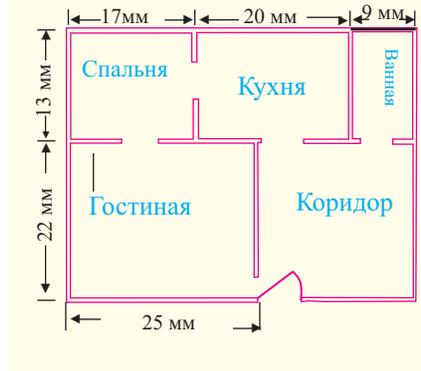
Отношение, пропорция, масштаб

- 13**» План квартиры сделан в масштабе 1 см:3 м. Найдите размеры всех комнат. Для примера найдены размеры гостиной. Длина гостиной на плане равна 2,5 см, а ширина 2,2 см. Обозначим действительные размеры (в метрах) комнаты соответственно через x и y . Зная, что 1 см на плане в действительности соответствует 3 м, составим и решим пропорцию.

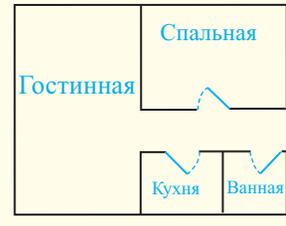
$$\frac{1}{3} = \frac{2,5}{x}; \quad x = 7,5 \text{ (м)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2,2}{y}; \quad y = 6,6 \text{ (м)}$$

Действительные размеры комнаты равны: 7,5 м × 6,6 м



- 14**» При помощи линейки выполните соответствующие измерения и найдите реальные размеры каждой комнаты, изображённой на рисунке, в соответствии с указанным масштабом.



Масштаб: 1:500

- 15**» Начертите площади фигур, указанных ниже выбрав масштаб. Для проверки правильного применения масштаба выполните повторные измерения и проверьте вычисления.

1) Бильярдный стол размерами

1,6 м × 3,2 м

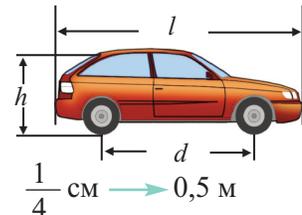
2) Баскетбольную площадку размерами 28 м × 15 м

3) Дорожку для игры в боулинг размерами 18,2 м × 1,7 м.

4) Футбольное поле размерами 64 м × 100 м.

- 16**» Дизайнер газеты решил уменьшить размеры фотографии размером 6 см × 9 см. Найдите длину уменьшенной фотографии, если её ширина стала 4 см.

- 17**» При помощи линейки выполните соответствующие измерения и найдите реальные размеры автомобиля на рисунке в соответствии с указанным масштабом.

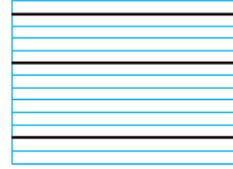


- 18**» 1) Длине отрезка 2,5 см на карте местности соответствует 15 км. Найдите расстояние между двумя городами, если на этой карте ему соответствует отрезок 23,2 см.
2) Лейла рисует уменьшенную копию скульптуры. Найдите реальную высоту скульптуры, если на рисунке её высота равна 18,4 см, а масштаб 1:85.

Пропорциональные отрезки

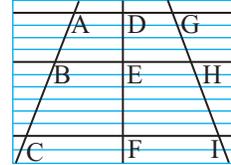
Практическая работа.

1. Начертите в тетради 3 параллельные прямые.
2. Проведите 3 секущие, которые пересекают эти прямые.
3. Измерьте отрезки AB, BC, AC, DE, EF, DF, GH, HI и GI.
4. Запишите и вычислите следующие отношения



$$1) \frac{AB}{BC}, \frac{DE}{EF}, \frac{GH}{HI} \quad 2) \frac{AB}{AC}, \frac{DE}{DF}, \frac{GH}{GI}$$

$$3) \frac{BC}{AC}, \frac{EF}{DF}, \frac{HI}{GI}$$



5. Можно ли по результатам сказать, что параллельные линии делят секущие на пропорциональные отрезки?

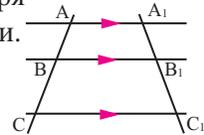
Пропорциональные отрезки

Отношением двух заданных отрезков называют отношение их длин.

Если для отрезков AB, CD, A₁B₁, C₁D₁ выполняется $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A₁B₁ и C₁D₁.

Теорема. При пересечении сторон угла параллельными прямыми стороны угла делятся на пропорциональные отрезки.

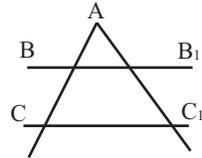
Если AA₁ || BB₁ || CC₁, то $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$



Эту теорему называют обобщенной теоремой Фалеса.

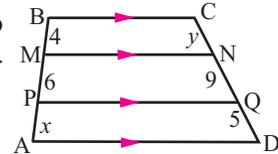
Для данной теоремы справедливо обратное.

Обратная теорема. Прямые, пересекающие стороны угла и отсекающие, начиная от вершины, пропорциональные отрезки, параллельны.



Если $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, тогда BB₁ || CC₁

Пример. В трапеции ABCD параллельно основанию проведены прямые MN и PQ. По данным рисунка найдите неизвестные данные.

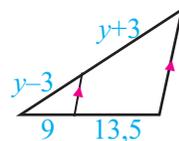
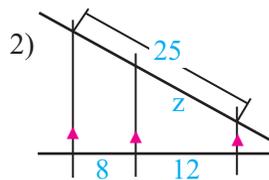
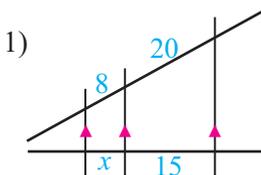


Решение: по теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{9} \quad \text{и} \quad \frac{y}{9} = \frac{4}{6}. \quad \text{Отсюда} \quad x = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{36}{6} = 6.$$

Обучающие задания

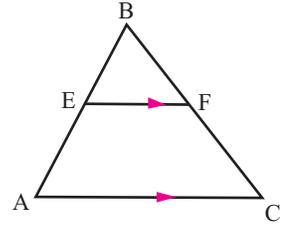
1 По данным рисунка найдите неизвестные длины отрезков.



Пропорциональные отрезки

2) Зная, что в $\triangle ABC$ $EF \parallel AC$, найдите требуемое.

- а) $BE = ?$, если $AB = 64$ см и $BF : FC = 5 : 3$;
 б) $AB = ?$, если $AE = 18$ см, $BC : BF = 3 : 2$;
 в) $BF = ?$, если $BE = 12$ см, $AE : FC = 4 : 5$.

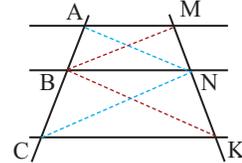


3) Закончите доказательство теоремы о пропорциональных отрезках.

Дано: $AM \parallel BN \parallel CK$

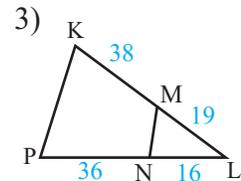
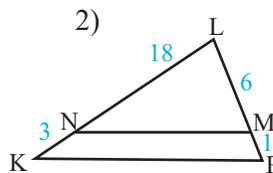
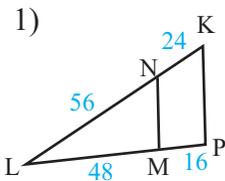
Докажите: $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NK}$

Доказательство: проведем прямые NA, NC, BM, BK

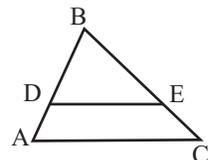


Предположение	Обоснование
1. $\frac{S_{ANB}}{S_{CNB}} = \frac{AB}{BC}$	1. Высоты, проведенные из вершины N $\triangle ANB$ и $\triangle CNB$ одинаковы.
2. $\frac{S_{MBN}}{S_{KBN}} = \frac{MN}{NK}$	2. Высоты, проведенные из вершины B $\triangle MBN$ и $\triangle KBN$ одинаковы.
3. $S_{ANB} = S_{MBN}$	3. Для $\triangle ANB$ и $\triangle MBN$ сторона BN является общей и высоты, проведенные к этим сторонам, конгруэнтны
4. $S_{CNB} = S_{KBN}$	4. Для $\triangle CNB$ и $\triangle KBN$ сторона BN является общей и высоты, проведенные к этим сторонам, конгруэнтны
5. $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NK}$	5.

4) Для какого треугольника можно утверждать, что $MN \parallel PK$?



5) В $\triangle ABC$ $AB = 15$, $BD = 10$. Длина BE в 2 раза больше длины EC . Показав, что $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ докажете, что $DE \parallel AC$.



Пропорциональные отрезки

- 6» На рисунке представлена часть плана университетского городка. I, II и III Цветочные улицы параллельны друг другу, а также параллельны улице Чинарной. Расстояние от улицы Чинарной до входа в городок вдоль улицы Молодёжной равно 1,2 км. Найдите расстояние от Чинарной улицы до входа в городок по Библиотечной улице.



- 7» Стороны прямоугольника на рисунке находятся в золотом отношении. Данный прямоугольник разделили по длине на квадрат и маленький прямоугольник. 1) По данным рисунка найдите длины сторон маленького прямоугольника. 2) Докажите, что длины сторон маленького прямоугольника также находятся в золотом отношении.

$$2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 2 + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 2$$

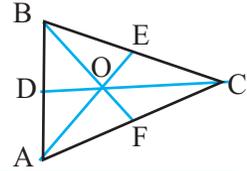
$1 + \sqrt{5}$ 2 x

Теорема. Свойство медиан треугольника

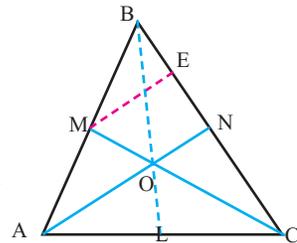
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в точке пересечения в отношении 2:1, начиная от вершины.

$$CO : OD = 2 : 1 \quad AO : OE = 2 : 1 \quad BO : OF = 2 : 1$$

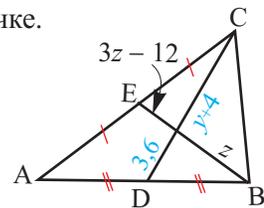
Точка пересечения медиан треугольника называется центром тяжести треугольника.



Доказательство. Обозначим через O точку пересечения медиан AN и CM $\triangle ABC$. Проведем $ME \parallel AN$. Так как $AM = MB$, то по теореме о пропорциональных отрезках $BE = EN$. Тогда, так как $CN : NE = 2 : 1$, то по теореме о пропорциональных отрезках $CO : OM = 2 : 1$. Аналогично, $AO : ON = 2 : 1$. Медиана BL делит медиану AN в отношении 2 : 1. Значит, медиана BL также проходит через точку O. Таким образом, медианы треугольника пересекаются в одной точке.

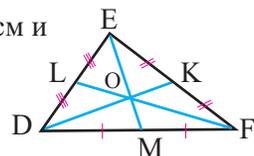


- 8» Найдите значение переменной на рисунке, если BE и CD - медианы треугольника.



- 9» Точка O является точкой пересечения медиан треугольника DEF. $DE = 10$ см, $FL = 15$ см, $EM = 9$ см и $DK = 12$ см. Найдите периметры треугольников:

- 1) $\triangle EOD$ 2) $\triangle DLO$ 3) $\triangle LOE$

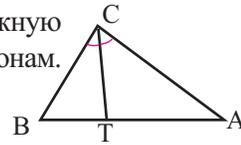


Пропорциональные отрезки

Свойство биссектрисы треугольника

Теорема. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

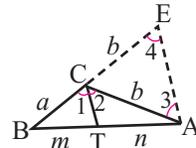
$$\frac{AT}{BT} = \frac{AC}{BC}$$



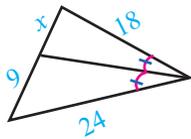
10 Докажите теорему о свойстве биссектрисы.

План для доказательства: проведите $AE \parallel CT$.

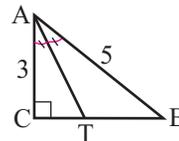
Основываясь на том, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ докажите, что $\triangle ACE$ равнобедренный и примените теорему о пропорциональных отрезках.



11 По данным рисунка найдите x .



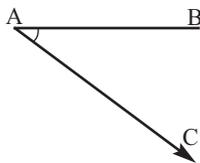
12 По данным рисунка найдите длину биссектрисы AT .



13 Биссектриса треугольника делит противоположающую сторону на части, длины которой равны 4 см и 6 см. Найдите длины двух других сторон, если периметр треугольника равен 50 см.

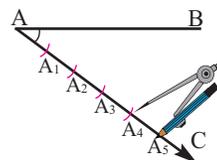
14 а) Исследуйте и запишите в тетрадь последовательность действий для деления заданного отрезка AB в отношении 3:2.

1. Изобразите заданный отрезок AB и луч AC , образующий с данным отрезком острый угол.

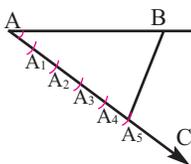


2. На луче AC при помощи циркуля и дуг отметьте 5 ($3 + 2$) конгруэнтных отрезков:

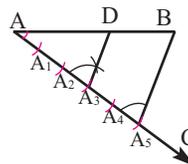
$$AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong A_3A_4 \cong A_4A_5$$



3. Соедините точку A_5 с точкой B .



4. Проведите линию A_3D параллельно A_5B , построив $\angle AA_3D$, конгруэнтный $\angle AA_5B$.



б) Изобразите отрезок AB и разделите его на части в отношении 1:2:3.

Подобные четырёхугольники, подобные треугольники

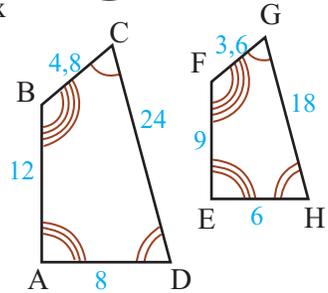
Подобные четырёхугольники, подобные треугольники

Подобными называются фигуры, одинаковые по форме и у которых соответствующие размеры пропорциональны. Например, все квадраты подобны друг другу, так же как и окружности разных радиусов.



Подобными называются многоугольники, у которых соответствующие углы конгруэнтны, а соответствующие стороны являются пропорциональными отрезками. Например, на рисунке четырёхугольники ABCD и EFGH являются подобными четырёхугольниками. Так как, $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$.

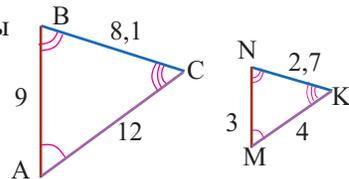
$$\angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H, \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{4}{3}$$



У подобных треугольников соответствующие углы конгруэнтны, а соответствующие стороны являются пропорциональными отрезками. Здесь, говоря о соответствующих сторонах, имеются в виду стороны, которые находятся напротив конгруэнтных углов. На рисунке для $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$ имеем:

Конгруэнтные углы Соответствующие стороны

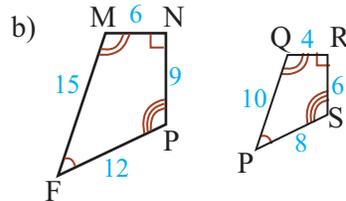
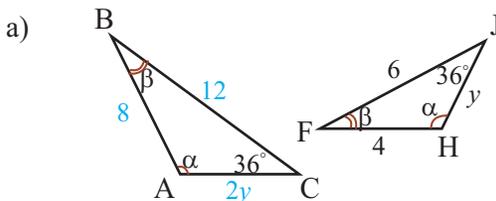
$\angle A \cong \angle M$	BC и NK
$\angle B \cong \angle N$	AC и MK
$\angle C \cong \angle K$	AB и MN



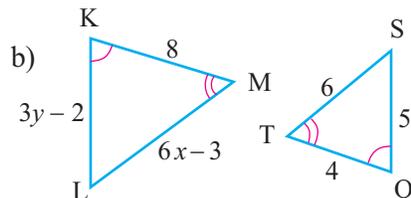
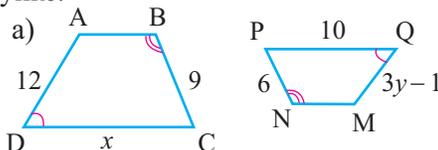
Так как $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK} = 3$, то $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$ являются подобными треугольниками. Подобие обозначается знаком “ \sim ”. $\triangle ABC \sim \triangle MNK$.

Отношение соответствующих сторон называется коэффициентом подобия и обозначается буквой k . Коэффициент подобия треугольников на рисунке равен 3.

- 1) Обоснуйте подобие, записав соответствующие условия для а) треугольников; б) четырёхугольников на рисунке.



- 2) Найдите переменные подобных а) трапеций; б) треугольников на рисунке.



Подобные четырёхугольники, подобные треугольники

3 Исследуйте теорему и доказательство и запишите в тетради.

Теорема. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник подобный данному.

Дано: $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$

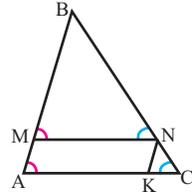
Докажите: $\triangle MBN \sim \triangle ABC$

Доказательство: $\angle A \cong \angle M$, $\angle C \cong \angle N$ (почему?), $\angle B$ - общий

угол. Углы $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$ конгруэнтны. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$, отсюда $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC}$

Проведем $NK \parallel AB$. $AK \cong MN$ (почему?). По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AK}{KC} = \frac{BN}{NC}$, отсюда $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$. Тогда $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$.

Так как углы конгруэнтны, а соответствующие стороны пропорциональны, то $\triangle MBN \sim \triangle ABC$.



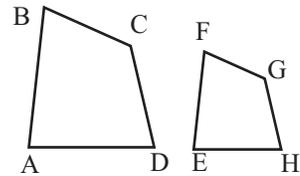
Периметры подобных многоугольников

Теорема. Отношение периметров двух подобных многоугольников равно отношению соответствующих сторон (или коэффициенту подобия).

Если $ABCD \sim EFGH$, то

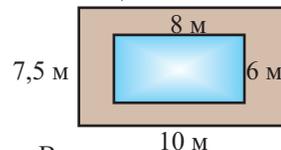
$$\frac{AB+BC+CD+DA}{EF+FG+GH+HE} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

Запишите доказательство теоремы, приняв коэффициент подобия за k . Для этого можно использовать равенство $AB = k \cdot EF$, которое следует из отношения соответствующих сторон.



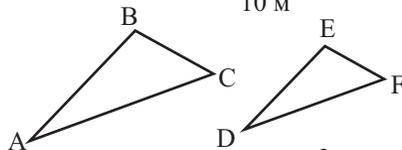
4 На рисунке представлен план бассейна и площади, прямоугольной формы вокруг бассейна, облицованного плитам. Зная, что данные прямоугольники подобны, по плану найдите:

- 1) Коэффициент подобия;
- 2) Отношение периметров.



5 Дано: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

Докажите: $\frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle DEF)} = \frac{m}{n}$



6 1) Коэффициент подобия двух подобных прямоугольников равен $\frac{3}{2}$. Найдите периметр маленького прямоугольника, если периметр большого прямоугольника равен 90 см.

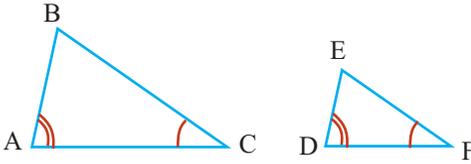
2) Коэффициент подобия двух подобных треугольников равен $\frac{4}{5}$. Найдите периметр большого треугольника, если периметр маленького треугольника равен 0,64 м.

Признаки подобия треугольников

Признак подобия УУ (угол угол)

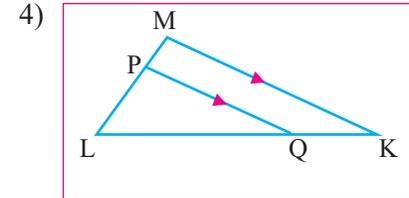
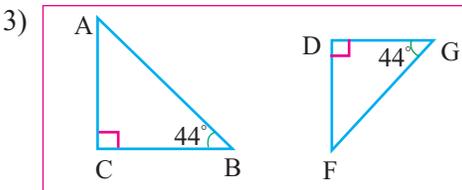
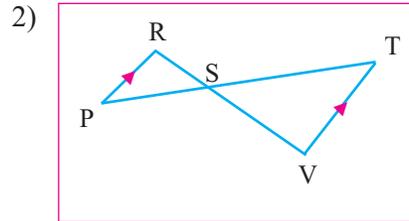
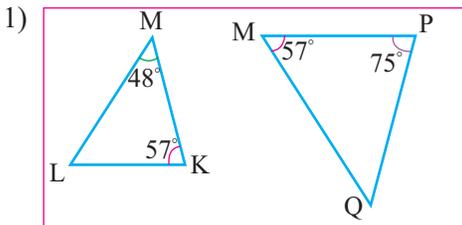
Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Этот признак подобия коротко записывается как УУ.



Если, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$
то, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

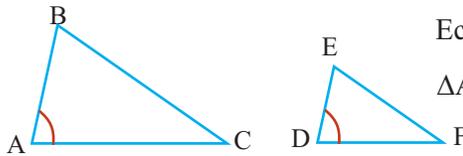
1) Какие из данных треугольников подобны? Обоснуйте своё мнение.



Признак подобия СУС

Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, конгруэнтны, то такие треугольники подобны.

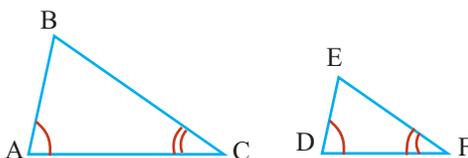
Этот признак подобия коротко записывается как СУС.



Если $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ и $\angle A \cong \angle D$, то
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Признак подобия ССС

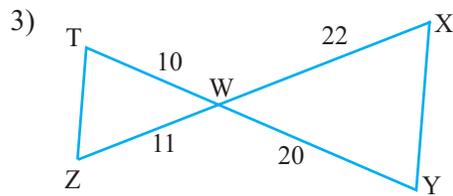
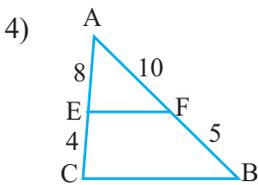
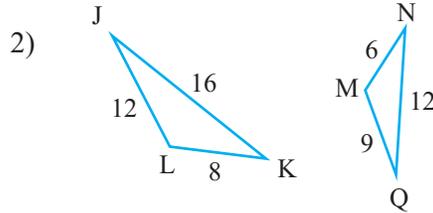
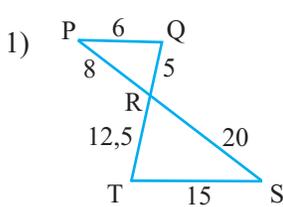
Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны. Этот признак подобия коротко записывается как ССС.



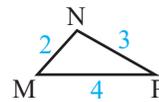
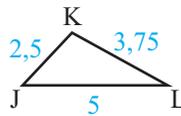
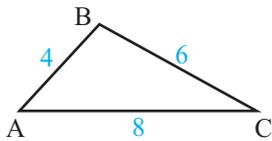
Если, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, то
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Признаки подобия треугольников

- 2» Определите, по какому признаку подобны данные треугольники? Запишите соответствующие конгруэнтные углы и отношение соответствующих сторон.



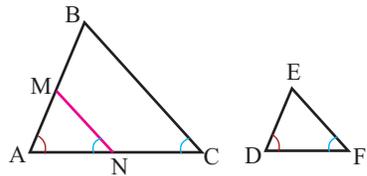
- 3» Какой из треугольников подобен $\triangle ABC$? Ответ обоснуйте.



- 4» Исследуйте следующее доказательство признака УУ. Самостоятельно выполните доказательство в тетради.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$

Докажите: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



В $\triangle ABC$ на стороне AC отложим отрезки $AN \cong DF$ и проведем $MN \parallel BC$. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному. Значит, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

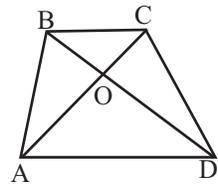
Так как $\angle N \cong \angle C$ (соответствующие углы) и $\angle C \cong \angle F$ (по условию), то по признаку УСУ $\triangle AMN \cong \triangle DEF$.

Так как $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ и $\triangle AMN \cong \triangle DEF$, то ясно, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

- 5» Выполните задания по рисунку.

1) На какие подобные треугольники делят диагонали трапецию $ABCD$?

2) Запишите условия равенства отношений соответствующих углов и соответствующих сторон подобных треугольников.



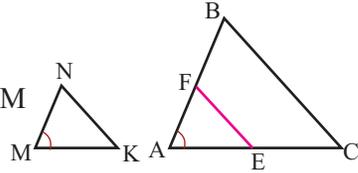
Найдите BC , если $BO = 8$ см, $OD = 12$ см, $AD = 15$ см.

Признаки подобия треугольников

6 Закончите доказательство признака подобия СУС в тетради.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle MNK$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$, $\angle A \cong \angle M$

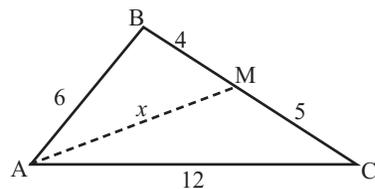
Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle MNK$



Доказательство: на стороне AC $\triangle ABC$ отложим отрезок AE так, чтобы $AE \cong MK$, и через точку E проведем прямую, параллельную BC.

Предположение	Обоснование
1. $AE \cong MK$, $EF \parallel BC$	1. По построению.
2. $\triangle ABC \sim \triangle AFE$	2. По теореме о делении на подобные треугольники
3. $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE}$	3.....
4. $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$	4. Дано.
5. $AF \cong MN$	5. $AE \cong MK$ и по сравнению пропорций пунктов 3 и 4.
6. $\triangle AFE \cong \triangle MNK$	6. Признак конгруэнтности треугольников.
7. $\triangle ABC \cong \triangle MNK$	7. Так как $\triangle ABC \sim \triangle AFE$ и $\triangle AFE \cong \triangle MNK$.

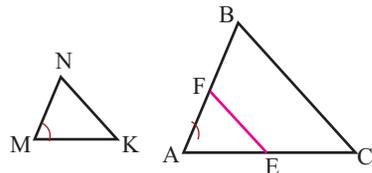
- 7** а) По данным рисунка, какие треугольники можно назвать подобными?
 б) Запишите равенство отношений соответствующих сторон.
 в) Найдите длину отрезка AM.



8 Исследуйте доказательство представленного ниже признака ССС. Выполните самостоятельно в тетради.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle MNK$,

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle MNK$,
 $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{BC}{NK}$



Доказательство: на стороне AC $\triangle ABC$ отложим отрезок AE такой, что $AE \cong MK$, и через точку E проведем прямую, параллельную BC. Отсечем подобный треугольник:

$\triangle AFE \sim \triangle ABC$. Тогда $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{FE}$. Так как по условию $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{BC}{NK}$, то сравнивая равенства, получим $AF \cong MN$, $FE \cong NK$.

Тогда по признаку ССС $\triangle AFE \cong \triangle MNK$.

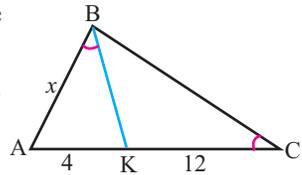
Так как $\triangle AFE \sim \triangle ABC$, получим, что $\triangle MNK \sim \triangle ABC$.

Признаки подобия треугольников

- 9** Исследуйте пример. По следующим данным докажите, что треугольники подобны и найдите требуемые размеры.

Пример. По данным рисунка найдите неизвестные данные.

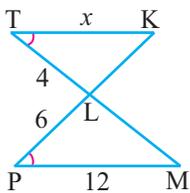
Решение: $\angle ABK \cong \angle ACB$ (по условию), $\angle A$ - общий.
Тогда по признаку УУ получим $\triangle ABK \sim \triangle ACB$.
Конгруэнтные углы: $\angle ABK \cong \angle ACB$, $\angle AKB \cong \angle ABC$
Соответствующие стороны: АК и АВ, АВ и АС.



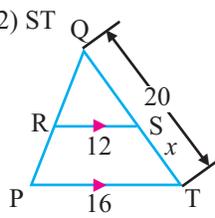
Запишем отношение соответствующих сторон:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AC}. \text{ По данным рисунка получим: } \frac{4}{x} = \frac{x}{16}, x^2 = 64, x = 8$$

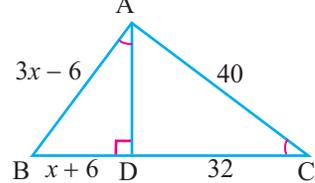
1) ТК



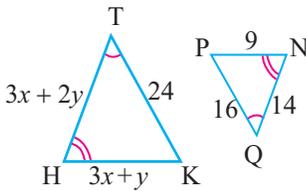
2) ST



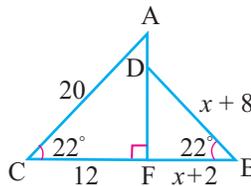
3) AB, BD



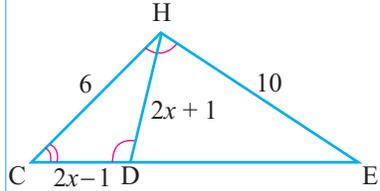
4) HT, HK



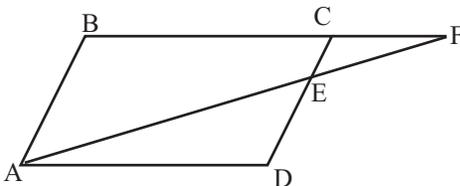
5) DB, CB



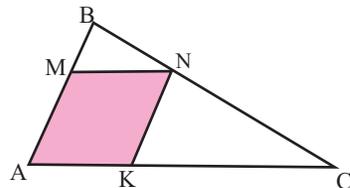
6) CD, DH



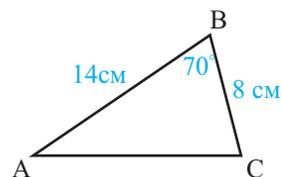
- 10** Дано: ABCD-параллелограмм
AB = 6 см, AD = 9 см, CF = 3 см
Найдите длины CE и ED.



- 11** Если AB = 4 см, AC = 12 см, то найдите периметр ромба AMNK.



- 12** Постройте треугольник, подобный треугольнику на рисунке. Докажите подобие, записав конгруэнтность углов и пропорциональность отношения соответствующих сторон подобных треугольников.



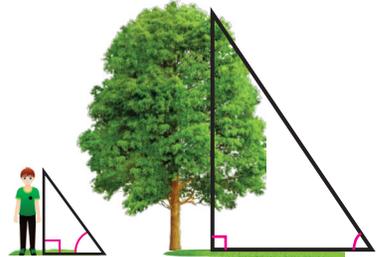
Признаки подобия треугольников

13» Обоснуйте справедливость утверждений.

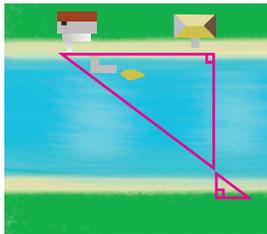
- 1) Равносторонние треугольники подобны.
- 2) Равнобедренные треугольники с равными углами при вершине подобны.
- 3) Прямоугольные треугольники с одним равным острым углом подобны.
- 4) Прямоугольные треугольники с пропорциональными катетами подобны.

14» Докажите подобие треугольников на рисунке и объясните, какие измерения нужно сделать, чтобы определить высоту дерева.

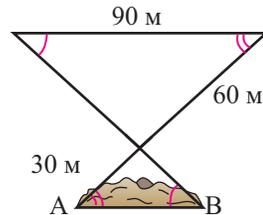
Указание: лучи солнца, падающие на Землю, можно считать параллельными. Поэтому они и образуют с Землёй конгруэнтные углы.



15» Объясните, по какому признаку подобны треугольники на рисунке.

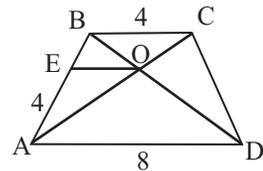


16» Часть подземного тоннеля будет пробурена в горе. Найдите длину тоннеля АВ.

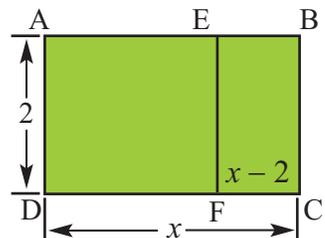


17» В солнечную погоду тень от флага равна 12 м. Недалеко от него стоит человек, рост которого 1,65 м, а длина его тени равна 2,2 м. Найдите высоту флага. Нарисуйте рисунок, на котором будет изображено солнце, флаг и человек.

18» Дано: ABCD-трапеция
 $AD = 8$, $BC = 4$, $AE = 4$
 $OE \parallel AD$
 Найдите: BE, OE



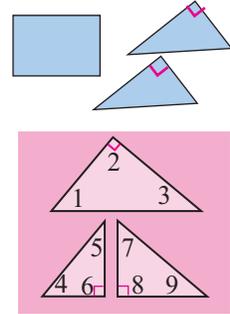
19» Стороны прямоугольника ABCD на рисунке находятся в золотом отношении. Этот прямоугольник можно разделить на квадрат и малый прямоугольник, подобный данному прямоугольнику. Стороны этих прямоугольников также находятся в золотом отношении. По данным рисунка найдите значение переменной x .



Подобие прямоугольных треугольников

Исследование

1. Разрежьте прямоугольник на два конгруэнтных прямоугольных треугольника, как показано на рисунке.
2. Сложите один из полученных треугольников по высоте, обозначив след от высоты.
3. Разрежьте треугольник по намеченной линии высоты на два треугольника.
4. Измерьте все углы полученных треугольников.
5. Какие углы конгруэнтны $\angle 1$?
6. Какие углы конгруэнтны $\angle 2$?
7. Запишите ваше мнение по поводу подобия этих треугольников.

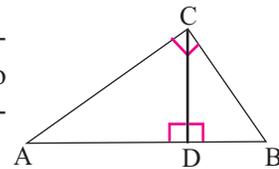


Высота, проведённая к гипотенузе

Теорема. Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

Доказательство данной теоремы проводится на основании признака подобия УУ. Для каждого из трёх треугольников нужно определить два конгруэнтных угла.



Среднее геометрическое

Среднее геометрическое. Для положительных чисел a и b средним геометрическим называется положительное число x , удовлетворяющее равенству $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Т.е., $x = \sqrt{ab}$

Высота, проведённая из вершины прямого угла на гипотенузу, делит её на два отрезка (на рисунке AD и DB).

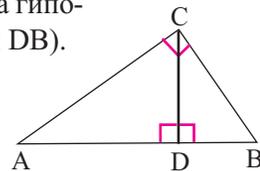
Здесь отрезки AD и DB являются проекциями катетов AC и BC на гипотенузу, соответственно.

Следствие 1. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \quad CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Следствие 2. Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \quad AC = \sqrt{AB \cdot AD}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \quad BC = \sqrt{AB \cdot BD}$$



1) Найдите среднее геометрическое пар чисел.

1) 9 и 16

2) 4 и 9

3) 12 и 48

4) 6 и 12

5) 15 и 20

Подобие прямоугольных треугольников

2» 1) Следствие 1 докажите, зная, что $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, и записав равенство отношений соответствующих сторон.

2) Следствие 2 докажите, зная, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ и $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, и записав равенство отношений соответствующих сторон.

3» По данными рисунка допишите пропорции .

1. $\frac{r}{h} = \frac{h}{\blacksquare}$

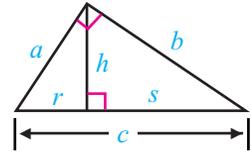
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{\blacksquare}$

3. $\frac{\blacksquare}{b} = \frac{b}{s}$

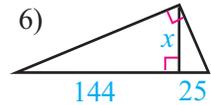
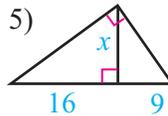
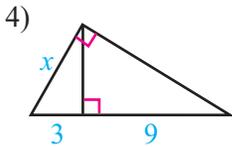
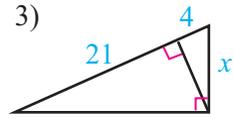
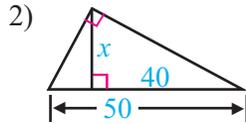
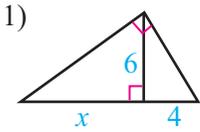
4. $\frac{r}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{c}$

5. $\frac{r}{h} = \frac{\blacksquare}{s}$

6. $\frac{s}{b} = \frac{\blacksquare}{c}$

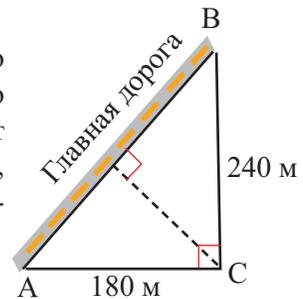


4» По данным рисунка найдите x .

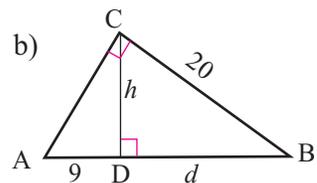
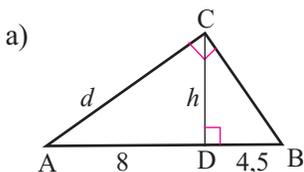


5» Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, длины которых равны 2 см и 8 см. Найдите длину высоты.

6» Для фирм А, В и С на главной дороге намечено построить здание новой столовой и от неё новую дорогу до фирмы С. На каком расстоянии от фирмы А должна быть расположена столовая, чтобы расстояние от неё до фирмы С было наименьшим?

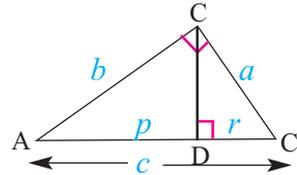


7» По данным рисунка найдите d и h .



Подобие прямоугольных треугольников

- 8 Докажите теорему Пифагора, используя результаты доказательства теоремы о высоте, проведенной на гипотенузу (стр. 153). Закончите доказательство в тетради записав обоснование для каждого предположения.



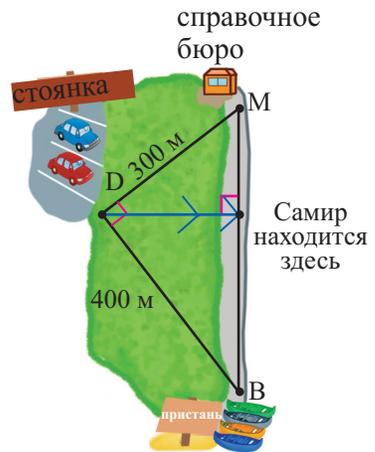
Дано: прямоугольный треугольник ABC и его высота CD

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$

Предположение	Обоснование
1. CD высота ΔABC	1. ?
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{r}, \frac{c}{b} = \frac{b}{p}$	2. ?
3. $cr = a^2, cp = b^2$	3. ?
4. $cr + cp = a^2 + b^2$	4. ?
5. $c(r + p) = a^2 + b^2$	5. ?
6. $(r + p) = c$	6. ?
7. $c^2 = a^2 + b^2$	7. ?

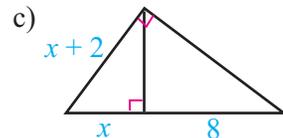
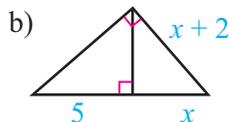
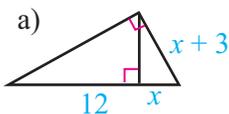
- 9 В открывшемся в городе Мингячевир Олимпийском учебно-спортивном центре по гребле «Кюр» проводятся различные международные соревнования.

Самир собирается принять участие в соревнованиях по гребле. Он начал движение от автомобильной стоянки, как показано на рисунке и при помощи дорожных знаков определил направление до пристани. Сколько метров составляет расстояние от места, где находится Самир до справочного бюро?



Примите во внимание, что длина пути от автомобильной стоянки до справочного бюро равна 300 м, а до пристани-400 м, и дороги пересекаются под прямым углом.

- 10 По данным рисунка найдите x .

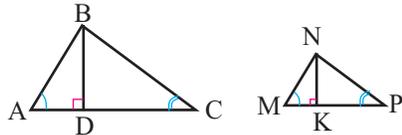


Применение подобия треугольников

Высоты, медианы и биссектрисы подобных треугольников

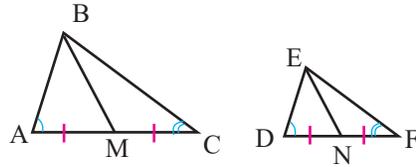
Теорема 1. Отношение соответствующих высот подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон.

$$\frac{BD}{NK} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$



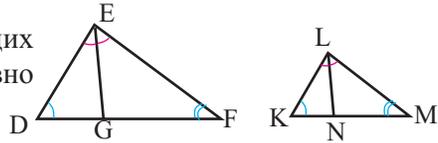
Теорема 2. Отношение соответствующих медиан подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон.

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$



Теорема 3. Отношение соответствующих биссектрис подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон.

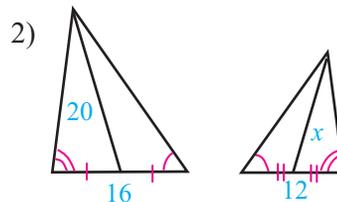
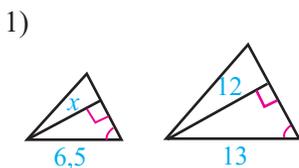
$$\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$$



1 Закончите доказательство теоремы 3. Запишите доказательства теорем 1 и 2.

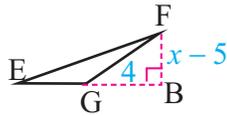
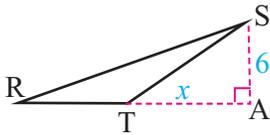
Предположение	Обоснование
1. $\angle D \cong \angle K$	1. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
2. $\angle DEG \cong \angle GEF$ $\angle KLN \cong \angle NLM$	2. _____
3. $\angle DEF \cong ?$	3. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
4. $\angle DEG \cong \angle KLN$	4. Свойство равенства
5. $\triangle DEG \sim \triangle KLN$	5. _____
6. $\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL}$	6. $\triangle DEG \sim \triangle KLN$
7. $\frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$	7. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
8. $\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$	8. _____

2 По данным рисунка найдите x .

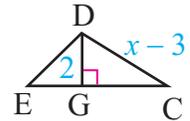
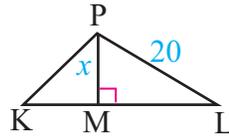


Применение подобия треугольников

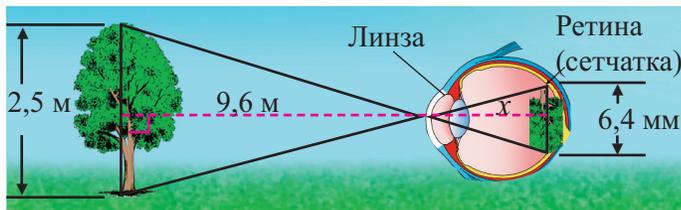
- 3» Дано: $\triangle RST \sim \triangle EFG$
 SA и FB – высоты.
 Найдите: FB



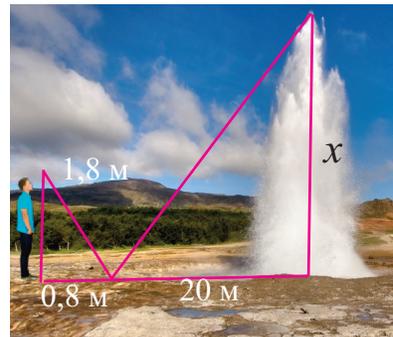
- 4» Дано: $\triangle KPL \sim \triangle EDC$
 PM и DG – высоты.
 Найдите: PM и DC



- 5» Глазной хрусталик принимает световые лучи, которые идут от объекта, и передаёт уменьшенную копию на сетчатку глаза. В этот момент образуются подобные треугольники, как показано на рисунке. Найдите расстояние от линзы до сетчатки.



- 6» Горячие подземные источники при извержении, подобно вулкану, выбрасывают наружу фонтан горячей воды и пара. В холодной северной столице Исландии Рейкьявике есть много подземных источников гейзеров, которые всегда привлекают большое внимание туристов. Гейзеры каждые 10 минут 3-хкратно выбрасывают вверх 40-60-метровый фонтан воды. Один из туристов измерил высоту столба воды. Для этого он положил зеркало на некотором расстоянии от гейзера и стал отходить от зеркала до тех пор, пока в зеркале не отразится верхушка столба. По рисунку найдите высоту гейзера.

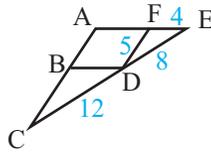


- 7» Для того, чтобы измерить высоту флага, Эльдар на расстоянии 6 м от флагштока (шеста) на земле расположил зеркало, а сам встал на расстоянии 1,2 м от зеркала. Расстояние от глаза Эльдара до зеркала 2 м. Объясните способ, при помощи которого Эльдар собирался узнать высоту флагштока флага и найдите эту высоту.

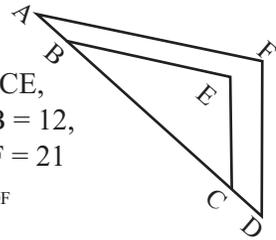
Применение подобия треугольников

8) По данным рисунка найдите периметр треугольника.

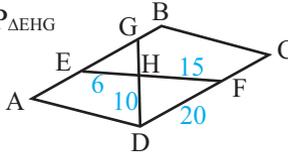
1) Дано:
 $\triangle ABCD \sim \triangle FDE$,
 $CD = 12$, $FD = 5$,
 $FE = 4$, $DE = 8$
 Найти: $P_{\triangle ABCD}$



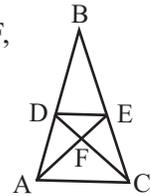
2) Дано:
 $\triangle ADF \sim \triangle BCE$,
 $BC = 24$, $EB = 12$,
 $CE = 18$, $DF = 21$
 Найти: $P_{\triangle ADF}$



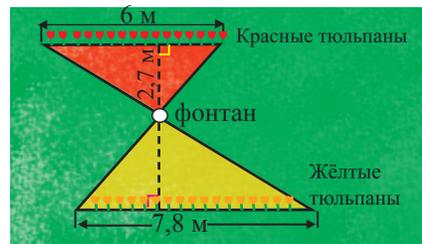
3) Дано: ABCD-параллелограмм,
 $EH = 6$, $HF = 15$, $HD = 10$
 Найти: $P_{\triangle EHG}$



4) Дано: $\triangle DEF \sim \triangle CAF$,
 $P(\triangle CAF) = 28$, $DF = 6$,
 $FC = 8$
 Найти: $P_{\triangle DEF}$

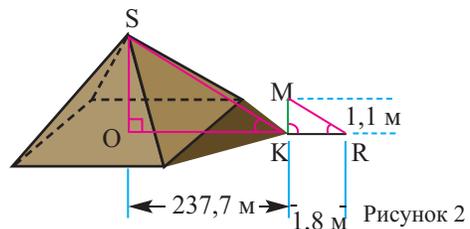
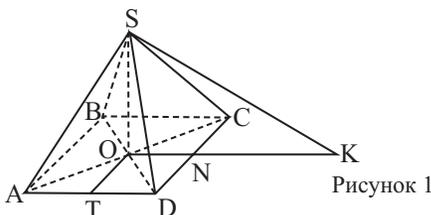


9) На рисунке дана часть плана парка. Сколько метров от жёлтых тюльпанов до фонтана?



10) По легенде древний греческий учёный Фалес, странствуя по Египту, был поражен величием пирамиды Хеопса. Он спросил у жрецов, какова высота пирамиды, но в ответ услышал: «Это может знать только бог Солнца, а не человек». Фалес повернулся к ним и сказал: «Сейчас я измерю высоту пирамиды». Он измерил длину своей тени. Она оказалась вдвое больше роста Фалеса. Из этого он сделал вывод, что в данный момент все предметы имеют тень вдвое больше, чем их собственная высота. Тогда он измерил длину тени пирамиды Хеопса. Тень пирамиды на рисунке 2 равна отрезку ОК на рисунке 1. Зная, что $TD = ON$, получим $OK = TD + NK$. Фалес с лёгкостью измерил эти расстояния, и нашёл, что высота пирамиды равна 145 м. Жрецы пришли в негодование и приказали Фалесу поскорее покинуть Египет.

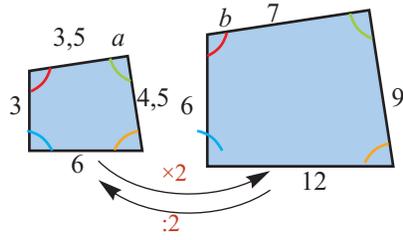
По рисунку высота пирамиды Хеопса равна 145 м. Проведите вычисления, чтобы проверить результат, полученный Фалесом.



Площади подобных фигур

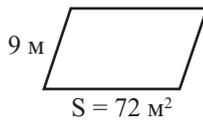
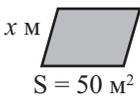
Площади подобных фигур

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Например, если отношение соответствующих сторон двух подобных четырёхугольников равно $a : b$, то отношение площадей равно $a^2 : b^2$.

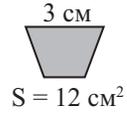
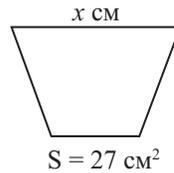


1 Используя подобие и свойство площадей подобных фигур, найдите масштаб (коэффициент подобия) закрашенной фигуры относительно незакрашенной и значение неизвестной x .

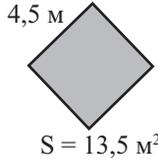
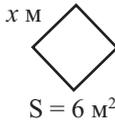
1)



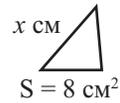
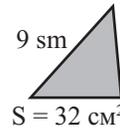
2)



3)



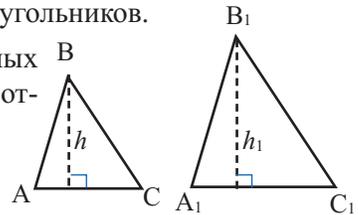
4)



2 Докажите теорему о площадях подобных треугольников.

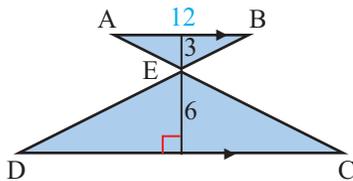
Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату отношения соответствующих сторон.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1 B_1 C_1}} = \left(\frac{AC}{A_1 C_1} \right)^2 = k^2$$

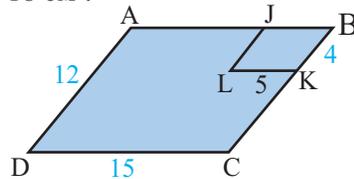


План для доказательства теоремы: отношение высот подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон.

3 1) Докажите, что треугольники DEC и BEA подобны и найдите их площади.



2) Докажите, что параллелограммы ABCD и JBKL подобны. Найдите площадь параллелограмма ABCD, если площадь параллелограмма JBKL равна 18 cm^2 .

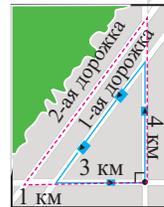


4 Гипотенуза прямоугольного треугольника ABC равна 8 см, а площадь 12 cm^2 . Найдите площадь треугольника DFE, подобного данному, если его гипотенуза равна 20 см.

Площади подобных фигур

- 5) Сторона зеркала прямоугольной формы равна 2,5 м и оно стоит 125 манатов. Сторона другого зеркала, имеющего подобную форму равна 3 м. Сколько стоит второе зеркало, если зеркала продаются по квадратным метрам?
- 6) Площади двух подобных треугольников равны 45 см^2 и 80 см^2 . Найдите периметр каждого треугольника, если сумма их периметров равна 35 см.
- 7) Стороны двух подобных параллелограммов относятся как 2:3. Найдите площадь меньшего параллелограмма, если площадь большего параллелограмма равна 54 см^2 .
- 8) Найдите отношение периметров двух подобных участков, имеющих форму прямоугольников, если площадь одного равна 540 м^2 , а площадь другого 135 м^2 .

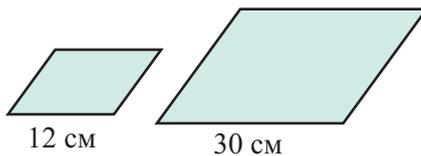
- 9) В парке создали велосипедные дорожки, как показано на рисунке. Эти пути образуют подобные прямоугольные треугольники.



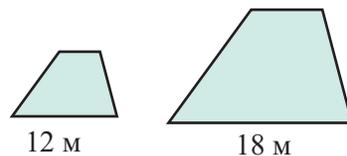
- Сколько километров пути Гусейн проехал по синей дорожке прямоугольного треугольника за один оборот?
- Если Гусейн переедет на вторую дорожку, показанную красной линией, то сколько километров пути он проедет?
- Во сколько раз площадь, ограниченная второй дорожкой, больше площади, ограниченной первой дорожкой?

- 10) Две фигуры на рисунке подобны друг другу. По данным рисунка найдите площадь одной из них, если:

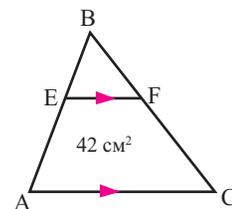
- 1) Площадь меньшего параллелограмма равна 60 см^2



- 2) Площадь большей трапеции равна 108 см^2



- 11) На рисунке $EF \parallel AC$, $3 \cdot BF = 2 \cdot FC$. Если площадь трапеции $A E F C$ 42 см^2 , то найдите площадь $\triangle ABC$.



- 12) Какие из слов *всегда*, *иногда*, *никогда* можно выбрать для высказывания «периметр ABC больше, чем периметр GHK », чтобы оно было верным?

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$
коэффициент подобия $\frac{3}{2}$

$\triangle DEF \sim \triangle GHK$
коэффициент подобия $\frac{4}{3}$

Обобщающие задания

1) В каком случае о подобии двух треугольников можно сказать *всегда*, *иногда*, *никогда*:

- два равнобедренных треугольника;
- два равносторонних треугольника;
- остроугольный и тупоугольный треугольник?

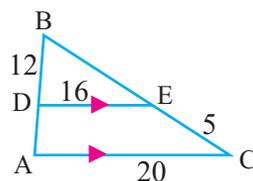
2) Для каждого случая определите, какие два высказывания отрицают друг друга.

- 1) $\triangle ABC$ -равнобедренный
- 2) $\triangle ABC$ -тупоугольный
- 3) в $\triangle ABC$ все углы разные

- 1) $\angle 1 \cong \angle 2$
- 2) $\angle 1$ прямой, $\angle 2$ острый
- 3) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

3) По рисунку найдите:

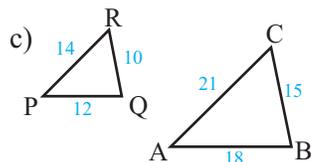
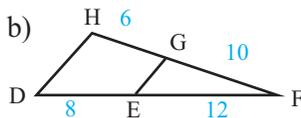
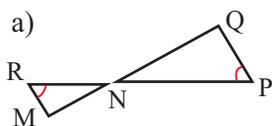
- Периметры $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$.
- Коэффициент подобия.
- Периметр трапеции $ADEC$.



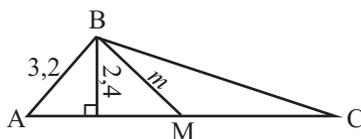
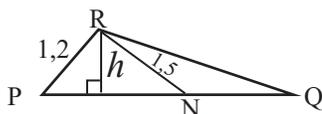
4) Периметр одного из подобных треугольников составляет $\frac{2}{3}$ другого. Зная, что разность длин соответствующих сторон равна 5 см, найдите длины этих сторон треугольников.

5) Длина тени дерева равна 2,8 м. В этот же момент тень человека, рост которого равен 1,8 м, достигает 1,2 м. Найдите высоту дерева, используя подобие треугольников.

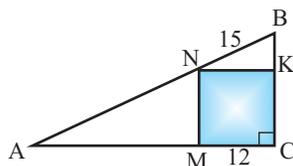
6) Какие из треугольников подобны? Обоснуйте, согласно каким признакам данные треугольники можно назвать подобными?



7) $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$, а точки M и N соответственно являются серединами сторон AC и PQ. Найдите h и m .

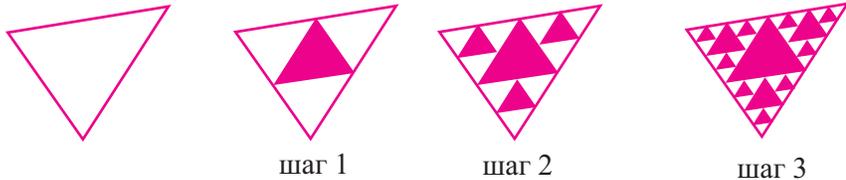


8) По данным рисунка найдите периметр $\triangle ABC$. $MNKC$ -квадрат.

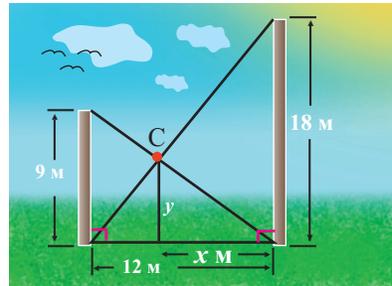


Обобщающие задания

- 9) Дизайн треугольников на рисунке основан на использовании средней линии. Приняв периметр начального треугольника за единицу, найдите периметры закрашенных треугольников на а) 1-ом шаге; б) 2-ом шаге; в) 3-ем шаге.

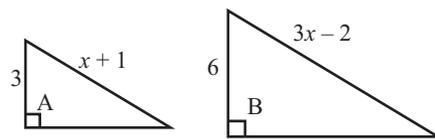


- 10) Конструкция на рисунке состоит из двух столбов, которые вкопаны перпендикулярно в землю. Снизу и сверху они соединены через муфту металлическими проводами. Муфта расположена в точке C . Длина одного столба 9 м, а другого 18 м. Расстояние между столбами 12 м.

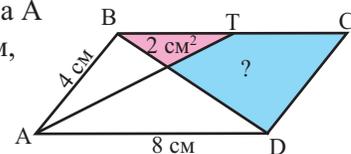


- 1) Найдите расстояние от муфты до большого столба.
- 2) На каком расстоянии от земли расположена муфта?
- 3) Длину провода от муфты до самой нижней точки большого столба.
- 4) Длину провода от муфты до верхней точки маленького столба.

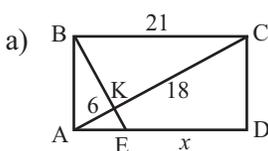
- 11) Зная, что треугольники на рисунке подобны, найдите периметр и площадь каждого треугольника.



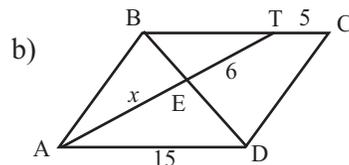
- 12) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке T . $AB = 4$ см, $AD = 8$ см, площадь красной части 2 см². Найдите площадь синей части.



- 13) По данным рисунка найдите значения переменных.



ABCD прямоугольник



ABCD параллелограмм

- 14) Используя возможности интернет страницы <http://www.mathopenref.com>, выполните различные геометрические задачи на вычисление и построение.

9

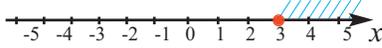
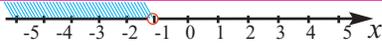
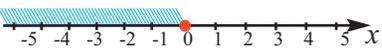
Неравенства

В этом разделе вы научитесь:

- решать неравенства;
- решать задачи из реальной жизни при помощи неравенств.

Неравенства

Неравенства записываются при помощи знаков $>$, $<$, \geq , \leq . Неравенства могут быть записаны словами или математическими символами, а также изображены на числовой оси.

Все действительные числа больше -2	$x > -2$	
Все действительные числа больше или равно 3	$x \geq 3$	
Все действительные числа меньше -1	$x < -1$	
Все действительные числа меньше или равно 0	$x \leq 0$	

● если точка закрашена, то координаты этой точки удовлетворяют неравенству.

○ если точка не закрашена, то координаты этой точки не удовлетворяют неравенству

Для сравнения чисел и выражений применяются различные методы. Одним из них является метод оценки разности.

● если разность $a - b$ положительна, то число a больше числа b ; $a - b > 0$; $a > b$

● если разность $a - b$ отрицательна, то число a меньше числа b ; $a - b < 0$; $a < b$

● если разность $a - b$ равна нулю, то число a равно числу b ; $a - b = 0$; $a = b$

● если разность $a - b$ не отрицательна, то число a не меньше числа b ;

$a - b \geq 0$; $a \geq b$

● если разность $a - b$ не положительна, то число a не больше числа b ;

$a - b \leq 0$; $a \leq b$

На числовой оси большему числу соответствует точка, расположенная правее, а меньшему числу соответствует точка, расположенная левее.

Значит, если $a > b$, то точка a расположена правее точки b , если $a < b$, то - левее.

Пример. Сравним выражения $a^2 + 1$ и $2a$. Для этого рассмотрим разность $a^2 + 1 - 2a = (a - 1)^2 \geq 0$. Значит, при любых значениях переменной значение выражения $a^2 + 1$ не меньше (больше или равно) значения выражения $2a$.

Неравенства

Обучающие задания

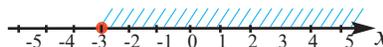
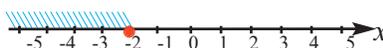
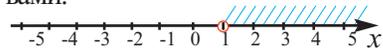
- 1) На выполнение домашнего задания Самир тратит меньше двух часов. Эльчин и Улькер представили это в виде следующих выражений. Какая из записей соответствует истине?

Эльчин  $t \geq 2$

Улькер  $t < 2$

- 2) Следующие высказывания запишите в виде неравенства.
- 1) Совершать прогулки верхом на лошади на высоте более 1500 м над уровнем моря не рекомендуется по медицинским показаниям.
 - 2) Для получения 10%-ой скидки в магазине надо сделать покупку на сумму не менее 1000 манатов.
 - 3) При выезде за границу каждый человек может взять с собой сумму до 10000 манатов без уплаты налога.
 - 4) Детям в возрасте меньше 7 лет вход в кинотеатр без сопровождения родителей запрещён.

- 3) Изображения на числовой оси представьте в виде неравенств и опишите словами.



Свойства неравенств

- 1) Если $a > b$, то $b < a$
- 2) Если $a < b$, то $b > a$
- 3) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$
- 4) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$

Доказательство 3-го свойства: если $a > b$, то $a - b > 0$; если $b > c$, то $b - c > 0$. Тогда $a - c = (a - b) + (b - c) > 0$, отсюда следует, что $a > c$.

если оба слагаемых положительны, то сумма также положительна

- 4) Запишите неравенства так, чтобы переменная находилась в левой части.
- a) $19 > x$
 - b) $-10 < a$
 - c) $-10 > b$
 - d) $0 < t$

- 5) Запишите реальные жизненные ситуации, соответствующие неравенствам.
- a) $x \geq 15$
 - b) $x < 11$
 - c) $x \geq 0$
 - d) $x > 100$

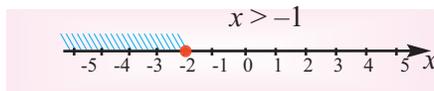
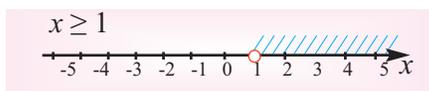
- 6) Изобразите неравенства на числовой оси.
- 1) $a > 4$
 - 2) $x > 6$
 - 3) $n < 11$
 - 4) $x < 5$
 - 5) $t \geq 9$
 - 6) $b \geq 8$
 - 7) $d \leq 5$
 - 8) $z \leq 8$
 - 9) $x > -4$
 - 10) $n \geq -3$
 - 11) $x \leq -5$
 - 12) $x < -2$

- 7) Проверьте, выполняется ли неравенство при заданных значениях переменных. Задайте ещё два значения переменных и проверьте их.
- 1) $18 - x > 4$, $x = 12$
 - 2) $14 + n < 23$, $n = 8$
 - 3) $5k > 35$, $k = 8$
 - 4) $16 \leq 3c$, $c = 8$
 - 5) $\frac{x}{3} \geq 2$, $x = 9$
 - 6) $\frac{14}{c} \leq 7$, $c = 2$

Неравенства

- 8) Сравните числа c и d , если разность $c - d$ равна: -3 ; 4 ; 0 .
- 9) Сравните числа m и n , если: а) $m - n = 0,1$; б) $m - n = -1,2$; в) $m - n = 0$.
- 10) Если известно, что $a > b$, то может ли разность $a - b$ быть равной: $-4,3$; 0 ; $5,2$?
- 11) Определите, какие из следующих утверждений истинны при $x > 2$.
а) разность $x - 2$ положительное число;
б) разность $x - 4$ положительное число;
в) разность $x - 1$ положительное число;
г) разность $2 - x$ положительное число.

- 12) Укажите ошибки на следующих рисунках?



- 13) Отметьте на числовой оси несколько точек, которые удовлетворяют неравенствам:
а) $x > 2$; б) $x < 5$; в) $x > -1$; г) $x < 0$.

Прикладные задания

- 14) Найдите наименьшее целое значение, удовлетворяющее неравенству.
а) $x > 10$ б) $x \geq 7$ в) $x > -8$ г) $x \geq -3$
- 15) Найдите наибольшее целое значение, удовлетворяющее неравенству.
а) $x < 9$ б) $x \leq 8,2$ в) $x < -4,1$ г) $x \leq -3$
- 16) Сравните значения выражений $b(b + 1)$ и $(b + 2) \cdot (b - 3)$ при $b = -4$; $b = -3$; $b = 2$. Можно ли утверждать, что при любых значениях b значение первого выражения больше значения второго выражения?
- 17) Докажите, что при любых значениях переменных:
а) значение выражения $a^2 - 4a$ больше значения выражения $2a - 10$;
б) значение выражения $(2a + 3)(2a + 1)$ больше значения выражения $4a(a + 2)$;
в) значение выражения $7c - 1$ меньше значения выражения $c(c + 7)$.
- 18) Докажите неравенство.
а) $c^2 + 1 \geq 2c$ б) $a(a + 3) \geq 3a$
в) $d^2 - cd + c^2 \geq cd$ г) $a(a - b) \geq b(a - b)$

Свойства неравенств



Исследование

Рассмотрим неравенство $x + 3 < 10$

x	-1,75	0	6,99	7	7,01	7,1
$x + 3$	1,25	3	9,99	10	10,01	10,1
$x + 3 < 10$	$1,25 < 10$	$3 < 10$	$9,99 < 10$	$10 < 10$	$10,01 < 10$	$10,01 < 10$
Является ли решением?	Да	Да	Да	Нет	Нет	Нет

При значении переменной меньше 7, значение суммы $x + 3$ меньше 10.

При значении переменной равной 7, значение суммы $x + 3$ равно 10.

При значении переменной больше 7, значение суммы $x + 3$ больше 10.

Неравенство $x + 3 < 10$ верно для всех чисел меньше 7.

Свойства неравенств

Теорема. Если неравенство верное, то прибавив или отняв от обеих частей данного неравенства одно и то же число, получим верное неравенство.

Если $a > b$, то для любого числа c $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$;

Если $a < b$, то для любого числа c $a + c < b + c$ и $a - c < b - c$.

Обучающие задания

- 1 Удовлетворяет ли неравенству $x + 7 > 1$ значение переменной:
а) 6; б) -3; в) 1,5 д) 0; е) -7?
- 2 а) Сумма переменной y и числа 13 меньше 25. Какие значения может принимать переменная y ?
б) Сумма двух чисел больше 18. Какие значения может принимать одно из чисел, если другое число равно 7?
- 3 Зная, что $a > b$ сравните.
а) $a - 6$ и $b - 6$ б) $a + 12$ и $b + 12$
в) $a + m$ и $b + m$ д) $a - k$ и $b - k$
- 4 Используя свойства неравенств, найдите возможные значения переменных.

Пример. К обеим частям неравенства $5 + x \leq 18$ прибавим -5 , тогда получим $5 + x + (-5) \leq 18 + (-5)$, $x \leq 13$, т.е. переменная принимает значения не больше 13.

$5 + x \leq 18$	$10 + n \geq -2$	$-4 < k + 6$
$3 < y + 8$	$c + 10 < 9$	$g - 4 \geq 13$
$-2 < b - 6$	$s - 12 \leq -5$	$t - 3 < -9$
$-10 \geq x + 6$	$a - 3 \leq 5$	$-11 > g - 4$
$2 + m \geq 3,5$	$q + 0,8 \leq -0,5$	$v - 6 > 2,7$
$p - 4,8 > -6$	$d - \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}$	$5 > f + \frac{2}{3}$

Свойства неравенств

Прикладные задания

Пример

Масса морского тюленя может достигать максимально 650 кг. В настоящее время тюлень весит 398 кг. Как при помощи неравенства можно записать массу, которую ещё сможет набрать тюлень?



Масса тюленя на настоящий момент	плюс	масса, которую он сможет набрать	меньше или равно	650 кг
398	+	t	\leq	650

$$398 + t \leq 650 \quad \text{Запишем неравенство}$$

$$398 - 398 + t \leq 650 - 398 \quad \text{Вычтем с обеих сторон 398}$$

$$t \leq 252$$

5) Если Рашад запишет ещё 21 песню в музыкальный MP3 центр, то их наибольшее количество станет равным 90. Запишите в виде неравенства, сколько песен было в MP3 центре вначале?

6) Эмин поставил перед собой цель: поднять вес как минимум 90 кг. Сейчас он поднимает гири весом в 50 кг. Запишите в виде неравенства, сколько килограмм должен ещё поднять Эмин для достижения результата?

7) Изобразите на числовой оси, какие значения может принять переменная?

а) $y - (-1,8) > -6,2$ б) $-8 > n - \frac{2}{3}$ в) $a + \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

8) Запишите соответствующие неравенства.

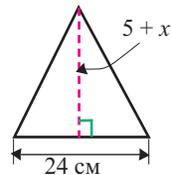
а) Если увеличить число (-8) на некоторое число, то получим значение меньше или равно 30.

б) Какое число при уменьшении на 8 будет больше 25?

9) Зная, что $d + 5 \geq 18$, докончите запись следующих неравенств.

а) $d \geq ?$ б) $d + ? \geq 19$ в) $d - 2 \geq ?$

10) Основание треугольника меньше высоты. Какие значения может принимать переменная x ?



11) Составьте задачи, решениями которых могут быть следующие неравенства.

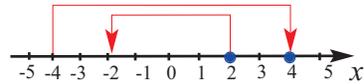
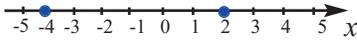
а) $x + 15 > 100$

б) $m - 40 \leq 2000$

в) $d + 3 \geq 12$

Свойства неравенств

Исследование. Отметьте на числовой оси заданные числа. Сравните их и сделайте соответствующую запись. Умножьте каждое из чисел на одно и то же число. Сравните полученные результаты. Например, умножьте каждое из чисел на -1 и изобразите на числовой оси новые значения, как показано на рисунке. Обобщите мнение и изобразите его графически.



Свойства неравенств

✓ Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство.

Для любых чисел a и b при $c > 0$ получим:

1. Если $a > b$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ **Пример 1.** $3 < 4$; $3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$; $6 < 8$

2. Если $a < b$, то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ **Пример 2.** $6 > -9$; $\frac{6}{3} > \frac{-9}{3}$; $2 > -3$

✓ Если обе части верного неравенства разделить или умножить на одно и то же отрицательное число и поменять знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Для любых чисел a и b при $c < 0$ получим:

1. Если $a > b$, то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ **Пример 3.** $5 > 1$; $5 \cdot (-2) < 1 \cdot (-2)$.
 $-10 < -2$

2. Если $a < b$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ **Пример 4.** $-8 < -6$; $\frac{-8}{-2} > \frac{-6}{-2}$; $4 > 3$

Обучающие задания

12 Известно, что $a > b$. Запишите верные неравенства, согласно следующим условиям:

- a) умножив обе части на 4; b) умножив обе части на -5 ;
c) разделив обе части на $\frac{1}{2}$; d) разделив обе части на -2 .

13 Запишите верные неравенства, которые получатся, если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же число.

Пример 1. Умножим обе части неравенства $\frac{3}{4}y \geq -6$ на $\frac{4}{3}$:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}y \geq -6 \cdot \frac{4}{3}; \quad y \geq -8$$

1) $4x < 4$

4) $-15 \leq 5b$

7) $\frac{p}{6} > 5$

10) $\frac{t}{9} < -12$

2) $7y > 63$

5) $7 \geq \frac{h}{14}$

8) $144 < 12d$

11) $30 > \frac{1}{2}n$

Пример 2. Разделим обе части неравенств $-4x < 12$ на -4 и изменим знак неравенства на противоположный:

$$\frac{-4x}{-4} > \frac{12}{-4}; \quad x > -3$$

3) $13a \geq -26$

6) $15 \geq 3t$

9) $-3m > -33$

12) $-\frac{3}{4}r \leq -6$

14 Определите знак переменной a в неравенствах.

a) $3a > 2a$

b) $4a < 3a$

c) $-2a < 2a$

d) $a > -a$

Свойства неравенств

Прикладные задания

- 15**» Запишите в виде неравенства. Какие значения может принимать переменная ?
- четырёхкратное число x больше 28.
 - произведение y и числа -2 не больше 14.
- 16**» Заработная плата Эльмира составляет 6 манатов в час. Сколько часов должен работать Эльмир, чтобы заработать 300 манатов или более?
- 17**» Для получения квартиры на льготных условиях в фирме было зарегистрировано больше 9 человек, что составляет $\frac{1}{9}$ всех сотрудников фирмы. Запишите в виде неравенства количество всех сотрудников фирмы.
- 18**» Известно, что $a < b$. Вставьте вместо \bullet знаки сравнения, чтобы неравенство стало верным.
- $3a \bullet 3b$
 - $0,1a \bullet 0,1b$
 - $-\frac{a}{3} \bullet -\frac{b}{3}$
 - $-4a \bullet -4b$
- 19**» Гюльназ за 1 минуту проплывает 40 м. Она решила, что сегодня должна проплыть не меньше 1200 м. Сколько минут как минимум должна проплыть Гюльназ?
- 20**» Какие значения может принимать переменная?
- $6 > -\frac{x}{7}$
 - $\frac{r}{-2} < -2$
 - $-\frac{y}{3} < -7$
 - $\frac{k}{-2} < 9$
 - $-6a > -78$
 - $-25t \leq 400$
 - $\frac{y}{4} \geq 2,4$
 - $\frac{n}{5} \leq 0,8$
 - $-3 \leq -\frac{c}{4,5}$
- 21**» а) Докажите, что если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
б) Для положительных чисел a, b, c, d известно, что $a > b, b > d$ и $c > a$.
Запишите числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ в порядке возрастания.
- 22**» Решите задачу, составив соответствующее условию неравенство:
- У Хиджран есть лента длиной 28 см. Она хочет разрезать ленту на части длиной по 3 см каждая так, чтобы оставшаяся часть была не меньше 15 см. На сколько частей можно разрезать ленту?
 - Если в онлайн (on-line) интернет магазине сделать покупку на сумму как минимум 25 манатов, то доставка осуществляется бесплатно. Какова минимальная цена одной книги, если Орхан купил 4 книги и при этом у него не взяли деньги за доставку ?

Свойства неравенств

23 **Исследование.** Каково наибольшее произведение двух натуральных чисел, сумма которых равна 10?

✓ Так как сумма двух положительных чисел остаётся постоянной, то их произведение принимает наибольшее значение, если эти числа равны друг другу (это высказывание иногда называют теоремой о постоянной сумме).

$m + n = 10$	$m \cdot n$
$1 + 9 = 10$	$1 \cdot 9 = 9$
$2 + 8 = 10$	$2 \cdot 8 = 16$
$3 + 7 = 10$	$3 \cdot 7 = 21$
$4 + 6 = 10$	$4 \cdot 6 = 24$
$5 + 5 = 10$	$5 \cdot 5 = 25$

На основании полученных результатов найдите следующее:

а) Наибольшее значение произведения двух натуральных чисел, если их сумма равна 16.

б) Среди всех прямоугольников с периметром 40 см прямоугольник с наибольшей площадью.

24 **Исследование: Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.**

Покажем, что для неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Здесь равенство возможно только при $a = b$.

Рассмотрим разность левой и правой части. Приведём её к общему знаменателю и упростим.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

Данное неравенство верно, т.к. квадрат разности двух чисел не может быть отрицательным числом. На основании исследования, найдите:

а) Прямоугольник с наименьшим периметром среди всех прямоугольников с площадью 36 см².

б) Наименьшее значение суммы $x + y$, если $xy = 16$ и $x > 0$.

с) Наименьшее значение выражения $c + \frac{1}{c}$ при $c > 0$.

25 1) Эльшан собирается покрыть керамической плиткой пол на кухне, имеющий размеры 3 м × 4 м. Площадь каждой плитки $\frac{3}{10}$ м². Какое наименьшее количество плиток потребуется для этого?

2) Эльмар работает менеджером в магазине по продаже электроники. Его постоянная зарплата составляет 500 манатов плюс премия в размере 30 манатов за каждый проданный компьютер. Эльмар уверен, что в этом месяце он получит минимум 800 манат. Какое наименьшее количество компьютеров он продал в этом месяце?

3) Составьте задачу, которая решается с помощью неравенства $\frac{3}{4}x > 9$.

26 а) Оцените периметр квадрата со стороной a , если $0,2 < a < 0,3$.

б) Оцените сторону квадрата с периметром P см, если $12,4 < P < 12,8$.

Сложение и умножение неравенств

4» Разберите следующие примеры. Аналогичным образом, выполните следующие задания.

1) Если $3 < x < 4$ и $6 < y < 8$, то оцените выражения:

а) $x - y$ б) $2x - y$ в) $x - 3y$ д) $3x - 2y$

2) Если $15 < x < 20$ и $2 < y < 3$, то оцените выражения.

а) $\frac{x}{y}$ б) $\frac{2x}{y}$ в) $1 + \frac{3x}{2y}$

Пример 1. Зная, что $5 < a < 10$ и $2 < b < 4$, оцените разность $a - b$.

Решение: Запишем следующее: $a - b = a + (-b)$.

Зная, что $2 < b < 4$, то $-2 > -b > -4$, т.е. $-4 < -b < -2$.

Теперь применим почленное сложение.

$$\begin{array}{r} +5 < a < 10 \\ -4 < -b < -2 \\ \hline 1 < a - b < 8 \end{array}$$

Пример 2. Зная, что $10 < x < 16$ и $4 < y < 5$, оцените $\frac{x}{y}$.

Решение: Запишем следующее: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ и оценим выражение $\frac{1}{y}$.

Если $4 < y < 5$, то $\frac{1}{4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$, т.е. $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

Применим теорему о почленном умножении

$$\begin{array}{r} 10 < x < 16 \\ \times \frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4} \\ \hline 2 < \frac{x}{y} < 4 \end{array}$$

Прикладные задания

5» Зная, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ и $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, оцените числа.

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ в) $\sqrt{6}$

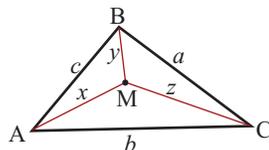
6» Длина основания равнобедренного треугольника a , длина боковой стороны b . Зная, что $16 \leq a \leq 18$ и $24 \leq b \leq 26$, оцените периметр треугольника.

7» При измерении длины прямоугольника a и ширины b (в см) было установлено, что $4,5 < a < 4,6$ и $3,4 < b < 3,5$. Оцените:

а) периметр прямоугольника;
б) площадь прямоугольника.

8» α и β углы треугольника. Зная, что $58^\circ \leq \alpha \leq 59^\circ$ и $82^\circ \leq \beta \leq 83^\circ$, оцените третий угол треугольника.

9» Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин меньше его полупериметра.

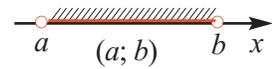


Числовые промежутки

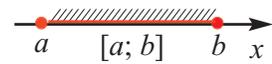
Исследование. Отметьте на числовой оси две точки с координатами -2 и 3 . Возьмите любую точку, расположенную между данными точками. Сравните число, соответствующее этой точке, с числами -2 и 3 . Проверьте, что любая точка, расположенная между данными, удовлетворяет условию $-2 < x < 3$. Множество этих точек называется промежутком от -2 до 3 и обозначается так: $(-2 ; 3)$.

Числовые промежутки

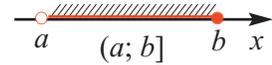
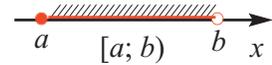
При $a < b$ множество всех действительных чисел, удовлетворяющих соотношению $a < x < b$, называется интервалом $(a; b)$.



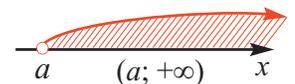
Если во множество точек интервала $(a; b)$ добавить точки a и b , то полученный промежуток будет называться отрезком $[a; b]$.



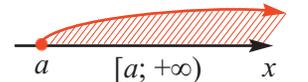
Множество всех чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству $a \leq x < b$ и $a < x \leq b$, соответственно записывается как $[a; b)$ и $(a; b]$.



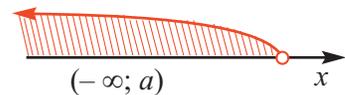
Множество всех точек, удовлетворяющих условию $x > a$ и расположенных справа от точки с координатой a , записывается как $(a; +\infty)$ и читается так: промежуток от a до плюс бесконечности.



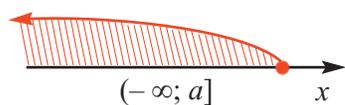
Если точка a принадлежит множеству чисел, удовлетворяющих условию $x \geq a$, то это записывается как $[a; +\infty)$ и графически изображается так:



Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $x < a$, записывается как $(-\infty; a)$ и графически изображается так:

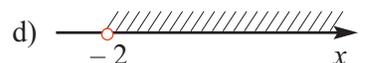
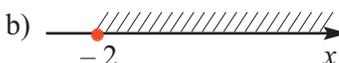
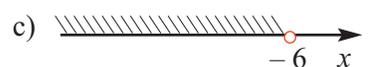
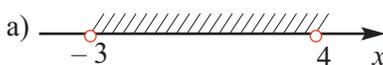


Если точка a принадлежит множеству чисел, удовлетворяющих условию $x \leq a$, то это записывается как $(-\infty; a]$ и графически изображается так:



Обучающие задания

1 Запишите промежутки, изображённые на рисунке.



Числовые промежутки

- 2** На числовой оси изобразите следующие числовые промежутки.
 а) $(-1; 3)$ б) $(0; 5)$ в) $(2; +\infty)$ д) $(3; +\infty)$
 е) $(-5; +\infty)$ ф) $(-\infty; -4)$ г) $(-\infty; 6)$ х) $(-2; +\infty)$
- 3** На числовой оси изобразите множество чисел, удовлетворяющих неравенству.
 а) $x \geq -6$ б) $x \leq 3$ в) $x < -6$ д) $x > 4$
- 4** На числовой оси изобразите множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству.
 а) $-2,5 \leq x \leq 3$ б) $-5 < x \leq 11$
 в) $-3 < x < 1,5$ д) $3 \leq x < 7$
- 5** а) Какие из чисел $-2; 4; -1,2; 4,5; 5$ принадлежат промежутку $(-3; 4,5)$?
 б) Принадлежат ли числа $-7; -6; -4,5; 0; 1,2; 4$ промежутку $(-7; 4,1)$?
- 6** Запишите все целые числа, принадлежащие данным промежуткам.
 а) $(-5; 3)$ б) $[-2,5; 4)$ в) $(-\sqrt{11}; \sqrt{30}]$
- 7** Покажите наибольшее и наименьшее целое число, принадлежащее промежутку.
 а) $(-12; 8)$ б) $(-4; 5,2)$ в) $[-\sqrt{17}; \sqrt{8}]$
- 8** Разберите пример и найдите пересечение следующих промежутков.
 а) $(-2; 5)$ и $(-1; 6)$ в) $(-3; 9)$ и $(4; +\infty)$
 б) $(5; +\infty)$ и $(-\infty; 7)$ д) $(1; +\infty)$ и $(3; +\infty)$

Пример. Найдём пересечение (общую часть) промежутков $(-1; 7)$ и $[2; 8)$

Изображение на числовой оси

Математическая запись: $(-1; 7) \cap [2; 8) = [2; 7)$

- 9** На числовой оси покажите объединение следующих промежутков.
 а) $(-5; 1)$ и $[-2; 5)$ в) $(-\infty; 2]$ и $[-1; +\infty)$
 б) $[-6; 2)$ и $(1; 3)$ д) $(2; +\infty)$ и $[6; +\infty)$

Пример. Найдём объединение промежутков $(-3; 4]$ и $[-2; 8]$.

Изображение на числовой оси

Математическая запись: $(-3; 4] \cup [-2; 8] = (-3; 8]$

- 10** Известно, что $A = [-2; 1)$, $B = (0; 3)$, $C = (-1; 2)$. Найдите следующее:
 а) $A \cup B$ б) $A \cap B$ в) $A \cup C$
 д) $A \cap C$ е) $A \setminus B$ ф) $B \setminus C$
 г) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$ х) $A \setminus (B \cup C)$

Решение линейных неравенств с одной переменной

Исследование. Начертите прямоугольник, ширина которого 4 см.

- 1) Найдите периметр прямоугольника, если его длина 6 см.
- 2) Оцените периметр, если длина прямоугольника больше 6 см.
- 3) Чему должна равняться длина прямоугольника, чтобы его периметр был меньше 24 см?

Обозначим длину прямоугольника через x . Тогда его периметр можно записать в виде неравенства $2x + 8 < 24$. Проверьте, удовлетворяют ли длины 6 см; 7 см 8 см; 9 см условию $P < 24$. При каких значениях переменной верно неравенство? При каких значениях переменной неравенство неверно?

Решение линейных неравенств с одной переменной

Определение. Решением линейного неравенства с одной переменной называется множество всех значений переменной, превращающих данное неравенство в верное.

Решить неравенство, значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Неравенства, имеющие одинаковые множества решений, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также называются равносильными. При решении неравенств используются следующие следствия, полученные из свойств числовых неравенств:

- ✓ 1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
- ✓ 2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство. Например, неравенство $6x - 2 > 10$ равносильно неравенству $6x > 12$, а неравенство $6x > 12$ равносильно неравенству $x > 2$.
- ✓ 3) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$ (где a и b некоторые числа) называются линейными неравенствами, зависящими от одной переменной.

Решение неравенства $ax > b$

1) Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$;

2) Если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$.

Решение неравенства $ax < b$

1) Если $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$;

2) Если $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$.

Пример: $-3x + 6 > 18$

$$-3x > 18 - 6$$

$$-3x > 12 \quad \text{разделим обе части на } -3$$

$$x < -4 \text{ решением неравенства является промежуток } (-\infty; -4).$$

Изображение на числовой оси:



Решение линейных неравенств с одной переменной

Обучающие задания

- 1) Решите неравенства и изобразите множество решений на числовой оси
а) $x - 7 > 0$ б) $x + 6 < 0$ в) $x + 1,5 \geq 0$ д) $x - 0,6 \leq 0$

- 2) Решите неравенства.
а) $2x > 11$ б) $6x < 18$ в) $\frac{1}{2}y > -3$
д) $-2y \leq 15$ е) $5x \geq 0$ ф) $-4\frac{1}{2}x \leq -3$

- 3) Решите неравенства.
а) $6x - 3,2 > 0,4$ б) $15 - x < 12 - 4x$ в) $3 - 4y > 7$
д) $29 + 5x \leq 17 - 7x$ ф) $3 - 4a \leq 1$ е) $3 + 5y \geq 15 + 8y$

- 4) а) при каких значениях x двучлен $2x - 7$ принимает положительные значения?
б) при каких значениях y двучлен $15 - 3y$ принимает отрицательные значения?
в) при каких значениях x двучлен $3x + 1$ принимает значения меньше 25?

- 5) Решите неравенства.
а) $5(x - 2) + 12 > 7 - 3(x + 4)$ в) $4(x - 1,5) + 1 \geq 6x + 1,2$
б) $3(a + 8) - 5(a - 1) < 7$ д) $4x - (x + 6) - 3(2 - x) \leq 4$

- 6) Решите неравенства.
а) $0,3(x - 2) - 0,8x > -4,4$ в) $\frac{2x - 1}{3} < 5$ е) $\frac{2}{7}(x - 4) > 3$
б) $\frac{15 - 3x}{12} \geq 5$ д) $3 > \frac{6 - x}{4}$ ф) $\frac{7 - 2x}{2} \geq \frac{3x - 7}{4}$

- 7) Решите неравенства.
а) $x(x - 3) > x^2 - 6x + 1,2$ в) $6x(x - 1) - 3x(2x - 2) > 6$
б) $3y^2 - y(3y - 4) \leq 16$ д) $(3y - 1)^2 > (y + 3)(9y - 1)$

- 8) Лейла должна ввести в память компьютера 56 фотографий при помощи сканера. За одну минуту она сканирует 4 фотографии. Сколько минут должна работать Лейла, чтобы у неё осталось меньше 10 фотографий?

- 9) У Наримана есть подарочный чек на сумму 50 манат, из которых он уже успел потратить 15 манатов. Чтобы не просрочить чек, он решил на оставшуюся часть денег приобрести забавные очки, цена которых 2,55 манатов. Сколько пар очков он сможет приобрести?

Решение линейных неравенств с одной переменной

Прикладные задания

10» При каких значениях переменной: а) значение дроби $\frac{5-7y}{3}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{2-3y}{6}$?

б) Значение двучлена $3x-1$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{2x+1}{2}$?

11» Решите неравенства.

а) $(3-\pi) \cdot (3-2x) > 0$

б) $(\sqrt{2}-3) \cdot (5-x) < 0$

с) $\frac{x-4}{\pi-2} \geq 0$

д) $\frac{x+1}{\sqrt{3}-2} \leq 0$

12» а) При каком значении y сумма дробей $\frac{2y-1}{3}$ и $\frac{y+1}{3}$ положительна?

б) При каком значении x разность дробей $\frac{2x-1}{2}$ и $\frac{1+x}{3}$ отрицательна?

13» а) Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $3-(5-2x) < 6$.

б) Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $4(3-y) < 14,6-2y$.

14» При каких значениях n :

а) разность $(3-2n)-(5n-26)$ положительна?

б) сумма $(-18,3+3n)+(7,3+2n)$ отрицательна?

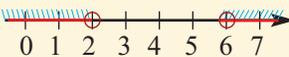
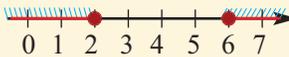
15» Сумма трёх последовательных нечётных чисел больше 105. Найдите наименьшее число.

16» Длина прямоугольника 8 см. Каким должна быть ширина прямоугольника, чтобы его периметр был меньше периметра квадрата со стороной 7 см?

17» Туристы плыли на моторной лодке по течению реки. При этом они должны возвратиться в лагерь не позже, чем через 3 часа. На какое наибольшее расстояние смогут удалиться от лагеря туристы, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч?

18» Из двух пунктов, расстояние между которыми 45 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость одного из них 12 км/ч. Найдите с какой скоростью должен двигаться другой велосипедист, чтобы они встретились меньше, чем через 2 часа?

Решение двойных неравенств

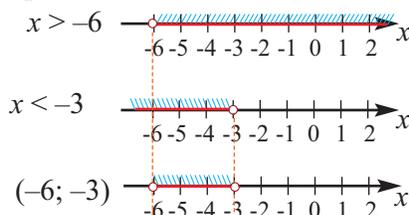
Двойные неравенства		
Словесная запись Все действительные числа больше 2 и меньше 5	Мат. запись $x > 2$ и $x < 5$ $2 < x < 5$	Изобр. на числ. оси: 
Все действительные числа не меньше 2 и не больше 5	$x \geq 2$ и $x \leq 5$ $2 \leq x \leq 5$	
Все действительные числа меньше 2 или больше 6	$x < 2$ или $x > 6$	
Все действительные числа не больше 2 или не меньше 6	$x \leq 2$ или $x \geq 6$	

Пример 1. Запишем неравенство $-2 < x + 4 < 1$ в виде двух неравенств
 $-2 < x + 4$ и $x + 4 < 1$

Надо найти такие значения x , которые будут удовлетворять неравенствам $-2 < x + 4$ и $x + 4 < 1$.

$$\begin{aligned}
 & -2 < x + 4 \text{ и } x + 4 < 1 \\
 & \color{red}{-4} \quad \color{red}{-4} \quad \color{red}{-4} \quad \color{red}{-4} \\
 & -6 < x \text{ и } x < -3 \\
 & x > -6 \text{ и } x < -3 \\
 & \quad -6 < x < -3 \\
 & \text{Ответ: } (-6; -3)
 \end{aligned}$$

Изображение на числовой оси:



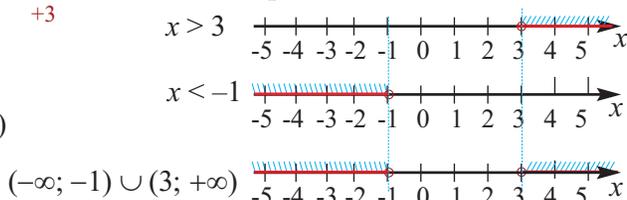
Пример 2. $-3 + x > 0$ или $-3 + x < -4$

Надо найти такие значения x , которые будут удовлетворять неравенствам $-3 + x > 0$ или $-3 + x < -4$.

Решаем каждое неравенство и находим объединение множеств.

$$\begin{aligned}
 & -3 + x > 0 \text{ или } -3 + x < -4 \\
 & \color{red}{+3} \quad \color{red}{+3} \quad \color{red}{+3} \quad \color{red}{+3} \\
 & x > 3 \text{ или } x < -1 \\
 & \text{Ответ:} \\
 & (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)
 \end{aligned}$$

Изображение на числовой оси:



Пример 3. Двойное неравенство $-7 < 2x + 1 \leq 17$ можно решить, используя свойства неравенств.

$$\begin{aligned}
 & -7 < 2x + 1 \leq 17 \quad \color{blue}{\text{Вычтем } 1} \\
 & \color{red}{-1} \quad \color{red}{-1} \quad \color{red}{-1} \\
 & -8 < 2x \leq 16 \quad \color{blue}{\text{Разделим на } 2} \\
 & -4 < x \leq 8 \quad \text{Ответ: } (-4; 8]
 \end{aligned}$$

Решение двойных неравенств

Обучающие задания

1) Решите неравенство и изобразите решение на числовой оси.

1) $x > 5$ и $x \leq 9$

2) $s < -7$ и $s \leq 0$

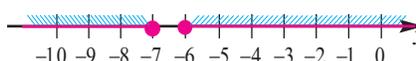
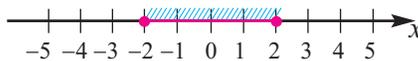
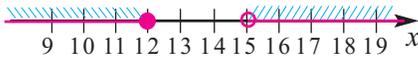
3) $r < 5$ или $r > 9$

4) $m \leq -4$ или $m > 6$

5) $7 < d < 11$

6) $-1 \leq g < 3$

2) Составьте неравенства по рисункам.



3) Решите неравенства и изобразите решение на числовой оси.

1) $k - 4 > 3$ или $k - 4 \leq 1$

2) $d - 10 < -2$ или $d + 3 > 12$

3) $3 < 2x - 3 < 15$

4) $4 < 2y - 2 < 10$

5) $3t - 7 \geq 5$ и $2t + 6 \leq 12$

6) $8 > 5 - 3n$ и $5 - 3n > -13$

7) $1 + y \leq 3$ или $1 - y \leq -4$

8) $3t + 1 \leq 13$ или $3 - 3t \leq -12$

4) Запишите неравенства по высказываниям.

1) Разность числа и числа 5 меньше 14 и больше 5.

2) Сумма удвоенного произведения числа и числа 3 расположена между числами -8 и 12 .

3) Пятикратное значение величины или больше 30, или меньше 10.

Прикладные задания

5) Составьте неравенства, соответствующие ситуациям.

а) Среднее количество осадков за год в некоторых районах Азербайджана достигает 300 мм или менее, а в других - более 7000 мм.

б) Капитан, управляющий самолётом на высоте 9000 м, информировал центр управления полётами о том, что для избежания воздушного вихря, он должен либо увеличить высоту до 10000 м, либо снизить до 7000 м.

6) Вода может находиться в трёх состояниях: кристаллическом, жидком или газообразном. Она замерзает при температуре ниже 0°C , а при увеличении температуры выше 100°C вода превращается в пар. Запишите неравенство, которое выражает температуру воды, не находящейся в состоянии жидкости.

7) Запишите, чем отличаются неравенства $x < 5$ и $x > 3$ от неравенств $x < 5$ или $x > 3$.

Решение двойных неравенств

8) На банковском счету Фармана имеется 100 манатов. Банк ежемесячно начисляет дополнительно 1,5 манатов. У Гюльназ на счету - 105 манатов, и банк ежемесячно начисляет дополнительно 1,2 манатов. Через сколько месяцев сумма вклада Фармана станет больше суммы вклада Гюльназ?

9) Решите неравенства.

a) $-2 \leq x + 3 < 9$

d) $m + 2 < -1$ или $m - 2 > 6$

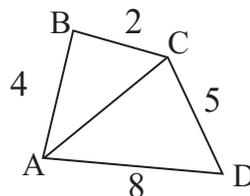
b) $-3 \geq x - 1$ и $x - 5 > 2$

e) $-2 > r + 2$ или $r + 4 < 5$

c) $-2x > -8$ и $x + 7 \geq 6$

f) $5 > y + 9$ или $y - 4 > 2$

10) Какие целые значения может принимать диагональ AC в четырёхугольнике ABCD с заданными сторонами?



11) Решите двойное неравенство и запишите три числа, являющиеся решением данного неравенства.

a) $-7,5 \leq \frac{7x+6}{2} \leq 20,5$

b) $-2 \leq \frac{3x+1}{7} \leq 0$

c) $-1 < \frac{3-x}{3} < 5$

d) $-3,5 \leq \frac{1-3x}{2} \leq 2,5$

12) Магомед надеется набрать по результатам двух тестов в среднем не меньше 93 балла. За первый тест он набрал 90 баллов. Сколько баллов ему надо набрать за второй тест для достижения цели (максимальный балл за тест равен 100).

13) Аслан по результатам двух тестов набрал 81 и 90 баллов соответственно. Если он должен набрать в среднем от 85 до 95 баллов, то сколько баллов он должен набрать за третий тест. Составьте и решите неравенство (максимальный балл за тест равен 100).

Творческое применение

14) Чувство обоняния у собак в 1000 раз сильнее, чем у человека, а способность видеть намного меньше, чем у людей.

Информация о слуховой способности человека и собаки представлена в виде таблицы. Звуковые волны оцениваются частотой и измеряются в герцах.

1) Запишите двойные неравенства, выражающие интервал частоты слуха у человека и собаки.

2) В каком интервале эти частоты совпадают?

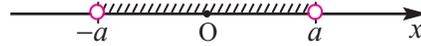
3) Запишите интервал частот, где собака слышит, а человек - нет.



	Частота в герцах
Человек	20-20000
Собака	15-50000

Простые неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

При $a > 0$ неравенство $|x| < a$ геометрически выражает расстояние от точки 0 до точек x , при котором это расстояние будет меньше a . Оно состоит из множества точек x , размещённых на интервале $(-a; a)$.



Поэтому неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$. Аналогично, неравенство $|x| \leq a$ равносильно двойному неравенству $-a \leq x \leq a$.

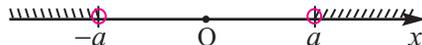
Пример. Изобразите на числовой оси и запишите промежуток, являющийся решением неравенства $|x| < 3$.



Решение: изображение на числовой оси.

$-3 < x < 3$ **Ответ:** $(-3; 3)$

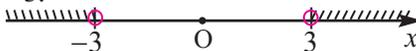
При $a > 0$ неравенство $|x| > a$ геометрически выражает расстояние от точки 0 до точек x , при котором это расстояние будет больше a . Для любого x , взятого из промежутков $(-\infty; -a)$ или $(a; +\infty)$, расстояние от начала отсчета до точки x больше a . Поэтому множеством решений неравенства $|x| > a$ является $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$, т.е. объединение промежутков, удовлетворяющих неравенствам $x < -a$ или $x > a$.



Множество решений неравенства $|x| \geq a$ будет $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$.

Пример. Решите неравенство $|x| > 3$.

Решение: изображение на числовой оси



$x < -3$ или $x > 3$ **Ответ:** $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Обучающие задания

1) Какие из чисел $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$ являются решением неравенства?

- a) $|x| < 2$ b) $|x| > 1$ c) $|x| \leq 3$ d) $|x| > 4$

2) Решите неравенства.

- a) $|x| < 4$ b) $|x| \leq 2$ c) $|x| < -1$ d) $|x| < 5$
 e) $|x| > 4$ f) $|x| > 2$ g) $|x| > -1$ h) $|x| > 0$

3) Решите неравенства по образцу

- a) $|x - 5| < 1$ b) $|x + 1| < 3$ c) $|2x - 1| \leq 7$
 d) $|3x + 2| < 8$ e) $|7x - 2| \leq 5$ f) $|3x - 1| < 8$

Пример. Решим неравенство $|2x - 3| < 7$..

$$\begin{aligned} -7 < 2x - 3 < 7 & \text{ Прибавим } 3 \\ -4 < 2x < 10 & \text{ Разделим на } 2 \\ -2 < x < 5 \end{aligned}$$

Изображение на числовой оси:

Ответ : $(-2; 5)$



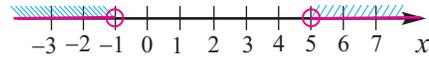
Простые неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

4» Решите неравенства по образцу.

- a) $|x - 2| > 2$ б) $|x - 1| > 3$ в) $|2x - 5| \geq 3$
 д) $|2x + 1| > 5$ е) $|7x - 2| \geq 5$ ф) $|3x - 1| > 8$

Пример. Решим неравенство $|x - 2| > 3$. Это неравенство верно в том случае, если верны неравенства $x - 2 < -3$ или $x - 2 > 3$. Из первого неравенства получаем $x < -1$, а из второго $x > 5$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$



5» По стандарту масса риса в мешке должна составлять 450 г. На мешке указана информация $450 \text{ г} \pm 14 \text{ г}$. В каком интервале находится масса риса в действительности?

Пример решения задачи

Словесная запись:

Стандарт 450 г

В действительности x

Абсолютная погрешность 14

$$\left| \begin{array}{l} \text{масса по} \\ \text{стандарту} \end{array} - \begin{array}{l} \text{действительная} \\ \text{масса} \end{array} \right| \leq \begin{array}{l} \text{абсолютная} \\ \text{погрешность} \end{array}$$

Математическая запись:

$$|x - 450| \leq 14$$

$$-14 \leq x - 450 \leq 14$$

$$436 \leq x \leq 464$$

6» Уровень кислотности воды в плавательном бассейне рекомендуется сохранять в пределах рН 7,5. Этот показатель может колебаться в пределах 0,3 рН. Запишите соответствующее неравенство.

7» Абонентская плата в центре здоровья составляет 25 манатов. Однако она может увеличиваться или уменьшаться до 5-ти манатов в соответствии с количеством выбранных услуг. Запишите изменение цены в виде неравенства с модулем.

8» Решите неравенства.

- 1) $\left| \frac{2p - 8}{4} \right| \geq 9$ 2) $\left| \frac{7c + 3}{2} \right| \leq -5$ 3) $\left| \frac{2g + 3}{2} \right| > -7$
 4) $|-6r - 4| < 8$ 5) $|-3p - 7| > 5$ 6) $|-h + 1,5| < 3$

9» При каких значениях a решением неравенства является множество действительных чисел R ?

a) $|x + 1| \geq a - 2$

b) $|x - 3| > a + 1$

10» Запишите выражения в виде двойных неравенств и решите их.

- a) $|x + 8| < 5$ б) $|9 - x| > 21$ в) $|10 - 3x| \geq 17$
 д) $|11 - 2x| \geq 13$ е) $|x + 5| \leq 9$ ф) $|14x + 10| < 18$

11» Устройство контроля скорости зафиксировало, что скорость автомобиля, движущегося со скоростью 55 км/ч изменяется с погрешностью 3 км/ч. Запишите соответствующее неравенство.

12» Какие из следующих неравенств имеют решения, а какие нет? Представьте решения на числовой оси.

- a) $|m + 4| < -2$ б) $|-2c - 3| > -4$ в) $|-h + 1,5| < 3$

Обобщающие задания

- 1» Фирма А предоставляет автомобили на прокат по цене 4 маната за день и 0,25 манатов за каждый километр. Фирма В - по цене 25 манатов за день и 0,15 манатов за каждый километр. Сколько километров в день должен проехать клиент, чтобы предложение фирмы А было выгоднее, чем предложение фирмы В?

Фирма А	<	Фирма В
плата за день + плата за 1 км× пройденный путь		плата за день + плата за 1 км× пройденный путь
$4 + 0,25x < 25 + 0,15x$		Если за день пройденное расстояние будет меньше 210 км, то выгоднее предложение фирмы А.
$0,25x - 0,15x < 25 - 4$		Проверим: например, при $x = 200$ км,
$0,1x < 21$		Фирма А: $4 + 0,25 \cdot 200 = 54$,
$\frac{0,1x}{0,1} < \frac{21}{0,1}$		Фирма В: $25 + 0,15 \cdot 200 = 55$
$x < 210$		$54 < 55$.

- 2» Фирма планирует покупку новых принтеров. Цена принтера А составляет 85 манатов, и для печати одного экземпляра расходуется 0,05 манатов. Цена принтера В - 215 манатов, и для печати одного экземпляра расходуется 0,01 манат. При каких условиях выгоднее купить принтер В?

- 3» Специалист по медицинской экспертизе может приблизительно определить рост человека, измеряя его кости. Рост молодой девушки можно приблизительно вычислить по длине бедренной кости, используя неравенство $|h - (2,47f + 54,10)| \leq 3,72$, рост юноши можно приблизительно вычислить, зная длину лучевой кости, используя неравенство $|h - (3,32r + 85,43)| \leq 4,57$. Здесь f - длина бедренной кости (Femur), r - длина лучевой кости (Radius), h - рост.



- а) В каком интервале может находиться значение роста девушки, если длина бедренной кости равна 30,25 см?
 б) Подумайте, в каком интервале находится значение роста молодого человека, длина лучевой кости которого равна 25,45 см?

- 4» Между единицами измерения температуры по Фаренгейту и Цельсию существует следующая зависимость: $F = \frac{9}{5} C + 32$. Если температура в течение дня изменилась с 65° до 115° по Фаренгейту (65° и 115° включительно), то выразите изменение температуры по Цельсию.

- 5» Решите неравенства.

- а) $|x - 3| < 2$ б) $|x + 1| < 5$ с) $|y - 5| \leq 1$
 д) $|2x - 3| \leq 7$ е) $|7x + 5| < 16$ ф) $|4x + 1| < 5$

Обобщающие задания

6» При каких значениях a неравенства не имеют решения? Покажите какое-либо значение a , при котором неравенство будет иметь решение и найдите это решение.

а) $|x - 2| < a - 1$

б) $|x + 3| \leq a + 1$

7» Найдите произведение наибольшего и наименьшего целых решений неравенства $|3 - 2x| < 5$.

8» Сумма трёх последовательных целых чисел находится между числами 63 и 81. Запишите множество чисел, удовлетворяющих данному условию.

9» Длина листа бумаги прямоугольной формы в 2 раза больше ширины. После того, как с каждой стороны листа отрезали 1 см, периметр листа стал иметь максимальную длину 1 м. Найдите наибольшие размеры, нового прямоугольника.

10» В случае, если решение не является пустым множеством, изобразите его на числовой оси.

$$2x + 3 > 1$$

$$2t + 7 \geq 13$$

$$-5 < 1 - 2k < 3$$

$$5x - 9 \geq 6$$

$$5t - 4 < 6$$

$$-6 \leq 5 - 3m \leq 7$$

$$|12 - x| \leq 9$$

$$|16 - x| \geq 10$$

$$-3 < 2 - \frac{d}{3} \leq -1$$

11» Длина линии метрополитена равна 9 км. Поезд между первой и последней станциями останавливается ещё на 6-ти станциях. Один рейс вместе с остановками поезд преодолевает не более, чем за 20 минут. Сколько минут максимально может стоять поезд на каждой станции, если скорость движения поезда составляет 36 км за час?

12» Изобразите на числовой оси. Запишите в виде неравенств.

1) все действительные числа меньше -5 или больше 8 ;

2) числа больше 3 и меньше 8 .

13» При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

а) $\sqrt{12 - 3x}$

б) $\sqrt{2x + 15}$

с) $\sqrt{(1 - \sqrt{6})(x - 6)}$

д) $\sqrt{(3 - \sqrt{8})(8 - x)}$

е) $\sqrt{|x - 1| - 2}$

ф) $\sqrt{3 - |x - 1|}$

14» При каких значениях c уравнение $x^2 - 2x + c = 0$:

а) имеет два различных действительных корня;

б) не имеет действительных корней?

15» Установите соответствие.

1) $-3 < x < 4$

А) Наименьшее целое решение -4 .

2) $-3 < x + 1 \leq 5$

В) Наименьшее целое решение -3 .

3) $|x| \leq 4$

С) Наибольшее целое решение 3 .

Д) Сумма целых решений равна 0 .

10

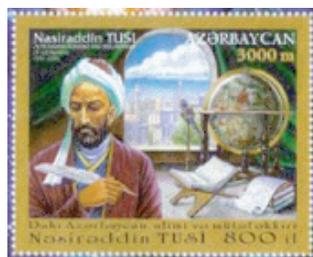
Тригонометрические отношения Метод координат Преобразование фигур

В этом разделе вы научитесь:

- тригонометрические отношения;
- применение тригонометрических отношений при решении задач;
- изображение рисунков при преобразовании подобия;
- изображение различных движений фигур.

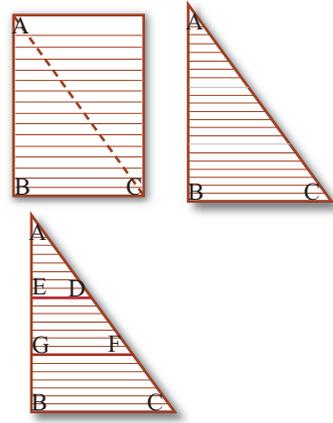
Это интересно!

Великий азербайджанский философ, математик и астроном Насреддин Тузи создал много трудов, которые внесли большой вклад для человечества в истории науки. В письменных источниках Тузи называют “Отцом тригонометрии”. В своем труде “Об измерении круга” он впервые доказал теорему синусов и применил ее для вычислений в астрономии.



Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения

- Практическая работа** 1. Сложите по диагонали лист бумаги и разрежьте его по линии сгиба. Полученный прямоугольный треугольник обозначьте через ABC.
2. Сложите треугольник ещё два раза так, чтобы получились линии, перпендикулярные стороне AB. Линии сгибов прочертите карандашом.
3. Отметьте точки D, E, F и G, как показано на рисунке, и при помощи линейки измерьте длины отрезков AC, AB, BC, AF, AG, FG, AD, AE и DE с точностью до миллиметров.
4. Запишите отношения проведённых измерений. Результаты округлите до тысячных и заполните таблицу.



$\triangle ABC$	$\triangle AED$	$\triangle AGF$
$\frac{BC}{AC} \approx$ <input type="text"/>	$\frac{ED}{AD} \approx$ <input type="text"/>	$\frac{GF}{AF} \approx$ <input type="text"/>
$\frac{AB}{AC} \approx$ <input type="text"/>	$\frac{AE}{AD} \approx$ <input type="text"/>	$\frac{AG}{AF} \approx$ <input type="text"/>
$\frac{BC}{AB} \approx$ <input type="text"/>	$\frac{ED}{AE} \approx$ <input type="text"/>	$\frac{GF}{AG} \approx$ <input type="text"/>

5. Обобщите свои мнения по поводу этих отношений
6. Какие мнения можно высказать по поводу $\angle A$ в треугольнике ABC?

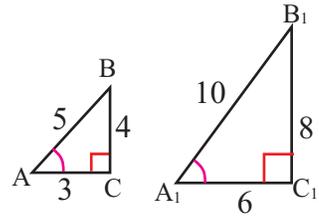
Тригонометрия-древнегреческое слово, которое состоит из двух слов . **Trigonon** – «угол» и **metreo** –«измеряю». Отношения, которые рассмотрены нами выше - отношения двух сторон в прямоугольном треугольнике, называются тригонометрическими отношениями и эти отношения (в данном случае для угла A) в каждом конкретном случае имеют названия, которые в сокращённой форме записываются так: *sinus* - *sin*, *kosinus* - *cos*, *tangens* - *tan*.

Тригонометрические отношения		
Синусом острого угла называется отношение катета, противолежащего данному углу, к гипотенузе.	$\sin \angle A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$	$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$
Косинусом острого угла называется отношение катета, прилежащего к данному углу, к гипотенузе.	$\cos \angle A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$	$\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$
Тангенсом острого угла называется отношение катета, противолежащего данному углу к прилежащему катету.	$\tan \angle A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$	$\tan \angle A = \frac{BC}{AC}$

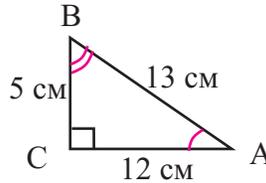
Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения

Обучающие задания

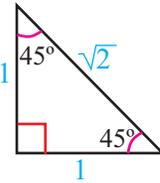
- 1) $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ на рисунке являются подобными треугольниками (по признаку ССС). Найдите синус, косинус и тангенс углов A и A_1 . Обобщите выводы.



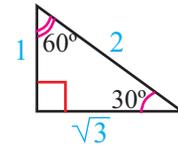
- 2) По рисунку вычислите:
 а) $\sin \angle A$, $\cos \angle A$, $\tan \angle A$;
 б) $\sin \angle B$, $\cos \angle B$, $\tan \angle B$



- 3) Используя длины сторон прямоугольного треугольника с углами 45° , 45° , 90° , найдите синус, косинус и тангенс угла 45° .

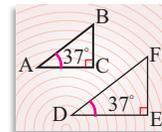


- 4) При помощи прямоугольного треугольника с углами 30° , 60° , 90° , найдите синус, косинус и тангенс углов: а) 30° ; б) 60° .



- 5) По результатам двух предыдущих заданий составьте таблицу значений синуса, косинуса и тангенса углов 30° , 45° , 60° .

- 6) Сабина утверждает, что синус угла D в $\triangle DEF$ больше синуса угла A в $\triangle ABC$, так как треугольник DEF больше треугольника ABC по размерам. Выскажите и запишите письменно своё мнение по поводу утверждения Сабины.



- 7) Может ли синус или косинус острого угла быть больше единицы? Может ли тангенс острого угла быть больше (меньше) или равен единице?

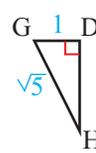
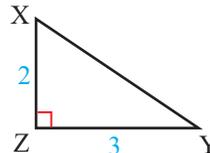
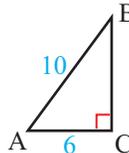
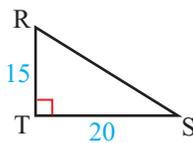
- 8) По следующим данным постройте углы.

1) $\tan \angle A = \frac{4}{3}$

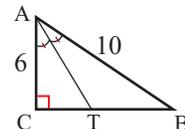
2) $\sin \angle A = \frac{3}{5}$

3) $\cos \angle A = \frac{3}{5}$

- 9) По данным рисунка найдите синус, косинус и тангенс острых углов. При необходимости округлите результаты до десятых.

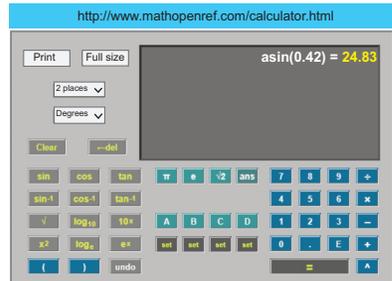


- 10) По данным рисунка найдите синус, косинус и тангенс $\angle TAC$.



Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения

Для того, чтобы найти синус, косинус и тангенс угла, а также градусную меру угла по заданным тригонометрическим отношениям, можно использовать специальный калькулятор



<http://www.mathopenref.com/calculator.html>.

1) На рисунке показано правило нахождения синуса угла 74° . Аналогичным образом, при помощи этого калькулятора, можно вычислить косинус и тангенс.

2) Для того, чтобы вычислить градусную меру угла $\angle A$ зная, что $\sin \angle A = 0,42$ используются клавиши \sin^{-1} (\cos^{-1} , \tan^{-1}). В данном случае вычисления проведены с точностью до сотых. В меню можно установить точность, с которой проводятся вычисления, выбрав количество цифр после запятой.

Пример	Клавиши калькулятора	Показания калькулятора
$\sin 74^\circ$	74 или	0,9613
$\sin \angle A = 0,42$	0,42 или	24,83

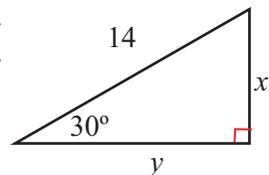
- 11** а) При помощи калькулятора вычислите с точностью до сотых
- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $\cos 70^\circ$ | 3) $\tan 2^\circ$ | 5) $\sin 78^\circ$ | 7) $\cos 36^\circ$ |
| 2) $\cos 23^\circ$ | 4) $\cos 63^\circ$ | 6) $\sin 56^\circ$ | 8) $\tan 66^\circ$ |
- б) При помощи калькулятора найдите градусные меры углов с точностью до десятых.
- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1) $\tan \angle A = 0,5095$ | 3) $\tan \angle B = 1,4653$ | 5) $\cos \angle A = 0,25$ |
| 2) $\sin \angle A = 0,35$ | 4) $\cos \angle A = 0,135$ | 6) $\sin \angle A = 0,135$ |

12 Зная тригонометрические отношения в прямоугольном треугольнике, можно найти углы треугольника и длины его сторон.

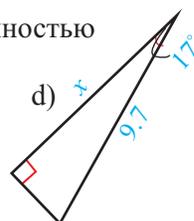
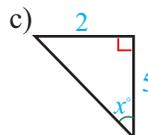
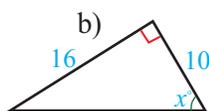
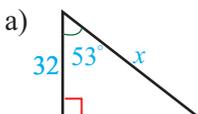
Например, найдём неизвестные стороны прямоугольного треугольника.

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{14} \quad x = 14 \cdot \sin 30^\circ = 14 \cdot 0,5 = 7$$

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{14} \quad y = 14 \cdot \cos 30^\circ \approx 14 \cdot 0,866 = 12,124 \approx 12,1$$



Найдите углы или стороны, обозначенные через x , с точностью до десятых.

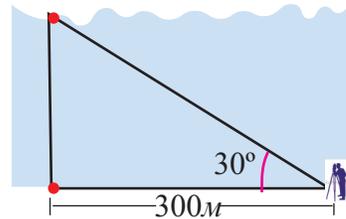


Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

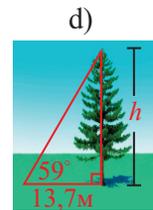
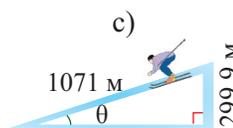
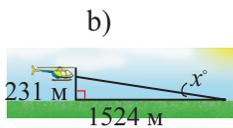
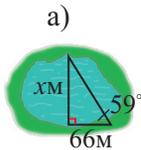
Теодолит – специальный прибор, предназначенный для измерения углов. Измерив углы, специалисты при помощи тригонометрии могут вычислить требуемую длину или высоту.



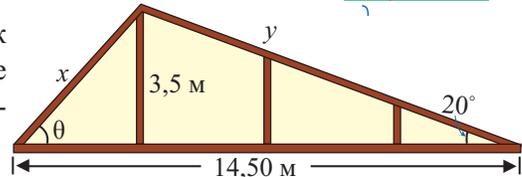
- 1) Для того, чтобы построить мост через реку, инженер проводит измерения при помощи теодолита. Сначала он измерил расстояние длиной 300 м вдоль берега реки, на котором находился сам, и поставил метку. Затем, он с помощью теодолита установил, что точка, которая находится прямо напротив отмеченной, но на противоположном берегу, видна под углом 30° от места, где находился сам. Найдите ширину реки с точностью до метра.



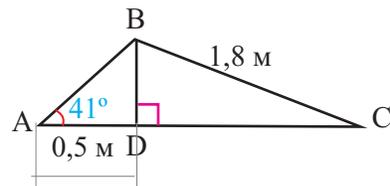
- 2) По данным рисунка найдите неизвестные длины сторон и градусные меры углов.



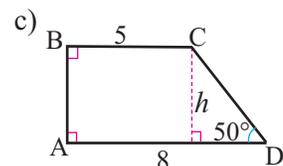
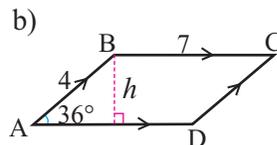
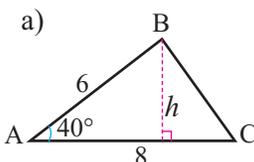
- 3) На рисунке изображён рисунок фасада крыши дома. Найдите длины сторон x и y данной конструкции и угол θ .



- 4) Найдите длины сторон и градусные меры углов $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$.



- 5) По данным рисунка найдите высоту h и площадь фигур. Результат округлите до сотых.

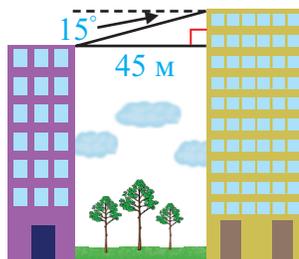


Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

Тригонометрические отношения помогают в реальных жизненных ситуациях находить высоту различных объектов или расстояние между ними. Для решения задач данного типа используются **углы подъёма и снижения**. **Углы подъёма и снижения** - это углы, образованные линией наблюдения, между наблюдателем и объектом, и линией горизонта,



- 6) Расстояние между двумя высотными зданиями 45 м. Высота здания с большим количеством этажей равна 60 м. Найдите высоту другого здания.



- 7) При сооружении дорожек для людей с ограниченными возможностями рекомендуется придерживаться определённых стандартов. Наиболее правильным вариантом считается дорожка, состоящая из наклонных частей высотой 80 см и углом наклона 5° , которые соединены горизонтальными пролётами длиной 2 м. В соответствии с планом, отражающим эти требования, решите следующие задачи.

- 1) Найдите длину части каждой наклонной.
- 2) Сколько метров будет составлять путь, если дорожка состоит из двух частей? Результат округлите до сотых.



- 8) Эльдар находится на расстоянии 8 м от Девичьей Башни. Угол подъёма, который измерил Эльдар, составил 74° . Нарисуйте рисунок по данным задачи и найдите высоту Девичьей Башни.



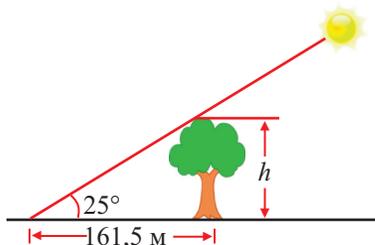
Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

- 9» Угол снижения горки равен 53° , а высота горки равна 3,6 м. Найдите длину горки.

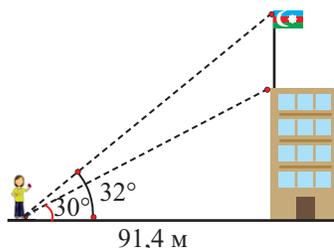


- 10» Вы находитесь на высоте 30 м и наблюдаете за парусником в море.
1. Начертите соответствующий рисунок.
2. Найдите длину линии (гипотенузы), если угол снижения, под которым вы видите парусник, равен соответственно 30° , 40° , 50° , 60° . Результаты запишите в таблице.

- 11» По данным рисунка найдите высоту дерева.



- 12» По данным рисунка найдите высоту дома и высоту флага.

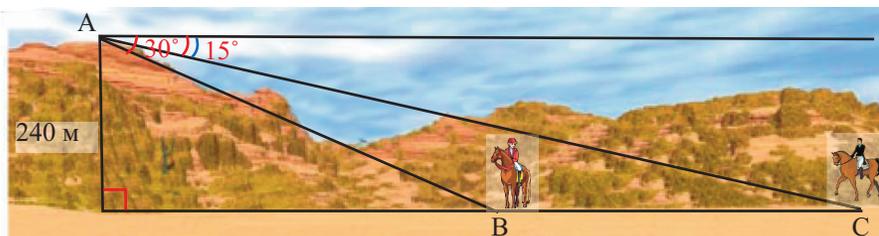


- 13» Передатчик, расположенный на вышке главной станции, передаёт радиоволны на три станции S_1 , S_2 и S_3 вдоль магистральной дороги. Кратчайшее расстояние от главного источника до дороги 35 км. Расположение трёх других станций показано на рисунке. Найдите расстояние от источника радиоволн до каждой станции.

Источник радиоволн



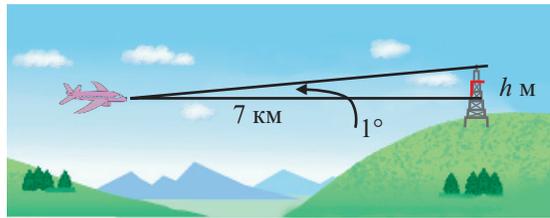
- 14» Представьте себе, что вы находитесь на вершине горы высотой 240 м. Отсюда вы видите двух всадников на лошадях, движущихся по направлению к горе. Угол снижения от вас до всадника В составляет 30° , а до всадника С - 15° .
1. Сколько метров в данный момент составляет расстояние между вами и каждым всадником?
2. Чему равно расстояние между двумя всадниками?



Для каждой задачи начертите соответствующий рисунок.

- 15**» Вертикальная высота эскалатора в торговом центре 4,3 м. При подъёме на эскалаторе пройденный путь по горизонтали составит 15 м.
 1) Найдите длину эскалатора. Начертите соответствующий рисунок.
 2) Измените данные в задаче таким образом, чтобы её можно было решить при помощи тригонометрических отношений.
- 16**» Кямиль из окна отеля наблюдает за движением автобуса по ровному шоссе. Прежде чем автобус пропадет с поля зрения, угол падения изменяется с 46° до 18° . Окно комнаты, в которой находится Кямиль, расположено на высоте 20 м. Найдите длину пути вдоль которого Кямиль может пронаблюдать за автобусом.
- 17**» Наука, изучающая поведение птиц, называется орнитология, а специалист, который работает в этой области, называется орнитолог. Два орнитолога находятся на одной линии и наблюдают за гнездом одной и той же птицы. Углы подъёма от каждого из них до гнезда соответственно равны 30° и 60° , а расстояние между орнитологами 58 м. Сколько метров составляет расстояние от каждого орнитолога до гнезда?

- 18**» Радар передаёт информацию о препятствии и угле подъёма для преодоления данного препятствия скоростному самолёту, который движется под минимальным углом.



Находясь на некоторой высоте, с углом подъёма, равным 1° , самолёт получает информацию о том, что на расстоянии 7 км от него находится вышка. Над любым объектом самолёт должен пролетать на высоте 300 м. Как при этом должен измениться угол подъёма самолёта?

Тригонометрические тождества

В прямоугольном треугольнике ABC для каждого острого угла известны следующие зависимости между тригонометрическими отношениями.

$$1. \sin \angle A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos \angle B$$

$$\cos \angle A = \sin(90^\circ - \angle A) = \sin \angle B$$

$$\sin \angle B = \cos(90^\circ - \angle B) = \cos \angle A$$

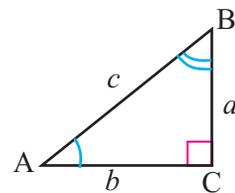
$$\cos \angle B = \sin(90^\circ - \angle B) = \sin \angle A$$

$$\sin \angle A = \frac{a}{c} \quad \cos \angle A = \frac{b}{c}$$

$$\sin \angle B = \frac{b}{c} \quad \cos \angle B = \frac{a}{c}$$

При $\sin \angle A = \cos \angle B$ и $\angle B = 90^\circ - \angle A$

$$\sin \angle A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos \angle B$$



Тригонометрические тождества

Пример. $\sin 55^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ$

Синус угла 55° равен косинусу 35° .

2. $\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$

Доказательство: по определению $\sin \angle A = \frac{a}{c}$, $\cos \angle A = \frac{b}{c}$, $\tan \angle A = \frac{a}{b}$

С другой стороны, $\frac{\sin \angle A}{\cos \angle A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ Таким образом, $\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$

3. $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$

Доказательство: $\sin \angle A = \frac{a}{c}$, $\sin^2 \angle A = \frac{a^2}{c^2}$
 $\cos \angle A = \frac{b}{c}$, $\cos^2 \angle A = \frac{b^2}{c^2}$ сложив почленно получим

$$\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}. \text{ По теореме Пифагора } a^2 + b^2 = c^2,$$

откуда $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$

Обучающие задания

- 1) а) Следующие выражения выразите в виде косинуса.
1) $\sin 37^\circ$ 2) $\sin 81^\circ$ 3) $\sin 29^\circ$ 4) $\sin 64^\circ$
б) Следующие выражения выразите в виде синуса.
1) $\cos 59^\circ$ 2) $\cos 42^\circ$ 3) $\cos 73^\circ$ 4) $\cos 18^\circ$
- 2) 1) Покажите, что $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$, выполнив соответственные вычисления.
2) Вычислите синус и косинус угла A , если в прямоугольном треугольнике $ABC \tan \angle A = \frac{1}{3}$. Решите задачу разными способами.
- 3) $\triangle ABC$ -равносторонний. $\triangle EFD$ – прямоугольный треугольник. Докажите, что если $\angle E = 90^\circ$, $FD = 2$, $FE = 1$, то $\sin \angle C = \cos \angle D$.
- 4) Что вы можете сказать о прямоугольном треугольнике, у которого равны значения синуса и косинуса острого угла?
- 5) Упростите.
а) $\sin 18^\circ - \cos 72^\circ$ б) $\frac{\cos 54^\circ}{\sin 36^\circ}$ в) $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ$
- 6) Найдите значение выражения, если угол A острый и тангенс $\angle A = 2$.
а) $\frac{\sin \angle A + 2 \cos \angle A}{\cos \angle A}$ б) $\frac{\sin \angle A + \cos \angle A}{2 \sin \angle A - \cos \angle A}$

Координаты середины отрезка

Координаты середины отрезка

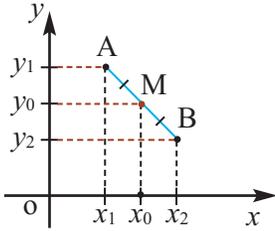
1) Пусть на числовой оси заданы точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ и точка $M(x_0)$, которая является серединой отрезка AB .

$AM = |x_0 - x_1|$ $MB = |x_2 - x_0|$ т.к. $AM = MB$,
то $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$, а отсюда следует, что $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

2) По теореме Фалеса, если точка M является серединой отрезка AB , то на оси абсцисс точка x_0 является соответственно координатой середины отрезка, концы которого находятся в точках x_1 и x_2 .

3) Координаты середины отрезка AB с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ точки $M(x_0; y_0)$ находятся так:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad \text{Убедитесь, что данная формула верна в случае, если отрезок } AB \text{ параллелен одной из осей координат.}$$



Пример. Найдите координаты середины отрезка AB с концами в точках $A(-1; 2)$ и $B(3; 4)$.

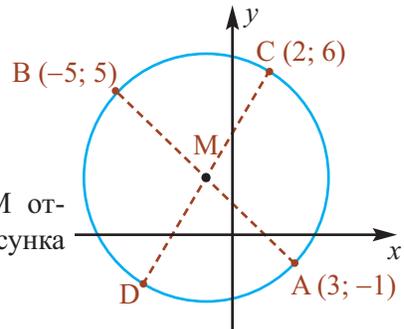
Решение: пусть точка $M(x_0; y_0)$ является серединой отрезка AB . По формуле координат середины отрезка получим:

$$x_0 = \frac{-1 + 3}{2} = 1, y_0 = \frac{2 + 4}{2} = 3 \quad \text{Ответ: } M(1; 3)$$

Обучающие задания

- 1) Точка M является серединой отрезка AB . Найдите координаты точки M . а) $A(2; 5), B(4; 1)$; б) $A(-2; 3), B(6; -1)$
- 2) Найдите координаты точки B , если точка M является серединой отрезка AB . а) $A(2; 1), M(3; 2)$ б) $A(3; -1), M(-1; 1)$
- 3) Найдите координаты середин сторон треугольника с вершинами $A(0; 0), B(0; 4)$ и $C(-6; 0)$.
- 4) а) Точки $A(2; 3)$ и $C(4; 1)$ являются противоположными вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.
б) Точки $A(1; 3), B(2; 6)$ и $C(5; 7)$ вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D .

- 5) На окружности с центром в точке M отмечены точки A, B, C и D . По данным рисунка найдите координаты точек M и D .



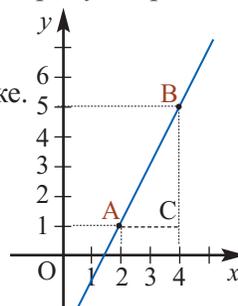
Уравнение прямой, проходящей через две точки

Исследование. 1) Начертите на координатной плоскости прямую, проходящую через точки $A(2;1)$ и $B(4;5)$.

2) Проведите через точку A прямую, параллельную оси абсцисс, и отметьте точку C , как показано на рисунке.

3) В $\triangle ABC$ найдите отношение $\frac{BC}{AC}$ и обозначьте его через k .

4) По рисунку найдите длины отрезков AC и BC и вычислите значение k .



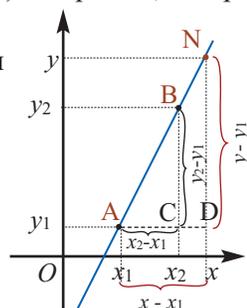
Уравнение прямой

Пусть точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ не расположены на прямых, параллельных оси абсцисс и оси ординат. Отметим точку $N(x; y)$ на прямой, которая проходит через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

В $\triangle ABC$ $k = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ k называется угловым коэффициентом

Так как $\triangle ABC \sim \triangle AND$, то $k = \frac{BC}{AC} = \frac{ND}{AD}$.

Отсюда, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Это уравнение прямой, проходящей через две точки.

Сводя это уравнение к виду $y - y_1 = k(x - x_1)$ и

обозначив $y_1 - kx_1 = b$, можно записать следующее $y = kx + b$.

k называется угловым коэффициентом и находится по формуле: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Пример 1. Найдём угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(1; 7)$

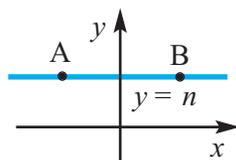
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Пример 2. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 4)$ и $B(2; -5)$.

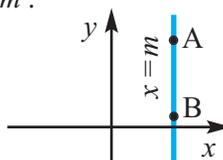
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - (-1)} = \frac{-5 - 4}{2 - (-1)} \Rightarrow \frac{y - 4}{x + 1} = -3$$

$$y - 4 = -3(x + 1), \quad y - 4 = -3x - 3, \quad y = -3x + 1$$

Примечание 1. Если прямая, проходящая через точки A и B , параллельна оси абсцисс, то ординаты точек, расположенных на этой прямой, остаются постоянными

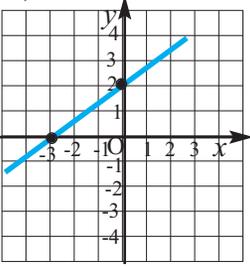
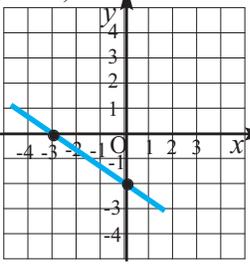
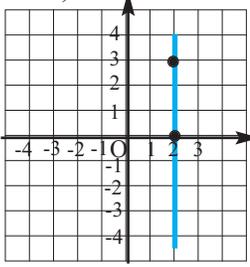


Примечание 2. Если прямая, проходящая через точки A и B , параллельна оси ординат, то абсциссы точек, расположенных на этой прямой, остаются постоянными и уравнение записывается в виде $x = m$.



Уравнение прямой, проходящей через две точки

Обучающие задания

- 1**» Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:
- a) $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$ b) $A(-1; 3)$, $B(1; 9)$
c) $A(1; 1)$, $B(2; 4)$ d) $A(2; -3)$, $B(4; 0)$
- 2**» a) При каком значении k прямая $y = kx + 3$ проходит через точку $A(2; 7)$?
b) При каком значении b прямая $y = 0,5x + b$ проходит через точку $A(-2; 3)$?
- 3**» Найдите b , если прямая $y = 5x + b$ проходит через точку $C(-1; 2)$. Постройте прямую в прямоугольной системе координат и покажите точки пересечения с осями координат. Найдите тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс, и сравните с угловым коэффициентом.
- 4**» Запишите уравнение прямой по рисунку.
- a)  b)  c) 
- 5**» При каких значениях k и b прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(1; 8)$ и $B(-1; 2)$.
- 6**» Найдите угловой коэффициент прямой, которая проходит через точки $A(1; 2)$ и $B(2; 3)$. Какой угол образует эта прямая с осью абсцисс?
- 7**» Запишите уравнение прямой, проходящей через точки:
- 1) $A(2; 1)$ и $B(4; 5)$ 2) $A(1; 4)$ и $B(2; 1)$
3) $A(-1; 1)$ и $B(1; 5)$ 4) $A(2; -1)$ и $B(0; 3)$
- 8**» 1) Проведите прямую через точки $A(m; 1)$ и $B(m; 3)$. Какой координатной оси параллельна данная прямая? Чему равны абсциссы точек данной прямой?
2) Проведите прямую через точки $C(1; n)$ и $D(4; n)$. Какой координатной оси параллельна данная прямая? Изменяются ли ординаты точек, находящихся на данной прямой?
- 9**» Постройте прямую, которая проходит через следующие точки, и запишите уравнение прямой.
- a) $C(1; 3)$, $D(1; -1)$ b) $C(-1; 2)$, $D(-1; 1)$
c) $A(3; 5)$, $B(-1; 5)$ d) $A(2; -2)$, $B(5; -2)$
- 10**» Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $C(1; 4)$ и $D(-1; 12)$. Найдите площадь треугольника, который образуется при пересечении данной прямой с осями координат.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

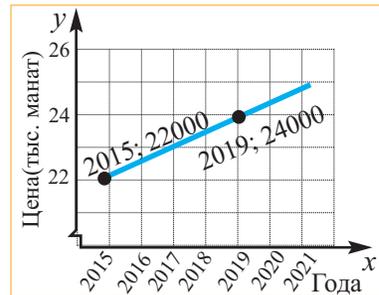
Зная значения угловых коэффициентов прямых, можно сказать, параллельны или перпендикулярны данные прямые

1. Если угловые коэффициенты двух прямых равны, то данные прямые параллельны. Например, прямые, заданные уравнениями $y = 2x - 5$ и $y = 2x + 7$, параллельны

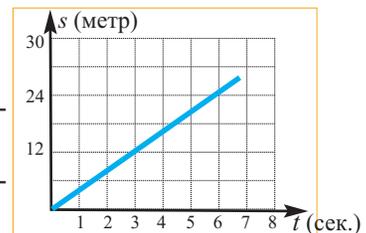
2. Если угловые коэффициенты удовлетворяют отношению $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, то прямые перпендикулярны. Например, прямые $y = 3x - 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 6$ перпендикулярны.

- 11** а) Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -3x + 5$ и пересекает ось ординат в точке 4.
 б) Запишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = -\frac{1}{3}x - 2$, и пересекает ось абсцисс в точке -3 .
- 12** Прямая l проходит через начало координат и параллельна прямой, которая проходит через точки $(-2; 3)$, $(4; 5)$. Найдите угловой коэффициент прямой l .
- 13** Обоснуйте, что прямоугольник ABCD с вершинами в точках $A(-6; 1)$, $B(-2; -1)$, $C(0; 3)$, $D(4; 1)$ является параллелограммом.
- 14** Вершины треугольника находятся в точках $A(5; 0)$, $B(0; 5)$ и $C(3; 6)$. Определите, является или нет данный треугольник прямоугольным.

- 15** Завод установил цену автомобиля марки D в 2015 году в размере 22000 манатов, в 2019 году – 24000 манатов. Исследуйте график на рисунке, вычислите угловой коэффициент и дайте прогноз о цене автомобиля в 2023 году.

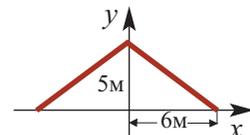


- 16** На графике представлена зависимость пройденного велосипедистом пути (S) и времени (t).
- а) Найдите угловой коэффициент прямой.
 б) Какие величины можно определить, вычислив угловой коэффициент прямой.
 в) Найдите расстояние, пройденное велосипедистом за 30 минут; за 2 часа.



- 17** Зарплата Эльшана начисляется из расчёта 3,5 манатов за час и он дополнительно получает 20 манатов еженедельно. По какой формуле можно посчитать недельную зарплату Эльшана в зависимости от количества проработанных часов?

- 18** На рисунке представлен вид спереди крыши дома, имеющей симметричную форму. а) Запишите уравнение прямых, соответствующих цветным частям изображения. б) Как изменятся уравнения прямых, если высота крыши станет 6 м?



Преобразование фигур. Поворот

Отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками, называется движением. Примерами движения являются такие преобразования, как центральная симметрия, осевая симметрия, поворот (вращение), скольжение.

Практическая работа. Вырежьте из картона различные буквы. Выполните движения, как показано на примере.



Осевая симметрия
(отражение)



Поворот
(вращение)

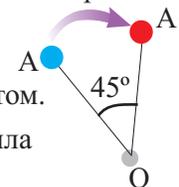


Скольжение
(параллельный перенос)

Поворот

Пусть даны точка O и угол α . Если при движении плоскости произвольный луч, выходящий из точки O , совершает в том же направлении поворот на угол α , то это движение называется поворотом вокруг точки O на угол α . Точка O называется **центром вращения**, α -**углом поворота**. Поворот может быть совершен в направлении по часовой или против часовой стрелке. При вращении плоскости вокруг какой-либо точки центр вращения отображается на себя. Если при вращении вокруг точки O точка A преобразовалась в точку A_1 , то $AO \cong A_1O$. Преобразование фигуры при вращении плоскости также называется поворотом.

Пример 1. Угол поворота AOA_1 равен 45° . Точка A совершила поворот вокруг точки O на угол 45° по часовой стрелке.

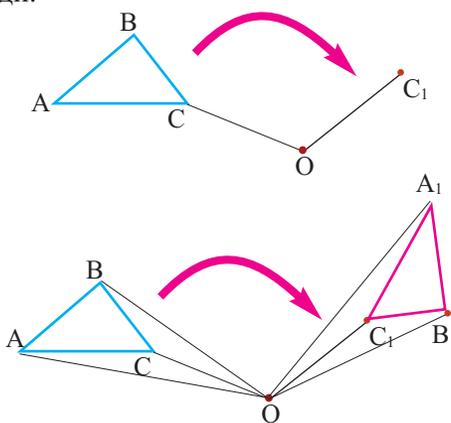


Пример 2. Проанализируйте последовательность шагов, при котором совершается поворот треугольника $\triangle ABC$ вокруг точки O на угол 120° . Повторите эти шаги, выполнив построение в тетради.

1. Соедините точку O и точку C отрезком прямой.

2. При помощи транспортира от OC постройте угол 120° в направлении по часовой стрелке и циркулем отложите отрезок OC_1 , конгруэнтный отрезку OC .

3. По тому же правилу соедините точку O с точками A и B . Постройте отрезки OA_1 и OB_1 конгруэнтные полученным отрезкам OA и OB и составляющие с ними угол 120° . Точки A_1, B_1, C_1 являются вершинами нового треугольника. Соедините эти точки.

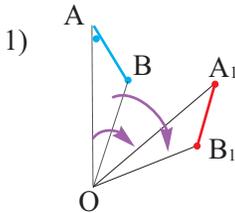


Примечание. Центральная симметрия является поворотом плоскости относительно центра симметрии на 180° .

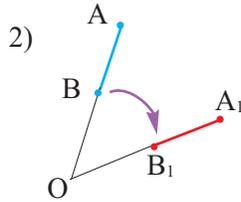
Преобразование фигур. Поворот

Обучающие задания

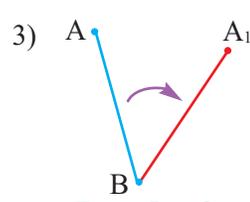
- 1) На рисунках ниже изображены различные положения точек A и B при вращении их вокруг точки O в направлении по часовой стрелке. Для каждого случая в тетради начертите ещё два примера.



Точки A, B и O не расположены на одной прямой



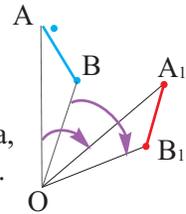
Точки A, B и O расположены на одной прямой



Точки B и O совпадают

- 2) При повороте вокруг точки O точка A преобразована в точку A_1 , а точка B - в точку B_1 . Докажите, что $AB \cong A_1B_1$.

План для доказательства: 1. По определению поворота, установите конгруэнтные отрезки и конгруэнтные углы.
2. Используйте аксиому сложения углов.
3. Используйте признаки конгруэнтности треугольников.



- 3) Начертите в тетради рисунок. Точки B, D, F, H есть середины сторон квадрата $ACEG$.

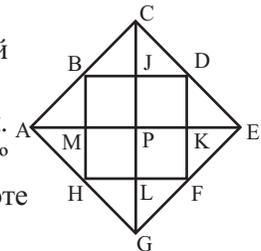
1) Для данной фигуры установите фигуру, которая получится при вращении относительно заданной точки.

a) поворот AB вокруг точки P на угол 90° по часовой стрелке.

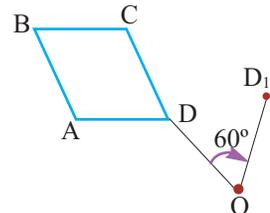
b) поворот CE вокруг точки E против часовой стрелки.

c) поворот треугольника $\triangle KEF$ вокруг точки P на 180°

2) Придумайте для соседа по парте вопрос о повороте какого-либо отрезка или треугольника на рисунке.

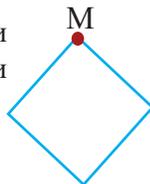


- 4) Начертите в тетради поворот параллелограмма $ABCD$ на угол 60° вокруг точки O по часовой стрелке. Для примера на рисунке изображен поворот точки D на угол 60° .

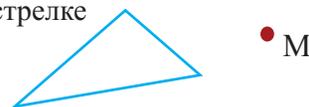


- 5) Начертите в тетради поворот представленных ниже фигур вокруг точки M на заданный угол.

1) 100° в направлении против часовой стрелки



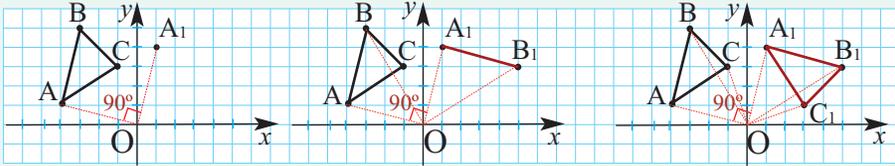
2) 75° в направлении по часовой стрелке



Преобразование фигур. Поворот

Исследуйте и начертите в тетради

На рисунке показана последовательность шагов, которые выполняются при повороте треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A(-4;1)$, $B(-3;5)$, $C(-1;3)$ на угол 90° в направлении по часовой стрелке.



При повороте на угол 90° в направлении по часовой стрелке координаты вершин изменяются следующим образом.

$$\triangle ABC \quad \triangle A_1B_1C_1$$

$$A(-4; 1) \rightarrow A_1(1; 4)$$

$$B(-3; 5) \rightarrow B_1(5; 3)$$

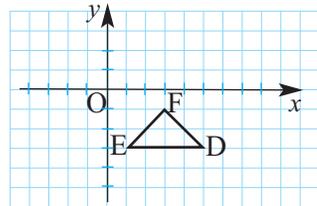
$$C(-1; 3) \rightarrow C_1(3; 1)$$

Координаты изменяются как $(x; y) \rightarrow (y; -x)$.

Внимание! $|OA| = |OA_1|$, $|OB| = |OB_1|$, $|OC| = |OC_1|$

$|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$

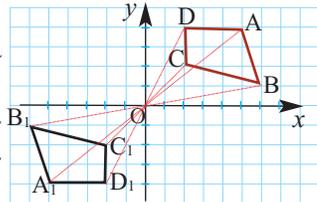
- 6** Начертите треугольник, который получится при повороте вокруг точки O треугольника с вершинами $E(1;-3)$, $F(3;-1)$, $D(5;-3)$ в направлении по часовой стрелке на угол 90° . Запишите в общем виде, как при этом изменились координаты вершин треугольника.



- 7** На рисунке показан поворот прямоугольника вокруг точки O на 180° .

1) Исследуйте и обобщите мнение о координатах вершин новой фигуры на основании исходной фигуры.

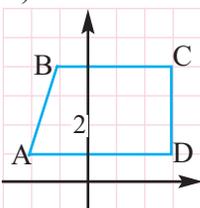
2) По рисунку запишите возможные конгруэнтные отрезки.



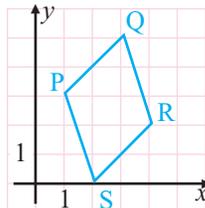
- 8** Начертите на координатной плоскости поворот любого треугольника относительно начала координат на углы 90° , 180° , 270° и 360° в направлении против часовой стрелки.

- 9** Запишите координаты вершин фигуры, полученной при вращении заданной фигуры вокруг начала координат на заданный угол в направлении по часовой стрелке.

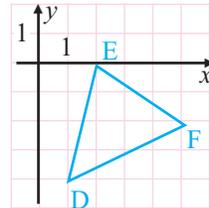
1) 90°



2) 180°



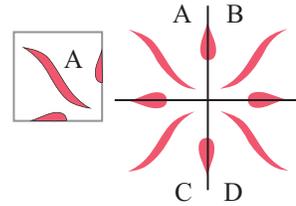
3) 360°



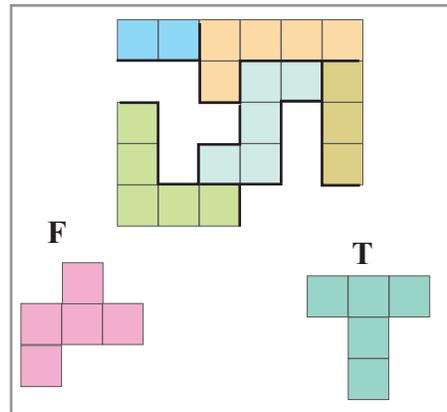
Преобразование фигур. Поворот

10» $\Delta A_1B_1C_1$ получен из ΔABC при помощи симметрии относительно оси OX , $\Delta M_1N_1K_1$ получен из ΔMNK поворотом вокруг начала координат в направлении против часовой стрелки на угол 90° . Начертите рисунки по условию.

11» Узор на рисунке можно получить, если сложить лист на четыре равные части и вырезать узор на одной из них. При этом на 4-х частях получаются симметричные узоры. Объясните, при помощи какого вида движения одна часть узора преобразована в другую.



12» Компьютерные игры созданы на основе заполнения (составления мозаики) различных прямоугольных областей фигурами в виде сгруппированных квадратов: домино (по два), тримино (по три), пентамино (по пять). Какие действия надо выполнить для того, чтобы разместить на место пентамины F и T в мозаичной области размером 6×5 ? Покажите эти движения на рисунке.

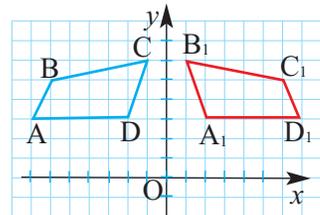


13» Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ получен отражением четырёхугольника $ABCD$ симметрично относительно оси OY .

1) Запишите, как изменились при этом координаты вершин четырёхугольника, по образцу

$$A(-7;3) \rightarrow A_1(7;3)$$

2) Запишите обобщённую запись изменения координат точки при симметрии относительно оси ординат.



14» Начертите фигуры, координаты вершин которых заданы ниже и фигуры симметричны заданным согласно условию.

- 1) Вершин $E(-3; 2)$, $F(0; 2)$, $G(-2; 5)$ относительно оси абсцисс
- 2) Вершин $J(2; -1)$, $K(4; -2)$, $L(4; -3)$, $M(2; -3)$ относительно оси ординат
- 3) Вершин $P(2; -2)$, $Q(4; -2)$, $R(3; -4)$ относительно прямой $y = x$
- 4) Вершин $A(2; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-1; 4)$ относительно прямой $y = -x$

15» Начертите рисунок, отображающий поворот фигуры, вершины которой имеют следующие координаты вокруг начала координат в направлении по часовой стрелке на угол, указанный в условии:

- 1) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(4; 4)$; 90°
- 2) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(4; 4)$; 180°
- 3) $M(2; 2)$, $N(5; 2)$, $P(3; -2)$, $Q(0; -2)$; 90°
- 4) $G(-2; 1)$, $H(-3; -2)$, $J(-1; -4)$; 180°

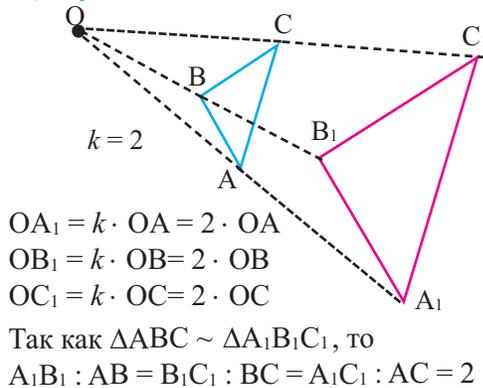
Преобразование подобия, гомотетия

Гомотетия

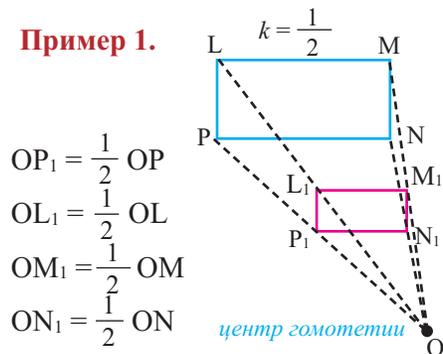
Преобразование плоскости на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками изменяется в одно и то же число раз, называется преобразованием подобия. Фигуры называются подобными, если одна фигура переводится в другую преобразованием подобия. Если при преобразовании подобия точки A и B на плоскости соответственно преобразованы в точки A_1 и B_1 , то $A_1B_1 = k \cdot AB$. Число $k > 0$ называется коэффициентом подобия. Преобразование подобия при $k = 1$ называется движением. Предположим, что заданы точка O и число $k > 0$. Преобразование плоскости на себя, при котором для произвольной точки A плоскости и преобразованной точки A_1 выполняется равенство $OA_1 = k \cdot OA$, называется гомотетией. Точка O называется центром гомотетии, число k – коэффициентом гомотетии, точки A и A_1 – гомотетичными точками.

Пример 1.

центр гомотетии



Пример 1.



Так как $PLMN \sim P_1L_1M_1N_1$, то
 $M_1N_1 : MN = N_1P_1 : NP = P_1L_1 : PL =$
 $= L_1M_1 : LM = 1 : 2$

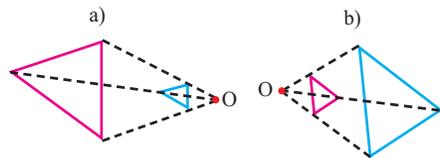
Если $k > 1$, то фигура увеличивается относительно исходной фигуры.

Если $0 < k < 1$, то фигура уменьшается относительно исходной фигуры.

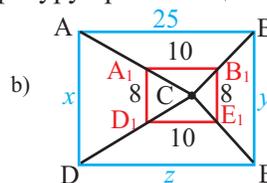
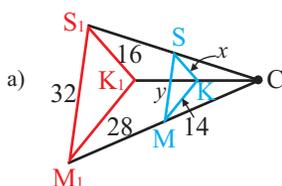
Если $k = 1$, то фигура конгруэнтна исходной фигуре.

Замечание: гомотетию можно рассматривать и при $k < 0$. В этом случае точки A и A_1 расположены по разные стороны от центра гомотетии.

- 1) На рисунке изображена гомотетия, при которой синяя фигура была преобразована в красную относительно заданного центра с коэффициентом k . Какой из рисунков соответствует случаю $k > 1$, а какой $k < 1$?

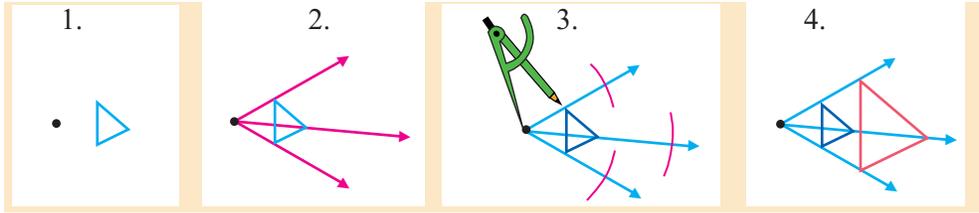


- 2) По рисунку найдите коэффициент гомотетии k и неизвестные при преобразовании фигуры синего цвета в фигуру красного цвета.

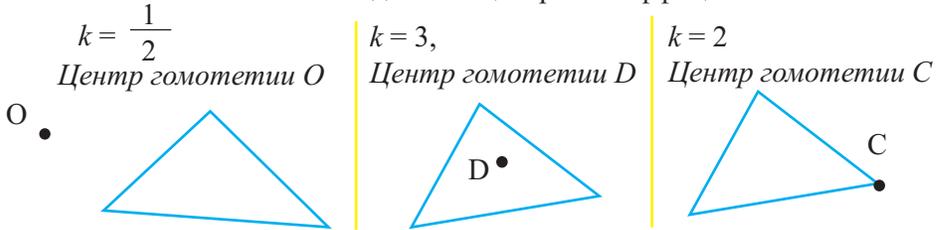


Преобразование подобия, гомотетия

- 3** Выполните в тетради последовательность действий для построения фигуры гомотетичной данной с коэффициентом гомотетии $k = 2$.



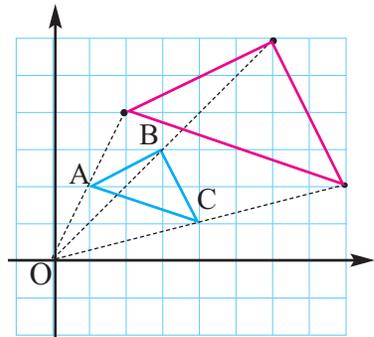
- 4** При помощи линейки и циркуля выполните построение преобразования гомотетии относительно заданного центра с коэффициентом k .



- 5** 1) В какие точки переходят точки а) $A(2;0)$ б) $B(0;3)$ в) $C(2;3)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $k = 3$
 2) Покажите, что в гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии k точка $A(x;y)$ переходит в точку $A_1(kx; ky)$.
Указание: используйте подобие треугольников.

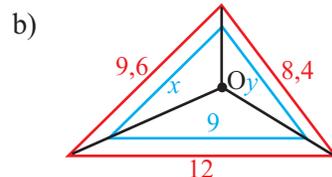
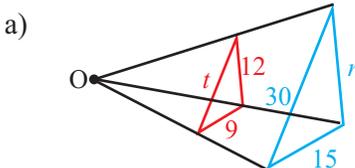
- 6** 1) Дан треугольник с вершинами $A(1;2)$, $B(3;3)$, $C(4;1)$. Постройте треугольник гомотетичный $\triangle ABC$ с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии $k = 2$

$$\begin{aligned} A(1; 2) &\longrightarrow A_1(2; 4) \\ B(3; 3) &\longrightarrow B_1(6; 6) \\ C(4; 1) &\longrightarrow C_1(8; 2) \end{aligned}$$



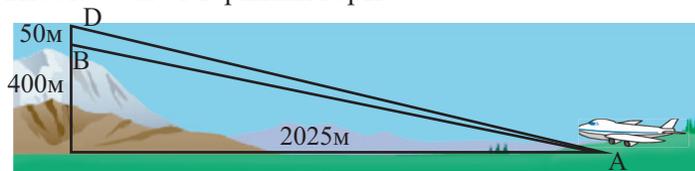
- 2) Постройте прямоугольник, гомотетичный прямоугольнику, вершинами которого являются точки $A(2; 2)$, $B(6; 2)$, $C(6; 4)$ и $D(2; 4)$, с центром $O(0;0)$ и $k = \frac{1}{2}$.

- 7** На рисунке красная фигура гомотетична синей. Найдите неизвестные стороны и коэффициент гомотетии.

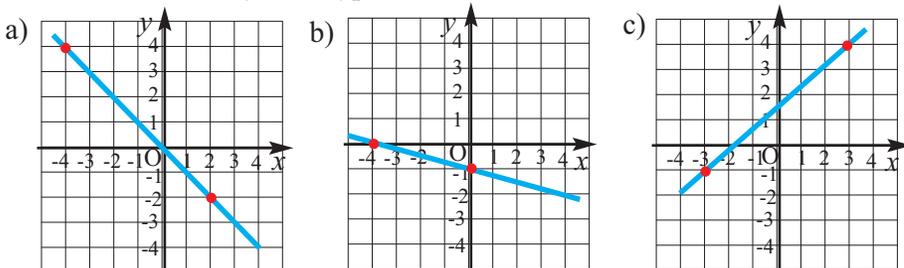


Обобщающие задания

- 1) Сколько градусов должен составлять угол подъёма самолёта, чтобы пролететь на высоте 50 м от вершины горы?



- 2) По графику определите угловой коэффициент прямой (по клеткам) и запишите соответствующее уравнение.



- 3) а) Точки $(-4; 4)$, $(-1; -2)$, $(0; 8)$, $(3; 0)$ являются вершинами параллелограмма. Является ли данный параллелограмм прямоугольником?
 б) Точки $N(1; 0)$, $K(3; 4)$, $L(5; 2)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты четвёртой вершины. Рассмотрите все возможные случаи.

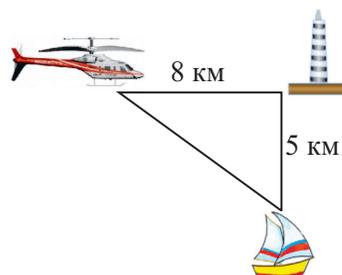
- 4) Найдите угловой коэффициент прямых, проходящих через две точки, и определите, какие из них параллельны, а какие перпендикулярны.

$A(-3, 3)$ и $B(3; -1)$
 $C(-3, 1)$ и $D(3, 4)$

$M(-2, -3)$ и $N(2, 3)$
 $E(-4, -3)$ и $F(4, 1)$

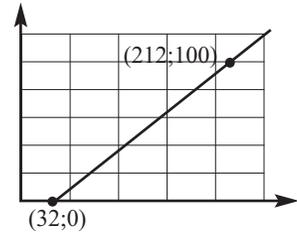
- 5) Учитель математики хочет убедиться, что вы хорошо поняли, что такое угловой коэффициент. Для этого он даёт вам следующее задание: “Представьте, что вы вышли на воскресную прогулку и начали свой путь из точки с координатами $(3; 2)$. Если вы будете двигаться так: 2 единичных отрезка направо, 4 вниз, 3 налево, 6 вверх, 7 направо, то дойдёте до кассы канатной дороги. а) Какие координаты имеет точка, в которой расположена касса? б) Чему равен угловой коэффициент прямой, проходящей через точку, в которой находитесь вы, и точку, где расположена касса?”

- 6) Корабль, находящийся на расстоянии 5 км южнее башни маяка, подал сигнал SOS о помощи. Этот сигнал был передан вертолёту, который находится на расстоянии 8 км западнее башни. Под каким углом должен изменить направление движения вертолёт, чтобы достичь корабля?

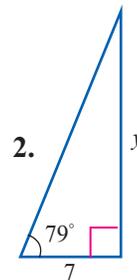
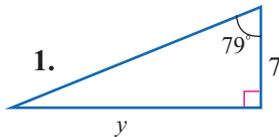


Обобщающие задания

- 7» Вода замерзает при температуре 32°F или 0°C , и закипает при температуре 212°F или 100°C . Запишите уравнение прямой, которое показывает зависимость между температурами по Фаренгейту и по Цельсию. **Указание.** Используйте формулы: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и $y - y_1 = k(x - x_1)$.



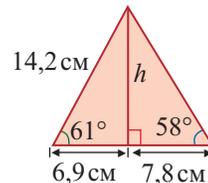
- 8» При помощи каких видов движения треугольник 1 был преобразован в треугольник 2?



- 9» а) $\triangle DEF$ преобразован в $\triangle D_1E_1F_1$ с коэффициентом гомотетии $k = 2$. Если периметр $\triangle DEF$ равен 60 см, то найдите периметр $\triangle D_1E_1F_1$.
 б) $\triangle MNK$ получен при преобразовании подобия из $\triangle ABC$. Зная, что $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 12$, $MN = 2$ найдите коэффициент подобия и длины сторон MK и NK .

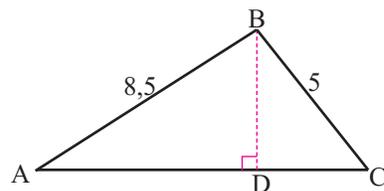
- 10» При помощи каких равенств можно найти высоту треугольника на рисунке?

а) $\cos 58^{\circ} = \frac{h}{7,8}$ с) $\tan 61^{\circ} = \frac{h}{14,2}$
 б) $\tan 58^{\circ} = \frac{h}{7,8}$ д) $\tan 61^{\circ} = \frac{h}{6,9}$



- 11» Начертите рисунок, соответствующий следующим данным. Основание лестницы, которая прислонена к стене под углом 55° , удалено от стены на расстоянии 2,5 м. Самая верхняя точка лестницы находится на высоте окна. На какой высоте от земли находится окно? Сколько метров составляет длина лестницы?

- 12» Дано: $\triangle ABC$, $BD \perp AC$, $AB = 8,5$,
 $BC = 5$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{8}{15}$
 Найдите: 1) BD ; 2) AD ;
 3) DC ; 4) $S_{\triangle ABC}$; 5) $\cos \angle C$



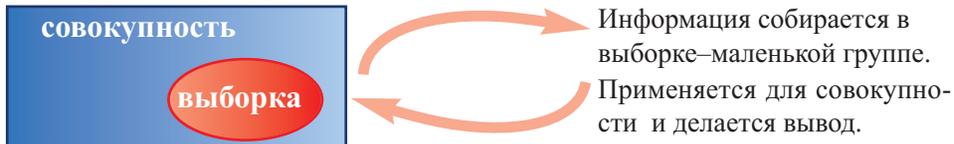
В этом разделе вы научитесь:

- как систематизировать информацию и представлять ее в различных формах;
- как при помощи центральных мер оценивать информацию и давать прогноз;
- как определять совокупность (популяцию) и выборку;
- как вычислять зависимые и независимые события и их вероятность.

Сбор и представление информации

Совокупность, выборка

Если исследуемый объект зависит от большого диапазона изменяемой информации, то исследование проводится на небольших группах объектов. Будем называть информацию, изменяющуюся в большом диапазоне, **совокупностью (или популяцией)**, а выбранную из совокупности маленькую группу – **выборкой**. Исследование производится над выборкой, а затем результаты применяются ко всей совокупности (популяции), делается вывод и даётся прогноз.



Качество проводимого исследования зависит от того, насколько правильно выбраны представители популяции. Например, на следующих примерах исследуем, действительно ли данные выборки представляют популяцию.

1) На фабрике изготавливаются чипы памяти. Для проверки качества из каждых 100 штук выбирают один чип.

Совокупность: все чипы, которые изготавливаются на фабрике.

Выборка: один чип из 100. Выбор представляет совокупность.

2) Учитель, для того, чтобы проверить, как класс справился с домашним заданием, проверил работы трёх учеников, сидящих на первых партах.

Совокупность: количество всех учащихся в классе. **Выборка:** трое учеников, которые сидят на первых партах. В этом случае выбор не представляет совокупность.

Различают **простую** и **системную случайную выборки**.

1) Для обработки информации о новом парфюме, работники магазина раздают покупателям данный парфюм в маленьких флаконах и спрашивают их мнение (простая случайная выборка).

2) Для проверки качества услуг одного из каждых 5 человек, пришедших на обед в столовую, просят заполнить опросный лист (системная случайная выборка).

Сбор и представление информации

Обучающие задания.

- 1) Выберите ответ, который вы считаете правильным. Обоснуйте ваше мнение.
- 1) Заведующий школьной столовой планирует провести исследование для того, чтобы узнать какие блюда нравятся больше всего. В какой группе нужно производить выбор, чтобы получить наиболее правильную информацию?
а) учителей; б) школьников, обедающих в столовой;
с) школьников, которые приносят еду из дома; д) администрации школы.
- 2) Какой вариант выбора позволит вам дать наиболее точный прогноз об изучаемом объекте? Определите вид выбора.
- 1) Для того, чтобы определить время, которое посетители столовой находятся на обеде, на квитанции одного из каждых 10 человек была сделана специальная метка.
2) Для определения места постройки нового футбольного стадиона опросили игроков одной команды.
3) Работники муниципалитета провели опрос, отражающий мнение населения по поводу того, как они относятся к выгулу собак в парке. Для этого они узнали мнения 50 человек, у которых есть собаки.
- 3) В следующих заданиях определите совокупность (популяцию) и выбор. Определите, на сколько правильно выбраны представители популяции и ответьте на вопросы.
- 1) Среди населения одного из районов был проведён опрос, позвонив по телефону 1-му из каждых 10-ти домов. В результате опроса было установлено, что в каждых 2-х из 10 домов этого района имеется по два телевизора. Предположительно в скольких из 100 домов этого района имеется по два телевизора?
2) Среди 100 человек, выбранных по телефонному справочнику, был проведён опрос по поводу качества интернет-услуг определённого провайдера. Недовольными оказались каждые 3 из 4-х. Сколько процентов пользователей недовольны услугами? Если к этому поставщику подключено 155 000 пользователей, то можно ли узнать, сколько из них недовольны услугами?
- 4) Решите задачу на основе результатов проведённого исследования. Как вы считаете, сколько из всех студентов, которые учатся в вашем институте, ответили бы «да» при опросе? Решите задачу при помощи пропорции.

Совокупность: 2000 студентов

Выбор: 40 студентов

Вопрос: есть ли необходимость в уроках физкультуры в институте?

Результаты: «да» -12 человек, «нет» -28 человек

Итог: большинство студентов считают, что в уроках физкультуры нет необходимости.

Сбор и представление информации

5

В различных частях леса случайным образом были выбраны и измерены длины обхвата стволов деревьев. Результаты были представлены в виде таблицы. Выполните следующие задания по данным таблицы и составьте гистограмму.

Деревья, выбранные из леса «Джейранкечмяз»		
Длина обхвата ствола (см)	Палочки	Количество
21 - 30		8
31 - 40		28
41 - 50		35
51 - 60		16
61 - 70		8
71 - 80		5

- Сколько процентов всех выбранных случайным образом деревьев имеют обхват ствола 41-50 см?
- Если общая площадь леса 550 га и на каждые 10 м² приходится 3 дерева, то сколько деревьев в лесу с обхватом ствола 71-80 см?
- Как бы вы собирали и фиксировали информацию, если бы вам пришлось проводить данное исследование? Как вы думаете, почему в данном задании для сбора информации использовались палочки?

6

В таблице представлена информация о расходах одной семьи за месяц. Составьте круговую диаграмму по следующим правилам.

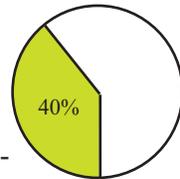
1. Определите часть диаграммы для каждой информации.

Например, 40% от 360°, составляет 0,40:

$$0,40 \cdot 360^\circ = 144^\circ$$

Расход	% бюджета
Еда	40%
Одежда	15%
Транспорт	10%
Услуги	15%
Прочие	20%

2. Начертите круг и проведите его радиус. Постройте углы при помощи транспортира. 3. Каждой части запишите соответствующее данной части название и число.

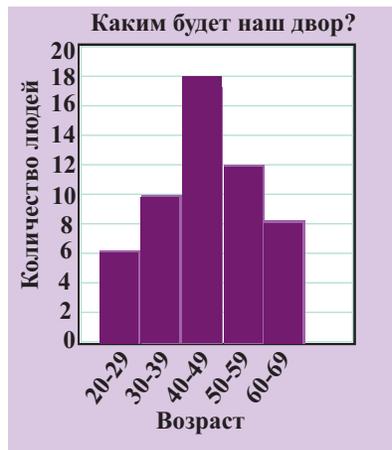


1) Бюджет семьи за месяц составляет 960 манатов. Расходы каких двух частей вместе составляют $\frac{3}{5}$ части? Сколько манатов составляют эти расходы?

2) В этом месяце семья сэкономила по 10 % от каждого из пунктов бюджета - на одежду и прочие расходы, и потратила полученную сумму на продукты. Перечертите таблицу в тетрадь и принимая во внимание представленную выше информацию, дополните ее столбцом, выразив суммы в манатах.

Сбор и представление информации

7 Жители многоквартирного дома собрались для того, чтобы вынести решение о том, нужно или нет сносить автомобильную стоянку. Возраст и количество жильцов представлен в виде гистограммы на рисунке. Постройте круговую диаграмму, соответствующую данной гистограмме.



1. Найдите общее количество жильцов, принимавших участие в прениях
 $6 + 10 + 18 + 12 + 8 = 54$

2. Найдите отношение каждой возрастной группы к общему количеству участников **возрасте 20-29 лет**: $6 : 54 \approx 0,11$

3. Найдите часть круга, соответствующую данному отношению.
 $0,11 \cdot 360^\circ = 39,6^\circ \approx 40^\circ$

4. Представьте информацию в виде круговой диаграммы.

5. Результаты обсуждения представлены в виде таблицы.

В виде какого типа графика целесообразнее представить данные, представленные в таблице?

Представьте в виде графика, который вы считаете наиболее подходящим в данной ситуации.

Возраст	Оставить	Снести
20-29	35%	65%
30-39	55%	45%
40-49	60%	40%
50-59	52%	48%
60-69	50%	50%

8 В личной библиотеке Назима 250 художественных книг, 125 научно-технических, 25 энциклопедий и словарь.

1) Составьте круговую диаграмму, соответствующую данным.

2) Придумайте реальную жизненную ситуацию и представьте её в виде круговой диаграммы.

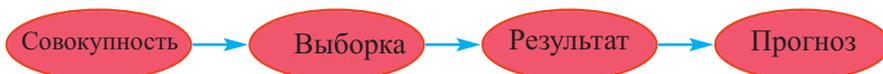
9 Придумайте тему для исследования. Определите совокупность и выбор. Придумайте примеры как на случайный выбор, так и на системный. Обсудите, что ваш выбор действительно представляет совокупность.

Определите совокупность

Сделайте выбор

Сделайте выводы на основе выбора

По полученным результатам сделайте вывод о совокупности



Сбор и представление информации

Обработка информации, зависящей от двух параметров

Во многих случаях при исследовании одного объекта приходится анализировать два вида информации. Эту информацию удобнее представить в виде таблицы.

Приведём пример, в котором будет показано правило составления таблицы для информации, зависящей от двух параметров.

Пример 1. Между 100 работниками фирмы проводился опрос по поводу того, в какой из летних месяцев и куда они собираются поехать. Результаты исследования представлены в виде таблицы, состоящей из двух параметров.

1. Параметры: страна и месяц.
2. Один из параметров – месяца, отображены в строках, другой – страны, отражены в столбцах.
3. В ячейке, где пересекаются столбец и строка размещено число, зависящее от двух параметров. Например, число 18 в таблице показывает количество людей, которые хотят провести отпуск в Турции.
4. Числовая информация об общем количестве за каждый месяц и в каждую страну записывается в ячейке «всего».

		Страна			Количество отдыхающих по месяцам:
		Турция	Страны Европы	Россия	
Месяцы	Июнь	18	6	5	29 ← Июнь
	Июль	10	2	19	31 ← Июль
	Август	15	15	10	40 ← Август
	Всего	43	23	34	100

Количество отдыхающих за 3 месяца в каждой стране:

↑ Турция ↑ страны Европы ↑ Россия

10 Ответьте на вопросы по данным задания - примера.

1. Какой процент опрошенных хочет взять свой отпуск в июне?
2. Какой процент опрошенных хочет провести свой отпуск в Турции?
3. Можно ли по данным опроса определить, приблизительно сколько из 1250 человек хотят провести отпуск в Европе?

11 1. Среди мужчин и женщин, которые сдают экзамен для получения водительского удостоверения был проведён опрос о том, смогли ли они набрать на первом экзамене достаточное количество баллов. Опрос проводился среди 50-ти человек. Всего в опросе принимали участие 22 женщины, из которых 16 не смогли получить удостоверение в первый раз. Из всех привлечённых к опросу мужчин, 18 сдали экзамен с первого раза. Составьте таблицу, зависящую от двух параметров. Параметры:

1. Гендер – мужчины, женщины.
2. Первый экзамен - получили удостоверение, не получили.

Сбор и представление информации

Информацию, зависящую от двух параметров, можно представить в виде разделённого на части барграфа.

Пример 2. Среди 54 учащихся был проведён опрос о том, хотят ли они заниматься спортом или музыкой.

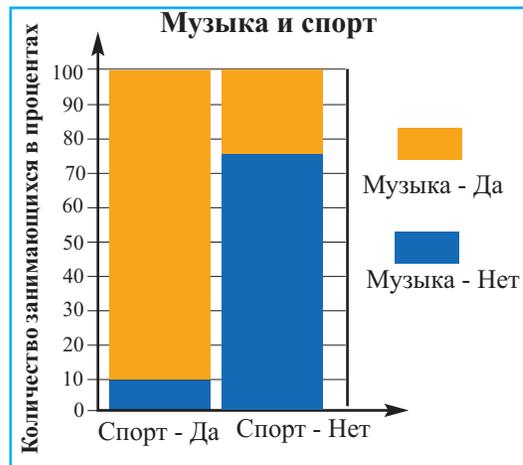
Ученики занимающиеся музыкой и спортом

		Музыка		
		да	нет	Всего
Спорт	да	27	3	30
	нет	6	18	24
	Всего	33	21	54

1) Сколько процентов по результатам опроса занимаются и музыкой, и спортом?

2) Сколько процентов учащихся занимаются музыкой, а спортом не занимаются?

3) Соответствующую информацию можно представить в виде барграфа в процентах, как показано на рисунке. Представьте цветные части на барграфе зная, что они соответствуют данным в таблице.



12» В школе было проведено исследование, где изучали вопрос о том, кто помогает учащимся начальных классов при выполнении домашнего задания-родители, или специальные педагоги.

	Родители - да	Родители - нет	Всего
Специальные педагоги – да	24	16	
Специальные педагоги - нет	48	12	
Всего			100

1) Сколько процентов родителей учащихся, которые выполняют домашнее задание со специальным педагогом, не занимаются со своими детьми?

2) Сколько процентов учащихся выполняют домашнее задание при помощи родителей, нет необходимости в специальном педагоге?

3) Заполните таблицу и постройте барграф, как в примере 2.

Диаграмма рассеяния

Диаграмма рассеяния или точечная диаграмма используется для демонстрации наличия или отсутствия взаимосвязи между двумя величинами. Взаимосвязь двух случайных величин называется **корреляцией**. Суть её заключается в том, что при изменении значения одной переменной происходит закономерное изменение другой переменной.

При **положительной корреляции** возрастание одной переменной вызывает увеличение другой.

Отрицательная корреляция имеет место, когда увеличение одной переменной связано с уменьшением другой.

Возможна также ситуация **отсутствия корреляции**.

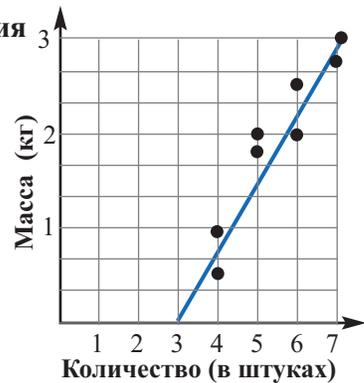
Пример 1

Положительная корреляция

На рисунке показана диаграмма, которая показывает зависимость между количеством гранатов в связке и их массой.

Диаграмма рассеяния построена с помощью данных из таблицы. На оси абсцисс показано количество (в штуках), на оси ординат масса (кг) каждой связки. Из диаграммы видно, что одинаковое количество граната может иметь разную массу. Иначе говоря, между этими переменными нет однозначной зависимости. Но при этом по диаграмме видно, что с увеличением количества граната увеличивается и масса связки.

Количество (в штуках)	Масса (кг)
4	0,5
4	1
5	1,8
5	2
6	2
6	2,5
7	2,8
7	3

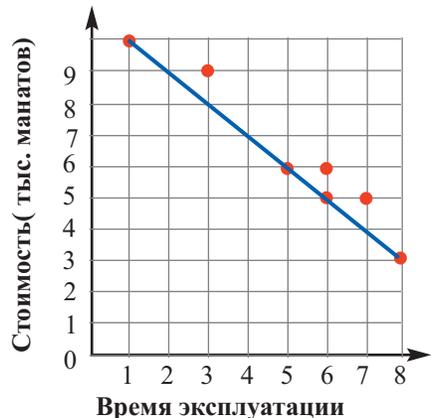


Пример 2

Отрицательная корреляция

В таблице и на диаграмме представлена зависимость между временем эксплуатации автомобиля и его стоимостью.

Время эксплуатации	Стоимость (тыс. манатов)
1	10
3	9
5	6
6	6
6	5
7	5
7	4
8	3

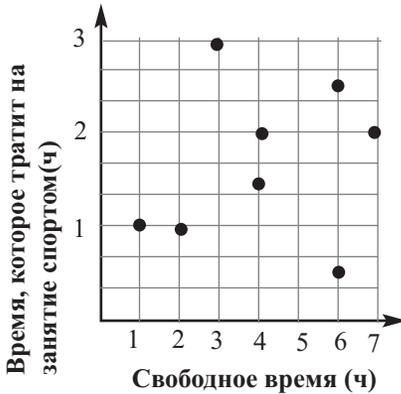


Чем больше срок эксплуатации автомобиля, тем меньше его стоимость. Эта зависимость между двумя переменными является отрицательной корреляцией.

Сбор и представление информации

Пример 3 В таблице и на диаграмме представлено время, которое Насиб тратит на занятие спортом и свободное время.

Зависимости нет (корреляция отсутствует)

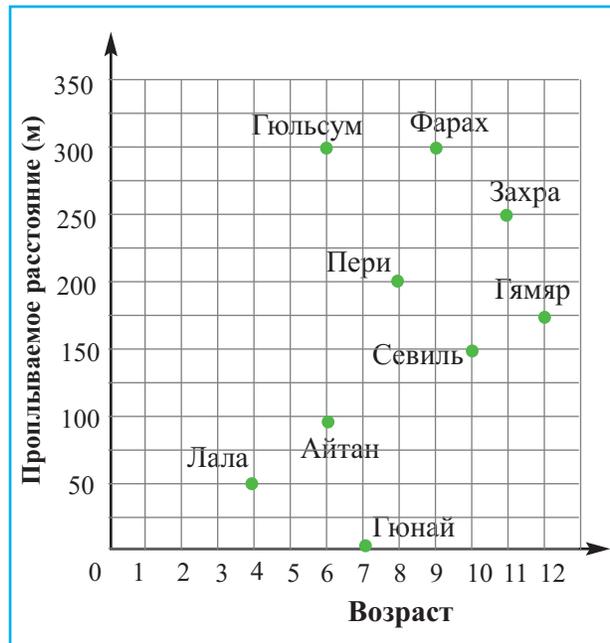


Свободное время	Время, которое тратит на занятие спортом
1	1
2	1
3	3
4	2
4	1,5
6	0,5
6	2,5
7	2

Измените данные в таблицах из примеров 1, 2 и 3 и постройте точечные диаграммы.

13 На точечной диаграмме представлена зависимость между возрастом девочек и расстоянием, которое они проплывают на тренировке. Ответьте на вопросы по диаграмме.

- 1) Кто из проплывших расстояние 300 м младше всех по возрасту?
- 2) Кто не умеет плавать?
- 3) Кто из девочек младше всех по возрасту?
- 4) Кто из шестилетних пловчих показывает лучшие результаты?
- 5) Кто может проплыть дальше: Захра, Лала или Пери?
- 6) Есть ли связь между возрастом девочек и расстоянием, которое они могут проплыть?



Меры центральных тенденций

Исследование. На диаграмме отражена информация о том, сколько времени ежедневно учащиеся проводят перед телевизором.

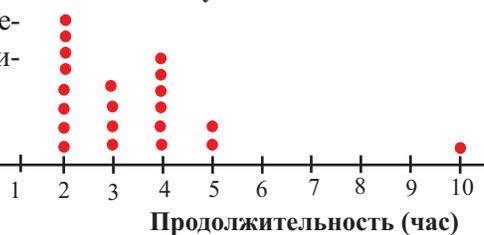
1 • = 1 учащийся

1) Найдите среднее арифметическое, моду, медиану и наибольшую разность.

2) Найдите среднее арифметическое, не используя данные, соответствующие 10 - ти часам.

3) По диаграмме определите наиболее плотный интервал с информацией, пустые интервалы и сильно отличающуюся информацию.

Количество учащихся



Меры центральных тенденций

Среднее арифметическое, мода и медиана являются мерой центральных тенденций и вместе с наибольшей разностью широко применяются в статистике. Для представления статистических данных правильное использование этих данных играет очень важную роль. Какие статистические показатели наиболее подходят для применения в различных случаях?

Среднее арифметическое: нет резкого отклонения

Медиана: есть резкое отклонение

Мода: есть много повторяющейся информации

Рассмотрим, какие меры используются в различных ситуациях.

1) Пробег, который совершил Самир за 5 дней: 3, 5, 4, 5, 6. **Среднее арифметическое.**

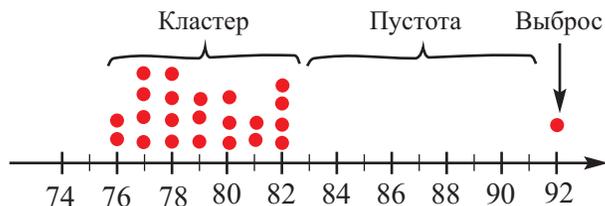
2) Возраст 6 человек в одной группе: 11, 14, 12, 12, 11, 32. **Медиана.**

3) Доход за 6 месяцев (в манатах): 325, 320, 300, 325, 325, 4000. **Мода**

Кластер, пустота, отклонение

Иногда информация собирается в маленький интервал, который называется **кластером**. Интервал, в котором нет информации, называется **пустым интервалом**. Данные, которые сильно отличаются от числовых значений известных данных называются **выбросами**.

Баллы, набранные учениками



Например, по диаграмме видно, что больше всего учеников набрали баллы в интервале от 76 до 82. Данный интервал является кластером. Интервал 83-91 является пустотой, а 92 балла является выбросом.

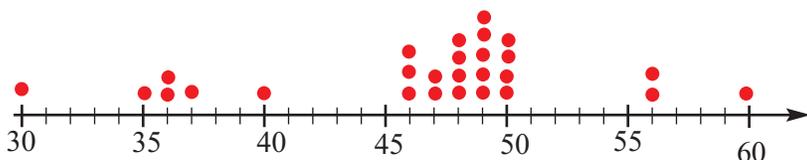
Меры центральных тенденций

- 1) Ниже представлено количество дней, которые пропустили учащиеся класса во время учёбы за год.

4, 3, 2, 5, 4, 6, 3, 5, 7, 5, 18, 3, 3, 6, 3, 6, 2, 5

Составьте диаграмму, расположив числовые данные, как было показано выше. Найдите соответствующие значения: а) среднего арифметического, моды и медианы; б) кластера, пустого интервала, выброса.

- 2) На диаграмме представлен возраст сотрудников фирмы. По диаграмме найдите средний возраст сотрудников. Определите средний возраст в интервале с наибольшей плотностью. Сравните полученные результаты.



- 3) Ниже представлена информация о том, сколько часов работал каждый работник в течение недели.

25, 36, 18, 43, 40, 38, 39, 40, 16, 30, 24, 29, 30, 45, 42, 15, 20, 28

- а) Составьте таблицу, распределив данные по интервалам 16-20, 21-25, 26-30, 31-35, 36-40, 41-45; б) В какой интервал попадает медиана? в) В какой интервал попадает среднее арифметическое?

- 4) 1) Для каждого отдельного случая в письменной форме определите, изменяется или нет медиана, если она равна 16 и добавляется к следующим числам. а) 15 и 17; б) 14 и 18; в) 18 и 21; г) 13 и 12
2) Для каждого отдельного случая в письменной форме определите, изменяется или нет среднее арифметическое, если для следующих чисел оно равно 16. а) 15 и 17 б) 14 и 18 в) 18 и 21; г) 13 и 12

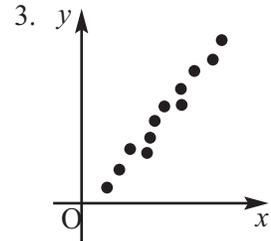
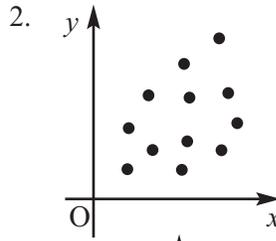
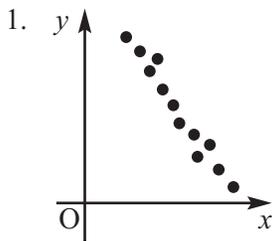
- 5) В таблице представлена информация о времени, за которое некоторые птицы выводят птенцов (время инкубации)

- а) Найдите для периода инкубации-среднее арифметическое, моду, медиану и наибольшую разность.
б) Заполните таблицу, найдя разность между средним арифметическим и временем инкубации.
в) Для сравнения времени, за которое выводят птенцов страус и голубь, используйте наибольшую разность.

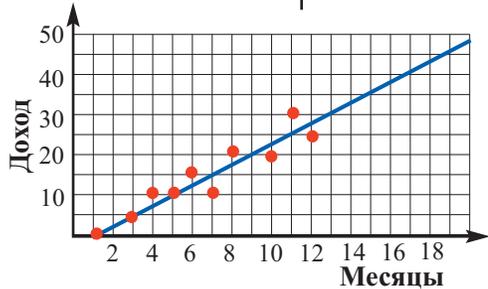
Название птицы	Период инкубации (дней)	Разность между средним арифметическим и периодом инкубации
Курица	21	
Утка	28	
Гусь	28	
Страус	40	
Попугай	24	
Фазан	24	
Голубь	15	
Перепел	19	
Аист	34	
Индюк	28	

Обобщающие задания

- 1) Определите вид корреляции для каждой диаграммы рассеивания и составьте соответствующие задачи.



- 2) На диаграмме рассеивания представлен доход фирмы за первый год деятельности. Какие предположения о наименьшей прибыли фирмы на 16-ом месяце были бы более реальны по данной диаграмме?



- 3) В магазине, в связи с сезонной распродажей, была обработана и представлена информация об оставшемся товаре в виде таблицы. Дополните таблицу и выполните задания. 1) Сколько спортивных маек зелёного цвета осталось в магазине?

2) Рубашки какого размера правильнее было бы заказать для следующего сезона?

3) Рубашки сложены друг на друга случайным образом. Найдите вероятность, что произвольным образом взятая рубашка будет размера L и синего цвета.

		Размер					всего
		S	M	L	XL	XXL	
Цвет	Белый	3	1	2	1	3	
	синий	2	0	2	1	2	
	зеленый	3	1	3	0	2	
	чёрный	1	0	1	0	1	
	всего						

- 4) Учащиеся 8-го класса должны выполнить два тестовых задания по теме процент и отношения. В таблице представлена информация о баллах, которые получили 10 учащихся.

1) Сколько учащихся показали результат второго теста минимум на 10% больше результата первого?

2) Сколько процентов от максимального балла набрал ученик с самым высоким баллом за тест?

3) Представьте являются ли эти результаты в целом хорошими или плохими, при помощи среднего арифметического, моды и медианы.

Имя	Наивысший возможный балл - 50	
	1-ый тест	2-ой тест
Али	38	35
Лала	34	38
Айтан	42	46
Аян	26	30
Иса	30	28
Самир	18	19
Наиля	21	24
Керим	45	40
Тахир	48	44
Гюнель	38	36

Вычисление вероятности

Экспериментальное определение вероятности

Экспериментальная вероятность находится на основе повторяющегося эксперимента.

$$P(\text{события}) = \frac{\text{Число испытаний, в которых это событие наступило}}{\text{Число всех испытаний}}$$

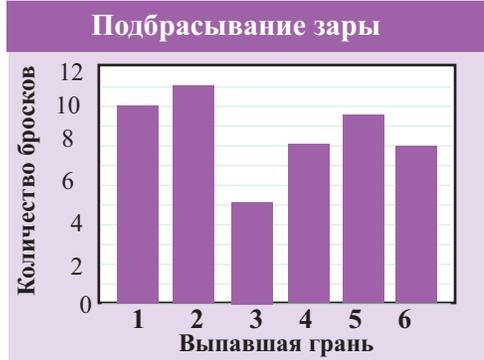
Пример 1. На барграфе представлены результаты при бросании одного зара 50 раз. Чему равна вероятность, что при бросании зара выпадет нечётное число?

По барграфу видно, что 10 раз выпала «1», 5 раз-«3», 9 раз-«5». Количество благоприятных событий, при которых выпало нечётное число, $10+5+9=24$ количество всех событий: 50

$$P(\text{нечётное число}) = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

Вероятность того, что выпадет нечётного число, полученная в результате эксперимента

равна: $\frac{12}{25}$, 0,48 или 48%.



Теоретическая вероятность

В результате опыта (испытания, наблюдения) наступают некоторые события. События, которые нельзя разделить на более простые, называются элементарными событиями. В результате опыта обязательно наступает только одно элементарное событие. Например, при подбрасывании игральной кости может произойти одно из 6-и элементарных событий. Сумма вероятностей элементарных событий равна единице. Событие-это некоторое множество элементарных исходов. Например, при подбрасывании игральной кости событие “выпало составное число очков” состоит из двух элементарных событий; “выпало 4 очка”, “выпало 6 очков”.

Элементарные события, при которых наступает событие А, называются элементарными событиями, благоприятствующими событию А.

В опыте с равновозможными исходами вероятность события находится по правилу:

$$P(\text{события}) = \frac{\text{Число благоприятных исходов события}}{\text{Число всех равновозможных событий}}$$

Численное значение вероятности случайных событий расположено в интервале от 0 до 1. Сумма вероятностей, что событие произошло и не произошло равна 1.

$$P(\text{событие А произошло}) + P(\text{событие А не произошло}) = 1$$



Вычисление вероятности

Использование теоретической вероятности

Пример 2. На колесе фортуны три сектора с призом в 1000 манатов. Шанс, что при вращении колеса выпадет выигрышный сектор равен $\frac{1}{10}$. Сколько всего секторов на колесе?

Решение: обозначим общее количество секторов через n .

$$P(\text{приз}) = \frac{\text{количество секторов с призом}}{\text{общее количество секторов}} = \frac{1}{10}; \frac{1}{10} = \frac{3}{n}; n = 30$$

Сравнение теоретической и экспериментальной вероятностей.

Пример 3. На барграфе представлена информация о событиях, которые происходят при бросании одной зары. Найдите вероятность выпадения нечётного числа.

$$P(\text{нечётное число}) = \frac{148}{300} = \frac{37}{75} \approx 0,49$$

← количество случаев выпадения нечётно-
← количество испытаний



Сравните теоретическую и экспериментальную вероятности.

Теоретическая вероятность:

$$P(\text{нечётное число}) = 50\%$$

Экспериментальная вероятность:

$$P(\text{нечётное число}) = 49\%$$

Экспериментальную вероятность сравним с результатом в Примере 1.

При увеличении количества экспериментов вероятность стремится к теоретической вероятности. Количество экспериментов увеличилось с 50 до 300, вероятность возросла с 48% до 49% и ещё больше приближается к теоретической вероятности.

- 1» Используя барграф примера 3, найдите экспериментальную вероятность выпадения числа, меньше 4. Сравните полученную вероятность с теоретической вероятностью.
- 2» Для праздника Новруз Лала случайным образом выбрала 4 из 50 открыток, причём 2 открытки были с цветами. Верно ли, что по этим данным можно узнать сколько всего открыток с цветами есть среди всех 50?
- 3» В рекламном шоу, которое было проведено фирмой, выпускающей соки, на этикетке каждой коробки были размещены денежные призы и подарки. Вероятность денежного выигрыша $\frac{3}{10}$. Сколько всего коробок с соком было разыграно, если известно, что в 9 из них были призы?
- 4» Проведите эксперимент по подбрасыванию двух монет и подсчитайте, сколько раз монеты упали лицом на цифру, а сколько раз на карту. Заполните в тетради таблицу.

Теоретическая вероятность	Количество испытаний	Ожидаемый результат	Действительный результат	Экспериментальная вероятность
	20			

Вычисление вероятности

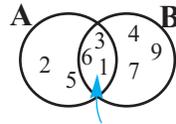
Решение задач на вероятность при помощи диаграммы Венна.

Во многих задачах для нахождения количества возможных и благоприятных событий удобнее использовать диаграмму Венна. В этом случае для количества элементов объединения и пересечения множеств справедливы следующие утверждения.

Количество элементов объединения множеств A и B равно разности суммы количества элементов каждого множества и количества общих элементов множеств. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

В частном случае, если $A \cap B = \emptyset$, тогда $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Пример. Пусть даны множества $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$,
 $B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Обозначим количество элементов множества A через $n(A)$, а количество элементов множества B через $n(B)$. Тогда при $n(A) = 5$, $n(B) = 6$ и $n(A \cap B) = 3$,
 $n(A \cup B) = 5 + 6 - 3 = 8$



- 5** >> Если $n(A) = 12$, $n(B) = 7$, то чему равно: а) наименьшее значение $n(A \cup B)$? б) наибольшее значение $n(A \cup B)$?
- 6** >> Найдите количество элементов заданных множеств.
- | | | |
|-----------------------|------------------------------|----------------------------------|
| $n(A) = 8, n(B) = 13$ | $n(A) = 8, n(A \cup B) = 17$ | $n(A) = 10, n(A \cup B) = 15$ |
| $n(A \cup B) = 18,$ | $n(A \cap B) = 4, n(B) = ?$ | $A \cap B = \emptyset, n(B) = ?$ |
| $n(A \cap B) = ?$ | | |
- 7** >> Участники научной конференции могут говорить на английском, немецком и французском языках. На английском могут разговаривать 21 человек, на немецком - 12, а на французском 8. Английский и немецкий язык знают 6 человек, немецкий и французский 4 человека, английский и французский 3 человека. 2 человека умеют говорить на всех трёх языках. Сколько всего участников на конференции?

- 8** >> На диаграмме Венна показано количество учащихся, занимающихся шахматами и теннисом. Найдите вероятность, что случайно выбранный ученик занимается:
- только шахматами;
 - только теннисом;
 - и теннисом, и шахматами;



- 9** >> На диаграмме Венна показано количество учащихся, занимающихся в кружках. Найдите вероятность того, что случайным образом выбранный ученик занимается:
- во всех трех кружках;
 - только в кружке по рисованию;
 - или в театральном, или танцами;
 - и рисованием, и танцами.



Число возможных событий

Число возможных событий

Во многих задачах, например, при бросании одновременно двух или более зар, металлической монеты и зар, для нахождения числа всех возможных исходов и благоприятных исходов, возникает необходимость просчитать различные варианты возможных комбинаций. Эти варианты можно посчитать при помощи: 1) разветвляющейся диаграммы; 2) задания списка; 3) таблицы; 4) правила умножения.

Правило умножения: если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то упорядоченную пару (a, b) можно выбрать $m \cdot n$ способами. Это правило справедливо при выборе 3-х и более элементов.

Пример 1. При помощи таблицы.

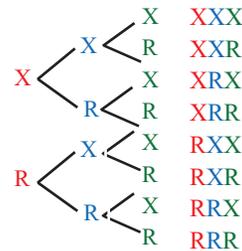
Если подбросить одновременно монету и зар, то количество возможных событий-12.

По правилу умножения имеем: при подбрасывании монеты возможно 2 события ($m = 2$), при подбрасывании зары - 6 ($n = 6$). Количество возможных событий в этом случае равно: $2 \cdot 6 = 12$.

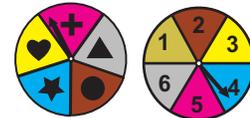
4 5	1	2	3	4	5	6
	1R	2R	3R	4R	5R	6R
	1X	2X	3X	4X	5X	6X

Пример 2. При помощи построения разветвляющейся диаграммы. Если подбросить одновременно 3 монеты, то количество возможных событий-8.

По правилу умножения имеем: для каждой монетки количество возможных событий равно 2. тогда для трёх монеток- $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



- 10** 1) Найдите количество возможных событий при вращении колес, изображённых на рисунке.
2) Найдите вероятность того, что стрелка одного колеса остановится на звёздочке, а другого - на цифре 5.



- 11** Вычислите по правилу умножения количество возможных вариантов выбора для музыкального центра.

Музыкальный центр MP3	
Память	8 GB, 12 GB, 16 GB, 24 GB
Цвет	серебряный, золотой, чёрный, коричневый

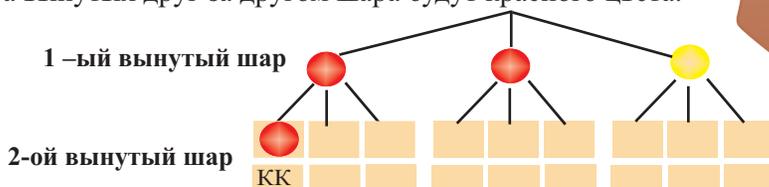
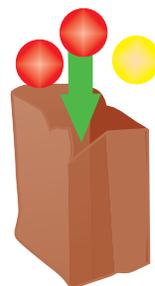
- 12** Даны цифры 0,1,2,3,4. Сколько можно составить:
а) четырёхзначных чисел;
б) четырёхзначных чисел, все цифры которых различны;
с) четырёхзначных чисел, в которых хотя бы две цифры одинаковы?
- 13** В классе 15 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?
- 14** Найдите вероятность, что одновременно произойдут следующие события: зар выпадет цифрой 5 вверх, а стрелка на колесе остановится в красной области. Найдите вероятность того, что это событие не произойдет.



Зависимые и независимые события

Эксперимент 1

В мешке 2 красных и один жёлтый шар. Представьте, что вы вытаскиваете два шара друг за другом. Каждый раз фиксируете цвет шара и снова кладёте его в мешок. Заполните разветвляющуюся диаграмму при помощи главных букв в названии цвета. Найдите вероятность, что оба вынутых друг за другом шара будут красного цвета.



Зависит ли цвет второго вынутого шара от цвета первого вынутого шара?

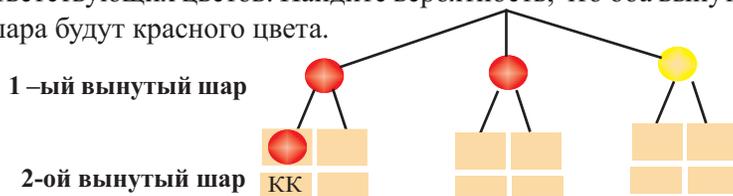
Независимые события

Если результат появления одного события не влияет на результат появления другого события, то такие **события называются независимыми**. Например, подбрасывая зар и монету одновременно, событие, на какую из сторон упадёт зар, не зависит от события, на какую из сторон упадет копейка.

Вероятность двух и более независимых событий равна произведению вероятностей каждого события и записывается как $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$ или $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Аналогичным образом записывается и вероятность 3-х независимых событий. $P(A, B \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Эксперимент 2

Представьте себе, что в мешке опять есть 2 красных и 1 жёлтый шар. Каждый раз вы вытаскиваете из мешка шар и фиксируете его цвет, но при этом не возвращаете шар в мешок. Заполните разветвляющуюся диаграмму элементарных событий, при помощи первых букв соответствующих цветов. Найдите вероятность, что оба вынутых друг за другом шара будут красного цвета.



Зависит ли цвет шара, который был вытащен во второй раз, от цвета шара, который вытащили в первый раз?

Зависимые события

Если результат появления одного события влияет на результат появления другого события, то такие события называются зависимыми. Например, если из 100 карт в мешке 10 подарочные, то результат того, что в первой попытке выпадет карта с подарком, влияет на результат других попыток. Вероятность двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности события A и вероятности события B после того, как произойдёт событие A .

$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(\text{события } B \text{ после того, как произошло событие } A)$

Зависимые и независимые события

Пример 1. Независимые события. Одновременно подбрасывается монета и зар. Найдём вероятность события, что при подбрасывании, монета упадёт вверх картой, а на заре при этом появится простое число.



Вероятность появления карты при бросании монеты равна:

$P(\text{к.}) = \frac{1}{2}$, а выпадения простого числа (2, 3, 5). при подбрасывании зары равна: $P(\text{пр.}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $P(\text{к. и пр.}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Т. е. вероятность по

явления карты и простого числа равна $\frac{1}{4}$, 0,25 или 25 %.

Пример 2. Зависимые события. Участники игры отбираются случайным образом из 100 участников телешоу. 5 родственников и 9 школьных товарищей Теймура наблюдают за программой в студии. Какова вероятность, что при отборе в первый раз выберут одного из родственников Теймура, а во второй раз – его школьного товарища?

Вероятность выбора родственника при первом отборе:

$$P(\text{родственник}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Вероятность выбора друга при втором отборе: $P(\text{друг}) = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$

Применим формулу нахождения вероятности зависимых событий.

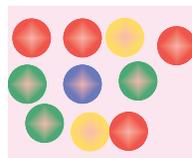
$P(\text{родственник и друг}) = P(\text{родственник}) \cdot P(\text{друг после выбора родственника})$

$$P(\text{родственник и друг}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{220}$$

Обучающие задания.

- 1**» Какие из следующих событий являются зависимыми, а какие независимыми? а) При подбрасывании подряд металлической монеты два раза она оба раза упала картой вверх; б) При вытаскивании из колоды двух карт одну за другой (не возвращая их на место) обе карты окажутся одинакового цвета.

- 2**» В мешке имеется 10 шаров. Из них 4 красных, 3 зелёных, 2 жёлтых и 1 синий. Вы вытаскиваете друг за другом два шара. Найдите вероятность при следующих условиях. В каком случае события зависимые, а в каком независимые?



- 1) Не возвращая P (красный и зелёный)
- 2) Возвращая P (жёлтый, жёлтый)
- 3) Не возвращая P (красный и синий)
- 4) Возвращая P (зелёный и красный)
- 5) Не возвращая P (синий и зелёный)
- 6) Возвращая (красный, красный)

Зависимые и независимые события

- 3» Одновременно начинают крутить два колеса фортуны. Найдите вероятность, что стрелка обоих колёс остановится на нечётных числах.



- 4» При розыгрыше призов попытка сначала была предоставлена Фидан. Найдите вероятность того, что она выиграет билет в кино. После чего попытка была предоставлена Улькер. Какова вероятность, что и Фидан и Улькер выиграют билеты в кино?

Призы	Количество
Билет в кино	4
Спортивная рубашка	8
Музыкальные CD диски	5

- 5» На столе лицом вниз разложены карты, на которых написаны следующие числа. Сначала берётся одна карта, затем другая. Найдите вероятность того, что :
а) на обеих картах чётные числа; б) на одной из карт число больше 6, а на другой – меньше 6.



- 6» В коробке имеются шары, на которых написаны буквы А и N. Количество шаров, на которых написана буква А, на 1 больше количества шаров, на которых написана буква N.

1) Сколько всего шаров в коробке, если вероятность, что на шаре, который случайным образом вынули из коробки, написана буква N, равна 0,4?

2) Из ящика последовательно вытащили 3 шара, каждый раз возвращая их обратно. Какова вероятность того, что последовательно записывая буквы на шарах в тетрадь получим слово “ANA” ?

3) Из ящика последовательно вытащили и сложили в ряд 3 шара, .Какова вероятность того, что буквы написанные на этих шарах образуют слово “ANA”?

- 7» 120 из 200 автомобилей на одной стоянке имеют неисправность в системе освещения, а 80 из 150 автомобилей на другой стоянке имеют проблемы с мотором. Остальные автомобили не имеют дефектов. С каждой стоянки выбирается один автомобиль. Какова вероятность того, что у одного автомобиля имеются проблемы с мотором, а у другого проблемы со светом?

- 8» Учитель должен случайным образом разделить детей на группы и выбрать лидера каждой группы. Шанс Лейлы, что она станет лидером в своей группе равен $\frac{1}{15}$. Вероятность, что лидером группы окажется и Лейла и её близкая подруга равна $\frac{1}{165}$.

1) Найдите вероятность, что лидером окажется подруга Лейлы?

2) Сколько учеников в классе, где учится Лейла?

- 9» **Задание открытого типа.** В мешке 9 шаров трех разных цветов. Из мешка случайно берут подряд два шара (без возврата). Придумайте такое событие в задаче, чтобы его вероятность была равна $\frac{1}{6}$.

Обобщающие задания

1) Зарплата работников одного магазина равна 250 ман., 200 ман., 240 ман. и 2500 ман. Сколько в среднем составляет заработная плата работников магазина? Является ли найденный вами результат верным при оценке зарплаты всех работников?

2) Среднее арифметическое чисел равно 14. Добавьте ещё два числа так, чтобы при этом среднее арифметическое не изменилось.

3) Какие пары чисел показывают вероятность того, что событие произошло и не произошло?

- 1) $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{4}{6}$ и $\frac{1}{3}$ 3) 0,875 и $\frac{1}{8}$ 4) 0,65 и 0,55

4) Найдите количество элементов множеств по следующим данным.

а) Найдите $n(A \cap B)$, если $n(A \setminus B) = 6$, $n(B \setminus A) = 7$, $n(A \cup B) = 17$.

б) Найдите $n(B \setminus A)$, если $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cup B) = 18$.

5) Найдите количество всех наборов, которое можно выбрать по таблице, если набор будет состоять из одного жидкого блюда, одного основного блюда и одного десерта.

Жидкое блюдо	Основное блюдо	Десерт
Суп из курицы	Котлеты	Кята
Суп из мяса	Жареная рыба	Пахлава
	Долма	

6) В таблице представлена информация о книгах в школьной библиотеке. Найдите вероятность следующих событий:

- Случайным образом взятая книга будет в твёрдом переплёте, цветная и с рассказами;
- Случайным образом взятая книга чёрно - белая и с поэзией;
- Случайным образом взятая книга будет в мягком переплёте.

		Цветная	Чёрно-белая
Твёрдый переплёт	Рассказы	150	420
	Поэзия	90	240
Мягкий переплёт	Рассказы	450	500
	Поэзия	270	280

7) На рисунке представлена диаграмма результатов опроса среди случайно выбранных учащихся школы на вопрос «Сколько фильмов вы смотрите за неделю?»

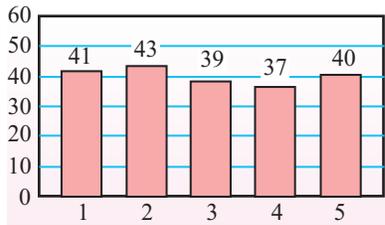
а) Сколько учащихся школы смотрят в неделю 1 фильм, если всего их 1500 человек?

б) Найдите вероятность, что если из 75 учащихся случайным образом выбрать двоих, то первый из них смотрит один фильм, а другой - два и более фильмов.



Обобщающие задания

- 8) 1) Колесо фортуны было прокручено 200 раз и результаты, полученные при этом представлены на барграфе. Сравните по данным результатам теоретическую и экспериментальную вероятность того, что колесо остановилось:



- 1) на цифре 5;
- 2) на цифре 2;
- 3) на цифре, больше 3.



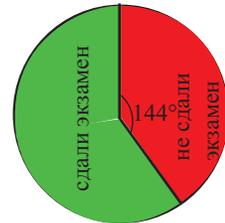
Можете ли вы при помощи теоретической или экспериментальной вероятности дать прогноз количеству результатов, при которых стрелка остановится на цифре 3, если будет произведено 20000 испытаний?

- 9) Сначала, не заглядывая в коробку, один карандаш вытащил Аслан, а после него Эмин. Найдите вероятность, что оба карандаша окажутся синего цвета.



- 10) На диаграмме представлена информация о результатах экзамена для получения прав на вождение.

- 1) Если экзамен не смогли сдать 6 человек, то сколько человек смогли сдать экзамен?
- 2) Найдите вероятность того, что случайным образом выбранные 2 человека, оба удачно сдали экзамен.



- 11) Анар не знает ответа на три вопроса в тесте и выбирает их случайным образом. В каждом вопросе есть 4 варианта ответов. Какова вероятность того, что Анар ответил: а) на все три вопроса верно; б) на все три вопроса неверно; в) на первый вопрос верно, а на оставшиеся два - неверно; г) на первые два вопроса верно, а на оставшийся один - неверно; д) на два вопроса верно, а на один - неверно.

Дайте и вы ответы на эти вопросы.

- 1) В каком году впервые была провозглашена независимость Азербайджанской Республики?

- а) 1928 б) 1905 в) 1918 д) 1920

- 2) Какие посты не занимал Фатали Хан Хойский?

- а) министр финансов АДР
 б) министр иностранных дел АДР
 в) министр внутренних дел АДР
 г) депутат государственной думы России

- 3) Кто является композитором романса «Страна моя»?

- а) Джахангир Джахангиров б) Асаф Зейналлы
 в) Ниязи д) Фикрет Амиров

Обобщающие задания по разделам

- 1) На круговой диаграмме представлена разница между ценой, по которой покупали, и ценой, по которой продают сумки в магазине. Какую прибыль получают от продажи одной сумки, если её купили по цене 80 манатов.



- 2) Решите методом выделения полного квадрата.

1) $x^2 + 17x - 200 = 13x - 60$ 3) $2x^2 - 12x + 14 = 0$

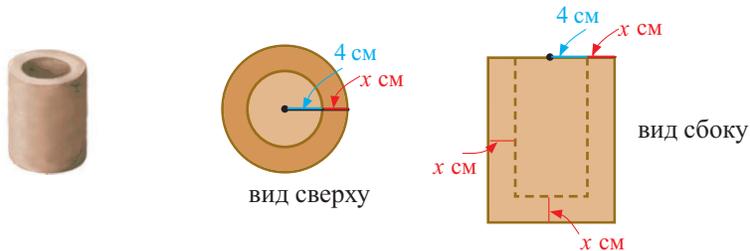
2) $x^2 + 1,8x - 0,4 = 0$ 4) $-4x^2 + 21x = x - 11$

- 3) Определите, какие прямые, проходящие через две точки, параллельны, а какие перпендикулярны?

- а) Прямая 1. А(-1; 9) и В(-6; -6) б) Прямая 1. А(4; -3) и В(-8; 1)
Прямая 2. С(-7; -23) и D(0; -2) Прямая 2. С(5; 11) и D(8; 20)

- 4) Туристы вышли из лагеря и, пройдя в направлении 8 км на север, 9 км на восток, 4 км снова на север, разбили новый лагерь. Сколько километров составляет кратчайшее расстояние между старым и новым лагерем?

- 5) На уроке технологии каждому ученику был дан глиняный шар объёмом 300 см^3 для изготовления подставки для карандашей. Подставка должна иметь форму цилиндра, длиной 10 см и внутренним радиусом 4 см. Найдите ширину стенок цилиндра, если известно, что при работе была использована вся глина. **Указание:** сначала нарисуйте в тетради рисунок. Объём глиняного шара равен разности объёмов двух цилиндров.



- 6) На ферме 120 коров породы А и 180 коров породы В. Для проверки жирности молока фермер выбрал 50 коров. Сколько представителей каждой породы должен выбрать фермер, чтобы получить наиболее правильный результат?

- 7) Найдите значение выражения.

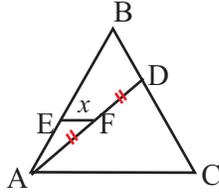
а) $\frac{4^2 \cdot 4^{-1} \cdot 5^{-2}}{4^3 \cdot 5^{-3} \cdot 5^0}$ б) $\frac{8^{-3} \cdot 9^{-2} \cdot 4^0}{3^{-4} \cdot 8^{-5} \cdot 4^{-1}}$ в) $\frac{6^{-11}}{27^{-4} \cdot 32^{-2}}$ д) $\frac{12^{-3} \cdot 6^{-5}}{81^{-2} \cdot 8^{-4}}$

- 8) Докажите равенство.

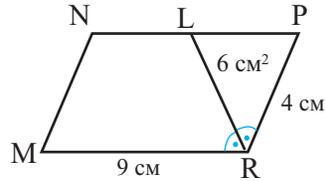
$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

Обобщающие задания по разделам

- 9** Дано: $\triangle ABC$, $EF \parallel AC$,
 $AF \cong FD$, $3 \cdot BD = 2 \cdot DC$
 $AC = 10$ см
Найдите: $EF = ?$



- 10** Дано: MNPR-параллелограмм
 RL биссектриса ($\angle R$)
 $MR = 9$ см, $RP = 4$ см
 $S_{\triangle LPR} = 6$ см²
Найдите: S_{MNLR}



- 11** 1) Найдите значение выражения $\left(\frac{b\sqrt{b}}{a^4}\right)^{-a}$, если $a = \sqrt{b} = 2$.
 2) Найдите значение выражения $(a\sqrt{b})^{-ab}$, если $a = \frac{2}{3}$ и $b = 9$.
- 12** Трапеция-это четырехугольник, у которого параллельны только две противоположные стороны. Проверьте, является ли четырехугольник с вершинами в точках $A(1;-3)$, $B(2;7)$, $C(3;9)$, $D(5;5)$ трапецией?

- 13** Решите уравнения различными методами.

$$\begin{aligned} x^2 + 13x + 35 &= x \\ 4x^2 - 35 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,01x^2 - 0,22x + 0,9 &= 0 \\ 4(x + 8)^2 &= 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 15 &= 2x \\ 3x^2 - 2x &= 6 - x \end{aligned}$$

- 14** Чтобы узнать, у кого из одноклассников есть кошка и собака, Лала провела опрос среди 10 учеников. В результате она выяснила, что 40% имеют кошек, 30% собак, а 10% имеют и кошку, и собаку. На основе этих данных заполните следующую таблицу.

	Есть собака	Нет собаки	Всего
Есть кошка	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Нет кошки	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Всего	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- 15** 1) Докажите, что медиана делит площадь треугольника на два треугольника, которые имеют одинаковые площади.
 2) Если BM медиана $\triangle ABC$ и $S_{\triangle ABC} = 48$ см², то найдите $S_{\triangle ABM}$.
 3) Если BM , CN , AK медианы $\triangle ABC$, которые пересекаются в точке O , и $S_{\triangle AOM} = 4$ см², то найдите $S_{\triangle ABC}$. Изобразите рисунок.

- 16** 20 рабочих собирает 480 кг клубники за 8 часов. Сколько рабочих с той же производительностью труда понадобится, чтобы собрать 360 кг клубники за 5 часов?

Обобщающие задания по разделам

17 Точки А и В находятся на числовой оси. Число А наибольшее целое число меньше числа $\sqrt{205}$, число В – наименьшее целое число, больше $\sqrt{45}$. Найдите расстояние между точками А и В.

18 В мешке 16 жёлтых и 9 красных шаров. Из мешка случайным образом вытаскивается один шар и не возвращается обратно. После этого вытаскивается ещё один шар. Найдите вероятность, что оба шара окажутся: а) желтого цвета; б) красного цвета.

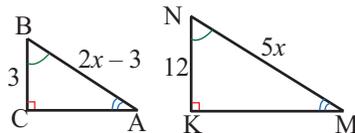
19 В искусственном озере было поймано 90 рыб, которых поместили и вновь выпустили в озеро. Через неделю из 80 -ти пойманных рыб 5 оказались помеченными. Как вы думаете, сколько рыб в этом искусственном озере?

20 Решите уравнение.

а) $\frac{3}{x+5} = \frac{2x}{x^2-x}$ б) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 2\frac{1}{2}$ в) $x^2 + x + 1 = \frac{9}{x^2 + x + 1}$

21 На рисунке размер детали равен 18 см. Найдите действительные размеры детали, если на рисунке указан масштаб 1:25.

22 По данным на рисунке найдите периметры и площади треугольников.



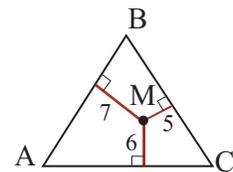
23 Прямоугольник, длина которого равна $(x - 1)$ единице, имеет площадь $(x^2 - 4x + 3)$ квадратных единиц.

$$S = x^2 - 4x + 3$$

$x - 1$

- 1) Запишите выражение для периметра прямоугольника.
- 2) Периметр прямоугольника 32 ед. Сколько кв. ед. составляет площадь?
- 3) Площадь прямоугольника 48 кв.ед. Найдите периметр.

24 Внутри равностороннего треугольника взята точка так, что расстояние от неё до каждой из сторон равно 5 м, 6 м и 7 м. Найдите площадь треугольника.



25 Среди следующих чисел найдите наименьшее число.

- а) $0,02 \cdot 10^4$ б) $0,2 \cdot 10^3$ в) $2,0 \cdot 10^{-2}$ д) $20,0 \cdot 10^2$ е) $0,002 \cdot 10^5$

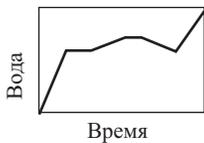
26 Длина беговой дорожки, имеющей форму круга, равна 1200 м. Если два спортсмена начнут двигаться одновременно из одной точки в одном направлении, то они будут встречаться через каждые 20 минут, а если в противоположном направлении, то через каждые 2 минуты. Какова скорость каждого спортсмена за одну минуту ?

Обобщающие задания по разделам

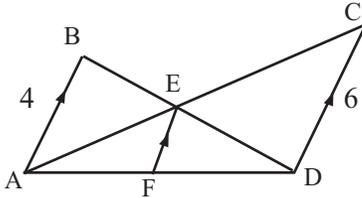
27» Вдоль беговой дорожки через каждые 20 метров поставлены метки. За сколько секунд добежит спортсмен от начала дистанции до 6-ой метки, если от 1-ой метки до 4-ой спортсмен добегает за 9 секунд?

28» Джамилью заполнил бассейн во дворе водой. По следующим данным определите, какой из графиков выражает зависимость между объёмом заполняемой воды и временем заполнения.

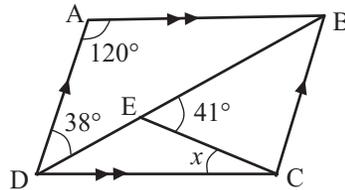
- сначала за каждый промежуток времени заполнялся одинаковый объём;
- на некоторое время кран был закрыт;
- кран открыли, но количество поступающей жидкости уменьшилось;
- кран снова закрыли;
- кран открыли, и вода поступает с той же интенсивностью, что и в первый промежуток.



29» Найдите длину отрезка EF на рисунке.



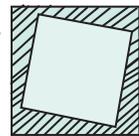
30» Найдите угол x по данным на рисунке.



31» Во сколько раз объём куба с ребром $\sqrt{12}$ меньше объёма куба с ребром $\sqrt{3}$?

32» Вычислите значение выражения $(x^y) \cdot (2x^y) \cdot (3y^x)$, если $x = 2$ и $y = -2$.

33» Периметр маленького квадрата 72 см, площадь заштрихованной части 252 см^2 . Найдите периметр большого квадрата.

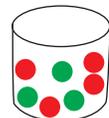


34» 1) Из ящика случайным образом вытаскивается шар. Найдите вероятность, что этот шар: а) зелёного цвета; б) красного цвета; в) зелёного или красного цвета.

2) Из ящика случайным образом вытаскивают два шара.

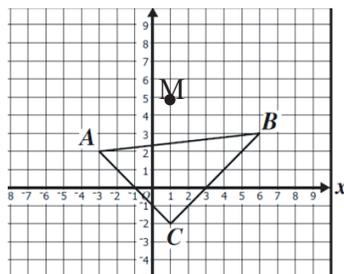
Найдите вероятность, что эти шары:

д) оба красного цвета; е) разного цвета



Обобщающие задания по разделам

- 35**» Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки M , и запишите координаты вершин полученного треугольника.



- 36**» а) Масса жирафа приблизительно 10^3 кг, масса голубой акулы $2 \cdot 10^5$ кг. Во сколько раз акула тяжелее жирафа?
 б) Масса осы приблизительно $3 \cdot 10^{-4}$ кг, масса слона $6,5 \cdot 10^3$ кг. Во сколько раз оса легче слона?

в) Масса муравья приблизительно $3 \cdot 10^{-6}$ кг. Муравей может поднимать груз в 20 раз больше своего веса. Запишите массу груза (в килограммах) в стандартной форме.



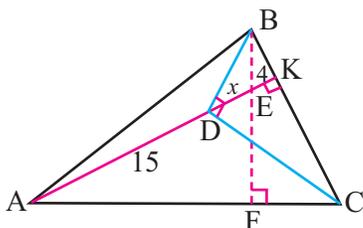
- 37**» Решите неравенства.

а) $(1 - \sqrt{2})(x - 2) < 2 - \sqrt{8}$ б) $|2 + |x - 3|| < 5$ в) $x(x - 2) > (x + 1)(x - 3)$

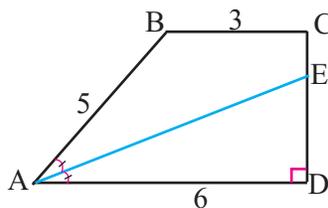
- 38**» Какое из данных выражений является многочленом?

$\frac{5}{x-1} - \frac{1}{x^2} - 3$ $\frac{\sqrt{x-1}}{5} - \frac{1}{x^2} - 3$ $\frac{x-1}{5} - x^2 - 3$ $\frac{x-1}{5} - \sqrt{x} - 3$

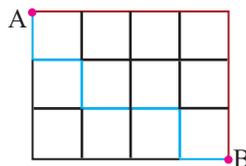
- 39**» Высоты $\triangle ABC$ пересекаются в точке E . Найдите длину DE , если $AD=15$, $EK=4$, $\angle BDC=90^\circ$.



- 40**» $ABCD$ -прямоугольная трапеция, Биссектриса $\angle A$ пересекает сторону CD в точке E . По данному рисунку найдите площадь четырехугольника $ABCE$.

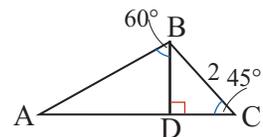


- 41**» Движение происходит по самому короткому пути из точки A в точку B по сетке, показанной на рисунке (два из данных путей показаны цветными линиями). Сколько существует возможных вариантов?



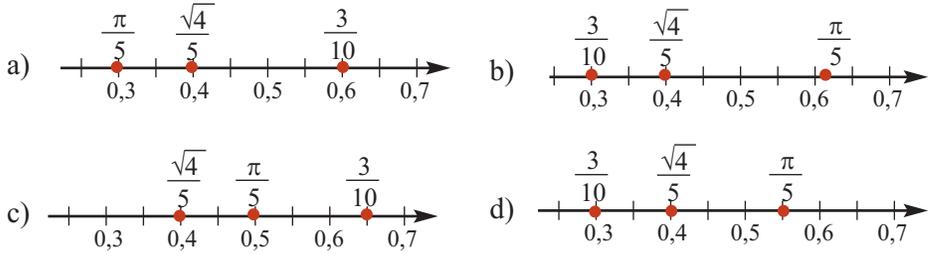
Проверьте себя

- 1) Какое высказывание верно, если $13 < a < 18$, $c = \frac{a+18}{a}$ и $d = \frac{a+13}{13}$
- значение d больше значения c .
 - значение c больше значения d .
 - значения c и d равны.
 - по данной информации невозможно сравнить.
- 2) Чему равно значение выражения x^x , если $x = 3^2$?
- 3^2
 - 3^{18}
 - 3^8
 - 3^9
- 3) Какое высказывание верно для 1. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ и 2. $\sqrt{x + 2\sqrt{xy} + y}$ при $x > 0$ и $y > 0$?
- значение выражения 1 меньше;
 - значение выражения 2 меньше
 - значения выражений равны;
 - невозможно сравнить
- 4) Какое выражение показывает площадь круга, длина окружности которого равна l ?
- $\frac{l}{4\pi}$
 - $\frac{l^2}{4\pi}$
 - $\frac{l^2}{2\pi}$
 - $\frac{l}{2\pi}$
- 5) Какое выражение соответствует отношению $\frac{x}{\sqrt{b}}$, при $\frac{ab}{x} = \sqrt{a}$
- $\sqrt{2ab}$
 - $\sqrt{\frac{a}{b}}$
 - \sqrt{b}
 - \sqrt{ab}
- 6) Фарах и Ильгар принимают участие в соревновании по бегу. Фарах пробежала $\frac{3}{4}$ дистанции за 30 минут. Ильгар на $\frac{2}{3}$ части дистанции потратил время, равное $\frac{4}{5}$ части времени, за которое Фарах пробежала $\frac{5}{8}$ дистанции. Какое высказывание верно?
- Фарах бежит быстрее
 - Ильгар бежит быстрее
 - их скорости равны
 - Ильгар пробегает дистанцию за 30 минут
- 7) Автомобиль прошёл путь 15 км за 11 минут. Какое неравенство выражает среднюю скорость автомобиля за час (x км/ч)?
- $50 \leq x < 60$
 - $60 \leq x < 70$
 - $80 \leq x < 90$
 - $90 \leq x < 100$
- 8) Случайным образом выбираются два простых однозначных числа. Найдите вероятность, что сумма этих чисел также является простым числом?
- 0
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{5}{6}$
 - 1
- 9) Какое утверждение верно, если по рисунку сравнить длину, соответствующую AC , с числом $\sqrt{10}$?
- длина AC больше $\sqrt{10}$
 - длина AC меньше $\sqrt{10}$.
 - длина AC равно $\sqrt{10}$
 - невозможно сравнить



Проверьте себя

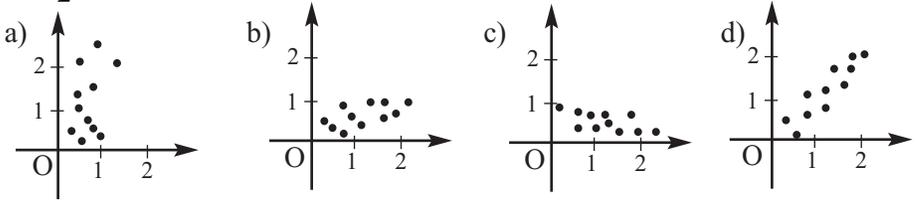
10» На какой числовой оси расположение чисел показано верно?



11» Какое высказывание верно для суммы всех целых чисел, расположенных между числами $\sqrt{17}$ и $\sqrt{97}$?

- a) можно представить в виде произведения двух простых чисел.
 б) является числом на единицу меньше полного квадрата числа.
 c) можно представить в виде произведения двух чисел, один из множителей которых равен $\sqrt{169}$.
 d) больше 8π .

12» Какой из рисунков с диаграммой рассеивания более точно соответствует информации, которую можно представить в виде графика функции $y = \frac{1}{2}x$?



13» Медиана ряда чисел 6, x , 10, 2, 7, 13 и 15 равна 10. Какие значения может принимать x ?

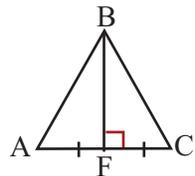
- a) 9 б) 11 c) 13 d) 16

14» Стороны прямоугольного треугольника равны $\sqrt{8}$ и $\sqrt{10}$. Чему равно наибольшее значение третьей стороны треугольника?

- a) $3\sqrt{2}$ б) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$

15» Найдите $\cos \angle A$, если $\tan \angle C = \frac{3}{4}$.

- a) 0,8 б) 0,6 c) 0,5 d) 0,2



16» В мешке находится 1096 шаров. Если вероятность того, что случайным образом вынутый из мешка шар красного цвета, равен $\frac{5}{8}$, то сколько шаров в мешке не красного цвета?

- a) 352 б) 411 c) 685 d) 524

Квадратные корни. Действительные числа

- стр 8-10.** №3 c) 0,(4). №4 e) 2,(3). №6 a) 17; b) 13; c) 4. №7 b) 6; c) 0,8; d) 0,4; g) 2. №9 c) $x=25$; d) ни при каких значениях. №10 b) 16; d) 12; h) 3. №12 c) 23; d) 17. №15. $a=16$ м; $b=1,5$ км; $r=25$ м. №16. 8 см. №17. a) 3,6 см. №18. 6 см. №19. 28 см. №20. 30 см×28 см.
- стр 12-17.** №9 $\approx 15,7$ см. №10 2) верно; №21 e) 7 и 8. №25 a) $\approx 4,2$ см. №27 $\approx 3,7$ см. №28 b) $\approx 2,5$ сек. №29 ≈ 29 м/сек. №31 $40\pi\text{м}^2 \approx 125,7\text{м}^2$ №32 a) $\approx 178,7$ км.
- стр 19-20.** №1 M и N. №15 a) $1,4 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 1,8 < \sqrt{5}$. №17 a) $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$; b) $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$
- стр 21-23.** №1 b) 1,2; d) 0,3. №2 c) $2\frac{1}{4}$; d) $2\frac{1}{3}$. №3 c) $5\frac{5}{6}$. №4 d) 0,4. №5 b) 120. №6 c) 18; d) 6; e) 2,6. №8 c) 21; d) 42; g) 5; h) 5. №10 c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{7}}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$. №12 c) 3. №13 b) $\frac{7}{96}$; c) $\frac{15}{29}$. №14 24 см². №15 24 куб. ед. №18 a) 27; c) 135. №20 b) $-5c$; c) $-15c$; d) 1,2c. №21 a) $7x^3$; b) $-6x^3$. №22 a) 4; b) 3. №23 b) 2.
- стр 24-27.** №1 e) $\sqrt{6}$; f) $-6\sqrt{3}$. №2 a) $5xy\sqrt{2x}$; b) $-3xy^2\sqrt{2}$. №3 b) $-\sqrt{48}$; f) $-\sqrt{2}$. №4 b) $-\sqrt{3c^2}$; c) $\sqrt{2x}$; d) $-\sqrt{-2x}$. №7 a) полож.; c) отр. №9 c) 0; f) $-0,8\sqrt{13}$. №10 d) 18; e) 3. №11 a) $-\sqrt{3}$; d) $12\sqrt{3a}$. №12 a) $4\sqrt{2x+3\sqrt{y}}$; b) $6\sqrt{3} + 6\sqrt{3x}$. №13 d) 12; №15 b) $30\sqrt{2}$, 108. №16 c) $60\sqrt{2}$; d) $42\sqrt{2}$. №17 a) 11; b) 8; c) 6. №18 a) 6; b) 5. №19 a) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; №20 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{2}$. №21 3) $3\sqrt{2}-1$; 5) $\frac{5\sqrt{2}-1}{7}$. №22 b и c. №23 3) $a < b$. №24 b) 4. №25 1) 10; 2) 16; 3) 5.
- стр 28-31.** №4 f) $-\frac{1}{9}$ g) 32; h) $-\frac{8}{27}$. №8 c) ab^3 . №9 c) $\frac{7}{12}$; d) 9. №10 $(\frac{1}{3})^{-4} > 0,8^{-2} > 1 > 2^{-5}$. №11 f) 4. №13 c) 2; d) 3. №14 c) 8. №16 a) $2\frac{1}{4}$; d) $-\frac{125}{729}$. №17 a) 27; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{2}{3}$. №19 b) $\frac{a^3}{6b}$; c) $\frac{9x^{10}}{4q^4}$. №21 b) $2,87 \cdot 10^5$; c) $6,3 \cdot 10^{-6}$. №25 c) $6,12 \cdot 10^{-8}$. №26 780 кг. №27 13-ти значное. №31 электрон. №32 125 раз. №34 b) $1,35 \cdot 10^{12}$.
- стр 32-33.** №2 a) 3. №5 1-В, 2-А, 3-С, D. №6 $16\pi\text{ м}^2 \approx 50,3\text{ м}^2$. №7 1) $12\sqrt{2}$; 16; 2) площадь квадрата больше на 2 кв. ед. 3) периметр квадрата меньше. №8 $5ab$. №10 a) -17 ; b) 4. №11 $\approx 19,6$ м/сек. №13 1-В, 2-С, 3-А. №14 $4,94 \cdot 10^{13}$. №15 a) 2,5. №17 c) 2; d) $2\sqrt{3}$. №18 a) 6; b) $4\sqrt{6}$. №19 50 раз. №20 a) c; b) 5c. №21 a) -1 ; b) 5. №22 $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Теорема Пифагора

- стр 35-37.** №3 AC=20, BC=15 №6 a) 50см²; c) 64мм² №7 12. №8 1; $\sqrt{3}$; 2.
- стр 38-43.** №1 2) $\sqrt{3}$. №2 26 см². №3 6,5м. №4 2) не в форме квадрата. №5 a) 17; c) 17; d) $2\sqrt{2}$. №6 a) 5 см c) 20 м. №7 можно. №8 6; 8; 10. №10 1) $h=6$, P=30; 2) $h=15$; P=70. 3) $h=3$, P=6($\sqrt{3}+1$). №11 c) остроугольный треугольник; d) тупоугольный треугольник. №12 b) 14; 15; 16; c) 8; 9; 10; 11; 12. №14 Путь АМС ($4\sqrt{17}$) короче пути АВС ($8+4\sqrt{5}$). №16 a) $r=16$, $q=16\sqrt{2}$; f) $p=8$, $m=10$. №17 1) $h=3\sqrt{3}$ см. №21 1) 6; 3) 12; 4) 50. №22 P=60. №24 $x=3$, $y=3\sqrt{3}$, $z=9$, $t=3\sqrt{2}$. №25 $\approx 2,2$ м. №27 3 минут. №28 130 км. №29 AB= $\sqrt{17}$, CD= $\sqrt{5}$, MN= $\sqrt{13}$. №30 $5+3\sqrt{5}$. №32 a) 2; $\sqrt{5}$; $\sqrt{13}$; c) тупоугольный треугольник. №34 1) $x=5$ м, $y=5$ м; 2) прямой угол; 3) 25,51 м
- стр 45.** №2 1) $y=15$ CE= $5\sqrt{3}$. 2) $a=16$, $y=24$, $b=16\sqrt{3}$. №3 2) $x=6\sqrt{2}$; 3) $y=12$, $x=12\sqrt{3}$; 4) $x=20$. №5 a) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. №6 16,9 см. №8 88 мм. №10 R=10 см.

ОТВЕТЫ

Квадратные уравнения

- стр 47-49.** №5 3) ± 5 , 8) 0; 1,5. №6 а) $\pm\sqrt{2}$, б) ± 15 , в) -2 ; 0. №10 б) $\pm 0,5$; д) ± 1 .
№11 6 см. №12 2) 50 м; 3) 4 см. №13 2) $a = r\sqrt{\pi}$. №14 а) ≈ 5 сек.
- стр 50-54.** №3 2) $-\frac{1}{2}$, -2 ; 3) -1 , $-\frac{1}{3}$. №4 7) -2 ; 5; 12) -6 ; 3. №10 2) -12 ; 3. №12 3 см.
№13 1 м. №16 1) -1 ; $\frac{1}{6}$; 5) -1 ; $2\frac{3}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; -3 . №18 $400\text{м} \times 900\text{м}$. №19 0,5 м.
№20 80 см. №22 1 см. №23 8 ч $h \approx 2$ м 40 см, 6 ч $h \approx 1$ м 80 см.
- стр 55-56.** №3 с) -8 ; 2. г) 2; 18, и) -3 ; 4. №4 е) -2 ; 8, в) 0,5; 1. №5 5%. №6 25%.
- стр 57-58.** №1 с) не имеет действ. корни. №6 1) $\approx 4,9$ сек. 2) ≈ 1 сек. и 3,8 сек. №7 2 сек., 4 сек.
- стр 60-62.** №2 д) 1; 3,5. №3 а) 3; 5, б) -4 ; -10 . №5 а) 5 и 6, в) $\frac{1}{2}$ и 2. №8 1) 7 и 12,
2) -1 или 5; 3) $-0,5$ или 3. №9 9 см. №12 6 м \times 7 м. №15 а) $1\frac{2}{3}$; 3, б) $\frac{1}{5}$; 3,
в) -4 ; $-6\frac{2}{3}$. №18 а) -5 ; -1 , в) 6; -2 . №20 50 книг. №21 а) 52 ед.; в) 50 ед.
№23 на 7. №24 а) $3\text{дм} \times 2\text{дм} \times 1,5\text{дм}$; б) 27дм^2 ; в) 30дм^2 .
№25 $b = 10\text{м}$, $a = 30\text{м}$, $c = 10\text{м}$.
- стр 63-65.** №3 1) $x_2 = -5$, $p = -2$; 3) $b = -12$, $x_2 = 2$; 4) $q = 35$. №4 а) -15 ; б) 19; в) 72.
№8 1) 52; 2) 2,5. №10 2) $x^2 - 4x + 1 = 0$. №11 $m = 3$. №12 $n = 15$. №13 а) $n = \pm 6$.
б) $n = 6$. №14 1) $n = -6$, $x_1 = -6$, $x_2 = 1$; 2) $n = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.
№15 1) $x^2 + 4x - 1 = 0$. 2) $b = 12$, $c = 2$.
- стр 66.** №1 1) -11 ; 4, 3) -2 ; -1 ; 2; 3. 6) ± 1 ; ± 2 . №2 б) 9. №3 а) ± 1 ; ± 2 , б) ± 1 . №8 75 м.
- стр 67-68.** №1 32 см. №3 13 см. №4 10 чел. №5 24 км/ч. и 32 км/ч. №6 10 м.
№7 15 км/ч. и 20 км/ч. №8 9 м \times 12 м. №9 1,2 м \times 0,6 м \times 0,5 м; $0,36\text{м}^3$.
или 1,8 м \times 0,9 м \times 0,5 м; $0,81\text{м}^3$. №10 20 см \times 40 см. №11 20%. №12 20 м.
№13 20. №14 $\approx 1,7$ сек.
- стр 69-70.** №5 $16\pi\text{см}^2$. №6 -12 . №7 26 ряд. №8 3 м. №9 $m = 2\frac{1}{4}$. №10 а) $x^2 + x - 1 = 0$.
№11 $\approx 2,4$ сек. №12 6 м \times 8 м. №14 80 м. №16 2) 10 сек.
№17 а) $x_2 = -1$, $b = -8$. №18 1-А, 2-В, 3-С, D.

Четырёхугольники

- стр 72-74.** №6 а) 80° , 85° , 105° , 90° \forall 100° , 95° , 75° , 90° . б) 75° , 125° , 55° , 105° и 105° , 55° , 125° , 75° . №8 1) 120° ; 2) 99° . №10 1) 103° ; 2) 100° ; 3) 76° .
- стр 75-77.** №4 1) $x = 40^\circ$, $y = 10^\circ$. №5 б) 40° , 140° , 40° , 140° . №6 70° , 110° , 70° , 110° .
№9 а) 18 см и 30 см. №10 3) 8; 4) 15; 5) 46. №11 1) 60° ; 2) 6; 3) 5; 4) $3\sqrt{3}$.
№13 1) 7 см и 5 см; 2) 46 см. №16 1) 8; 3) 15. №21 20.
- стр 79-82.** №2 1) 25; 2) 40; 3) 55° . №4 40 см или 44 см. №7 1) 30° ; 4) 12. №8 4) 16;
5) 8. №11 б) 32 см, $4\sqrt{3}$ см; в) 40 см, 9,6 см.
- стр 83-85.** №2 а) $x = 3$; $y = 2$. №7 2 см, 3 см, 4 см. №8 а) 10 см, 15 см, 15 см. №9 б) 40.
№10 22 см. №11 а) $x = 2$, $y = 3$, $P = 24$; б) $x = 2$, $y = 3$, $P = 36$.
- стр 86-89.** №2 2) 60° , 120° , 60° , 120° . №4 а) 4; б) $3\sqrt{3}$. №6 а) 30 см; б) 42 см, 38 см.
№7 а) 5 см. №8 4 см и 6 см. №9 $R = 6$ см. №10 $x = 7$; $y = 10$. №11 6 и 10.
№12 4 см. №13 75° . №16 32 см.
- стр 90-91.** №3 6 см и 8 см. №5 75° . №6 в) 15 см. №8 2) 40 см, 3) 64 см. №9 7 см.
№11 14. №12 а) 7,5 см.

Рациональные выражения

- стр 94.** №4 а) 0; б) 3; в) 1; д) $-0,5$. №5 а) 2; б) 0; в) 1; д) -2 . №7 а) 0; в) $1,5$.
 №10 $t = \frac{3v+6}{v-2}$ а) 4 часа; б) 4,5 часа. №11 $\frac{12a+8b}{a+b}$. №12 $\frac{5}{n+5}$; $\frac{5}{n+9}$
- стр 95-99.** №1 в) $14x$; д) $4x-12$. №6 в) $\frac{3a}{2b}$. №7 а) $\frac{y-4}{3}$; в) $\frac{x+5}{x-5}$; д) $\frac{3x}{x+3y}$.
 №8 д) $\frac{5x}{6}$; е) $-\frac{2}{3}$. №9 а) 10; б) 1. №13 а) $\frac{c+2}{4}$; б) $\frac{x+a}{a-c}$. №14 б) $x-2$.
 №15 б) $\frac{5-x}{3}$; в) $\frac{2}{1-x}$. №16 а) $4x-12$; б) $9a+18$; в) $\frac{x+1}{x-1}$. №17 в) $-y^2$.
 №18 а) $\frac{x-4}{4x}$; б) $\frac{x+2}{2}$; в) $\frac{x+1}{x+4}$; д) $\frac{x+3}{2}$; ф) $\frac{4x-3}{x-4}$. №19 а) $\frac{x-3}{x+1}$; в) $\frac{x-y-3}{x}$.
 №20 а) $\frac{x+2}{x-2}$ $x \neq \pm 2$; б) $\frac{x-2}{x-4}$ $x \neq \pm 4$. №22 в) $\frac{8a^3}{12a^2b}$. №23 в) $\frac{a^2+a}{a^2-1}$.
 №24 а) $\frac{2}{x+10}$; б) $\frac{y-4}{y+5}$; в) $\frac{x-2}{2x}$; д) $\frac{3}{2x+5}$. №27 $4x+10$.
 №28 а) $\frac{4}{\pi}$; б) $\approx 78,5\%$. №29 б) $\frac{m}{3n+3m}$; в) $\frac{2}{3}$. №31 3) $l = \frac{\pi(R^2-r^2)}{d}$.
- стр 100-102.** №1 в) $\frac{2x}{3b}$. №2 б) $-\frac{5x}{14y}$. №3 б) $\frac{8}{7pn^2}$. №5 в) $\frac{y^2}{4x^2}$. №6 в) $-\frac{2}{9x^2}$. №7 в) $\frac{12}{x+5y}$;
 ф) $\frac{x^2+5x+6}{6}$. №9 д) $\frac{a+2}{a+3}$; ф) $\frac{3x+3}{2x-2}$. №10 а) 10; б) $-1,5$. №11 б) $\frac{x-1}{x+1}$.
 №12 а) $\frac{1}{3a+6}$; б) $\frac{2}{x-5}$. №14 1) $x+3$; 2) $\frac{a}{a+6}$. №15 а) $\frac{2x+4}{3x+3}$, $x \neq -1$, $x \neq 5$, $x \neq 0$.
 №16 $\frac{x+2}{x+1}$. №17 $\frac{2n-1}{n+2}$. №18 а) более выгоден. №19 1) $x(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})$;
 2) $\frac{390x^2}{(2x-1)(3x-2)}$.
- стр 103-108** №1 в) 2. №2 а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{7}{2}$. №3 б) $5-b$. ф) $a-3$. №4 а) 100 б) -10 .
 №5 б) $a-4$. №7 и) $\frac{(a+b)^2}{a}$; к) $\frac{2ab}{a+b}$. №8 б) $\frac{2a^2}{a^2-1}$. №9 а) 96; б) 24. №11 б) $\frac{1}{6}$.
 №13 е) $\frac{x}{6x+6}$; ф) $\frac{8x}{15(x-2)}$. №14 а) $\frac{x}{5(x+5)}$; в) $\frac{2-b}{2b+b^2}$. №15 б) 2; в) $\frac{8y}{y^2-4}$.
 №16 а) $\frac{1}{xy}$; в) $\frac{a+2}{a^2-2a}$. №17 а) 0,5; б) 0,8. №18 б) $\frac{1}{a-2}$; в) 1; д) $-\frac{1}{x}$.
 №19 а) $\frac{1}{a-3}$. №20 е) $\frac{a+2}{2-a}$; ф) $\frac{2}{(x+1)^2}$. №24 2) $\frac{40}{m(m+2)}$. №27 а) $x+2$; б) $4x$.
 №28 а) 15 б) $1,5$. №29 а) 8; б) 5. №33 1) $\approx 5,1m^2$; 2) 8 рейсов.
- стр 109-110.** №1 а) $b+c$; б) $\frac{3}{a+5}$; ф) $\frac{1}{y}$. №2 д) $a+b$. №4 б) $\frac{n^2+9}{2n}$; в) $\frac{4}{x-2}$. №5 б) $\frac{x+1}{x-1}$.
 №6 д) $\frac{x}{x-2}$. №8 а) x ; б) $\frac{12x+5}{5x+2}$. №10 б) Али и Рамиз. №11 в) $\frac{1}{a+\sqrt{x}}$.
- стр 112-113.** №3 а) 32; в) $\frac{1}{4}$. №9 а) 25; $y = \frac{200}{x}$. №10 1,25м. №11 1) 2 работника; 2) 12 часов.
 №12 1) а) 1000 ман. б) 500 ман; 2) а) 25 семей. №13 а) 12 дней; б) неверно.
- стр 114-115.** №1 б) $d \neq -1$, $d \neq 4$; в) $a \neq b$, $a \neq -b$. №2 $t = \frac{s}{v+5} + \frac{s}{v-5}$. а) 5 часов; б) 7 часов.
 №5 $(x+2)$ см. №7 5. №8 5; в задании условие $b = 0,5$ лишнее №9 а) $\frac{x+2}{4(x-3)}$;
 б) $\frac{2(d-2)}{d+3}$; в) $\frac{x-1}{x-5}$. №10 б) $\frac{-5}{a+3}$. №11 а) $\frac{4}{k}$; в) $-\frac{2a}{a^2-4}$. №12 а) $\frac{4(x+1)}{4-x^2}$; б) $\frac{3}{x-4}$.
 №13 $a=1$, $b=-1$. №15 в) $-\frac{1}{ab}$; е) $\frac{k+2}{k}$. №16 в) 5. №17 а) $k=2$, $b=-3$.

ОТВЕТЫ

Площади фигур

- стр 116.** №1 58 см². №4 40.
- стр 117-119.** №3 2)144. №4 стороны 12 см и 8 см, периметр 40 см. №5 8см или 12,5см.
№6 288 см². №7 а) 96мм; б) 12м №10 $P = 6x + 10$. №11 168 мм².
№12 560. №13 3) 3м×3м. №14 а) 6×4. №15 80м². №16 а)32 см; с)30 см²
№17 60 мм². №18 126 см². №19 а)7 см²; б)10,5 см²
- стр 120-122.** №2 6см. №4 с) 6см². №5 1) $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta DEF} = 1:4$. №7 1)180 см²; 2) 30 см²;
3) 210 см². №8 а) 336 см²; б) 60 см²; с) 60 мм². №9 6 м; 9,6 м; 9,6 м.
№10 $S = 48\text{см}^2; h_1 = 6\text{см}; h_2 = 4,8\text{см}$. №11 2) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. №12 а) 28 м²;
б) 133 см². №14 а) $225\sqrt{3}\text{ м}^2$. №16 26.
- стр 123-125.** №1 1) 64; 2) 372. №3 $P = 24 + 8\sqrt{2}$, $S = 48$. №4 а) 120; б) 64; с) 210 №5 36 см².
№6 22 см². №7 100 см². №8 2) 16; 105. №12 б) 37,5 дм². №13 2) 30 дней,
3) $\approx 8,57\%$. №14 б) 24 кв.ед. с) 8 кв.ед.
- стр 126-127.** №2 1)24 см², 2)468 см². №3 1)336 см²; 2)24 м. №4 1) 168 №5 60 см².
№6 245 см². №7 1)30см², 2)384 см². №8 56; $98\sqrt{3}$. №9 1)13,6м; 2)12см, 16см.
- стр 128-129.** №3 25 м². №4 108 см². №5 $16\frac{2}{3}$. №6 9,5. №8 2) 5 см и 12 см; 3) 42 см².
№11 1)54 см²; 2)30см². №12 32 мм². №13 18 см². №15 $\sqrt{13}\text{см}$. №16 27 кв.ед.

Рациональные уравнения

- стр 132.** №1 е) -8; 0, №2 а) 3, б) 1; е) -4 №3 с) -5; 5, d) \emptyset . №4 а) -1,2; 3; б) -4; 2.
№5 а) $\frac{1}{2}$; с) $\frac{2}{5}$. №6 а) -3; 2; б) 5. №7 а) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
- стр 133-135.** №1 28 игр. №2 4 игры. №3 1. №4 6 тон экстракт. №5 5 г. №6 1,5 кг.
№7 1)16 см, 30см; 2) 15 см; 3) 34 см. №8 3,5 м. №9 4м × 6м. №10 26 см.
№11 6 часов. №12 10 дней, 15 дней. №13 6часов, 12часов.. №15 2 часа.
№16 3 часа, 6 часов. №17 $\approx 4,85$ часов, $\approx 7,85$ часов. №18 25 часов.
№19 70 км/ч. №20 10 км/ч., 12 км/ч. №21 10 часов. №22 8 км/ч. №23 2 км/ч.
№24 17 км/ч. №25 1)16 км/ч.; 2) 6 часов. 24 мин. №26 3 км/ч.
- стр 137-138.** №1 а) 3, с) корней нет. №2 $\frac{10+0,5n}{n}$, 100 мин. №4 6 часов. №5 1) $\frac{3x-1}{x+1}$;
2) $x^2 + 5x$; 3) 3. №6 20. №7 10 г. №9 2) 64 мин.; 3) 4 км/ч. №10 1) \emptyset ; 2) \emptyset ;
4) -0,5. №11 $\frac{nm}{n+m}$ часов.. №12 1) $\frac{3}{r}$; 2) при $r=12$ см. №13 $\frac{\pi}{4}$. №14 а) $n = 2$,
 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; б) 1-й: $n = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; 2-й: $n = 0,5$, $x_1 = -0,5$, $x_2 = -1$.

Подобие фигур

- стр 139-141.** №6 24. №7 40°. №8 24 мин. №9 1) 12 чел., 2) 3:4, 3) а) у Мурада 8 книг.
№10 370 манат. №12 275 чел. №18 1) 139,2 км; 2)15,64 м.
- стр 142-145.** №1 1) $x = 6$; 2) $z = 15$. 3) $y = 15$. №2 а) 40 см; б) 54 см; с) 15 см. №6 2 км.
№8 $y = 3,2$; $z = 4,8$. №9 1) 24см; 2) 18см; 3) 16см. №11 $x = 6,75$.
№12 $1,5\sqrt{5}$. №13 24 см, 16 см.
- стр 146-147.** №2 а) $x = 15$; $y = 3$, б) $x = 2,5$; $y = 4$. №4 1) 0,8. №6 1) 60 см, 2) 0,8 м.

ОТВЕТЫ

- стр 148-152.** №5 2) 10 см. №7 с) 8. №9 1) $TK=8$, 2) $ST=5$, 3) $AB=30$, $BD=18$; 4) $HT=21$, $HK=13,5$; 5) $DB=15$, $CB=21$; 6) $CD=3$, $DH=7$. №10 $CE=1,5$ см, $ED=4,5$ см.
 №11 12 см. №16 45 м. №17 9 м. №18 $BE=2$, $OE=2\frac{2}{3}$. №19 $\sqrt{5} + 1$.
- стр 153-155.** №4 1) 9, 2) 20, 3) 10. №5 4 см. №6 108 м. №7 а) $h=6$, $d=10$; б) $h=12$, $d=16$.
 №9 180 м. №10 а) $x=1,5$; б) $x=4$. с) $x=1$.
- стр 156-158.** №2 1) $x=6$, 2) $x=15$. №3 3. №4 $PM=8$; $DC=5$ №5 $\approx 24,6$ мм. №6 45 м.
 №7 8 м. №8 1) 25,5; 2) 63; 3) 18; 4) 21. №9 3,51 м.
- стр 159-160.** №1 1) $k=\frac{5}{6}$, $x=7,5$; 4) $k=2$; $x=4,5$. №3 2) 162 см². №4 75 см².
 №5 180 ман. №6 $P_1=15$ см, $P_2=20$ см. №7 24 м². №8 2:1. №9 1) 12 км;
 2) 16 км; 3) $4\frac{2}{3}$ км². №10 1) 375 см²; 2) 48 м². №11 50 см².
- стр 161-162.** №3. 3) 44. №4. 10 см, 15 см. №5. 4,2 м. №7. $h=0,9$; $m=4$. №8. 84
 №9. а) $P_1=\frac{1}{2}$, б) $P_2=\frac{1}{4}$, с) $P_3=\frac{1}{8}$. №10. 1) 8 м; 2) 6 м; 3) 10 м; 4) 5 м.
 №11. $P_A=12$, $P_B=24$, $S_A=6$, $S_B=24$. №12. 10 см². №13. а) $x=14$; б) $x=9$

Неравенства

- стр 164-165.** №9 а) $m > n$, б) $m < n$, с) $m = n$. №11 а) верно; д) не верно. №14 а) 11; д) -3;
 №15 б) 8, с) -5.
- стр 166-170.** №14 а) положительно, б) отрицательно, д) положительно. №16 не меньше
 50 часов. №19 самое меньшее 30 мин. №23 а) 64, б) 100 см². №24 а) 24 см;
 б) 8; с) 2. №25 2) не меньше 10 компьютеров. №26 а) $0,8 < P < 1,2$
- стр 171-172.** №3 с) $23 < 2a + 3b < 33$. №4 1) а) $-5 < x - y < -2$; 2) а) $5 < \frac{x}{y} < 10$.
 №5 б) $0,2 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,4$. №6 $64 \leq P \leq 70$. №8 $38^\circ \leq \gamma < 40^\circ$.
- стр 173-174.** №7 а) -11 и 7; б) -3 и 5, с) -4 и 2. №8 а) (-1; 5), б) (5; 7), д) (3; +∞).
 №9 б) [-6; 3), д) (2; +∞). №10 а) [-2; 3), б) (0; 1), с) [-2; 2), е) [-2; 0], ф) [2; 3).
- стр 176-178.** №4 а) $x > 3,5$; б) $y > 5$. №5 а) $(-\frac{7}{8}; +\infty)$, д) $(-\infty; 2\frac{2}{3}]$. №6 б) $(-\infty; -15]$,
 ф) $(-\infty; 3]$. №7 б) $(-\infty; 4]$, д) $(-\infty; \frac{1}{8})$. №8 больше 11,5 минут. №9 13 очков.
 №10 а) $y < \frac{8}{11}$. №11 а) (1,5; +∞). №12 б) $x < 1,25$. №13 а) 3; б) -1. №15 35.
 №16 меньше 6 см. №17 самое больше $26\frac{2}{3}$ км.
 №18 больше, чем 10,5 км/ч. №19 меньше 14 кг. №21 не меньше 8 сторон.
 №22 больше 6 км в час. №23 не больше 6-ти. №27 а) при x больше 5-ти;
 б) при x меньше 5-ти
- стр 180-181.** №6 $t < 0$ или $t \geq 100$. №8 через 17 месяцев. №9 а) [-5; 6), д) $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$.
 №10 б) 4 и 5. №11 с) (-12; 6). №12 не меньше 96 баллов.
 №14 3) (15; 20) или (20000; 50000)
- стр 182-183.** №2 а) (-4; 4); с) решений нет; е) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; ф) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$,
 г) $(-\infty; +\infty)$, h) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. №3 с) [-3; 4]. №4 а) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.
 №7 $|x-25| \leq 5$. №8 2) решений нет; 6) (-1,5; 4,5). №9 а) при $a \leq 2$.
 №11 $|v-55| \leq 3$.
- стр 184-185.** №2 более 3250 экземпляров. №3 б) приблизительно выше 165,4 см,
 ниже 174,5 см. №7 0. №11 $\frac{5}{6}$ мин = 50 сек. №13 ф) [-2; 4].
 №14 а) $c \in (-\infty; 1)$; б) $c \in (1; +\infty)$. №15 1-С, 2-В, 3-А, D.

Тригонометрические соотношения. Метод координат. Преобразование фигур

- стр 188-189.** №2 а) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$. №10 $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{1}{2}$. №11 а) 1) $\approx 0,34$; 3) $\approx 0,03$.
№12 а) $\approx 53,2$; б) $\approx 58^\circ$.
- стр 190-193.** №1 ≈ 173 м. №2 а) $\approx 114,3$; с) $\approx 16,3^\circ$. №3 $x \approx 6$ м, $\theta \approx 36^\circ$, $y \approx 10,2$ м.
№5 а) $\approx 3,86$; $\approx 15,44$; б) $\approx 2,35$; $\approx 16,45$; с) $\approx 3,58$; $\approx 23,27$. №6 ≈ 48 м.
№7 1) $\approx 9,18$ м; 2) $\approx 22,36$ м. №8 ≈ 28 м. №9 $\approx 4,5$ м. №11 ≈ 75 м.
№12 $\approx 52,8$ м; $\approx 4,3$ м. №13 $\approx 38,9$ км, $\approx 64,3$ км, $\approx 79,8$ км.
№14 1) ≈ 927 м, 480 м; 2) ≈ 480 м. №16 ≈ 42 м. №17 58 м, ≈ 100 м.
- стр 194.** №1 а) 1) $\cos 53^\circ$; б) 3) $\sin 17^\circ$. №5 а) 0; б) 1; с) 1. №6 а) 4; б) 1.
- стр 195.** №1 а) M(3;3); б) M(2;1). №2 а) B(4;3). №4 а) M(3;2); б) D(4;4). №5 D(-4;-2).
- стр 197-198.** №1 а) 1 б) 3. №2 а) $k=2$; б) $b=4$. №4 а) $y=\frac{2}{3}x+2$ с) $x=2$. №5 $k=3$, $b=5$.
№6 45° ; $k=1$. №7 1) $y=2x-3$. №10 $y=-4x+8$; 8. №11 а) $y=-3x+4$, б) $y=3x+9$.
№16 а) $k=4$; с) $7,2$ км, $28,8$ км. №18 а) $y=\frac{5}{6}x+5$; б) $y=-\frac{5}{6}x+5$
- стр 200-202.** №1 с) $\triangle MAB$. №9 1) $A_1(1;2)$, $B_1(4;1)$, $C_1(4;-3)$, $D_1(1;-3)$.
- стр 203-204.** №2 а) $k=2$, $x=8$; $y=16$. №5 1) а) $A_1(6;0)$; с) $C_1(6;9)$. №7 а) $k=\frac{3}{5}$, $t=18$, $r=20$.
- стр 205-206.** №2 $k=-1$; $y=-x$. №4 $AB \perp MN$, $CD \parallel EF$. №5 а) $K(9;4)$; б) $\frac{1}{3}$. №6 $\approx 32^\circ$.
№9 а) 120 см. №12 1) 4; 2) 7,5; 3) 3; 4) 21; 5) 0,6.

Сбор и представление информации. Вычисление вероятностей

- стр 208-214.** №3 75%, ≈ 116250 . №5 1) 35%; 2) ≈ 8250 . №10 1) 29%; 3) ≈ 287 . №12 1) 40%.
- стр 216.** №1 арифм. ср. 5, мода 3, медиана 4,5. №2 ср. возраст $\approx 46,5$.
- стр 219-221.** №1 $\approx 0,487$. №2 25. №3 30. №5 а) 12; б) 19. №6 а) 3; б) 13; с) 5. №7 30.
№8 а) 0,3; б) 0,45; с) 0,25. №9 а) 0,1; б) 0,2; с) 0,8. №11 16.
№12 а) 500, б) 96, с) 404. №13 210.
- стр 223-224.** №2 1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{1}{25}$; 3) $\frac{2}{45}$. №3 $\frac{3}{14}$. №4 $\frac{4}{17}$; $\frac{3}{68}$. №5 а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{24}$.
№6 1) 5; 2) 0,144; 3) 0,2. №7 0,32. №8 1) $\frac{1}{11}$; 2) 26.
- стр 225-226.** №4 а) 4; б) 8. №5 12. №6 1) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{5}{8}$. №7 а) 420 чел., б) $\frac{84}{925}$. №9 0,1.
№10 1) 9; 2) $\frac{12}{35}$. №11 а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{27}{64}$; с) $\frac{9}{64}$; д) $\frac{3}{64}$; е) $\frac{9}{64}$.

Обобщающие задания по разделам

- стр 227-231.** №1 32 манат. №3 а) параллел. №4 15 км. №5 ≈ 1 см. №9 2 см. №10 21 см²
№11 1) 4. №15 2) 24 см²; 3) 24 см². №16 24. №17 7. №18 а) 0,4; б) 0,12.
№19 ≈ 1440 . №20 с) -2; 1. №22 $P_1 = 12$, $P_2 = 48$, $S_1 = 6$, $S_2 = 96$.
№23 1) $P = 4x - 8$; 2) 63 кв. ед. 3) 28 ед. №24 $108\sqrt{3}$ см².
№26 270 м/мин.; 330 м/мин. №27 15 сек. №29 2,4. №30 19° . №31 8 раз.
№33 96 см. №34 2) а) $\frac{2}{7}$. №37 а) (4; $+\infty$); б) (0;6); с) ($-\infty$; $+\infty$).
№39 6. №40 9. №41 35.

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT-8

Ümumtəhsil məktəblərinin 8-ci sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərslik
Rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov İlham Heydər oğlu Hüseynov
Məsləhətçi:	Çingiz Qacar
Tərcüməçi:	Viktoriya Abdullayeva
Elmi redaktoru:	Tariyel Talıbov
Kompüter tərtibatı:	Mustafa Qəhrəmanov
Bədii tərtibatı:	Leyla Bəşirova
Texniki redaktoru:	Fuad Qəhrəmanov

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi (qrif nömrəsi: 2019-104)

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Kağız formatı: 70×100 ¹/₁₆. Fiziki çap vərəqi 14. Səhifə sayı 240.
Tiraj. 11159. Pulsuz. Bakı-2019

“Radius MMC” mətbəəsi
Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ



Əziz məktəbli !

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sən kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!

