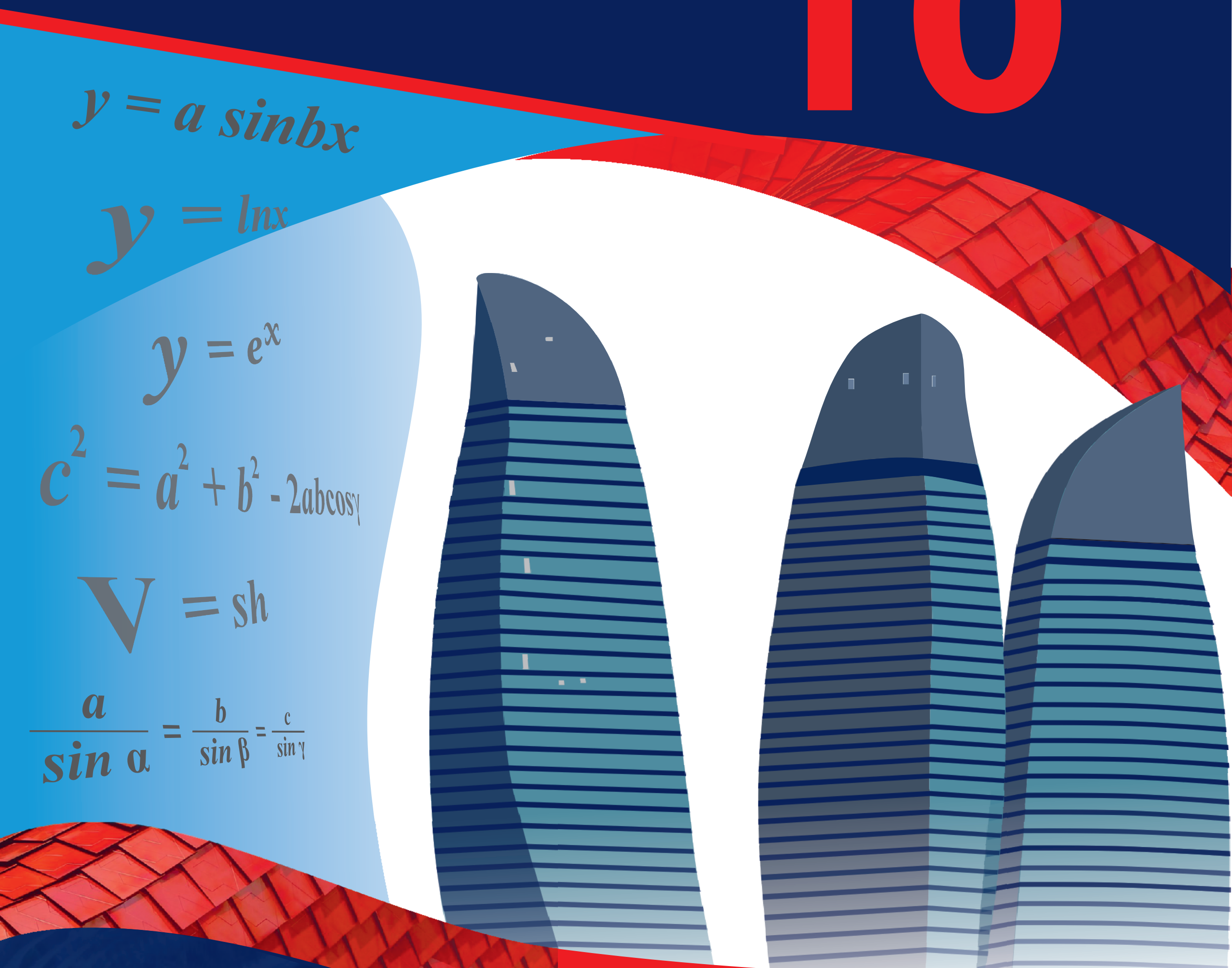
RİYAZİYYAT

DƏRSLİK

10



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi ***Üzeyir Hacıbəylinin,***
sözləri ***Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

HEYDƏR ƏLİYEV
AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ

Nayma Qəhrəmanova
Məhəmməd Kərimov
İlham Hüseynov

RİYAZİYYAT 10

Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə
DƏRSLİK

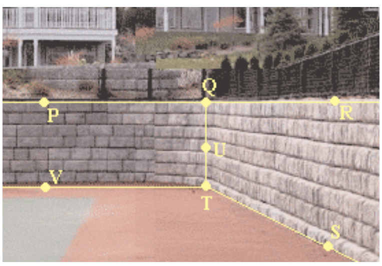
Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi ***radius_n@hotmail.com*** və ***derslik@edu.gov.az*** elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur. Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

Radius
Bakı - 2018

Mündəricat

1. Funksiyalar

Funksiya və onun verilmə üsulları.......7
Bəzi funksiyaların təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu................................12
Funksiyaların xassələri 14
Cüt funksiya, tək funksiya 18
Hissə-hissə verilmiş funksiyalar 20
$y = x^n$ $(n \in N)$ qüvvət funksiyaları 22
Funksiyaların təsnifatı 23
Qrafiklərin çevrilməsi 25
Funksiyalar üzərində əməllər...............32
Mürəkkəb funksiya 34
Tərs funksiya 37
Ümumiləşdirici tapşırıqlar 41



2. Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

Fəzada nöqtə, düz xətt və müstəvi.......44
Düz xətlə müstəvinin paralelliyi..........48
Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı 49
Üç perpendikulyar teoremi 52
İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar 54
Perpendikulyar müstəvilər 56
Paralel müstəvilər 59
Proyeksiyalar və məsələ həlli 63
Ümumiləşdirici tapşırıqlar 65

3. Bucağın triqonometrik funksiyaları

Dönmə bucaqları.................................67
Bucağın radian və dərəcə ölçüsü 69
Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi......72
Triqonometrik funksiyalar 76
İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları 80
Vahid çevrə və istənilən bucağın triqonometrik funksiyaları 83
Çevirmə düsturları 86
Triqonometrik eyniliklər......................90
Toplama düsturları 93
Toplama düsturlarından alınan nəticələr....................................97
Triqonometrik ifadələrin sadələşdirilməsi.................................102
Ümumiləşdirici tapşırıqlar 104

4. Sinuslar, kosinuslar teoremi

Sinuslar teoremi 107
Kosinuslar teoremi.............................114
Ümumiləşdirici tapşırıqlar 119

5. Triqonometrik funksiyalar

Dövri funksiyalar 122
$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafikləri 124
$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri 128
Beş əsas nöqtəsinə görə sinusoidin qurulması 136
Triqonometrik funksiyalar və periodik hadisələr..141
$y = \mathrm{tg}\, x$ və $y = \mathrm{ctg}\, x$ funksiyalarının qrafikləri 144
Tərs triqonometrik funksiyalar 150
Ümumiləşdirici tapşırıqlar 155

6. Çoxüzlülər

Çoxüzlülər..158
Prizmalar..160
Çoxüzlülər və onların müxtəlif
tərəflərdən görünüşləri.......................163
Prizmanın səthinin sahəsi 166
Prizmanın müstəvi kəsikləri 171
Piramida. Piramidanın yan səthinin
və tam səthinin sahəsi 174
Piramidanın kəsikləri.
Kəsik piramida.................................180
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.................183

7. Triqonometrik tənliklər

Sadə triqonometrik tənliklər 185
Triqonometrik tənliklərin
həll üsulları 193
Triqonometrik tənliklərin tətbiqi
ilə məsələ həlli 198
Triqonometrik bərabərsizliklər 200
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.................209

8. Fiqurların həcmi

Prizmanın həcmi 211
Piramidanın həcmi 218
Fəza fiqurlarının oxşarlığı.................222
Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və
həcmləri 223
Kəsik piramidanın həcmi 226
Müstəvi kəsiklərinə aid məsələlər 228
Fəzada simmetriya 229
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.................232

9. Üstlü və loqarifmik funksiyalar

Həqiqi üstlü qüvvət...........................234
Üstlü funksiya 237
Üstlü funksiyanın qrafikinin
çevrilmələri 243
Üstlü funksiya. *e* ədədi 246
Ədədin loqarifmi...............................248
Loqarifmik funksiya 250
Loqarifmik şkala və məsələ həlli.......252
Loqarifmin xassələri 254
Üstlü tənliklər 258
Loqarifmik tənliklər...........................261
Üstlü bərabərsizliklər.........................265
Loqarifmik bərabərsizliklər 267
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.................270

10. Kompleks ədədlər

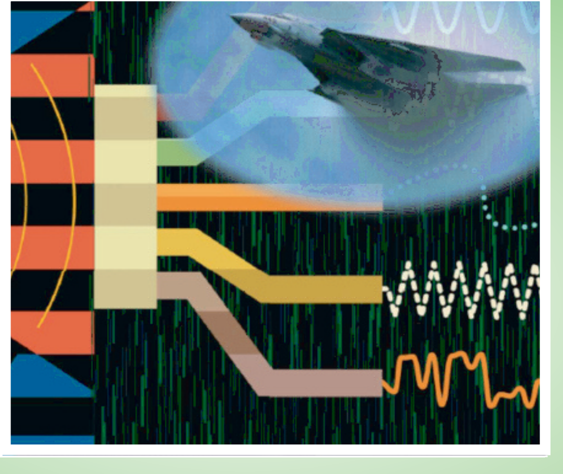
Kompleks ədədlər 273
Kompleks ədədlər üzərində
əməllər 274
Kompleks ədədin həndəsi təsviri 277
Kompleks ədədin modulu
və arqumenti. Kompleks ədədin
triqonometrik şəkli............................278
Triqonometrik şəkildə verilmiş
kompleks ədədlər üzərində əməllər ...280
Kompleks ədədin *n*-ci
dərəcədən kökləri..............................282
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.................284

11. Məlumatlar, proqnozlar

Külliyyat və seçim.
Təsadüfi seçim və növləri..................286
Məlumatın təqdimi.............................290
Binomial açılışlar...............................297
Bernuli sınaqları................................301
Ümumiləşdirici tapşırıqlar.................306

1 Funksiyalar

Funksiya və onun verilmə üsulları
Bəzi funksiyaların təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu
Funksiyaların xassələri
Cüt funksiya, tək funksiya
Hissə-hissə verilmiş funksiyalar
$y = x^n$ $(n \in N)$ qüvvət funksiyaları
Funksiyaların təsnifatı
Qrafiklərin çevrilməsi
Funksiyalar üzərində əməllər
Mürəkkəb funksiya
Tərs funksiya



Funksiya və onun verilmə üsulları

Ətraf aləmdə baş verən müxtəlif proseslərdə kəmiyyətlərin bəziləri digərlərindən asılı olaraq dəyişir və birinin qiyməti digərinin qiymətini müəyyən edir.

Məsələn, piyadanın getdiyi yolun uzunluğu zamandan asılı olaraq dəyişir, ərzağa ödənilən pul onun kütləsindən asılı olaraq dəyişir. Yol və zaman, kütlə və dəyər dəyişən kəmiyyətlərdir. Bu kəmiyyətlərdən biri sərbəst, digəri isə ondan asılı olaraq dəyişir. Məsələn, zaman sərbəst dəyişən, gedilən yol isə zamandan asılı dəyişən kəmiyyətdir, ərzağın kütləsi sərbəst, onun dəyəri isə asılı dəyişən kəmiyyətdir. Aydındır ki, dəyişən kəmiyyətlərin hər biri müəyyən çoxluqdan qiymətlər alır.

X çoxluğunun hər bir x elementinə Y çoxluğunun müəyyən bir y elementini qarşı qoyan qaydaya X coxluğunda təyin olunmuş funksiya deyilir.

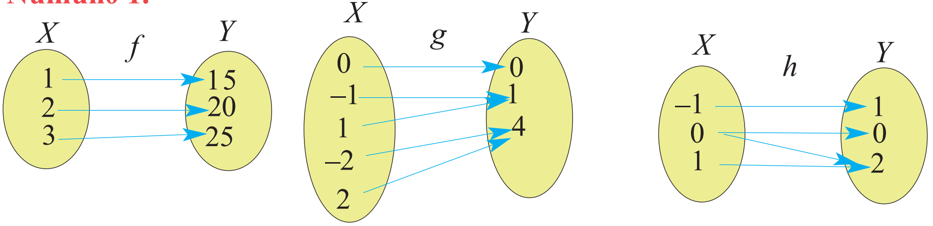
Burada x sərbəst dəyişən və ya arqument, y isə asılı dəyişən və ya funksiya adlanır. Funksiyanı adətən f (və ya g, φ və s.) ilə, arqumentin verilmiş qiymətinə uyğun qiymətini isə $f(x)$ (və ya $g(x)$, $\varphi(x)$ və s.) ilə işarə edirlər: $y = f(x)$

Arqumentin ala bildiyi qiymətlər çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı deyilir. Arqumentin bu qiymətlərinə uyğun asılı dəyişənin aldığı qiymətlər funksiyanın qiymətlər çoxluğunu əmələ gətirir. f funksiyasının təyin oblastı adətən $D(f)$ ilə, qiymətlər çoxluğu isə $E(f)$ ilə işarə edilir.

Funksiya müxtəlif üsullarla verilə bilər: cədvəllə, uyğun qiymətlər cütləri ilə, asılılıq xəritəsi ilə, qrafiklə, düsturla və s.

Təyin oblastı sonlu çoxluqdursa, arqumentin hər bir qiymətinə asılı dəyişənin uyğun qiymətini qarşıqoyma qaydası oxlarla göstərilə bilər. Belə təsvir **asılılıq xəritəsi** adlandırılır.

Nümunə 1.



Burada f və g uyğunluqlarının hər biri funksiyadır, çünki X çoxluğundan götürülmüş hər bir ədədə Y çoxluğundan yeganə ədəd qarşı qoyulur.
h uyğunluğu isə funksiya deyil (niyə?).
Qarşıqoyma qaydasına görə yaza bilərik: $f(1) = 15$, $f(2) = 20$, $f(3) = 25$
$g(0) = 0$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-2) = 4$, $g(2) = 4$
Göstərilən funksiyaları arqumentin və funksiyanın **uyğun qiymətləri cütlərini sadalamaqla** da vermək mümkündür. f funksiyası: $\{(1;\ 15),\ (2;\ 20),\ (3;\ 25)\}$
g funksiyası: $\{(0;\ 0),\ (-1;\ 1),\ (1;\ 1),\ (-2;\ 4),\ (2;\ 4)\}$

Funksiya və onun verilmə üsulları

Funksiya cədvəllə verilə bilər. Cədvəlin bir sətrində (və ya sütununda) sərbəst dəyişənin, digər sətrində (və ya sütununda) isə asılı dəyişənin qiymətləri göstərilir.

Nümunə 2.

Bir hektardan yığılan taxıl məhsulu (tonla)							
İllər	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
1 ha-dan yığılan məhsul (tonla)	3	4	2	3	5	3	4

(2009; 3), (2010; 4), (2011; 2), (2012; 3), (20013; 5), (2014; 3), (2015; 4) koordinatları 1 hektardan yığılan məhsulun illərə görə dəyişməsini göstərir.

Təyin oblastı (illər): {2009; 2010; 2011; 2012; 2013; 2014; 2015}

Qiymətlər çoxluğu (yığılan məhsulun miqdarları): {2; 3; 4; 5}

Funksiya düsturla - analitik üsulla verilə bilər.

Nümunə 3. $f(x) = x^2, \quad 1 \le x \le 3$

Bu yazılış onu göstərir ki, təyin oblastı [1; 3] parçasıdır və bu parçadan götürülmüş hər bir ədədə həmin ədədin kvadratı qarşı qoyulur.

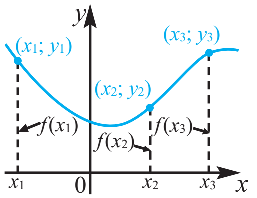
Məsələn, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(1{,}2) = 1{,}2^2 = 1{,}44$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^2 = 9$ və s.

Bu halda $f(4)$ yazılışı mənasızdır, çünki 4 ədədi verilmiş funksiyanın təyin oblastı olan [1; 3] parçasına daxil deyil.

Arqumentin hər bir $x \in D$ qiyməti üçün funksiyanın uyğun $y = f(x)$ qiymətini hesablayıb, koordinatları $(x; y)$ olan nöqtəni koordinat müstəvisində qurmaq olar.

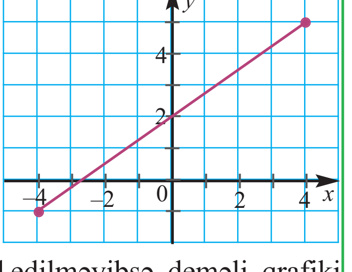
Bütün belə nöqtələr çoxluğu funksiyanın qrafikini əmələ gətirir.

Funksiyanın qrafiki koordinat müstəvisində absisi arqumentin, ordinatı isə funksiyanın uyğun qiyməti olan bütün nöqtələr çoxluğudur.



Funksiya qrafiklə verilə bilər. İki dəyişən kəmiyyət arasındakı asılılığı koordinat müstəvisində həndəsi olaraq təsvir etmək əlverişlidir.

Nümunə 4. Şəkildə $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ xətti funksiyası $-4 \le x \le 4$ aralığında qrafiklə verilmişdir.



Uc nöqtələrinin koordinatları $(-4; f(-4))$, yəni $(-4; -1)$ və $(4; f(4))$, yəni $(4; 5)$ olan parça bu funksiyanın verilən aralıqdakı qrafikidir. Uc nöqtələri qrafikə aiddir. Şəkildə bu nöqtələr rəngli dairəciklərlə qeyd olunmuşdur.

Qiymətlər çoxluğu: $[-1; 5]$.

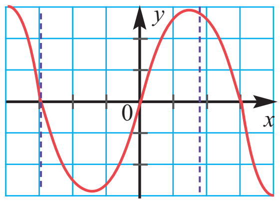
Qeyd: Əgər funksiyanın qrafiki olan əyrinin (və ya düz xətt parçasının) ucları xüsusi dairəciklə qeyd edilməyibsə, deməli, qrafiki sonsuz davam etdirmək olar (adətən, bu uclardakı oxlarla göstərilir).

Funksiya və onun verilmə üsulları

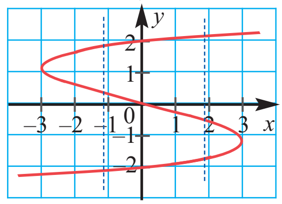
İki kəmiyyət arasındakı asılılığın funksiya olub-olmadığını onları ifadə edən nizamlı cütlərə – nöqtələr çoxluğunun koordinatlarına görə və ya verilən qrafik təsvirə görə müəyyən etmək olar.

1. Nöqtələrin koordinatlarına görə. Arqumentin qiymətləri arasında (cütün birinci qiyməti) təkrarlanan qiymətlər varsa, bu asılılıq funksiya deyildir.
{(1; A), (1; B), (2; C), (3; D)} nöqtələr çoxluğu ilə verilmiş asılılıq funksiya deyil.
{(1; A), (2; B), (3; C), (4; C), (5; D)} asılılığı funksiyadır.

a)



b)

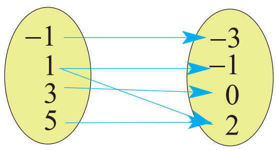


2. Qrafik təsvirə görə. Ordinat oxuna paralel çəkilmiş istənilən şaquli düz xətt qrafiki ən çoxu bir nöqtədə kəsərsə, bu asılılıq funksiyadır (şəkil a).
Ordinat oxuna paralel çəkilən və qrafiki iki (və ya daha çox) nöqtədə kəsən düz xətt varsa (şəkil b), bu asılılıq funksiya deyil. Bu onu göstərir ki, arqumentin (x-in) eyni qiymətinə funksiyanın bir neçə qiyməti uyğundur. Bu isə funksiyanın tərifinə ziddir.

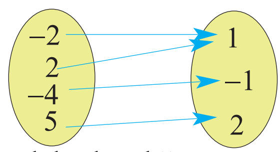
Öyrənmə tapşırıqları

1. Uyğunluğun funksiya olub-olmadığını müəyyən edin.

a)



b)



2. Nöqtələr çoxluğu ilə verilmiş asılılıqların funksiya olub-olmadığını müəyyən edin.
a) {(–5; 1), (–3; 2), (–1; 3), (1; 2)}   b) {(0; 4), (3; 5), (5; –2), (0; 1)}

3. Cədvəllə verilmiş hansı (x; y) asılılığına funksiya demək olar?

a)

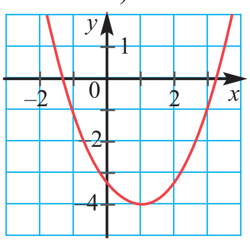
x	3	0	0	–1	–3
y	–4	–3	–1	–2	0

b)

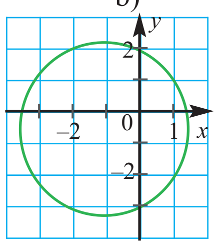
x	7	6	5	4	3
y	–1	2	–1	2	3

4. Şaquli xətt çəkməklə verilən asılılıqların hər hansı bir funksiyanın qrafiki olub-olmadığını yoxlayın.

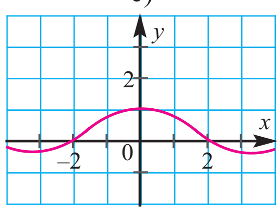
a)



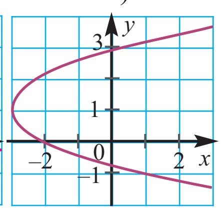
b)



c)



d)



5. Aşağıdakı asılılıqlardan hansına funksiya demək olar?

a) Ramizin həftəlik maaşı ilə satışdan əldə edilən gəlir arasındakı asılılıq. Ramiz həftəlik 50 manat sabit maaş və üstəgəl satışın 2%-i qədər əlavə alır.

b) Əsmər 5 km/saat sürətlə yeriyirsə, onun getdiyi yolun uzunluğunun zamandan asılılığı.

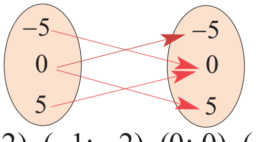
c) Uşaqların yaşdan asılı olaraq kompüter oyununda topladıqları xallar.

6. Aşağıdakı verilənlərə görə $x = 0$ və $x = -3$ qiymətlərində y-in qiymətini hesablayın. Hansı asılılığın funksiya olduğunu müəyyən edin.

a) $y = 5 - 2x$ b) $y = x^2 - 3$ c) $y^2 + x^2 = 25$

7. Hər bir asılılığı nümunəyə uyğun olaraq asılılıq xəritəsi ilə təqdim edin. Hansı asılılıq funksiya deyil?

Nümunə. $\{(-5; 0), (0; -5), (5; 0), (0; 5)\}$



a) $\{(-5; 0), (0; -5), (5; 0), (0; 5)\}$ c) $\{(-2; -2), (-1; -2), (0; 0), (1; 2), (2;2)\}$

b) $\{(-5; 4), (3; 6), (1; 0), (-3; 2)\}$ d) $\{(1 ; 3), (0; 0), (-4; -2), (2; 3), (1 ; -1)\}$

8. $f(x) = 1 - 2x$ funksiyası verilmişdir.
$f(-2), f(0), f(0{,}5), f(a + 1)$ qiymətlərini tapın.

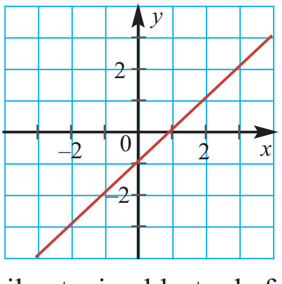
9. $g(x) = 4x^3 - x$ funksiyası üçün $g(2) + g(-2)$ cəmini hesablayın.

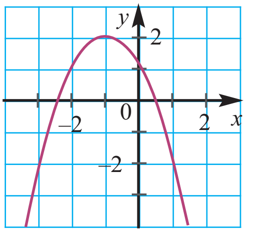
10. $f(x) = \dfrac{x + 1}{3 - x}$ funksiyası verilmişdir. Arqumentin hansı qiymətində funksiyanın qiyməti: a) 1; b) 0; c) –2 olar?

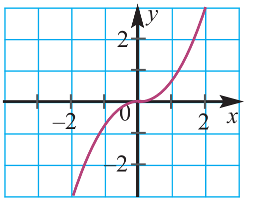
11. $f(x) = x^2 - 2x + q$ funksiyası verilmişdir. $f(0) = -3$ olarsa, $f(-1)$-i tapın.

12. Düsturla və ya qrafiklə verilmiş funksiyaların hər biri üçün $f(0)$, $f(1{,}5)$, $f(-1)$ qiymətlərini tapın.

a) $f(x) = 5x - 2$ b) $f(x) = -x^2 + x$ c) $f(x) = -2x^3 + 1$

d)


e)


f)


13. Verilən təyin oblastında funksiyanın qrafikini qurun. Qrafik üzərində təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2,\ -6 \le x < 2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1,\ (-\infty; 3]$

c) $f(x) = -x - 2,\quad x > -3$ d) $f(x) = 2x + 1,\ (-3; 2]$

Funksiya və onun verilmə üsulları

14. $y = 2x + b$ funksiyasının qrafiki A(1; –1) nöqtəsindən keçir. b-ni tapın və funksiyanın qrafikini qurun.

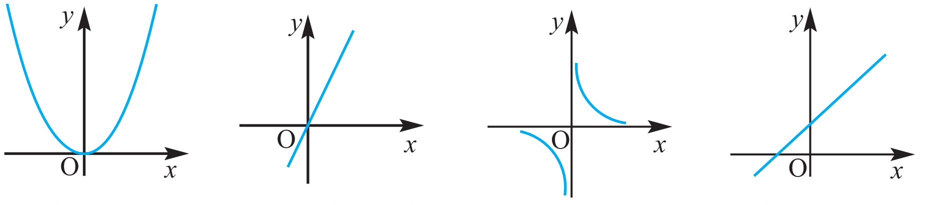
15. c-nin hansı qiymətində $f(x) = x^2 + x + c$ funksiyasının qrafiki A(–1; 2) nöqtəsindən keçir?

16. N(–1; 1) nöqtəsi $f(x) = x^3 + mx$ funksiyasının qrafiki üzərindədir. $f(2)$-ni tapın.

17. Verilmiş funksiyanın qrafikini qurun və qrafikin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini göstərin.

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

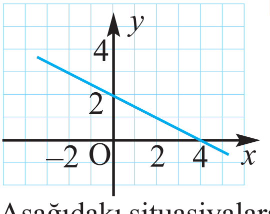
18. Şəkildə $y = 2x$, $y = 2 + x$, $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. Hər funksiyaya uyğun qrafiki göstərin.



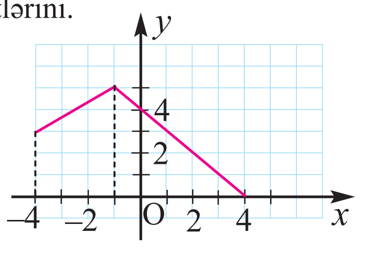
19. Verilmiş funksiyanın "1" addımı ilə qiymətlər cədvəlini tərtib edin, qrafikini qurun, qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $y = \frac{x+6}{x}$, $1 \le x \le 6$ b) $y = x^2 - 2|x|$, $-4 \le x \le 4$

20. Qrafiki verilmiş xətti funksiyanı düsturla $f(x) = kx + b$ şəklində yazın. $f(-2)$, $f(6)$ qiymətlərini tapın.



21. $f(x)$ funksiyasının verilmiş qrafikinə görə tapın:
a) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ qiymətlərini;
b) x-in $f(x) = 1$ və x-in $f(x) = 3$ bərabərliyini ödəyən qiymətlərini.



22. Aşağıdakı situasiyalara uyğun funksiyaları düsturla yazın. Situasiyaya görə funksiyanın təyin oblastını müəyyən edin və qrafikini qurun. Qrafikdən funksiyanın qiymətlər çoxluğunu tapın.

1) Dilarə hər 10 dəqiqədə 1 km olmaqla 40 dəqiqə qaçdı.
2) Bir fotoşəklin çap qiyməti 25 qəpikdir. n sayda fotoşəkilin çap qiyməti.
3) Hündürlüyü 20 sm olan və hər 2 saat yandıqda 5 sm kiçilən şam 6 saat yandı.
4) n sayda atı nallamaq üçün lazım olan nalların sayı.
5) Bir litr benzinin qiyməti 90 qəpikdir. Avtomobilin bakı 40 litr benzin tutur.

Bəzi funksiyaların təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu

Analitik üsulla verilmiş funksiyanın təyin oblastı göstərilməyibsə, təyin oblastı olaraq arqumentin bütün elə qiymətləri nəzərdə tutulur ki, bu qiymətlərdə funksiyanı ifadə edən düsturun mənası olsun (arqumentin bu qiymətlərini bəzən funksiyanın təbii təyin oblastı adlandırırlar). Bu halda arqumentin hansı qiymətləri ala bilmədiyini araşdırmaq lazım gəlir.

Bəzi funksiyaların cəbri yazılışına görə onun təyin oblastını müəyyən edək.

1. Funksiya sərbəst dəyişənə görə **çoxhədli şəklində** verilibsə, onun təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Məsələn, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ funksiyasının təyin oblastı $(-\infty; +\infty)$ çoxluğudur.

2. Rasional funksiyaların məxrəcindəki ifadənin qiyməti sıfra bərabər ola bilməz. Məsələn, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ rasional funksiyasında arqumentin $x^2 - 4 = 0$ şərtini ödəyən qiymətləri onun təyin oblastına daxil ola bilməz.

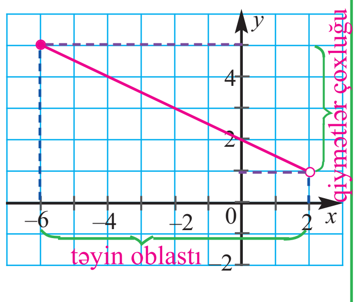
Bu qiymətlər $x = -2$ və $x = 2$-dir. $g(x)$ funksiyası $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ çoxluğunda təyin olunmuşdur.

3. Kvadrat kök daxil olan funksiyalarda kökaltı ifadə mənfi qiymət ala bilməz. Bu halı iki nümunə üzərində nəzərdən keçirək.

1) $y = \sqrt{2x-6}$ funksiyasının təyin oblastı x-in $2x - 6 \geq 0$, yəni $x \geq 3$ şərtini ödəyən qiymətləridir. Deməli, funksiyanın təyin oblastı $[3; +\infty)$ aralığıdır. Kvadrat kökün mənası olması üçün $2x - 6 \geq 0$ olmalıdır. Onda $\sqrt{2x-6} \geq 0$, yəni $y \geq 0$ olur. Bu isə o deməkdir ki, $y = \sqrt{2x-6}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $[0; +\infty)$ aralığıdır.

2) $y = \sqrt{4-x^2}$ funksiyasının təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapaq. $4 - x^2 \geq 0$ olmalıdır. Bu bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[-2; 2]$ aralığıdır. Deməli, verilmiş funksiya $[-2; 2]$ parçasında təyin olunmuşdur. Təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$ olur. Buradan $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{4}$. Yəni $0 \leq y \leq 2$. Başqa sözlə, funksiyanın qiymətlər çoxluğu $[0; 2]$ parçasıdır.

4. Qrafiklə verilmiş funksiyanın təyin oblastının və qiymətlər çoxluğunun tapılması.



Nümunə. Şəkildə $y = -\frac{1}{2}x + 2$ xətti funksiyasının müəyyən aralıqda qurulmuş qrafiki verilmişdir. Qrafikə görə funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu bərabərsizliklə yazın.

Həlli: Qrafikin uclarının rəngli və ya rəngsiz dairəciklə qeyd olunmasına görə uyğun nöqtənin absisinin təyin oblastına, ordinatının qiymətlər çoxluğuna daxil edilib-edilmədiyini müəyyənləşdirək. (2; 1) nöqtəsi rəngsiz dairəciklə göstərildiyindən $x = 2$ nöqtəsi təyin oblastına, $y = 1$ qiyməti isə qiymətlər çoxluğuna daxil deyil. Təyin oblastı: $-6 \leq x < 2$ Qiymətlər çoxluğu: $1 < y \leq 5$

Bəzi funksiyaların təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu

Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiyaların $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ qiymətlərini (mümkün olduqda) tapın, tapmaq mümkün olmadıqda isə səbəbini izah edin.

a) $f(x) = 4 - 2x$ b) $f(x) = 4 - \sqrt{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

d) $f(x) = (x-2)(x+3)$ e) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+2}$

2. Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ d) $f(x) = x^3$ e) $f(x) = \sqrt{x}$

3. Funksiyaların təyin oblastlarını tapın.

a) $y = 3x + 2$ b) $y = 4x - x^2$ c) $y = \sqrt{3-x}$

d) $y = \dfrac{x-2}{x^2}$ e) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ f) $y = \dfrac{x-3}{x^2-x-2}$

g) $y = \sqrt{1-x^2}$ h) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ i) $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-4}$

4. Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapın.

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = -3(x+1)^2 + 6$ c) $h(x) = \sqrt{2-x}$

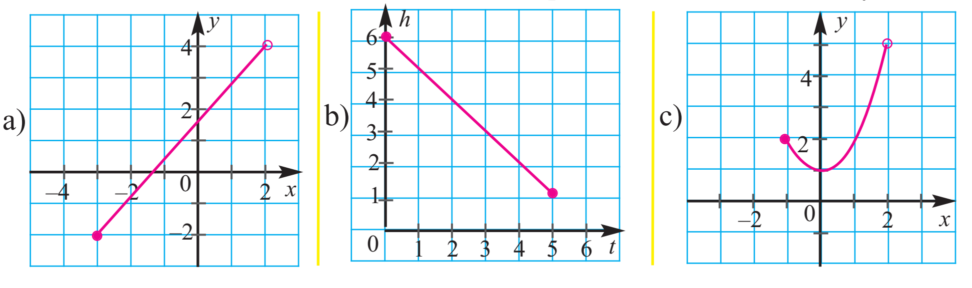
d) $\varphi(x) = \sqrt{x^2+9}$ e) $u(x) = \sqrt{9-x^2}$ f) $v(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}$

5. Funksiyaların təyin oblastlarını tapın.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-x^2}{x-1}}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{x-1}}$

6. $y = \sqrt{x^2 - mx + 8}$ funksiyasının qrafiki M(2; 2) nöqtəsindən keçir. Funksiyanın ən kiçik qiymətini tapın və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

7. Funksiyanın qrafikinə görə onun düsturunu yazın. Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu qrafik üzərində göstərin və ikiqat bərabərsizlik şəklində yazın.



8. Açıq tipli sual. Təyin oblastı verilmiş çoxluq olan hər hansı funksiya yazın:

a) bütün həqiqi ədədlər; b) 2-dən fərqli bütün həqiqi ədədlər;

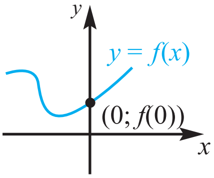
c) 4-dən kiçik olmayan bütün həqiqi ədədlər;

d) 3-dən böyük olmayan bütün həqiqi ədədlər.

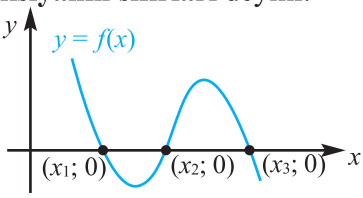
Funksiyaların xassələri

Funksiyanın xassələrini əyani görmək üçün onun qrafiki əlverişlidir.

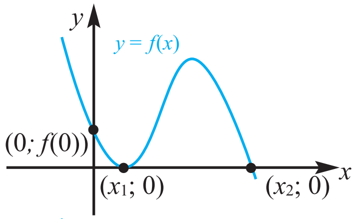
Funksiyanın sıfırları. Funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələrin absislərini müəyyən etməklə onun təyin oblastı tapılır. Funksiyanın qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrində $f(x) = 0$ olur. Arqumentin funksiyanı sıfıra çevirən qiymətlərinə **funksiyanın sıfırları** deyilir.



Sıfırı yoxdur.



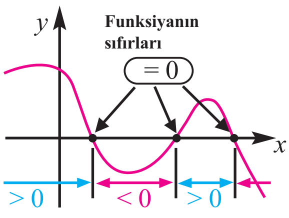
Üç sıfırı var. x_1, x_2, x_3,



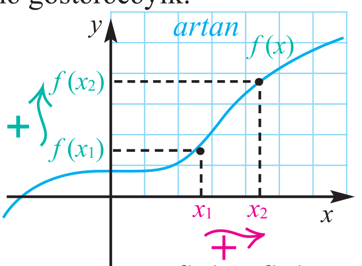
İki sıfırı var. x_1, x_2

$f(x)$ funksiyasının sıfırları $f(x) = 0$ tənliyinin kökləridir.

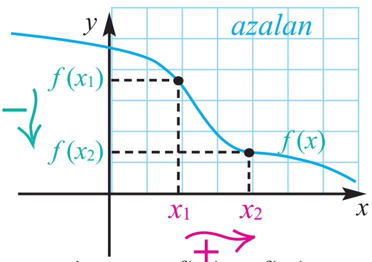
Funksiyanın sıfırları onun təyin oblastını bir neçə aralığa bölür və bu aralıqların hər birində funksiya işarəsini sabit saxlamaqla müsbət və ya mənfi qiymətlər alır. Şəkildəki qrafikdə funksiyanın işarə sabitliyi aralıqları sxematik olaraq göstərilmişdir.



Funksiyanın artması və azalması. Təyin oblastının müəyyən aralığından götürülmüş $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1, x_2 üçün $f(x_2) > f(x_1)$ olarsa, yəni arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğundursa, **bu aralıqda $f(x)$-ə artan,** $f(x_2) < f(x_1)$ olarsa, yəni arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın kiçik qiyməti uyğundursa, **$f(x)$-ə bu aralıqda azalan funksiya** deyilir. Funksiyasının verilən aralıqda artan olmasını $\uparrow$ ilə, azalan olmasını isə $\downarrow$ ilə göstərəcəyik.



$x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$



$x_2 > x_1$ $f(x_2) < f(x_1)$

Əgər $f(x)$ funksiyası müəyyən aralıqda artandırsa (azalandırsa), $-f(x)$ funksiyası bu aralıqda azalandır (artandır).

Məsələn, $f(x) = x^2$ funksiyası $[0; +\infty)$ aralığında artan, $g(x) = -x^2$ funksiyası isə həmin aralıqda azalandır.

Əgər $f(x)$ funksiyası müəyyən aralıqda sıfırdan fərqli, artan (azalan) və işarəsi dəyişməyən funksiyadırsa, $\dfrac{1}{f(x)}$ funksiyası həmin aralıqda azalandır (artandır).

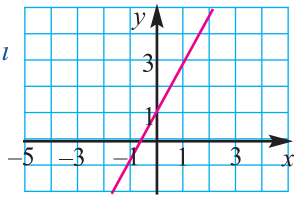
Funksiyaların xassələri

Məsələn $f(x) = x^2 + 4$ funksiyası $[0; +\infty)$ aralığında artan, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ funksiyası həmin aralıqda azalandır.

Bucaq əmsalının işarəsinə görə xətti funksiyanın artan və ya azalan olduğunu müəyyən etmək olar.

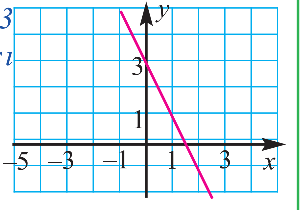
Bucaq əmsalı müsbət olan xətti funksiyalar artandır.

$y = 2x + 1$ funksiyası artandır



Bucaq əmsalı mənfi olan xətti funksiyalar azalandır.

$y = -2x + 3$ funksiyası azalandır



$f(x) = kx + b$ funksiyasının $k > 0$ olduqda bütün ədəd oxunda artan, $k < 0$ olduqda azalan funksiya olduğunu analitik üsulla göstərək.

Arqumentin $(-\infty; +\infty)$ aralığında götürülmüş və $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən iki qiyməti üçün $f(x_2) - f(x_1)$ fərqinə baxaq:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k \cdot (x_2 - x_1).$$

Şərtə görə $x_2 > x_1$ olduğundan $f(x_2) - f(x_1)$ fərqinin işarəsi k-nın işarəsi ilə eynidir. Deməli, $k > 0$ olduqda $f(x_2) > f(x_1)$, yəni funksiya artandır, $k < 0$ olduqda isə $f(x_2) < f(x_1)$, yəni funksiya azalandır.

Verilmiş aralıqda artan və ya azalan funksiyalara həmin aralıqda **monoton** funksiyalar deyilir.

Qrafik üzərində artmanın azalma ilə və ya azalmanın artma ilə əvəz olunduğu nöqtələr uyğun olaraq, funksiyanın maksimum və minimumunu göstərir.

x_0 nöqtəsinin daxil olduğu ixtiyarı intervala bu **nöqtənin ətrafı** deyilir.

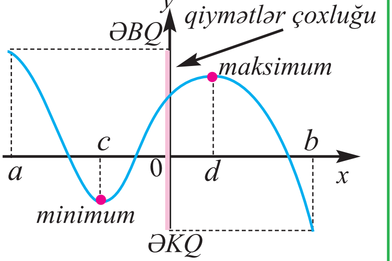
x_0-ın müəyyən ətrafında x_0-dan fərqli bütün x-lər üçün $f(x) > f(x_0)$ olarsa, x_0-a $f(x)$-in **minimum nöqtəsi**, $f(x_0)$-a isə **minimum qiyməti** deyilir.

x_0-ın müəyyən ətrafında x_0-dan fərqli bütün x-lər üçün $f(x) < f(x_0)$ olarsa, x_0-a $f(x)$-in **maksimum nöqtəsi**, $f(x_0)$-a isə **maksimum qiyməti** deyilir.

Maksimum və minimum nöqtələri x_{max}, x_{min} kimi işarə edilir və ekstremum nöqtələri, funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri isə ekstremumları adlanır.

Qrafiki verilmiş funksiya $x = c$ nöqtəsində minimuma, $x = d$ nöqtəsində isə maksimuma malikdir. Bu belə yazılır:

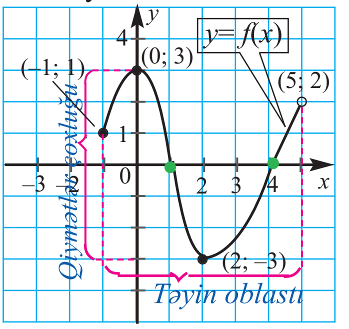
$x_{min} = c$, $f_{min} = f(c)$, $x_{max} = d$, $f_{max} = f(d)$.



Bütün təyin oblastında funksiyanın qiymətləri içərisində ən böyüyü ƏBQ, ən kiçiyi isə ƏKQ ilə (əgər varsa) işarə edilir. Funksiya kəsilməzdirsə (verilmiş aralıqda qrafiki bütöv xətdirsə), ƏKQ ilə ƏBQ arasındakı bütün qiymətləri alır.

Funksiyaların xassələri

Nümunə. Qrafiki verilmiş funksiyanın xassələrini sadalayın.



Həlli: 1. Funksiyanın **təyin oblastı** [–1; 5) aralığıdır. $x = -1$ olduqda $f(-1) = 1$ (uyğun nöqtə rəngli dairəciklə göstərilib). (5; 2) nöqtəsi isə qrafikə aid deyil (rəngsiz dairəciklə göstərilib). Funksiyanın **qiymətlər çoxluğu** [–3; 3] aralığıdır.

2. Funksiyanın sıfırları. Qrafikin x oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absisləri: $x = 1$ və $x = 4$. Deməli, $x = 1$ və $x = 4$ funksiyanın sıfırlarıdır: $f(1) = 0$, $f(4) = 0$

Funksiyanın sıfırları onun təyin oblastını funksiyanın işarəsini sabit saxladığı üç aralığa bölür: [–1; 1), (1; 4) və (4; 5). Funksiya (1; 4) aralığında mənfi, [–1; 1) və (4; 5) aralıqlarının hər birində müsbət qiymətlər alır.

3. Funksiyanın artması və azalması. Qrafikdən görünür ki, x-in –1-dən 0-a kimi artması ilə y-in qiymətləri 1-dən 3-ə kimi artır, x-in 0-dan 2-yə kimi artması ilə y-in qiymətləri 3-dən –3-ə kimi azalır, x-in 2-dən 5-ə qədər artması ilə y-in qiymətləri –3-dən 2-yə kimi artır.

Funksiya [–1; 0] və [2; 5) aralıqlarının hər birində artandır, [0; 2] aralığında isə azalandır.

4. Funksiyanın ekstremumları – maksimumu və minimumu. Qrafik üzərindəki (0; 3) və (2; –3) nöqtələri ekstremum nöqtələridir. Bu nöqtələr uyğun olaraq funksiyanın maksimumunu və minimumunu göstərir: $x_{max} = 0$, $f_{max} = 3$, $x_{min} = 2$, $f_{min} = -3$.

Öyrənmə tapşırıqları

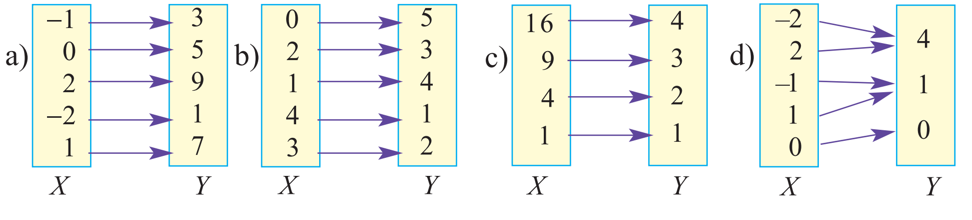
1. Funksiyanın sıfırlarını tapın.

a) $y = \frac{1}{5}x - 4$ b) $y = 2x(x - 3)$ c) $y = \sqrt{x} - 2$ d) $y = \sqrt{x - 2}$

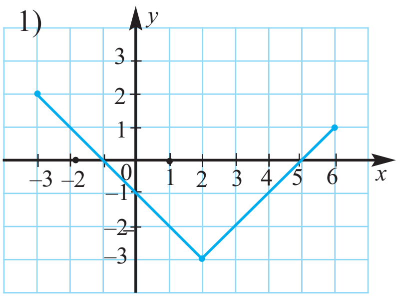
2. Sıfırları verilən ədədlər olan hər hansı funksiyanın qrafikini təsvir edin.
a) –1; 3 b) –2; 1; 4

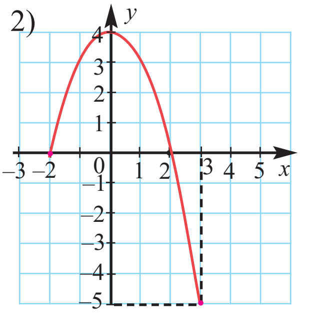
3. a) Təyin oblastı [1; 4] olan hər hansı artan funksiyanı qrafik təsvir edin.
b) Təyin oblastı [1; 4] olan hər hansı azalan funksiyanı qrafik təsvir edin.

4. Asılılıq xəritəsi ilə verilmiş funksiyaların: 1) təyin oblastını, qiymətlər çoxluğunu göstərin; 2) artması və azalması haqqında yazın.



5. Qrafiki şəkildə verilmiş funksiya üçün:
a) təyin oblastını; b) sıfırlarını; c) müsbət qiymətlər aldığı aralıqları;
d) mənfi qiymətlər aldığı aralıqları; e) artma və azalma aralıqlarını;
f) ekstremumlarını; g) qiymətlər çoxluğunu göstərin.





6. $y = f(x)$ funksiyası $(-\infty; +\infty)$ aralığında təyin olunmuş və azalan funksiyadır. Funksiyanın qiymətlərini artan sırada düzün:
a) $f(0), f(-4), f(2)$; b) $f(1), f(-1), f(3)$; c) $f(-\sqrt{3}), f(-2), f(\sqrt{2})$

7. Cədvəldə A və B şirkətlərinin həftələrə görə satış həcmləri verilmişdir.
a) Hər bir şirkət üçün satış həcminin artdığını və ya azaldığını müəyyən edin.
b) Hər bir şirkət üçün verilmiş cədvəli qrafik təsvir edin.

A şirkəti (on min manatla)

Həftə	1	2	3	4
Satış həcmi	5	7,1	8,7	12

B şirkəti (on min manatla)

Həftə	1	2	3	4
Satış həcmi	5,6	4,2	3,8	3

8. Verilmiş funksiyanın qrafikini qurun. Artan və ya azalan olduğunu göstərin. Funksiyanın ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.
a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3, \quad -2 \le x \le 4$ b) $f(x) = 3 - x, \quad -1 \le x \le 4$

9. Funksiyanın sıfırlarını tapın, qrafikini sxematik təsvir edin. İşarə sabitliyi aralıqlarını, artma-azalma aralıqlarını göstərin, ekstremumlarını yazın.
a) $y = x^2 - 4$ b) $y = |x| - 1$ c) $y = -x^2 + 2x + 3$

10. Qrafiki A(1; –1) və B(2; 1) nöqtələrindən keçən $f(x) = kx + b$ funksiyasının düsturunu yazın. $f(-3), f(-4), f(2)$ qiymətlərini artan sırada düzün. Arqumentin hansı qiymətlərində $f(x) \ge f(1)$ olduğunu müəyyən edin.

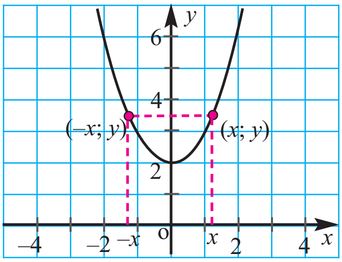
11. Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətini (əgər varsa) tapın.
a) $f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$ b) $f(x) = 2 - |x - 1|$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

12. Verilmiş funksiyanın verilmiş aralıqda qrafikini qurun. Ekstremumlarını göstərin. Ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.
a) $y = 2x - x^2$, [–1; 2] b) $y = x^2 + 4x$, [–4; 1]

Cüt funksiya, tək funksiya

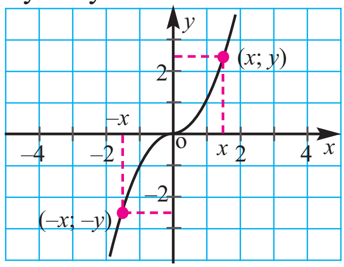
Təyin oblastı $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik olan funksiyalara baxaq.

Təyin oblastından götürülmüş ixtiyari x üçün $f(-x) = f(x)$ olarsa, $f(x)$-ə cüt funksiya deyilir.



Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.

Təyin oblastından götürülmüş ixtiyari x üçün $f(-x) = -f(x)$ olarsa, $f(x)$-ə tək funksiya deyilir.



Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.
$f(x)$ tək funksiyası $x = 0$ nöqtəsində təyin olunubsa, onda $f(0) = 0$.

Heç də bütün funksiyalar tək və ya cüt funksiya olmur. Əgər funksiyanın təyin oblastı $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik deyilsə, funksiya nə tək, nə də cütdür. Təyin oblastı $x = 0$-a nəzərən simmetrik olan funksiya üçün $f(-x) = f(x)$ və $f(-x) = -f(x)$ şərtləri pozulduqda da funksiya nə tək, nə də cütdür.

Nümunə 1. $f(x) = x^2 + x$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın.

Həlli: Funksiyanın təyin oblastı olan bütün həqiqi ədədlər çoxluğu $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir. Lakin, $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ olduğuna görə $f(-x) \neq f(x)$ və $f(-x) \neq -f(x)$.
Deməli, verilən funksiya nə tək, nə də cütdür.

Nümunə 2. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2}$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın.

Həlli: Funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur və

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 2} = \frac{-(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -\frac{(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -f(x)$$

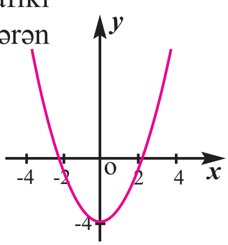
$f(-x) = -f(x)$ olduğundan verilən funksiya tək funksiyadır.

Nümunə 3. Funksiyanın qrafikinə görə tək-cütlüyünü araşdırın.

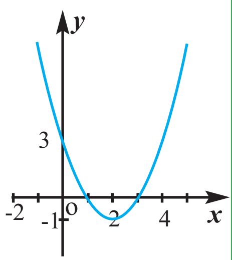
a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.
Cüt funksiyadır.



Funksiyanın qrafiki nə ordinat oxuna nəzərən, nə də koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Funksiya nə tək, nə də cütdür.



Cüt funksiya, tək funksiya

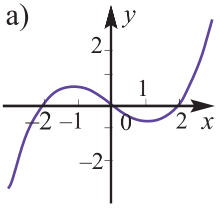
Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən funksiyaların tək-cütlüyünü araşdırın.

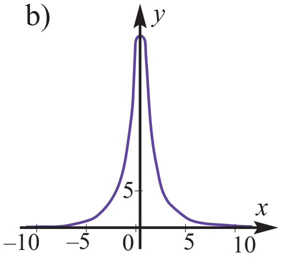
a) $f(x) = 5x^3 + x$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 3x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ d) $f(x) = 5x^3 + x^2 + 4$

2. Qrafikləri verilən funksiyaların tək və ya cüt olduğunu müəyyən edin.

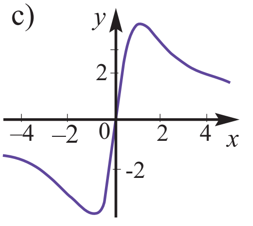
a)



b)



c)

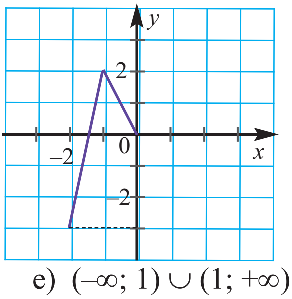


3. Verilən funksiyaların tək-cütlüyünü araşdırın.

$f(x) = -x^2 + 6$	$f(x) = -x^3 + x$	$f(x) = \lvert x\rvert + 4$	$f(x) = x^{-2}$
$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = -3x^2 - 5$	$f(x) = \lvert x^3\rvert$	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert}{x^2 + 1}$
$f(x) = -x^5$	$f(x) \equiv 0$	$f(x) = -x(x^2 + 5)$	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert}{x^3 - 1}$

4. Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Tapın:
a) $f(x)$ cüt funksiya və $f(-4) = 7$ olarsa, $f(4)$ qiymətini;
b) $f(x)$ tək funksiya və $f(-4) = 7$ olarsa, $f(4)$ qiymətini;
c) $f(x)$ cüt funksiya və $f(-3) = 8$, $f(5) = -2$ olarsa, $f(3) + f(-5)$ cəmini;
d) $f(x)$ tək funksiya və $f(-2) = 3$, $f(4) = -7$ olarsa, $f(2) + f(0) + f(-4)$ cəmini.

5. Təyin oblastı $[-2;\ 2]$ olan $f(x)$ funksiyasının qrafikinin bir hissəsi verilib. Qrafiki tamamlayın:
a) $f(x)$ cüt funksiyadırsa;
b) $f(x)$ tək funksiyadırsa.



6. Təyin oblastı verilmiş aralıq olan funksiya tək və ya cüt funksiya ola bilərmi?
a) $[-6;\ 6]$; b) $(-6;\ 6)$; c) $(-6;\ 6]$; d) $[-9;\ 10)$; e) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$

7. $f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş,cüt funksiyadır və $[0;\ +\infty)$ aralığında artandır. 1) Müqayisə edin:
a) $f(2)$ ilə $f(3)$; b) $f(5)$ ilə $f(7)$; c) $f(-2)$ ilə $f(-3)$; d) $f(-5)$ ilə $f(-7)$
2) $(-\infty;\ 0]$ aralığında $f(x)$ funksiyası artan, yoxsa azalandır?

8. Təyin oblastı $[-6;\ 6]$ parçası olan, $x = -4$ nöqtəsində sıfıra çevrilməklə $[-6;\ 0]$ aralığında artan hər hansı cüt funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin. x-in hansı qiymətlərində $f(x) > 0$ olar?

Hissə-hissə verilmiş funksiyalar

Real həyati situasiyalarda dəyişən kəmiyyətlər arasındakı asılılıqlar bir çox hallarda bir deyil, bir neçə düstur və bərabərsizliklə ifadə edilir.

Məsələ. Topdansatış mağazasında ən azı 10, ən çoxu 20 idman köynəyi alanlar üçün bir köynəyin qiyməti 3 manat, 20-dən çox köynək alanlar üçün isə bir köynəyin qiyməti 2 manatdır. Satışdan daxil olan pulu C, satılan köynəklərin sayını n qəbul etməklə bu iki kəmiyyət arasındakı asılılığı yazın.

Həlli: Bu situasiyanı $C(n) = 3\cdot n$, $10 \le n \le 20$ olduqda və $C(n) = 2\cdot n$, $n > 20$ olduqda funksiyaları ilə ümumi şəkildə aşağıdakı yazılışla ifadə etmək olar:

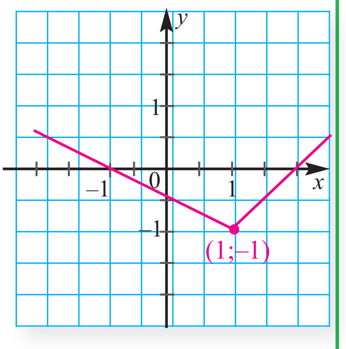
$$C(n) = \begin{cases} 3\cdot n, & 10 \le n \le 20 \\ 2\cdot n, & n > 20 \end{cases}$$

$n = 15$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ olduqda $C(n)$ funksiyasının qiymətlərini tapaq.
$n = 15$ və $n = 20$ qiymətləri $10 \le n \le 20$ şərtini ödədiyi üçün əldə olunan pulu $3\cdot n$ düsturu ilə hesablamalıyıq:
$C(15) = 3\cdot 15 = 45$, $C(20) = 3\cdot 20 = 60$.
$n = 30$ və $n = 40$ qiymətləri $n > 20$ şərtinə uyğundur:
$C(30) = 2\cdot 30 = 60$, $C(40) = 2\cdot 40 = 80$.

Təyin oblastının müxtəlif aralıqlarında müxtəlif düsturlarla verilən funksiyalara **hissə-hissə verilmiş funksiyalar** deyilir.

Nümunə 1. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun.

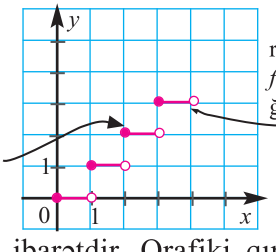
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x < 1 \text{ olduqda} \\ x - 2, & x \ge 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$



Həlli: Bu funksiyanın qrafiki $x = 1$ nöqtəsindən solda $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ düz xəttinin, $x = 1$-dən sağda isə $y = x - 2$ düz xəttinin üzərinə düşür.
$f(1) = -1$ olduğuna görə verilən funksiyanın qrafiki təpəsi $(1; -1)$ nöqtəsində olan sınıq xətdir.
Qələmi "vərəqdən ayırmadan" qrafiki təsvir etmək olursa, funksiya kəsilməzdir deyilir. Nümunədə verilən funksiya kəsilməzdir.

Nümunə 2. Funksiyanın qrafikini qurun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ əgər } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{ əgər } 1 \le x < 2 \\ 2, \text{ əgər } 2 \le x < 3 \\ 3, \text{ əgər } 3 \le x < 4 \end{cases}$$



Bu funksiyanın qrafiki pilləvari hissələrdən ibarətdir. Qrafiki qırıq xətt olduğundan funksiya kəsiləndir.
Hər bir ədədə bu ədədin tam hissəsini qarşı qoyan tam hissə funksiyası $f(x) = [x]$ kimi yazılır. Qurulan qrafik tam hissə funksiyasının $[0; 4)$ aralığındakı qrafikidir.

Hissə-hissə verilmiş funksiyalar

Öyrənmə tapşırıqları

1. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qiymətlərini arqumentin verilən qiymətlərində hesablayın.

$f(x)=\begin{cases}2x-3, & x\le 4\\ 3x+5, & x>4\end{cases}$ a) $x=1{,}5$ b) $x=4$ c) $x=-2$ d) $x=12$

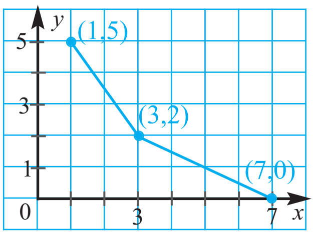
2. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & x>0\end{cases}$ funksiyası verilmişdir. Tapın:

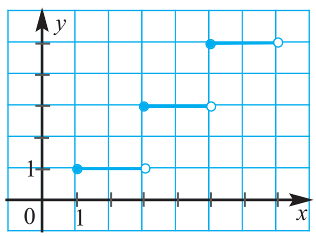
a) $f(-2)$ b) $f(-1)$ c) $f(0)$ d) $f(1)$ e) $f(4)$

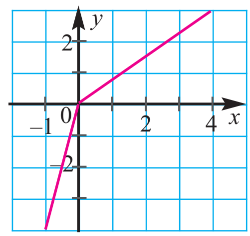
3. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun. Qrafikinə görə funksiyanın kəsilməzliyini araşdırın.

a) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -3\le x<1\\ 3x-1, & 1\le x\le 3\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}4, & 0\le x<2\\ 5, & 2\le x<4\\ 6, & 4\le x<6\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1\\ x-1, & x\ge 1\end{cases}$

4. Qrafiki verilmiş hissə-hissə funksiyanı düsturla yazın.

a)


b)


c)


5. $M(x)$ funksiyası çap edilən fotoşəkillərin x sayından asılı olaraq ödənilən məbləği (manatla) göstərir.

$$M(x)=\begin{cases}0{,}15x, & 0<x\le 25\\ 0{,}10x, & 26\le x\le 100\\ 0{,}07x, & 101\le x\le 500\\ 0{,}05x, & 501\le x\end{cases}$$

1) 20 fotoşəklin çapı üçün ödənilən məbləği tapın.
2) “150 şəkil çapı üçün 10 manatdan az ödəmək lazımdır” fikri doğrudurmu?
3) 40 manata neçə fotoşəkil çap etmək olar?

6. Avtomobil dayanacağında ödəniş şərti:

Hər yarım saat 0,50 ₼.
Ödənilən məbləğ 2 manata çatdıqdan sonra,
avtomobil dayanacaqda daha 10 saat qala bilər.

a) ödəniş şərtini hissə-hissə funksiya ilə ifadə edin; b) funksiyanın qrafikini qurun; c) təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.
Göstəriş: Tələb olunan funksiyanı $f(t)$ ilə işarə edin və 0,50; 1; 1,5; 2 manat məbləğlərinə uyğun zaman intervallarını yazın.

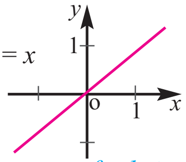
7. Şirkət işçilərə maaşı iş saatına görə aşağıdakı şərtlərlə ödəyir:
Əgər işçi həftə ərzində 40 saata qədər işləyərsə, hər iş saatı üçün 8 manat, 40 saatdan artıq hər iş saatı üçün bu normadan 1,5 dəfə çox məvacib alır. Bu şirkətdə işçiyə verilən məvacibi hissə-hissə funksiya şəklində yazın. Həftədə 48 saat işləmiş işçi neçə manat məvacib almalıdır?

$y = x^n$ $(n \in N)$ qüvvət funksiyaları

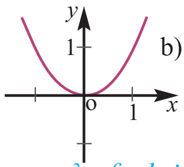
n natural ədəd olduqda $y = x^n$ şəklində funksiyaya natural üstlü qüvvət funksiyası deyilir.

$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ olduqda qüvvət funksiyalarının qrafikləri aşağıda verilmişdir.

a) $y = x$

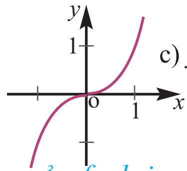


$y = x$ funksiyasının qrafiki düz xətdir.



b) $y = x^2$

$y = x^2$ funksiyasının qrafiki paraboladır.



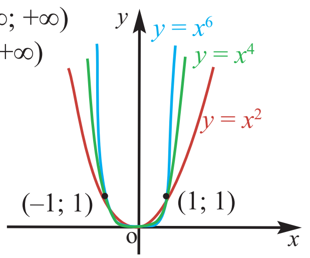
c) $y = x^3$

$y = x^3$ funksiyasının qrafiki kub paraboladır.

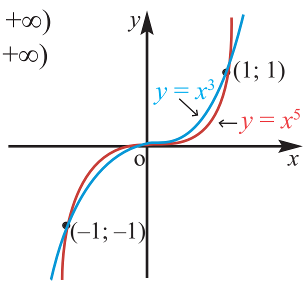
$y = x^n$ funksiyasının qrafiki n-in istənilən cüt qiymətində ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir və $y = x^2$ parabolasına oxşardır.

n-in istənilən tək qiymətində $y = x^n$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir və n-in 1-dən böyük tək qiymətlərində $y = x^3$ -nun qrafiki olan kub parabolaya oxşardır.

$D(x^{2k}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k}) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0]\searrow$
$[0; +\infty)\nearrow$
$x_{min} = 0$;
$f_{min} = 0$



$D(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; +\infty)\nearrow$
ekstremumu yoxdur



$n > 1$, $n \in N$ olduqda x^n funksiyasının qrafiki **n tərtibli parabola** adlanır.

Qrafiklərdən göründüyü kimi, $n > m$ olduqda $(0; 1)$ aralığında x^n funksiyasının qrafiki x^m funksiyasının qrafikindən aşağıda, $(1; +\infty)$ aralığında isə yuxarıda yerləşir.

Öyrənmə tapşırıqları

1. $x = 0$; $x = -3$; $x = 5$ nöqtələrində funksiyaların qiymətlərini sıfırla müqayisə edin.
a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = x^6$

2. Verilmiş funksiyanın qrafiki verilmiş nöqtədən keçirmi?
a) $y = x^4$, A(–2; 16); b) $y = x^5$, B(–2; 32); c) $y = x^5$, C$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{32}\right)$

3. Verilmiş funksiyanın qrafiki verilmiş düz xətlə kəsişirmi?
a) $y = x^4$, $y = 2$; b) $y = x^6$, $y = -3$; c) $y = x^5$, $y = 2$; d) $y = x^7$, $y = -3$

4. $f(x) = x^3$ və $g(x) = x^4$ funksiyaları verilmişdir. Müqayisə edin:
a) $f(0,1)$ və $g(0,1)$; b) $f(\frac{1}{2})$ və $g(\frac{1}{2})$; c) $f(2)$ və $g(2)$.

5. $y = x^4$ və $y = 16$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və kəsişmə nöqtələrini göstərin. Qrafik təsvirə görə $x^4 < 16$ və $x^4 > 16$ bərabərsizliklərini həll edin.

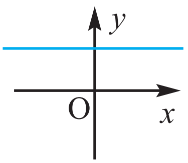
Funksiyaların təsnifatı

Dəyişən kəmiyyətlər olduqca müxtəlifdirlər. Lakin ilk baxışdan bir-biri ilə əlaqəsi görünməyən proseslərdə kəmiyyətlərin dəyişmələri təbiətcə eyni olan asılılıqla verilə bilir. Buna görə ən çox rast gəlinən asılılıqlara uyğun (ana) funksiya əsas götürülür və bu əsas funksiyanın üzərində aparılan çevrilmələrlə alınan funksiyalar bir ailədə birləşdirilir.
Məsələn, $y = 2x^2 + 1$, $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = -3x^2$ funksiyalarının qrafikləri $y = x^2$ parabolası üzərində aparılan çevrilmələrlə alınır. Ona görə də bu funksiyalar, eləcə də $y = a(x - m)^2 + n$ düsturu ilə verilən bütün funksiyalar bir ailəyə daxil edilir və bu ailənin əsas funksiyası isə $y = x^2$ hesab edilir.

Aşağıdakı cədvəldə bəzi əsas funksiyaların qrafikləri və onlar haqqında bir sıra məlumatlar verilmişdir.

Sabit funksiya

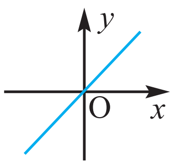
$f(x) = c$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = \{c\}$

Eynilik funksiyası

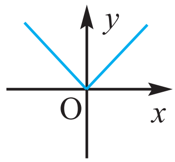
$f(x) = x$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
Artan funksiyadır
Ekstremumu yoxdur

Modul funksiyası

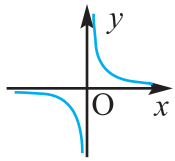
$f(x) = |x|$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0]\downarrow$, $[0; +\infty)\uparrow$
(0; 0) nöqtəsində minimum

Rasional funksiya

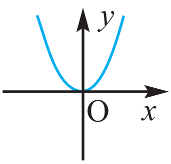
$f(x) = \frac{1}{x}$



$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Sıfrı yoxdur
$(-\infty; 0)\downarrow$, $(0; +\infty)\downarrow$
Ekstremumu yoxdur

Kvadrat funksiyası

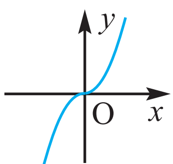
$f(x) = x^2$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0]\downarrow$, $[0; +\infty)\uparrow$
(0; 0) nöqtəsində minimum

Kub funksiyası

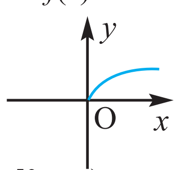
$f(x) = x^3$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
Artan funksiyadır
Ekstremumu yoxdur

Kvadrat kök funksiyası

$f(x) = \sqrt{x}$



$D(f) = [0; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$[0; +\infty)\uparrow$
Ekstremumu yoxdur

Öyrənmə tapşırıqları

1. 1) Cədvəllə verilmiş funksiyaların qrafiklərini qurun.
Hər bir funksiya üçün aid olduğu ailənin əsas funksiyasını yazın.

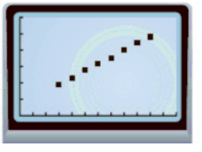
a) Cədvəldə 2002-ci ildən başlayaraq sahibkarın əldə etdiyi illik gəlir (manatla) göstərilmişdir. $x = 3$ qiyməti 2002-ci ilə uyğundur. 2018-ci ildə sahibkarın əldə etdiyi gəlir təxminən nə qədər olar?

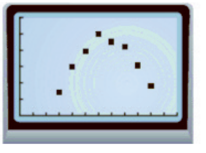
x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7931	8306	8800	9206	9588	10076	10444	10876

b) Cədvəldə saat 15:00-dan başlayaraq hər növbəti saat ərzində mağazada satılan çörəklərin sayı göstərilmişdir.
$x = 3$ qiyməti saat 15:00-a uyğundur. Saat 17:30-da satılan çörəklərin sayını təxmin edin.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	15	30	40	50	45	42	31	18

2) Verilmiş qrafiklərdən hər birinin yuxarıdakı situasiyalardan hansına uyğun olduğunu müəyyən edin.

a)


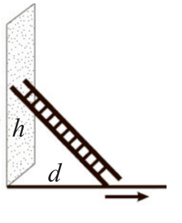
b)


2. (–1; –1), (0; 0), (1; 1) nöqtələr çoxluğunu hansı funksiya ilə ifadə edərdiniz?
a) Əgər (–1; –1) nöqtəsi (–1; 1) nöqtəsi ilə əvəz edilərsə, bu nöqtələr çoxluğunu hansı funksiya ilə təsvir etmək olar?
b) Əgər (–1; –1) nöqtəsi (9; 3) nöqtəsi ilə əvəz edilərsə, bu nöqtələr çoxluğunu hansı funksiya ilə təsvir etmək olar?
c) Verilmiş nöqtələrə (–2; –8) və (2; 8) nöqtələri əlavə edilsə, bu nöqtələr çoxluğunu hansı funksiya ilə ifadə etmək daha doğru olardı?

3. $\frac{pV}{T} = const$ (ideal qazın hal tənliyi) düsturunda p, V və T kəmiyyətlərindən hər hansı birini sabit qəbul edərək, digər ikisi arasındakı asılılığın xarakterini müəyyən edin. Bütün hallara baxın. Hər bir hal üçün əsas funksiyanı göstərin.

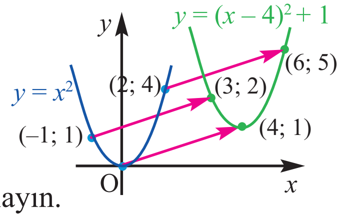
4. y və x dəyişənləri arasında asılılığın düz mütənasiblik və ya tərs mütənasiblikdən biri olduğu məlumdur. $f(2) = 2$ və $f(4) = 1$ olduğunu bilərək, $y = f(x)$ funksiyasının düsturunu yazın və qrafikini qurun.

5. Uzunluğu 3 m olan nərdivan divara söykədilib. Nərdivanın aşağı ucu divardan d metr məsafədə, yuxarı ucu isə yerdən h metr hündürlükdədir. a) h hündürlüyünün d məsafəsindən $h(d)$ asılılığının düsturunu yazın; b) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin, qrafikini qurun;
c) $d = 0$ və $d = 3$ m olduqda nərdivanın vəziyyətini təsvir edin.



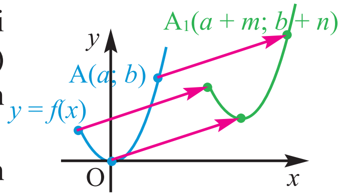
Qrafiklərin çevrilməsi

Praktik məşğələ. 1) $y = x^2$ parabolası üzərində (0; 0), (–1; 1), (2; 4) nöqtələrini qeyd edin.
2) Bu nöqtələri $\langle 4; 1\rangle$ vektoru ilə paralel köçürün.
(0; 0) → (4; 1) (–1; 1) → (3; 2) (2; 4) → (6; 5)
3) Paralel köçürmədən alınan nöqtələrin $y = (x - 4)^2 + 1$ parabolası üzərində yerləşdiyini yoxlayın.



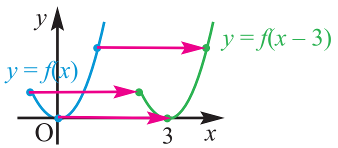
Paralel köçürmə

Paralel köçürmədə qrafikin bütün nöqtələri verilən istiqamətdə eyni məsafə qədər yerini dəyişir. Qrafikin forması isə dəyişmir.
$y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin hər bir nöqtəsini $\langle m; n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürək: $A(a; b) \to A_1(a + m; b + n)$
A nöqtəsinin koordinatları $b = f(a)$ bərabərliyini ödədikdə A_1 nöqtəsinin koordinatları $y - n = f(x - m)$ bərabərliyini ödəyir. Yəni $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini $\langle m; n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürdükdə $y = f(x - m) + n$ funksiyasının qrafiki alınır: verilən qrafik üfüqi istiqamətdə $|m|$ vahid ($m > 0$ olduqda sağa, $m < 0$ olduqda sola), şaquli istiqamətdə $|n|$ vahid ($n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı) sürüşdürülür.

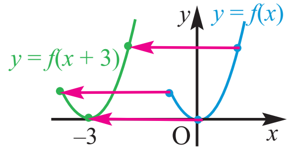


$n = 0$ halında qrafik yalnız üfüqi istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x - m)$ olur.

Nümunə.



3 vahid sağa

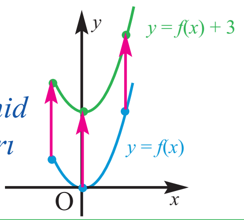


3 vahid sola

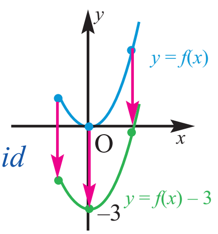
$m = 0$ halında qrafik yalnız şaquli istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x) + n$ olur.

Nümunə.

3 vahid yuxarı



3 vahid aşağı



1. Hər bir funksiya üçün m və n-nin qiymətini müəyyən edin. Sürüşmənin üfüqi və ya şaquli olduğunu yazın.
a) $y - 4 = f(x)$ b) $y = f(x) - 4$ c) $y = f(x + 1)$ d) $y + 3 = f(x - 7)$

2. Üçhədlidən tam kvadrat ayırmaqla, verilən funksiyaların qrafiklərinin $y = x^2$ funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə alındığını izah edin.
a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Qrafiklərin çevrilməsi

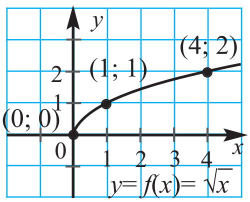
Nümunə. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə verilən funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $g(x) = \sqrt{x} - 1$ b) $h(x) = \sqrt{x - 1}$ c) $m(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

Həlli: $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikini quraq. Funksiyanın təyin oblastı: $[0; \infty)$. Bu oblastdan tam kvadrat olan üç qiymət (0;1;4) seçməklə cədvəl quraq.

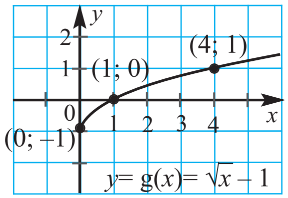
x	$f(x)$	$(x; f(x))$
0	0	(0; 0)
1	1	(1; 1)
4	2	(4; 2)

a)

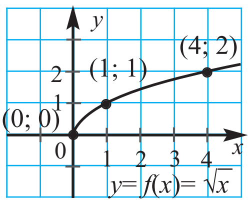


$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki 1 vahid aşağı sürüşdürülür, qrafikin üzərindəki hər bir nöqtənin ordinatından 1 çıxılır.

$g(x) = f(x) - 1$

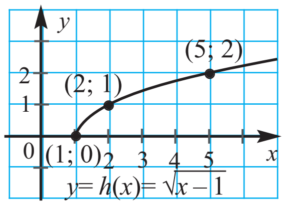


b)

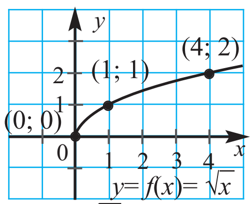


$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki 1 vahid sağa sürüşdürülür.

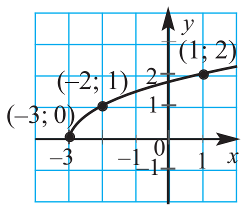
$h(x) = f(x - 1)$



c)



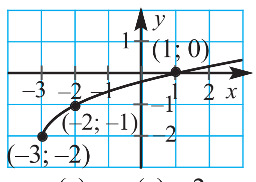
$f(x) = \sqrt{x}$



$y = m_1(x) = f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$

qrafik 3 vahid sola sürüşdürülür.

$m_1(x) = f(x+3)$



$y = m(x) = m_1(x) - 2 = \sqrt{x + 3} - 2$

qrafik 2 vahid aşağı sürüşdürülür.

$m(x) = f(x+3) - 2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə verilən funksiyaların qrafiklərini qurun. Hər bir çevrilməni sözlə yazın.

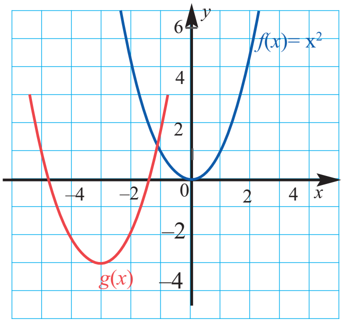
a) $g(x) = \sqrt{x} - 3$ b) $h(x) = \sqrt{x - 2}$ c) $m(x) = \sqrt{x - 1} + 2$

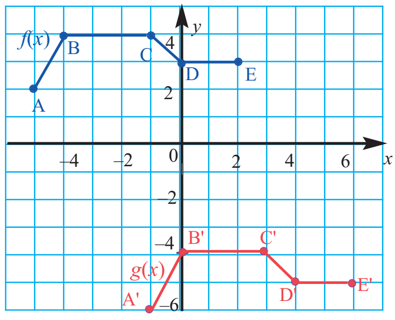
4. $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin üfüqi və şaquli istiqamətlərdə paralel köçürülməsi ilə $y = f(x - m) + n$ alınmışdır.

a) Köçürülmə ardıcıllığının əhəmiyyət daşımadığını nümunə üzərində göstərin.

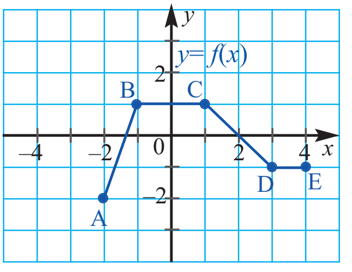
b) m və n parametrlərinin qiymətləri funksiyanın təyin oblastına və qiymətlər çoxluğuna necə təsir edir?

5. Qrafiklərinə görə $f(x)$ funksiyasının $g(x)$ funksiyasına çevrilməsini təqdim edin.
a) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına aid 5 nöqtənin koordinatlarının uyğunluğunu yazın.
b) Çevrilmədən alınan $g(x)$ funksiyasını $y = f(x - m) + n$ şəklində yazın.

1) 

2) 

6. $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə görə hər bir çevrilmə üçün:



- A, B, C, D və E nöqtələrinin çevrildikləri nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edin
- Çevrilmədən alınan funksiyanın qrafikini çəkin.

a) $g(x) = f(x) + 2$ b) $g(x) = f(x - 3)$
c) $g(x) = f(x + 1)$ d) $g(x) = f(x) - 4$

7. Hər bir paralel köçürmə üçün m və n-in qiymətini müəyyən edin və çevrilmədən alınan funksiyanı $y = f(x - m) + n$ şəklində yazın. Hər bir funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu haqqında fikirlərinizi yazın.

a) $f(x) = |x|$, 4 vahid sola və 2 vahid aşağı;

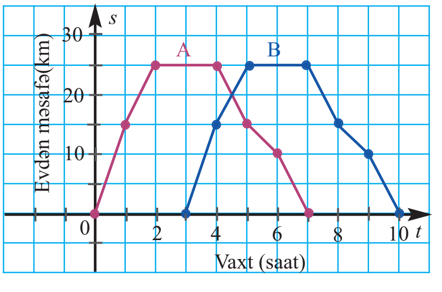
b) $f(x) = x^2$, 6 vahid sağa və 4 vahid yuxarı;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, 5 vahid sola, 3 vahid aşağı.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiyası $x = 0$ nöqtəsində təyin olunmayıb. $f(x - 3)$ funksiyası hansı nöqtədə təyin olunmayıb? $f(x)$ və $f(x - 3)$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.

9. Rəngsaz evin, sahəsi s olan divarlarını boyamaq üçün lazım olan boya miqdarını (n litr) $n = f(s)$ funksiyası ilə müəyyən edə bilər.
$n = f(s) + 10$ və $n = f(s + 10)$ dəyişmələrini situasiyaya uyğun təqdim edin.

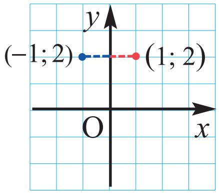
10. Ülkər evdən çıxdı, velosipedlə şəhər kənarındakı gölə getdi və geri qayıtdı. O, getdiyi yolu və sərf etdiyi vaxtı A qrafiki ilə göstərdi. a) Ülkər evdən 2 saat sonra çıxsaydı, bu qrafik necə dəyişərdi?
b) Şəkildəki B qrafikini situasiyaya uyğun necə təqdim edərdiniz?



Qrafiklərin çevrilməsi

Əksetmə

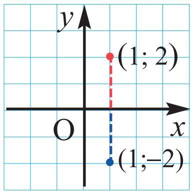
Ordinat oxuna nəzərən
Qrafikin hər bir nöqtəsi y oxuna nəzərən simmetrik nöqtəyə çevrilir.



$(1; 2) \rightarrow (-1; 2)$
$(x; y) \rightarrow (-x; y)$

Nöqtənin ordinatı olduğu kimi qalır, absisi isə işarəsini dəyişir.

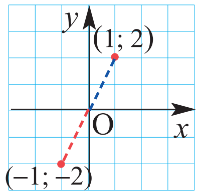
Absis oxuna nəzərən
Qrafikin hər bir nöqtəsi x oxuna nəzərən simmetrik nöqtəyə çevrilir.



$(1; 2) \rightarrow (1; -2)$
$(x; y) \rightarrow (x; -y)$

Nöqtənin absisi olduğu kimi qalır, ordinatı isə işarəsini dəyişir.

Koordinat başlanğıcına nəzərən. Qrafikin hər bir nöqtəsi koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik nöqtəyə çevrilir.



$(1; 2) \rightarrow (-1; -2)$
$(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

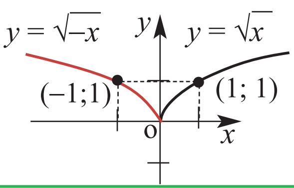
Nöqtənin hər iki koordinatının işarəsi dəyişir.

Funksiyaların qrafiklərinin əksetməsi.

y **oxuna nəzərən**

$f(x) \rightarrow f(-x)$

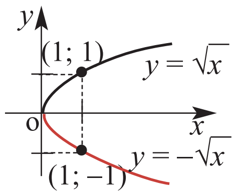
$(x; y) \rightarrow (-x; y)$



x **oxuna nəzərən**

$f(x) \rightarrow -f(x)$

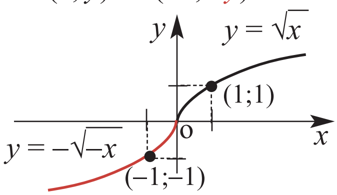
$(x; y) \rightarrow (x; -y)$



Koordinat başlanğıcına nəzərən

$f(x) \rightarrow -f(-x)$

$(x; y) \rightarrow (-x; -y)$



11. Verilmiş nöqtələrin: a) x oxuna; b) y oxuna nəzərən əksetmədə çevrildiyi nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd edin, yeni koordinatları yazın.

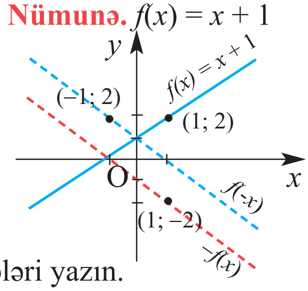
A(5; 3), B(–5; –5), C(0; –3), D(–6; 2), F(9; 0)

12. Nümunəni araşdırın. Qrafiklərin koordinat oxlarına nəzərən əksetməsi ilə $-f(x)$ və $f(-x)$ funksiyalarının qrafiklərini təsvir edin.

a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = -x + 3$

c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Nümunə. $f(x) = x + 1$



13. Hər bir funksiya üçün əsas funksiyanı və çevrilmələri yazın.

a) $y = -x^2 + 2$ b) $y = -\sqrt{x} + 1$ c) $y = \dfrac{1}{x-1}$ d) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

Qrafiklərin çevrilməsi

14. Verilən nöqtələr çoxluğuna görə funksiyaların qrafiklərini qurun. Qrafikin $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ funksiyalarının hansının çevrilmələrinə uyğun olduğunu müəyyən edin.

a) $\{(-2; 8), (-1; 1), (0; 0), (1; -1), (2; -8)\}$

b) $\{(0; 0), (-1; 1), (-4; 2), (-9; 3), (-16; 4)\}$

c) $\{(-2; -4), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (2; -4)\}$

d) $\{(-4; 3), (-2; 1), (0; -1), (2; -3), (4; -5)\}$

15. Cədvəllə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun. Verilmiş funksiyanın hansı əsas funksiyadan və hansı çevrilmələrlə alındığını göstərin.

a)

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-2	0	-2	-4

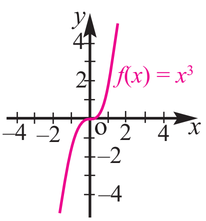
b)

x	0	1	4	9	16
y	0	-1	-2	-3	-4

16. $y = -(x+1)^2 + 3$ funksiyasının qrafikinin $y = x^2$ parabolasından hansı çevrilmələrlə alındığını addım-addım yazın. Hər bir addımı qrafik olaraq təsvir edin.

17. Əsas funksiyanın qrafikinə görə tələb olunan funksiyaların qrafiklərini qurun.

1) Əsas funksiya: $f(x) = x^3$



a) $f(x) = (x + 1)^3$

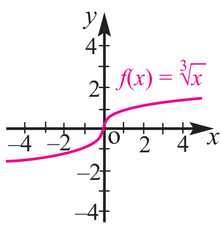
b) $f(x) = x^3 - 4$

c) $f(x) = -x^3$

d) $f(x) = -(x - 2)^3$

e) $f(x) = -x^3 + 3$

2) Əsas funksiya: $g(x) = \sqrt[3]{x}$



a) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 4$

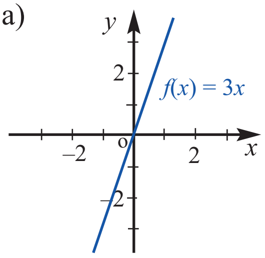
c) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$

d) $g(x) = \sqrt[3]{-x}$

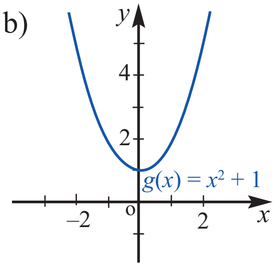
e) $g(x) = -\sqrt[3]{x} - 3$

18. Qrafiklərə gorə tapşırıqları yerinə yetirin.
1) Absis oxuna nəzərən əksetmədən alınan funksiyaları düsturla yazın.
2) Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

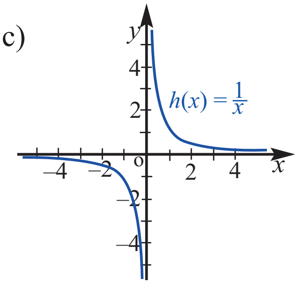
a)



b)

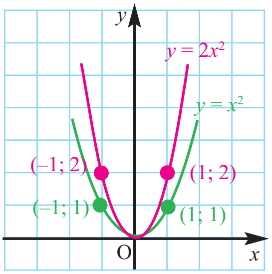


c)



Qrafiklərin dartılması və sıxılması

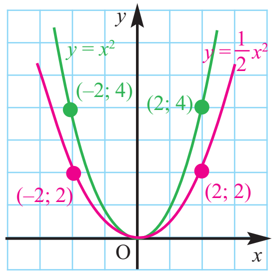
x oxundan 2 dəfə dartılma



$(1; 1) \to (1; 2)$

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə absis oxundan 2 dəfə uzaqlaşıb

x oxuna 2 dəfə sıxılma



$(2; 4) \to (2; 2)$

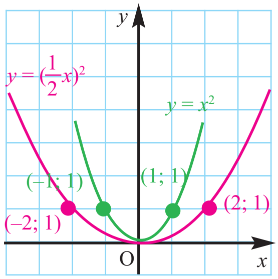
Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə absis oxuna 2 dəfə yaxınlaşıb

Absis oxundan dartılma və sıxılmada nöqtənin absisi eyni qalmaqla ordinatı dəyişir:

$$(a; b) \to (a; l \cdot b)$$

A(a; b) nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərindədirsə, $b = f(a)$.
Onda $A_1(a; l \cdot b)$ nöqtəsi $y = l \cdot f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşir.
$y = l \cdot f(x)$ funksiyasının qrafiki $f(x)$-in qrafikini $l > 1$ olduqda absis oxundan l dəfə dartmaqla, $0 < l < 1$ olduqda isə absis oxuna $\frac{1}{l}$ dəfə sıxmaqla alınır.

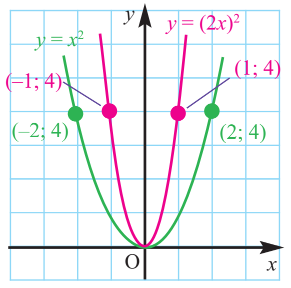
y oxundan 2 dəfə dartılma



$(1; 1) \to (2; 1)$

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə ordinat oxundan 2 dəfə uzaqlaşıb

y oxuna 2 dəfə sıxılma



$(2; 4) \to (1; 4)$

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə ordinat oxuna 2 dəfə yaxınlaşıb

Ordinat oxundan dartılma və sıxılmada nöqtənin ordinatı eyni qalmaqla absisi dəyişir:

$$(a; b) \to (k \cdot a; b)$$

A(a; b) nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərindədirsə, $b = f(a)$.
Onda $A_1(k \cdot a; b)$ nöqtəsi $y = f(\frac{x}{k})$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşir.
$y = f(\frac{x}{k})$ funksiyasının qrafiki $f(x)$-in qrafikini $k > 1$ olduqda ordinat oxundan k dəfə dartmaqla, $0 < k < 1$ olduqda isə ordinat oxuna $\frac{1}{k}$ dəfə sıxmaqla alınır.

19. $y = x$ əsas funksiyasına görə: a) $y = 2x$, b) $y = \frac{1}{2}x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun. Ordinat oxuna və absis oxuna nəzərən yaxınlaşma və uzaqlaşmanı izah edin.

Qrafiklərin çevrilməsi

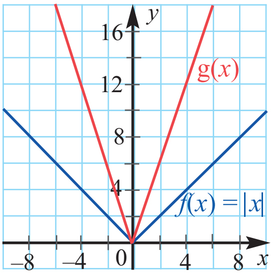
20. Funksiyaların qrafiklərini əsas funksiyaya görə qurun.

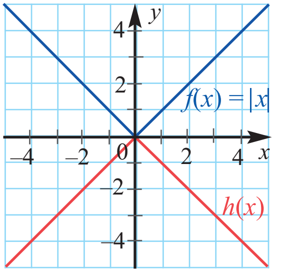
a) $y = 2x^2$ b) $y = 2(x-1)^2$ c) $y = 3|x|$ d) $y = -|3x|$

21. Funksiyalar bir-birindən müəyyən çevrilmələrlə alınmışdır. Bu çevrilmələri təsvir edin.

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow g(x) = 2\sqrt{x-2} \rightarrow h(x) = 2\sqrt{x-2} + 3 \rightarrow k(x) = -2\sqrt{x-2} - 3$

22. Qrafikləri dəftərinizdə çəkin. $g(x)$ və $h(x)$ funksiyalarına uyğun cəbri yazılışı müəyyən edin və qrafikin üzərində yazın.

a)


b)


23. Hər bir funksiyanın qrafikinin verilmiş $f(x)$ əsas funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə alındığını yazın.

1) $f(x) = x$ a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

2) $f(x) = x^2$ a) $y = x^2 + 3$ b) $y = (x-3)^2$ c) $y = 2(x-1)^2 + 3$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ a) $y = 2\sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{2x}$ c) $y = 2\sqrt{x-1} + 1$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{1}{2x}$ c) $y = \frac{1}{x} - 1$

24. **Açıq tipli sual.** Verilən $f(x)$ əsas funksiyasına görə tələb edilən çevrilmələrlə alınan funksiyaları yazın.

a) Paralel köçürülmüş: •sola •sağa •yuxarı •aşağı
b) əks edilmiş: • x oxuna nəzərən • y oxuna nəzərən
c) dartılmış: • x oxundan • y oxundan
d) sıxılmış • x oxuna • y oxuna

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = |x|$ 3) $f(x) = \sqrt{x}$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$

25. **Tətbiqi sənət.** **Xalçalar** üzərində müəyyən qrafiklərin çevrilmələri ilə yaradılan naxışları müşahidə etmək olar.

Şəkildəki **kilimin** üzərində hansı funksiyaların çevrilmələrini təqdim etmək mümkündür?
Bu çevrilmələrdən $y = f(x-m)$ şəklinə uyğun gələnini yazın.

26. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikini:
a) absis oxundan 2 dəfə dartdıqda;
b) ordinat oxuna 4 dəfə sıxdıqda hansı funksiyanın qrafiki alınar?

Funksiyalar üzərində əməllər

Verilən funksiyalar üzərində hesab əməlləri aparmaqla yeni funksiya almaq olar. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üzərində aparılmış toplama, çıxma, vurma əməlləri nəticəsində alınan funksiyanın təyin oblastı bu funksiyaların hər ikisinin təyin olunduğu həqiqi ədədlər çoxluğudur. Başqa sözlə, yeni funksiyanın təyin oblastı $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsidir: $D = D(f) \cap D(g)$. Funksiyaların nisbəti isə arqumentin D çoxluğundan olan və məxrəcdəki funksiyanı sıfırdan fərqli edən qiymətləri üçün təyin edilir. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları müəyyən həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş istənilən funksiya olarsa, onlar üzərində toplama, çıxma, vurma, bölmə əməlləri aşağıdakı qayda ilə yerinə yetirilir.

Əməl	Riyazi yazılış	Nümunə $f(x) = x + 5$ və $g(x) = 3x$
Toplama	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(x + 5) + 3x = 4x + 5$
Çıxma	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(x + 5) - 3x = -2x + 5$
Vurma	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(x + 5) \cdot 3x = 3x^2 + 15x$
Bölmə	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$\frac{x + 5}{3x}$

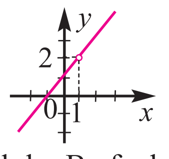
1) İki cüt funksiyanın cəmi cüt, iki tək funksiyanın cəmi tək funksiyadır.
2) İki cüt funksiyanın və iki tək funksiyanın hasili (nisbəti) cüt funksiya, cüt funksiya ilə tək funksiyanın hasili (nisbəti) tək funksiyadır.

Nümunə 1. $f(x) = x^2 + 1$ və $g(x) = x + 2$ olduğuna görə $(f + g)(2)$ -ni tapın.

Həlli: $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, $g(2) = 2 + 2 = 4$, $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 4 = 9$

Nümunə 2. $f(x) = x^2 - 1$ və $g(x) = x - 1$ olarsa, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$-i tapın.

Həlli:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$



Məxrəcdəki funksiyanın $g(x) \neq 0$ şərtinə görə burada $x \neq 1$ olmalıdır. Bu funksiyanın qrafiki $y = x + 1$ düz xəttindən $(1; 2)$ nöqtəsini kənarlaşdırmaqla alınır.

Nümunə 3. $f(x) = 3x^2 - 1$ və $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ olduğuna görə

a) $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, b) $\frac{f}{g}$ funksiyalarının təyin oblastlarını tapın.

Həlli: a) $f(x) = 3x^2 - 1$ funksiyasının təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ funksiyasının təyin oblastı $2x - 1 \geq 0$ bərabərsizliyindən tapılır: $[\frac{1}{2}; +\infty)$. $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ funksiyalarının təyin oblastı: $(-\infty; +\infty) \cap [\frac{1}{2}, +\infty) = [\frac{1}{2}; +\infty)$

b) $\frac{f}{g}$ funksiyasının təyin oblastı $2x - 1 > 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu olan $(\frac{1}{2}; +\infty)$ aralığıdır.

Funksiyalar üzərində əməllər

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən $f(x) = \sqrt{3x-2}$ və $g(x) = -x + 1$ funksiyalarına görə $(f+g)(1)$, $(f-g)(2)$, $(f\cdot g)(6)$ qiymətlərini hesablayın.

2. Verilən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına görə $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ funksiyalarının düsturlarını yazın və təyin oblastını göstərin.

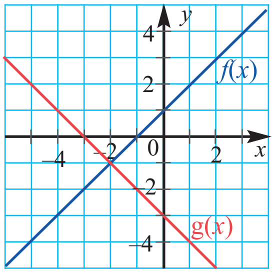
a) $f(x) = x^2 - 2x$ və $g(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = x^2 + x$ və $g(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 9$ və $g(x) = 2x + 6$

d) $f(x) = x^2 - 1$ və $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

3. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qrafiklərinə görə $h(x) = (f+g)(x)$ funksiyasının qrafikini qurun. Məsələni iki üsulla həll edin:



1) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qrafiklərinə görə müəyyən edilmiş qiymətlər cədvəlindən $h(x)$-in qiymətlər cədvəlini tərtib etməklə.

2) $f(x)$, $g(x)$ funksiyalarının qrafiklərinə görə müəyyən edilmiş düsturlara görə $f(x) + g(x)$ funksiyasının düsturunu yazıb, qiymətlər cədvəli tərtib etməklə.

4. $f(x) = x$, $x \in [-1; 9]$ və $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; 16]$

funksiyaları verilmişdir. $h(x) = (f+g)(x)$ funksiyasının təyin oblastını tapın və qiymətlər cədvəlini tərtib edərək qrafikini qurun.

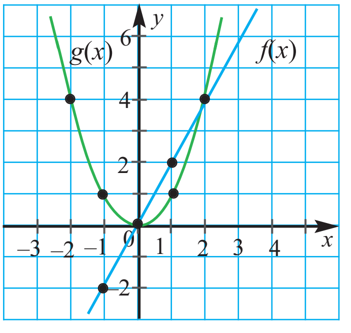
5. Verilir: $f(x) = 2x$ və $g(x) = x^2$

a) $(f : g)(x)$ funksiyasının qiymətlər cədvəlini tərtib edin.

b) $h(x) = (f : g)(x)$ funksiyasının qrafikini qurun.

c) $h(x)$ funksiyasının təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

x	$(f \div g)(x)$
–4	
–2	
–1	
1	
2	
4	



Tətbiq tapşırıqları

6. Səmayə xanım tikdiyi naxışlı süfrələri satış üçün “Əl işi, göz nuru” mağazasına verir. O, süfrələri hazırlamaq üçün 40 manatlıq ipək sap almışdır, hər süfrənin parçasına 5 manat xərci çıxır və bir süfrəni 10 manata satır.

a) n sayda süfrənin satışından əldə olunan pula uyğun $s(n)$ funksiyasını və n sayda süfrənin maya dəyərinə uyğun $m(n)$ funksiyasını düsturla yazın.

b) Bu funksiyaların qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun. Bu qrafiklərin ortaq nöqtəsini real həyati situasiyaya uyğun təqdim edin.

c) Mənfəət malın satışından əldə olunan pul ilə maya dəyərinin fərqidir. Süfrələrin satışından əldə olunan mənfəətə uyğun funksiyanı düsturla yazın.

Mürəkkəb funksiya

Araşdırma. 1 l benzinin qiyməti 0,95 manatdır. Fəridin avtomobili hər kilometrə 0,08 l benzin sərf edir.

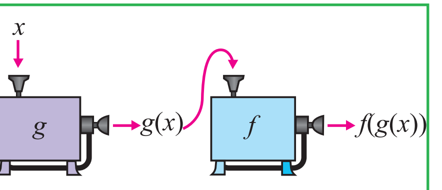
a) 50 km yola sərf olunan benzin üçün Fəridin xərclədiyi pulu necə hesablaya bilərsiniz? Bu hesablamanı neçə addımda yerinə yetirmək olar?

b) Sərf olunan benzinin qət edilən yoldan asılılığını göstərən $V(d)$ funksiyasını yazın.

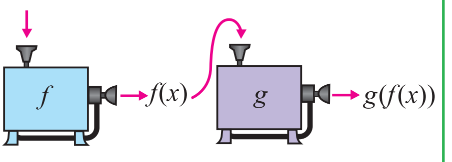
c) Benzinə xərclənən pulun onun həcmindən asılılığının $M(V)$ funksiyasını yazın.

d) Fəridin qət etdiyi yolda benzinə xərclədiyi pulu göstərən $M(d)$ funksiyasını b) və c) bəndlərindəki funksiyalardan istifadə etməklə yazın. Burada arqumentin qiymətlərini hansı dəyişənin qiymətləri təşkil edir?

Bir çox hallarda funksiyanın arqumentinin ala bildiyi qiymətlər digər funksiyanın qiymətləri ilə müəyyən edilir. Tutaq ki, f və g funksiyaları verilmişdir. İki situasiyanı sxematik təsvirlər üzərində nəzərdən keçirək.

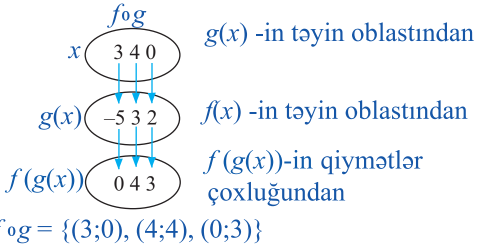


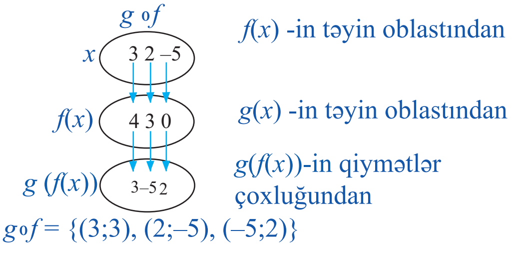
1. x ədədləri g funksiyasının təyin oblastına, g(x)-lər isə f funksiyasının təyin oblastına daxildir. Bu halda hər $x \in D(g)$ ədədinə $f(g(x))$ ədədini qarşı qoyan funksiyaya f və g funksiyalarının mürəkkəb funksiyası (kompozisiyası) deyilir və $(f \circ g)(x)$ kimi yazılır: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.



2. x ədədləri f funksiyasının təyin oblastına, $f(x)$-lər isə g funksiyasının təyin oblastına daxildir. Bu halda g və f funksiyalarının kompozisiyası $(g \circ f)(x)$ kimi olur: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Diqqət edin! $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ yazılışları (həmçinin $f(g(x))$ və $g(f(x))$ yazılışları) iki müxtəlif mürəkkəb funksiyanı ifadə edir. $f(g(x))$ kompozisiyası $E(g) \subset D(f)$ olduqda, $g(f(x))$ kompozisiyası isə $E(f) \subset D(g)$ olduqda qurula bilər.





$f \circ g = \{(3;0), (4;4), (0;3)\}$ $\quad$ $g \circ f = \{(3;3), (2;-5), (-5;2)\}$

Sxematik təsvirdən də göründüyü kimi, $f \circ g$ kompozisiyası $f(x)$ funksiyasında x arqumentinin əvəzinə $g(x)$ yazmaqla alınır. Eyni qayda ilə $g \circ f$ kompozisiyası $g(x)$ funksiyasında x arqumentinin əvəzinə $f(x)$ yazmaqla alınır.

Nümunə 1. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$ olduqda: a) $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyalarının düsturlarını yazın; b) $x = 3$ qiymətində $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyalarının qiymətlərini hesablayın.

Həlli: a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x - 3 + 2 = x^2 - 2x - 1$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$
Deməli, $f(g(x)) = x^2 - 2x - 1$ və $g(f(x)) = x^2 + 2x - 3$
b) $(f \circ g)(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$
$(g \circ f)(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

Nümunə 2. $h(x) = f(g(x))$ olarsa, verilənlərə görə $f(x)$ funksiyasını düsturla yazın. a) $h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$; $g(x) = x - 2$
b) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; $g(x) = x^3 + 1$

Həlli:
a) $f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 1$ olduğundan $f(x) = x^2 + x + 1$
b) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$ olduğundan $f(x) = \sqrt{x}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyaları üçün arqumentin və funksiyanın uyğun qiymətləri cütlərini (əgər varsa) müəyyən edin.

$f = \{(2; 8), (4; 0), (6; 3), (5; -1)\}$
$g = \{(8; 4), (0; 6), (3; 5), (-1; 2)\}$

$f = \{(4; 5), (1; 3), (-2; 12), (2; 7)\}$
$g = \{(3; 4), (5; 2), (7; -2), (12; 1)\}$

2. Cədvəli dəftərinizə köçürün və tamamlayın.

g- nin nöqtələri	f- in nöqtələri	$f \circ g$-nin nöqtələri
(3; 2)		(3; 5)
(2; 1)	(1; 3)	
(1; ■)	(0; 1)	(■; 1)
(■; –1)	(■; –1)	(0; –1)
(■ ; 3)	(3; ■)	(4; 7)

3. $f(x) = x^2$ və $g(x) = \sqrt{x} - 1$ funksiyaları verilmişdir. Tapın:
a) $f(g(4))$;
b) $g(g(25))$;
c) $g(f(3))$;
d) $g(g(4))$;
e) $f(f(-3))$.

4. $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^2 - 1$ və $h(x) = x^2 + 1$ funksiyalarına görə hesablayın.

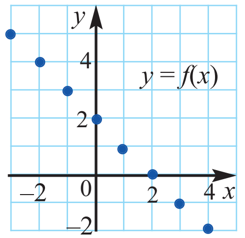
a) $f(g(-1))$ b) $h(g(2))$ c) $g(f(3))$
d) $f(h(-4))$ e) $g(g(-2))$ f) $f(f(-3))$
g) $(f \circ (h \circ g))(1)$ h) $(h \circ (g \circ f))(\frac{1}{2})$ i) $(f \circ (g \circ h))(2)$

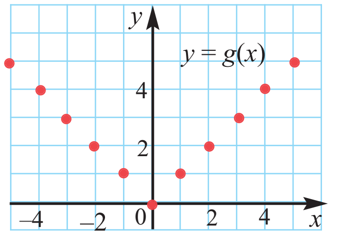
5. $f(x) = 2x + 1$ və $g(x) = x^2 - 3$ funksiyalarına görə mürəkkəb funksiyaları düsturla yazın.
a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

6. Verilən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyasına görə $f(g(x))$ və $g(f(x))$ funksiyalarını müəyyən edin.
a) $f(x) = 1 - x^2$ və $g(x) = 2x + 5$ b) $f(x) = 2x$ və $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ və $g(x) = x^2 + 2$ d) $f(x) = x^2 + 1$ və $g(x) = \frac{2}{x}$
e) $f(x) = x^3 - 4$ və $g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$ f) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ və $g(x) = x + 1$

7. a) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ olduqda, $f(g(x)) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.
b) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + 1$ olduqda, $f(g(x)) > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

8. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. 1) qiymətlər cədvəli qurmaqla; 2) funksiyaların düsturlarını yazmaqla: a) $f(g(x))$; b) $g(f(x))$ mürəkkəb funksiyasının qrafikini qurun. Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.





9. $f(x) = |x|$ və $g(x) = x - 1$ funksiyaları verilmişdir. Bu funksiyaların: a) $y = f(g(x))$; b) $y = g(f(x))$ kompozisiyalarının qrafiklərini qurun. Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

10. a) $f(x) = 2x - 1$ və $g(x) = x^2$ funksiyalarına görə $f(g(x))$ funksiyasının düsturunu müəyyən edin.

b) $f(x)$, $g(x)$, və $f(g(x))$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.

c) $f(g(x))$ funksiyasının qrafikini $g(x)$ funksiyasının qrafikinin çevrilməsi kimi təqdim edin.

11. İstehsalat. Mebel istehsal edən şirkətin 2012-ci ildən etibarən həftəlik istehsal etdiyi stulların sayını $N(t) = 144 + 25t$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Burada t illərlə vaxtı ($t = 0$ qiyməti 2012-ci ilə uyğundur), N stulların sayını göstərir. İşçi qüvvəsinin həcminin bu halda $W(N) = 3\sqrt{N}$ kimi olduğu müəyyən edilmişdir. a) İşçi qüvvəsinə tələbatın zamandan asılılıq funksiyasını yazın. b) Bu funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu real həyati situasiyaya uyğun təqdim edin.

12. $h(x) = f(g(x))$ olarsa, verilənlərə görə $f(x)$ funksiyasını düsturla yazın.

a) $h(x) = (x + 1)^2 - 5(x + 1)$, $g(x) = x + 1$ b) $h(x) = x^2 + 4x + 3$, $g(x) = x + 2$

c) $h(x) = \sqrt{2x + 3}$, $g(x) = x + 1$ d) $h(x) = x + \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$

13. a) $f(x - 1) = x + 3$ olarsa, $f(1), f(4), f(-1), f(0)$ qiymətlərini tapın. $f(x)$ funksiyasının düsturunu yazın.

b) $f(x + 1) = 2x + 3$ olarsa, $f(-1), f(2), f(3), f(0)$ qiymətlərini tapın. $f(x)$ funksiyasının düsturunu yazın.

14. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ funksiyası verilmişdir.

a) $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını tapın, qiymətlər cədvəlini tərtib edərək, qrafikini qurun.

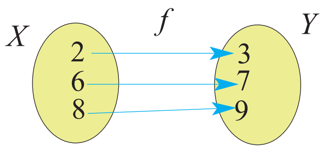
b) $f(2x)$ funksiyasının ifadəsini yazın, təyin oblastını tapın.

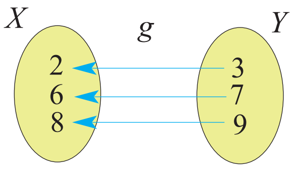
15. $f(x)$ funksiyasının təyin oblastı $[-1; 3]$ olarsa, aşağıdakı funksiyanın təyin oblastını tapın. a) $f(2x)$; b) $f(\frac{1}{2}x)$; c) $f(-x)$; d) $f(x - 1)$

Tərs funksiya

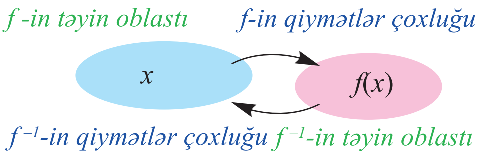
Araşdırma: 1) Tərəfinin uzunluğu a olan kvadratın sahə düsturunu yazın: $S = a^2$
2) Verilən sahəyə görə kvadratın tərəfinin uzunluğunu tapın.
3) Yer səthindən v_0 sürətilə yuxarı atılmış cismin yerdən məsafəsi $h = v_0\,t - \frac{g\,t^2}{2}$ düsturu ilə tapılır. h-ın verilmiş qiymətinə görə t-ni birqiymətli tapmaq olarmı?

Nümunə 1. Şəkildə X çoxluğu ilə Y çoxluğu arasındakı f uyğunluğu oxlarla verilmişdir. Oxların istiqamətini dəyişsək, başqa uyğunluq – Y çoxluğu ilə X çoxluğu arasındakı g uyğunluğunu alarıq. g uyğunluğu f-ə tərs uyğunluqdur. Verilən f funksiyası üçün tərs uyğunluq funksiya olarsa, f-ə dönən funksiya deyilir.

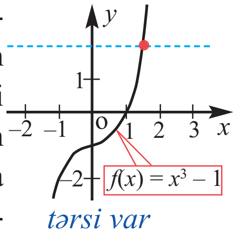




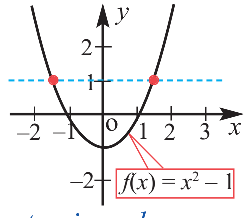
Nümunə 2. $f(x) = x + 4$ funksiyası ilə
A = {1, 2, 3, 4} çoxluğundan
B = {5, 6, 7, 8} çoxluğunun alınmasını
aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.
$f(x) = x + 4$: {(1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8)}



Bu funksiyanın tərsi olan və f^{-1} kimi işarə edilən funksiya isə B çoxluğundan A çoxluğunun elementlərinin alınmasını ifadə edir və onu
$f^{-1}(x) = x - 4$: {(5; 1), (6; 2), (7; 3), (8; 4)} kimi ifadə etmək olar.
$f(x)$ və $f^{-1}(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır.
Sxematik təsvirdən və koordinat cütlərindən göründüyü kimi, verilən funksiyanın təyin oblastı tərs funksiyanın qiymətlər çoxluğu, verilən funksiyanın qiymətlər çoxluğu isə tərs funksiyanın təyin oblastı olur və əksinə.
Yəni, $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$. Buradan alınır ki, $f(f^{-1}(x)) = x$ və $f^{-1}(f(x)) = x$
Nümunədə verilənlərə görə: $f(f^{-1}(x)) = f(x-4) = (x-4) + 4 = x$
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+4) = (x+4) - 4 = x$
İstənilən funksiya üçün tərs funksiyanın varlığı həmişə mümkündürmü? Məsələn, $y = 2x + 5$ münasibətindən x-i y vasitəsilə birqiymətli ifadə etmək mümkündür və bu halda tərs funksiya var: $x = \frac{y-5}{2}$.
Burada y-in hər bir qiymətinə x-in yalnız bir qiyməti uyğun gəlir. $y = x^2$ funksiyasında isə y-in bir qiymətinə, məsələn, $y = 9$ qiymətinə arqumentin $x = 3$, və $x = -3$ kimi iki qiyməti uyğun gəldiyindən, $(-\infty; +\infty)$ aralığında bu funksiyanın tərsi yoxdur. Özünün hər bir qiymətini təyin oblastının yalnız bir nöqtəsində alan funksiyaya tərsi olan (dönən) funksiya deyilir. İstənilən üfüqi düz xətt funksiyanın qrafikini ən çoxu bir nöqtədə kəsərsə, bu funksiyanın tərsi var.



tərsi var



tərsi yoxdur

Başqa sözlə, x-in müxtəlif qiymətlərinə y-in müxtəlif qiymətləri uyğun olarsa, $y = f(x)$ funksiyasının tərsi var.
Monoton funksiyalar üçün $x_1 \neq x_2$ olduqda $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan alırıq:
1) Təyin oblastında artan funksiyanın tərsi var.
2) Təyin oblastında azalan funksiyanın tərsi var.
Tutaq ki, $y = f(x)$ tərsi olan funksiyadır, yəni $y = f(x)$ münasibətindən x-i y vasitəsilə birqiymətli ifadə edərək, $x = f^{-1}(y)$ kimi yazmaq mümkündür. Onda $x = f^{-1}(y)$ funksiyasına $y = f(x)$ funksiyasının tərs funksiyası deyilir.
Adətən, arqumenti x ilə, funksiyanı y ilə işarə edirlər. Ona görə də $y = f(x)$-in tərs funksiyasını $y = f^{-1}(x)$ şəklində yazırlar. Əgər f^{-1} funksiyası f-in tərs funksiyasıdırsa, onda f funksiyası da f^{-1}-in tərs funksiyası olur. Yəni, f və f^{-1} qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri.

$(a;\, b)$ nöqtəsi verilən funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, $y = x$ düz xəttinə nəzərən bu nöqtəyə simmetrik olan $(b;\, a)$ nöqtəsi tərs funksiyanın qrafiki üzərində olacaq.

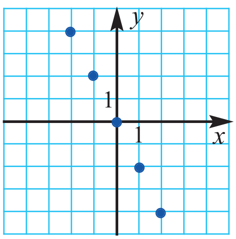
Verilən funksiya

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	0	–2	–4

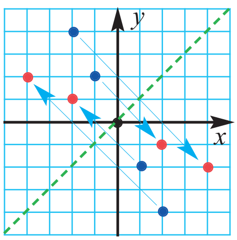
Tərs funksiya

x	4	2	0	–2	–4
y	–2	–1	0	1	2

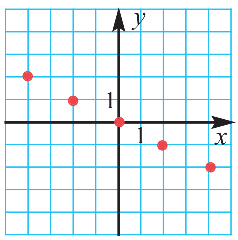
Verilən funksiyanın qrafiki



$y = x$ oxuna nəzərən əksetmə nümunələri

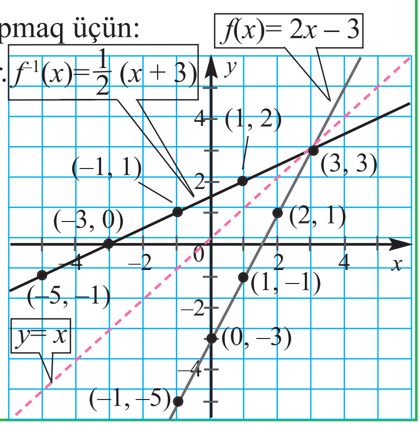


Tərs funksiyanın qrafiki



Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

Düsturla verilmiş funksiyanın tərs funksiyasını tapmaq üçün:
1) Verilmiş bərabərlikdən x dəyişəni y-lə ifadə edilir.
2) Alınmış bərabərlikdə x-in əvəzinə y, y-in əvəzinə x yazılır.

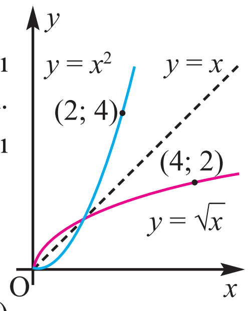


Nümunə 3. $y = 2x - 3$ funksiyasına tərs funksiyanın düsturunu yazın.

Həlli: Verilən funksiya yazılır: $y = 2x - 3$
x dəyişəni y-dən asılı ifadə edilir: $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$
x-lə y-in yeri dəyişdirilir: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Tərs funksiya

$y = x^2$ funksiyasının bütün ədəd oxunda tərsi yoxdur. Lakin artma və ya azalma aralıqlarında bu funksiyanın tərsi var.



Nümunə 4. $y = x^2, x \geq 0$ funksiyasının tərsi olan funksiyanı müəyyən edin və qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.

Bu qrafiklər üzərində yerləşən bir neçə nöqtənin koordinatlarını yazın.

Həlli: Verilən funksiya: $y = x^2, x \geq 0$.

Tərs funksiya: 1) $x = \sqrt{y}$, 2) $y = \sqrt{x}$

(2; 4) nöqtəsi $y = x^2$ funksiyasının, (4; 2) nöqtəsi isə $[0; +\infty)$ aralığında onun tərsi olan $y = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşir.

Tərs funksiya haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

Təyin oblastı X, qiymətlər çoxluğu Y aralığı olan f funksiyası artandırsa (azalandırsa), tərsi var və Y aralığında təyin olunan f^{-1} tərs funksiyası da artandır (azalandır).

Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiya nöqtələr çoxluğu ilə verilmişdir: $\{(8; 2), (1; 1), (\frac{1}{8}; \frac{1}{2}), (-8; -2)\}$
Verilən uyğunluğu və onun tərsi olan uyğunluğu oxların köməyi ilə göstərin.

2. Funksiya cədvəllə verilmişdir. Tərs funksiyaya uyğun qiymətlər cədvəlini qurun.

x	1	2	3	4	5
y	–1	–2	–3	–4	–5

3. $f(x)$ və $g(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır. $x = 10$ olduqda $f(x)$ funksiyasının qiyməti 85 olur. Bu qiymətləri $g(x)$ funksiyasına necə aid etmək olar?

4. f funksiyası nöqtələr çoxluğu ilə verilmişdir. Həm də ikinci koordinatları eyni olan nöqtələrin olduğu məlumdur (məsələn, (6; 5) və (7; 5) kimi).
f funksiyasının dönən olub-olmadığını bilmək üçün bu kifayətdirmi?

5. Əgər $f(x)$ tərsi olan funksiyadırsa və $f(1) = 7$; $f(-3) = 9$, $f(6) = 2$ olarsa, tərs funksiyanın $f^{-1}(9)$; $f^{-1}(7)$ və $f^{-1}(2)$ qiymətlərini tapın.

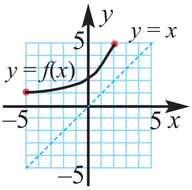
6. Verilən funksiyalarla qarşılıqlı tərs funksiyaları yazın. Verilən funksiya və onun tərs funksiyası artan, yoxsa azalandır?

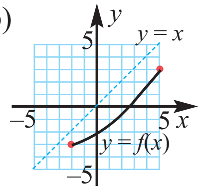
a) $y = 4x$ b) $y = 2x - 8$ c) $y = 3x - 14$
d) $y = -2x + 5$ e) $y = 3x - 3$ f) $y = 12x + 6$
g) $y = -\frac{2}{3}x$ h) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{3}{8}$ i) $y = \frac{3}{4}x + 6$

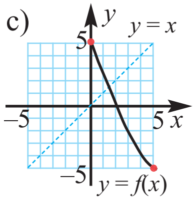
7. Verilən hər bir funksiyanın və onunla qarşılıqlı tərs funksiyanın qrafikini eyni koordinat müstəvisində qurun.

a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = 2x - 3$ c) $f(x) = x^2, x \geq 0$ d) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$,

8. Funksiyanın qrafikinə görə, tərs funksiyanın qrafikini qurun. Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

a) 

b) 

c) 

9. Göstərin ki, verilən funksiyanın tərsi var. Tərs funksiyanı tapın, onun təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin, qrafikini qurun.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^4,\ x \geq 0$

10. Verilən funksiyaların qrafiklərini qurun. Hər bir funksiyanın qrafikinə görə onun tərs funksiyasının olub-olmadığını müəyyən edin.

a) $f(x) = -2x + 3$ b) $f(x) = x + 3$ c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = -3x^2$ e) $f(x) = x^3 + 3$ f) $f(x) = 2x^3$

g) $f(x) = |x| + 2$ h) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ i) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

11. Verilən funksiyaların qarşılıqlı tərs funksiyalar olduğunu yoxlayın.

a) $f(x) = x + 7,\ g(x) = x - 7$ b) $f(x) = 3x - 1,\ g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1,\ g(x) = 2x - 2$ d) $f(x) = -2x + 4,\ g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

e) $f(x) = \frac{2}{x} - 3,\ g(x) = \frac{2}{x+3}$ f) $f(x) = \frac{1}{x-3},\ g(x) = \frac{1+3x}{x}$

g) $f(x) = 8x^3,\ g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ h) $f(x) = 256x^4,\ x \geq 0;\ g(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{4}$

12. Verilən funksiya ilə qarşılıqlı tərs funksiyanın düsturunu yazın.

a) $f(x) = 16x^4,\ x \leq 0$ c) $f(x) = -x^6,\ x \geq 0$ e) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = \frac{4}{9}x^2,\ x \geq 0$ d) $f(x) = -8x^3$ f) $f(x) = \frac{1}{32}x^5$

13. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ düsturu temperaturun Farenheyt ölçüsü ilə Selsi ölçüsü arasındakı asılılığı göstərir. Bu asılılığa görə, temperaturun Farenheyt ölçüsünün Selsi ölçüsündən asılılığını göstərən tərs asılılığın düsturunu yazın. Selsi ilə 15°, 20°, 0° temperaturun Farenheyt ölçüsünü tapın.

14. Hek balıq növüdür. Bu balıqların kütləsi (kq) ilə uzunluğu (sm) arasında aşağıdakı kimi asılılıq var: $m = (9{,}37 \times 10^{-6})l^3$. Bu cür asılılığa görə tərs funksiyanı yazın. Kütləsi 0,875 kq olan hek balığının uzunluğu təxminən neçə santimetr olar?

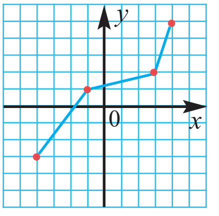
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. $f(x) = \sqrt{x}$ əsas funksiyasına görə $g(x) = -\sqrt{x}$, $k(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$ funksiyalarının çevrilmələrini müəyyən edin. Bu çevrilmələrdə funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu necə dəyişir?

2. a) $f(x) = x^2$ funksiyasının qrafikini üfüqi istiqamətdə neçə vahid paralel köçürsək, alınan qrafik (5; 16) nöqtəsindən keçər?
b) $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikini y oxu boyunca neçə vahid sürüşdürsək, alınan qrafik (4 ; –1) nöqtəsindən keçər?

3. a) $f(x) = x^3 - 1$ funksiyasının $g(x)$ tərs funksiyasını yazın.

b) Funksiyanın qrafikinə görə onun tərs funksiyasının qrafikini çəkin.



4. Funksiyaların təyin oblastlarını tapın.

a) $f(x) = \sqrt{4x - 2}$ c) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x}}$ e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x - 3}$

b) $f(x) = \sqrt{12 - 3x}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$

5. Funksiyaların sıfırlarını tapın.

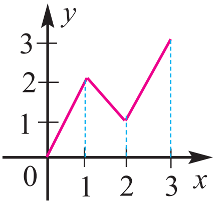
a) $f(x) = 4x + 6$ c) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ e) $f(x) = 3 - \sqrt{5 + x^2}$

b) $f(x) = x^2 - x - 6$ d) $f(x) = x^4 - 1$ f) $f(x) = \sqrt{x - 1} - 2$

6. 1) Funksiyanın tək-cütlüyünü araşdırın.
a) $f(x) = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$ b) $f(x) = (x - 4)^2 - (x + 4)^2$
2) $y = x^2 + (m - 1)\,x + 3$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın:
a) $m = 1$ olduqda; b) $m = 0$ olduqda.

7. $f(x) = x \cdot f(x - 1) + 2$ olduğu məlumdur. $f(2)$-ni tapın.

8. Təyin oblastı [–3; 3] olan $f(x)$ funksiyasının qrafikinin bir hissəsi verilmişdir. Tapşırıqları qrafikə görə yerinə yetirin.
a) $f(x)$-in tək funksiya olduğunu bilərək, qrafiki tamamlayın. Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını göstərin. Funksiyanın ekstremumlarını yazın.
b) $f(x)$-in cüt funksiya olduğunu bilərək, qrafiki tamamlayın. Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını göstərin. Funksiyanın ekstremumlarını yazın.



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

9. Hissə-hissə verilmiş funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

10. Arqumentin hansı qiymətində:

a) $f(x) = \sqrt{2x+6}$ funksiyasının qiyməti 3-ə bərabərdir?

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-7}$ funksiyasının qiyməti $\dfrac{1}{2}$-ə bərabərdir?

11. f: {(0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7)} və $g(x) = 2x + 1$ verilmişdir. Dəyişənin verilən qiymətində mürəkkəb funksiyaların qiymətini hesablayın.

a) $(g \circ f)(0)$ b) $(g \circ f)(1)$ c) $(g \circ f)(2)$ d) $(g \circ f)(3)$
e) $(f \circ g)(-0{,}5)$ f) $(f \circ g)(0)$ g) $(f \circ g)(1)$ h) $(f \circ g)(0{,}5)$

12. 1) Göstərin ki, verilən funksiyaların $(-\infty; +\infty)$ aralığında tərsi yoxdur.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = |x + 10|$

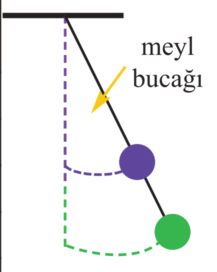
2) Verilən funksiyalar dönən funksiyalardır. Bu funksiyalara uyğun tərs funksiyaları yazın.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$

13. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ funksiyası verilmişdir.
a) bu funksiyanın təyin oblastını tapın;
b) $f(x-4) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

14. Rəqqasın bir tam dövr etməsinə sərf olunan zaman (rəqsin periodu) rəqqasın qolunun uzunluğundan asılıdır. Rəqqasın qolu uzun olduqca bir dövrə sərf olunan zaman artır.
a) Verilən məlumata görə qrafik çəkin.
b) Qrafikin hansı funksiya sinfinə aid olduğunu müəyyən edin.

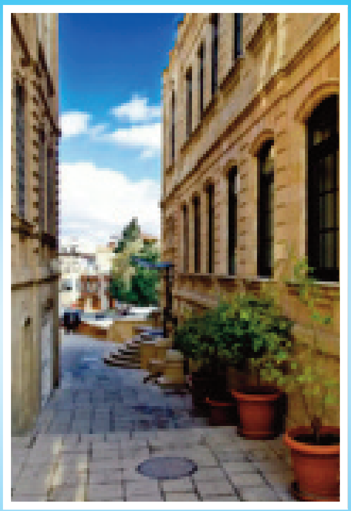
Rəqqasın qolunun uzunluğu(m)	Vaxt (san.)
2	2,8
4	4
6	4,9
8	5,7
10	6,3



c) Rəqqasın qolu 5 m; 12 m olduqda bir tam dövrə sərf olunan zamanı qrafikdən müəyyən edin.

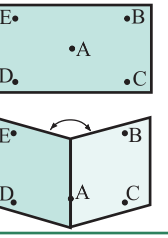
2 Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

Fəzada nöqtə, düz xətt və müstəvi
Düz xətlə müstəvinin paralelliyi
Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı
Üç perpendikulyar teoremi
İki müstəvi arasındakı bucaq
İkiüzlü bucaqlar
Perpendikulyar müstəvilər
Paralel müstəvilər
Proyeksiyalar və məsələ həlli



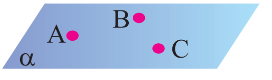
Fəzada nöqtə, düz xətt və müstəvi

Praktik məşğələ. Kağız vərəq üzərində A, B, C, D və E nöqtələrini şəkildəki kimi qeyd edin. Kağızı A nöqtəsindən keçən düz xətt boyunca şəkildə göstərildiyi kimi qatlayın.
Sonra kağızı bir qədər açın. İkiyə qatlanmış vərəqin hər bir hissəsi bir müstəvi modelidir.



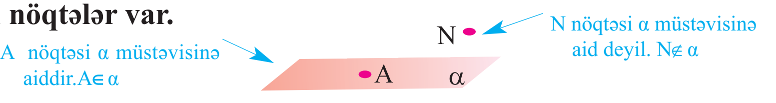
1. Hansı nöqtə bu müstəvilərin hər ikisinə aiddir?
2. Bu müstəvilərin hər biri üçün ona aid olan və aid olmayan nöqtələri göstərin.

Həndəsənin planimetriya bölməsində bütün nöqtələri eyni müstəvidə olan fiqurlar öyrənilir. Bu fiqurlara müstəvi fiqurlar deyilir. Lakin bizi reallıqda üçölçülü əşyalar, obyektlər əhatə edir. Onların en, uzunluq və hündürlük (dərinliyi) kimi üç ölçüsü var. Bu fiqurlar fəza fiqurları adlanır. Həndəsənin fəza fiqurlarını öyrənən bölməsi **stereometriya** adlanır.
Nöqtə, düz xətt, müstəvi həm də fəza fiqurları kimi qəbul edilir. Müstəvi sonsuzdur, şərti olaraq adətən, paraleloqram şəklində təsvir edilir, bir kiçik hərflə və ya (bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəni göstərən) üç hərflə işarə edilir. Məsələn, α müstəvisi və ya ABC müstəvisi.

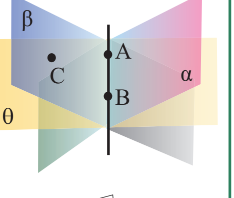


Fəzanın hər bir müstəvisi üzərində planimetriyadan məlum olan aksiom və teoremlər doğrudur. Fəzada aşağıdakı əlavə aksiomlar qəbul edilir.

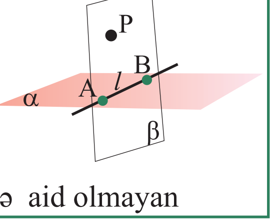
Aksiom 1. İxtiyari müstəvi üçün bu müstəviyə aid olan nöqtələr və ona aid olmayan nöqtələr var.



Aksiom 2. İki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onda onlar bu nöqtədən keçən düz xətt üzrə kəsişirlər.
Düz xətt iki nöqtəsi ilə təyin edilir, yəni iki nöqtədən bir və yalnız bir düz xətt keçirmək mümkündür (bəs, bir nöqtədən?). Müstəvini neçə nöqtə təyin edir? İki nöqtə müstəvini müəyyən etmir. Şəkildən göründüyü kimi, A və B nöqtələrindən sonsuz sayda müstəvi keçirmək olar. Lakin onlar arasında elə müstəvi var ki, C nöqtəsi məhz onun üzərindədir. Deməli, müstəvini bir düz xətt üzərində olmayan 3 nöqtə müəyyən edir.

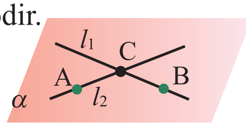


Aksiom 3. Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.
Bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrə **kollinear nöqtələr** deyilir. Göstərək ki,düz xəttin iki nöqtəsi müstəvi üzərindədirsə, bu düz xəttin bütün nöqtələri müstəvi üzərindədir. Doğrudan da, *l* düz xəttinin A və B nöqtələri α müstəvisi üzərində olsun. *l* düz xəttinə və α müstəvisinə aid olmayan



Fəzada nöqtə, düz xətt və müstəvi

P nöqtəsi götürüb, P, A və B nöqtələrindən β müstəvisi keçirək. α və β müstəvilərinin kəsişmə xətti A və B nöqtələrindən keçdiyinə görə *l* düz xətti ilə üst-üstə düşür. Kəsişmə xəttinin hər bir nöqtəsi α müstəvisinin nöqtəsi olduğundan *l* düz xəttinin də hər bir nöqtəsi α müstəvisinin üzərindədir.



Stereometriya aksiomlarından aşağıdakı nəticələr alınır.

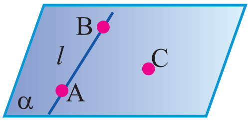
1. Düz xətt və bu düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

2. İki kəsişən düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

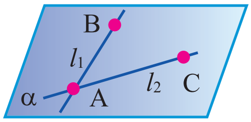
3. Müxtəlif iki paralel düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Beləliklə, müstəvini: 1) düz xətt və onun üzərində olmayan bir nöqtə ilə; 2) iki kəsişən düz xətt ilə; 3) iki paralel düz xətlə təyin etmək olar.

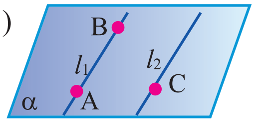
1)



2)

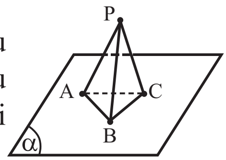


3)



Nümunə. Bir düz xətt üzərində olmayan A, B, C nöqtələri və onlarla eyni müstəvi üzərində olmayan P nöqtəsi verilmişdir. Hər biri bu nöqtələrin üçündən keçmək şərtilə bütün müstəviləri sadalayın.

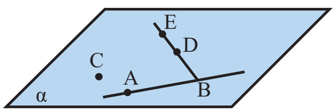
Həlli: A, B, C nöqtələrindən α müstəvisi keçirək və bu müstəvi üzərində olmayan P nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtələrdən ABP, BPC, ABC və APC kimi 4 müstəvi keçirmək olar.



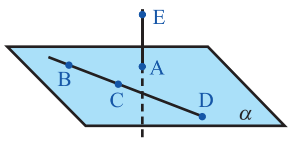
Eyni müstəvi üzərində yerləşən nöqtələrə **komplanar nöqtələr** deyilir. Nümunədə verilmiş A, B, C, P nöqtələri komplanar deyillər.

Öyrənmə tapşırıqları

1. α müstəvisini üç hərflə işarə etmək istəsəniz, hansı üçünü seçə bilməzsiniz?
a) ABE b) ACE c) BDE d) DAC

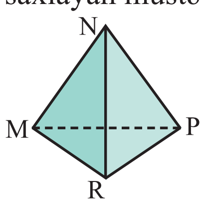


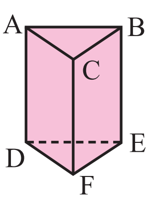
2. B, C, D nöqtələri bir düz xətt üzərindədir (kollinear), A, B, C, D nöqtələri bir müstəvi üzərindədir (komplanar), E nöqtəsi bu müstəvi üzərində deyil.



Verilmiş nöqtələrdən neçə müstəvi keçir?
a) A, B və C; b) B, C və D; c) A, B, C, və D; d) A, B, C və E

3. Fiqurun üzlərini özündə saxlayan müstəviləri yazın.

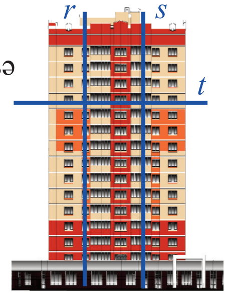




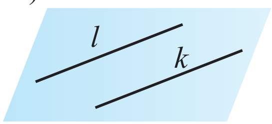
4. Üçayaqlı stol yerə həmişə möhkəm oturur. Səbəbini izah edin.

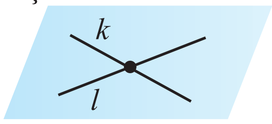
5. a) Cüt-cüt kəsişən üç düz xətdən neçə müstəvi keçirmək olar?
b) Dörd müxtəlif nöqtədən neçə müstəvi keçirmək olar? Bütün hallara baxın.

Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

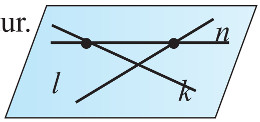


Fəzada iki düz xətt paralel ola bilər(xüsusi halda üst-üstə düşə bilər). Fəzada iki düz xətt kəsişə bilər.



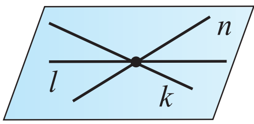


Məlumdur ki, l və k düz xətləri kəsişirsə və ya paraleldirsə, onda onlar bir müstəvi üzərindədirlər. Bu iki hal planimetriyada düz xətlərin kəsişməsi və paralelliyinə uyğundur.

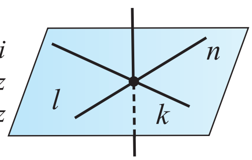


Düz xətlər eyni müstəvi üzərindədirlər.

İki kəsişən düz xətti üçüncü düz xətt müxtəlif nöqtələrdə kəsərsə, bu düz xətlər bir müstəvi üzərində yerləşir. Fəzada iki düz xətt üçüncü düz xətlə bir nöqtədə kəsişirsə, bu düz xətlər eyni müstəvi üzərində ola da bilər, olmaya da bilər.

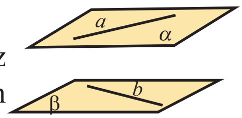


Düz xətlər eyni müstəvi üzərindədirlər. Belə düz xətlər komplanar düz xətlər adlanır.

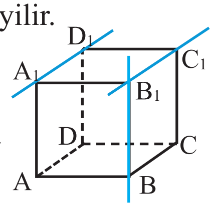


Düz xətlər müxtəlif müstəvilər üzərindədirlər. Bu düz xətlər komplanar deyillər.

Fəzada paralel olmayan iki düz xətt kəsişməyə də bilər. Paralel olmayan və kəsişməyən iki düz xəttə **çarpaz düz xətlər** deyilir.



a və b düz xətlərinin çarpazlığı $a \dot{-} b$ kimi yazılır. İki çarpaz düz xəttin hər ikisindən bir müstəvi keçirmək mümkün deyil. İki çarpaz düz xətt arasındakı bucaq, uyğun olaraq, onlara paralel olan iki kəsişən düz xətt arasındakı bucağa deyilir.



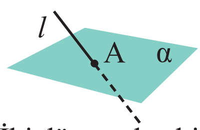
Nümunə. Kubun modeli üzərində $A_1D_1 \dot{-} BB_1$.
$A_1D_1 \parallel B_1C_1$ olduğundan, A_1D_1 və BB_1 çarpaz düz xətləri arasındakı bucaq B_1C_1 və BB_1 düz xətləri arasındakı bucağa bərabərdir və bu halda 90°-dir.

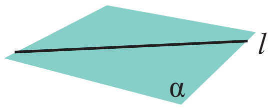
Düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətləri

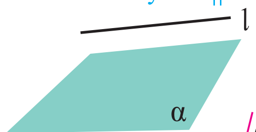
Düz xətlə müstəvinin yalnız bir ortaq nöqtəsi varsa, onda bu düz xətlə müstəvi kəsişirlər. $l \cap \alpha = A$

Düz xəttin iki nöqtəsi müstəvi üzərindədirsə düz xətt bütünlüklə müstəvi üzərindədir. $l \subset \alpha$

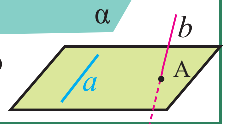
Ortaq nöqtəsi olmayan düz xətt və müstəviyə paralel düz xətt və müstəvi deyilir. $l \parallel \alpha$





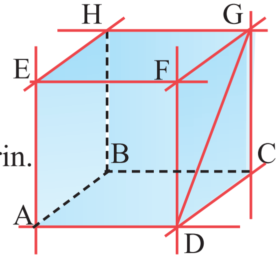


İki düz xətdən biri digərinin yerləşdiyi müstəvini bu düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsərsə, onda bu düz xətlər çarpazdır.



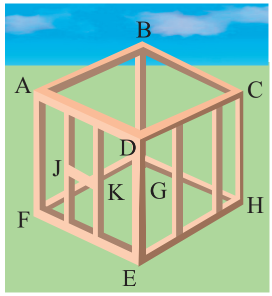
6. Kub üzərində kəsişən, paralel və çarpaz xətlərə aid tapşırıqları yerinə yetirin.

a) AB düz xəttinə paralel olan düz xətləri yazın.
b) BC düz xətti ilə kəsişən düz xətləri yazın.
c) EF düz xəttinə çarpaz olan düz xətləri yazın
d) B nöqtəsi ilə komplanar olan üç nöqtə göstərin.
e) B nöqtəsi ilə komplanar olmayan üç nöqtə göstərin.
f) ABC müstəvisini kəsən düz xətləri göstərin.
g) CDF müstəvisi üzərində yerləşən düz xətləri göstərin.
h) AB və CG düz xətləri arasındakı bucağı tapın.
i) AB və DG düz xətləri arasındakı bucağı tapın.



7. Şəkildə göstərilən parçaları üzərində saxlayan düz xətlərə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Paralel düz xətləri sadalayın.
b) Çarpaz düz xətləri göstərin.
c) İki kəsişən düz xətti kəsib onlarla eyni müstəvidə yerləşməyən düz xətti göstərin.



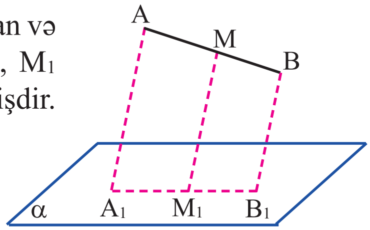
8. Verilənlərə görə fiquru çəkin: AC düz xətti α müstəvisi üzərindədir, BE düz xətti AC ilə komplanardır. Z nöqtəsi A və C nöqtələri ilə, X nöqtəsi isə B və E nöqtələri ilə kollineardır.

9. Dördayaqlı stol adətən yerə möhkəm oturmur. Səbəbini izah edin.

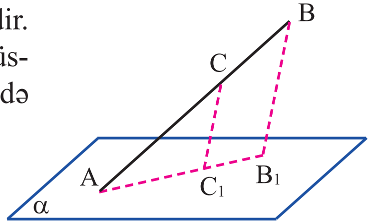
10. Müstəvini kəsməyən AB parçasının uclarından və M orta nöqtəsindən α müstəvisini A_1, B_1, M_1 nöqtələrində kəsən paralel düz xətlər çəkilmişdir.

a) $AA_1 = 12$ sm, $BB_1 = 4$ sm;
b) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ olarsa,

MM_1 parçasının uzunluğunu tapın.



11. AB parçasının A ucu α müstəvisi üzərindədir. Parçanın B ucundan və C nöqtəsindən α müstəvisini, uyğun olaraq B_1 və C_1 nöqtələrində kəsən paralel düz xətlər çəkilmişdir.
$AC : CB = 3 : 2$, $BB_1 = 10$ sm olarsa, CC_1 parçasının uzunluğunu tapın.



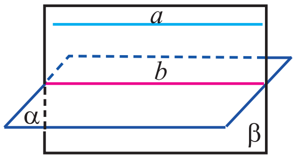
12. ABCD paraleloqramı və onu kəsməyən α müstəvisi verilmişdir. Paraleloqramın təpələrindən keçirilmiş paralel düz xətlər α müstəvisini A_1, B_1, C_1, D_1 nöqtələrində kəsir. $AA_1 = 3$ sm, $BB_1 = 4$ sm, $CC_1 = 7$ sm olarsa, DD_1 parçasının uzunluğunu tapın.

13. İsbat edin ki, düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə paralel bir və yalnız bir düz xətt keçirmək olar.

Düz xətlə müstəvinin paralelliyi

Teorem 1. (Düz xəttin müstəviyə paralellik əlaməti) Müstəvi üzərində olmayan düz xətt, bu müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, müstəvinin özünə də paraleldir.

İsbatı: α müstəvisi üzərində olmayan a düz xətti həmin müstəvi üzərindəki b düz xəttinə paralel olsun. a və b düz xətlərindən β müstəvisi keçirək. α və β müstəviləri b düz xətti boyunca kəsişəcəklər. a düz xətti α müstəvisini kəsərsə, kəsişmə nöqtəsi b düz xətti üzərində olmalıdır. Bu isə $a \parallel b$ olduğundan mümkün deyil. Deməli, $a \parallel \alpha$.

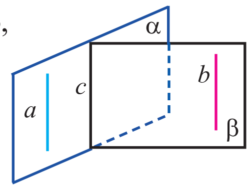


Nəticə. Bir müstəvi digər müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib, onu kəsərsə, onda bu müstəvilərin kəsişmə xətti verilən düz xəttə paraleldir.

Nəticə. Kəsişən iki müstəvinin hər birinə paralel olan düz xətt bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə paraleldir.

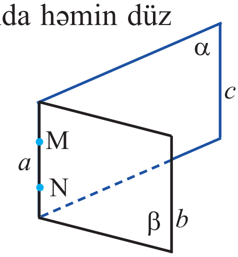
Teorem 2. Paralel düz xətlərdən keçən iki müstəvi kəsişirsə, onda onların kəsişmə xətti bu düz xətlərə paraleldir.

İsbatı: Tutaq ki, $a \parallel b$. a düz xəttindən α müstəvisi, b düz xəttindən β müstəvisi keçirək. Bu müstəvilərin kəsişmə xətti c olsun. Düz xətlə müstəvinin paralellik əlamətinə görə $a \parallel \beta$. Buradan $a \parallel c$. Eyni ilə $b \parallel \alpha$ olmasından, $b \parallel c$ alınır.



Teorem 3. İki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, onda həmin düz xətlər bir-birinə paraleldir.

İsbatı: Düz xətlər bir müstəvi üzərində olduqda təklif doğrudur. Tutaq ki, a, b, c düz xətləri bir müstəvi üzərində deyil və $a \parallel c$, $b \parallel c$. a və c düz xətlərindən α müstəvisini keçirək. $b \parallel c$ olduğundan, $b \parallel \alpha$ olacaq. a düz xəttinin üzərində M nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən və b düz xəttindən β müstəvisini keçirək. α və β müstəvilərinin MN kəsişmə xətti b və c düz xətlərinə paraleldir.



M nöqtəsindən c düz xəttinə yalnız bir paralel düz xətt çəkmək mümkündür. Ona görə MN və a düz xətləri üst-üstə düşür. $MN \parallel b$ olmasından $a \parallel b$ alınır.

1. a) Verilən nöqtədən verilən müstəviyə paralel düz xətt keçirin. Neçə belə düz xətt keçirmək olar?

b) Verilən nöqtədən verilən düz xəttə paralel müstəvi keçirin. Neçə belə müstəvi keçirmək olar?

2. Paraleloqramın tərəflərindən biri α müstəvisi üzərindədir. Onun qalan tərəfləri α müstəvisi ilə hansı vəziyyətdədir?

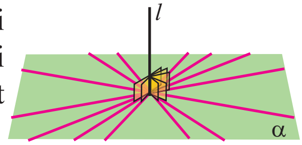
3. ABC üçbucağının AB tərəfinə paralel olan müstəvi, bu üçbucağın AC tərəfini A_1 nöqtəsində, BC tərəfini B_1 nöqtəsində kəsir.

a) $AB = 18$ sm, $AA_1 : A_1C = 2 : 1$; b) $B_1C = 6$ sm, $AB : BC = 3 : 4$;

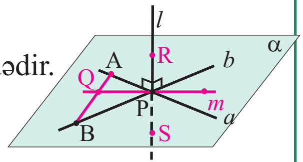
c) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$ olarsa, A_1B_1 parçasının uzunluğunu tapın.

Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı

Tərif. Müstəvini (α) kəsən düz xətt (l) müstəvi üzərində olan və kəsişmə nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xəttə perpendikulyardırsa, onda bu düz xətt müstəviyə perpendikulyardır və bu $l \perp \alpha$ kimi yazılır.



Teorem 1. (Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlıq əlaməti) Müstəvini kəsən düz xətt, onun üzərindəki iki kəsişən düz xəttə perpendikulyardırsa, müstəvinin özünə də perpendikulyardır.

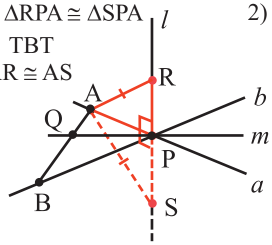


Verilir. a və b kəsişən düz xətləri α müstəvisi üzərindədir. $l \perp a$, $l \perp b$.

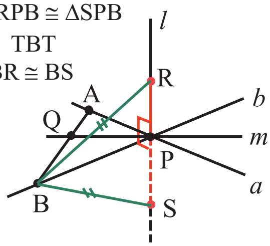
İsbat edin. $l \perp \alpha$

Tutaq ki, l düz xətti α müstəvisi üzərində P nöqtəsində kəsişən a və b düz xətlərinə perpendikulyardır. α müstəvisi üzərində P nöqtəsindən keçməklə ixtiyari m düz xətti və a, b, m düz xətlərini uyğun olaraq A, B, Q nöqtələrində kəsən düz xətti çəkək. P nöqtəsindən başlayaraq l düz xəttinin üzərində PR və PS konqruyent parçaları ayıraq. İsbatı aşağıdakı addımlarla yerinə yetirək.

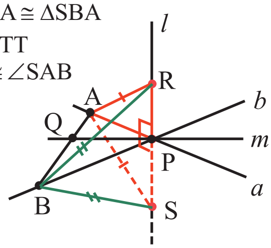
1) $\Delta RPA \cong \Delta SPA$
TBT
$AR \cong AS$



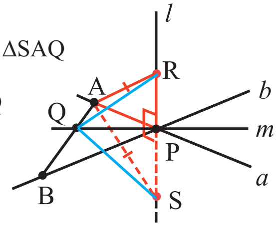
2) $\Delta RPB \cong \Delta SPB$
TBT
$BR \cong BS$



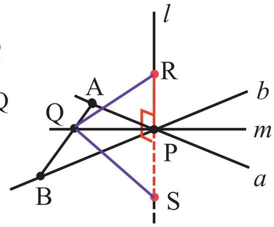
3) $\Delta RBA \cong \Delta SBA$
TTT
$\angle RAB \cong \angle SAB$



4) $\Delta RAQ \cong \Delta SAQ$
TBT
$RQ \cong SQ$



5) $\Delta RPQ \cong \Delta SPQ$
TTT
$\angle RPQ \cong \angle SPQ$



ΔRQS bərabəryanlı üçbucağında PQ medianı həm də hündürlükdür. Buradan $m \perp l$. Tərifə görə alırıq ki, $l \perp \alpha$. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Düz xətt üzərində verilmiş nöqtədən bu düz xəttə perpendikulyar olan bir və yalnız bir müstəvi keçir.

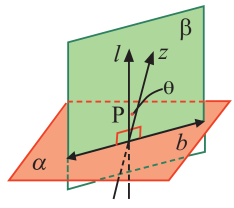
Teorem 3. Müstəvinin verilmiş nöqtəsindən bu müstəviyə bir və yalnız bir perpendikulyar düz xətt keçirmək olar.

Teorem 3-ü isbat edək.

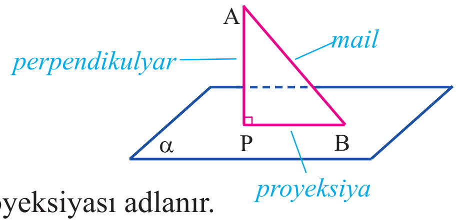
Verilir. l düz xətti P nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyardır.

İsbat edin. l düz xətti P nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyar olan yeganə xətdir.

İsbatı. Teoremi əksini fərz etməklə isbat edək. Fərz edək ki, α müstəvisinə P nöqtəsində perpendikulyar olan l düz xəttindən başqa bir z düz xətti də var. l və z düz xətləri α müstəvisini b düz xətti boyunca kəsən β müstəvisi üzərindədirlər. l və z düz xətlərinin kəsişməsindən θ bucağı yaranır. Düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlığının tərifinə görə l düz xətti (eləcə də z düz xətti) α müstəvisi üzərində olan istənilən düz xəttə, o cümlədən b düz xəttinə də perpendikulyardır. Onda həm l, həm də z düz xətti α müstəvisinə perpendikulyar olmalıdır. Lakin $\theta + 90° + 90° > 180°$ olduğundan bu mümkün deyil. Deməli, α müstəvisinə P nöqtəsində perpendikulyar yalnız və yalnız bir düz xətt var. Teorem isbat olundu.

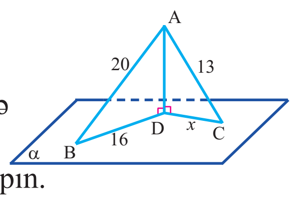


Fəzanın A nöqtəsindən keçən və P nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyar olan düz xəttin AP parçasına A nöqtəsindən α müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyar deyilir. A nöqtəsi ilə α müstəvisinin qalan nöqtələrini birləşdirən parçalara mail deyilir.



AP parçası – müstəviyə perpendikulyar,
AB parçası – mail,
P nöqtəsi – perpendikulyarın oturacağı,
B nöqtəsi – mailin oturacağı,
BP parçası – mailin müstəvi üzərində proyeksiyası adlanır.

Müstəvi xaricindəki nöqtədən ona perpendikulyar və maillər çəkilərsə:
1) perpendikulyar maildən kiçikdir;
2) proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir;
3) proyeksiyası böyük olan mail böyükdür.



Nümunə. Fəzanın bir nöqtəsindən müstəviyə 20 sm və 13 sm uzunluqda iki mail çəkilib. Böyük mailin proyeksiyası 16 sm-dir. Kiçik mailin proyeksiyasını tapın.

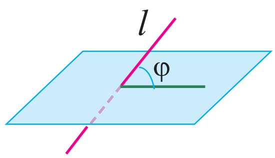
Həlli: AD perpendikulyar, AB və AC maillər, BD və CD isə onların proyeksiyaları olsun. Δ ABD-dən Pifaqor teoreminə görə:

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12$ (sm)

Δ ADC-dən Pifaqor teoreminə görə: $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (sm)

Düz xətt və müstəvi arasındakı bucaq

Düz xətlə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyasının əmələ gətirdiyi bucağa düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.



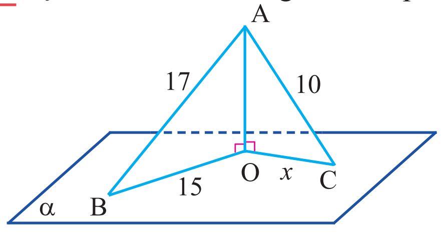
Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq düz xəttin müstəvi üzərindəki digər düz xətlərlə əmələ gətirdiyi bucaqların heç birindən böyük deyildir. Düz xətt müstəviyə perpendikulyar olduqda düz xətt ilə müstəvi arasındakı bucaq 90°-yə bərabər olur.

Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı

1. Yeni telefon dirəyi quraşdıran usta dirəyin yer səthində götürülmüş iki kəsişən xəttə perpendikulyar olduğuna əmin olmaqla dirəyin perpendikulyar basdırıldığını qeyd edir. İsbat edin ki, usta haqlıdır.

2. Üçbucağın təpəsindən keçən düz xətt bu təpədən çıxan tərəflərə perpendikulyardır. Bu düz xətlə üçbucağın üçüncü tərəfi arasındakı bucağı tapın.

3. Şəkildə verilənlərə görə x-i tapın.

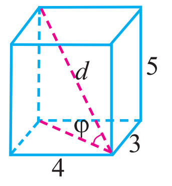


4. Fəzanın bir nöqtəsindən verilən müstəviyə 8 sm uzunluqda perpendikulyar və 16 sm uzunluqda mail çəkilmişdir.
a) Mailin proyeksiyasını;
b) Perpendikulyarın mail üzərində proyeksiyasını tapın.

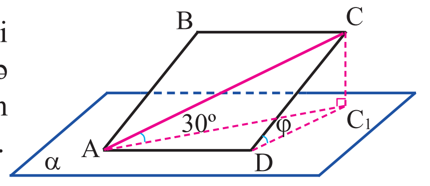
5. Uzunluğu 10 sm olan düz xətt parçası müstəvini kəsir. Parçanın ucları müstəvidən 5 sm və 3 sm məsafədədir. Parçanın müstəvi üzərindəki proyeksiyasını tapın.

6. Uzunluğu 8 sm olan parça müstəvini kəsir. Parçanın ucları müstəvidən 1 sm və 3 sm məsafədədir. Verilmiş parça ilə müstəvi arasındakı bucağı tapın.

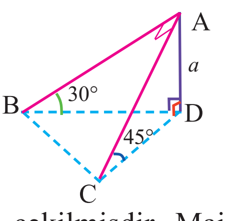
7. Düzbucaqlı paralelepipedin oturacağının tərəfləri 4 sm və 3 sm, paralelepipedin hündürlüyü 5 sm-dir. Paralelepipedin diaqonalını (d) və diaqonalla oturacaq müstəvisi arasındakı bucağı (φ) tapın.



8. ABCD kvadratının AD tərəfi müstəvi üzərindədir. AC diaqonalı müstəvi ilə 30°-li bucaq əmələ gətirir. DC tərəfinin müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucağı tapın.



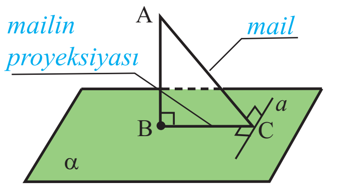
9. Müstəvidən a məsafədə olan A nöqtəsindən müstəvi ilə 45° və 30°-li bucaq, bir-biri ilə isə düz bucaq əmələ gətirən AB və AC mailləri çəkilmişdir. Maillərin oturacaqları arasındakı məsafəni tapın.



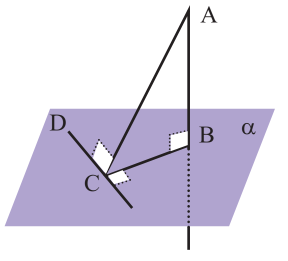
10. Bir nöqtədən verilən müstəviyə iki bərabər mail çəkilmişdir. Maillər arasındakı bucaq 60°, proyeksiyaları arasındakı bucaq isə düz bucaqdır. Hər mail ilə öz proyeksiyası arasındakı bucağı tapın.

11. Nöqtədən müstəviyə iki mail çəkilmişdir.
a) Maillərdən biri digərindən 8 sm böyük, proyeksiyaları isə 8 sm və 20 sm;
b) Maillərin uzunluqları nisbəti 2 : 3 kimi, proyeksiyaları isə 2 sm və 7 sm olarsa, bu maillərin uzunluqlarını tapın.

Üç perpendikulyar teoremi



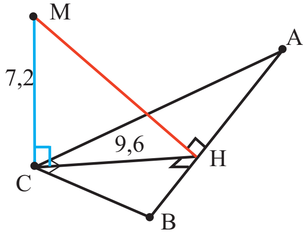
Teorem. Müstəvi üzərindəki düz xətt müstəviyə çəkilmiş mailin proyeksiyasına perpendikulyardırsa, mailin özünə də perpendikulyardır.
Yəni, α müstəvisi üzərində C nöqtəsindən keçən a düz xətti BC-yə perpendikulyardırsa, AC-yə də perpendikulyardır.
Qısa yazılış: $a \perp BC$ və $BC \perp BA$ olarsa, $a \perp AC$
Bu teoremin tərsi də doğrudur.
Tərs teorem. Müstəvi üzərindəki düz xətt müstəviyə çəkilmiş mailə perpendikulyardırsa, onun proyeksiyasına da perpendikulyardır.
Yəni, α müstəvisi üzərində C nöqtəsindən keçən a düz xətti AC-yə perpendikulyardırsa, BC-yə də perpendikulyardır.
Qısa yazılış: $a \perp AC$ və $BC \perp BA$ olarsa, $a \perp BC$



Teoremi isbat edək.
Verilir: $AB \perp \alpha$
AC α müstəvisinə çəkilmiş maildir,
BC parçası AC mailinin proyeksiyasıdır.
$CD \in \alpha$, $CD \perp BC$
İsbat etməli: $CD \perp AC$

Təklif	Əsası
$CD \perp BC$	Verilir
$AB \perp CD$	Düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlığı
$CD \perp$ ABC müstəvisi	AB və BC ABC müstəvisi üzərində iki kəsişən xətdir və $CD \perp AB$, $CD \perp BC$
$CD \perp AC$	$CD \perp$ ABC müstəvisi (düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı)

Tərs teoremi müstəqil isbat edin.

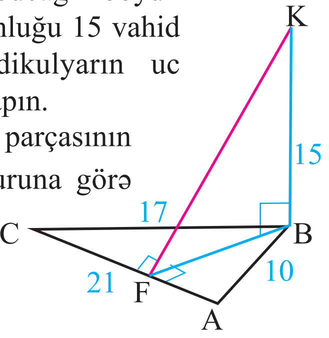


Nümunə 1. Düzbucaqlı ABC üçbucağının düz bucaq təpəsindən üçbucaq müstəvisinə çəkilən CM perpendikulyarının uzunluğu 7,2 vahid, üçbucağın düz bucaq təpəsindən hipotenuza çəkilmiş hündürlüyünün uzunluğu isə 9,6 vahiddir. M nöqtəsindən üçbucağın hipetonuzuna qədər məsafəni tapın.

Həlli: Üç perpendikulyar teoreminə görə $CH \perp AB$ isə, $MH \perp AB$ olur.
M nöqtəsindən hipetonuza qədər məsafə MH parçasının uzunluğuna bərabərdir. ΔMCH-dan Pifaqor teoreminə görə alırıq:

$$MH = \sqrt{7{,}2^2 + 9{,}6^2} = 12 \text{ vahid.}$$

Nümunə 2. Tərəfləri 10; 17; 21 vahid olan üçbucağın böyük bucağının təpəsindən üçbucaq müstəvisinə uzunluğu 15 vahid olan perpendikulyar qaldırılmışdır. Perpendikulyarın uc nöqtəsindən böyük tərəfə qədər olan məsafəni tapın.



Həlli: $BF \perp AC$ olarsa, $KF \perp AC$. Deməli, KF parçasının uzunluğunu tapmalıyıq. Əvvəlcə Heron düsturuna görə ΔABC-nin sahəsini tapaq.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+17+21}{2} = 24$$

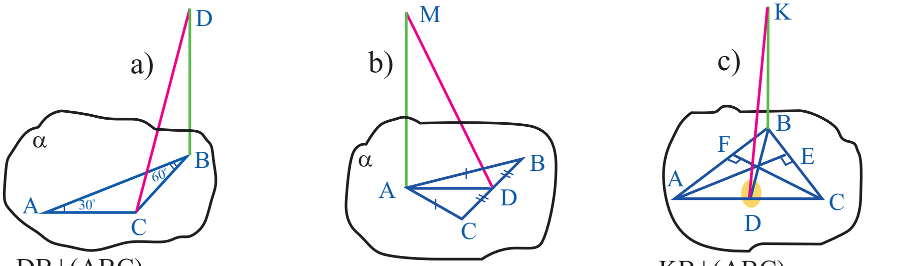
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot(24-10)(24-17)(24-21)} =$$
$$= \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = \sqrt{3\cdot 8\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 3} = \sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 4^2} = 84$$

Digər tərəfdən $S = \frac{1}{2} AC \cdot BF$. Buradan $BF = \frac{2\cdot S}{AC} = \frac{2\cdot 84}{21} = 8$

KB parçası BF-ə perpendikulyar olduğundan ΔKBF düzbucaqlı üçbucaqdır.

$KF = \sqrt{KB^2 + BF^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

1. Şəkildə verilənlərə görə tələb olunan təklifi isbat edin.



a) $DB \perp (ABC)$, $DC \perp AC$

b) $MA \perp (ABC)$, $AB = AC$, $CD = DB$, $MD \perp BC$

c) $KB \perp (ABC)$, AE, CF, - Hündürlüklər, $KD \perp AC$

2. Tərəfləri 10 sm, 10 sm, 12 sm olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə 4 sm uzunluqda perpendikulyar qaldırılmışdır. Perpendikulyarın ucundan üçbucağın tərəflərinə qədər məsafəni tapın.

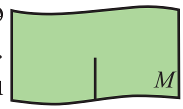
3. Fəzanın M nöqtəsi katetləri 6 sm və 8 sm olan düzbucaqlı ABC üçbucağının təpələrindən eyni məsafədədir. $MA = MB = MC = 13$ sm olarsa, M nöqtəsindən üçbucaq müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

4. Fəzanın M nöqtəsi tərəfləri 3 sm olan düzgün üçbucağın müstəvisindən $\sqrt{3}$ sm, onun tərəflərindən isə bərabər məsafədədir. M nöqtəsindən üçbucağın tərəflərinə qədər məsafəni tapın.

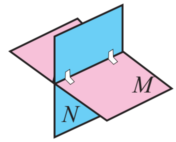
5. Fəzanın M nöqtəsi tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm olan üçbucağın tərəflərindən 5 sm məsafədədir. M nöqtəsindən üçbucaq müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar

Praktik məşğələ. Kağız qatlama.



İki kağız vərəq götürün, birinin üzərində M, digərinin üzərində isə N hərfi yazın. Vərəqlərin hər ikisini yarıya qədər kəsin. Vərəqləri bir-birinə yapışqanlı lentlə bərkidin. Tapşırıqları yerinə yetirin.

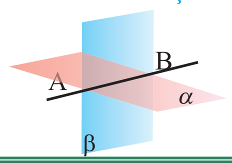


1. Hər iki müstəviyə aid olan D və E nöqtələri qeyd edin.
2. D və E nöqtələrindən keçən düz xətt çəkin.
3. Müstəvilərin kəsişməsi haqqında fikirlərinizi söyləyin.

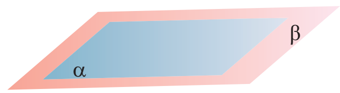
Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri

Paralel müstəvilər
Paralel müstəvilərin heç bir ortaq nöqtəsi olmur.

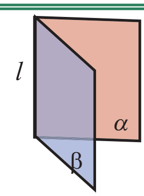
Kəsişən müstəvilər
İki müstəvi bir düz xətt üzrə kəsişir. α və β müstəviləri AB düz xətti üzrə kəsişir.



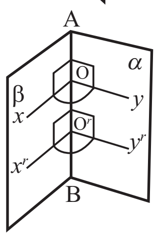
Üst-üstə düşən müstəvilər
İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi vardır.



Ortaq sərhədləri olan iki yarımmüstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura ***ikiüzlü bucaq*** deyilir. Yarımmüstəvilər ikiüzlü bucağın üzləri, onların ortaq sərhədi isə ikiüzlü bucağın tili adlanır.
İki müstəvinin kəsişməsindən 4 ikiüzlü bucaq alınır.



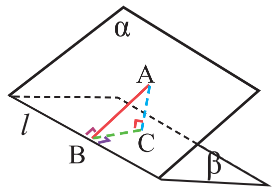
İkiüzlü bucağın tili üzərində hər hansı bir nöqtə götürüb, bu nöqtədən hər iki üzdə tilə perpendikulyar şüalar çəksək, alınan bucaq ikiüzlü bucağın xətti bucağı adlanır.
İkiüzlü bucaq özünün xətti bucağı ilə ölçülür. Xətti bucağın dərəcə ölçüsü ikiüzlü bucağın dərəcə ölçüsünü göstərir.
İkiüzlü bucağın bütün xətti bucaqları paralel köçürmə ilə üst-üstə düşür, deməli, dərəcə ölçüləri bərabərdir (eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir).



Xətti bucağın qiyməti onun təpə nöqtəsinin vəziyyətindən asılı deyil.
İkiüzlü bucaqların ölçüləri 0°-dən 180°-yə qədər olur.

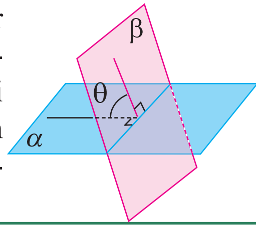
Nümunə 1. 30°-yə bərabər olan ikiüzlü bucağın bir üzü üzərində götürülmüş nöqtədən digər üzə qədər məsafə a olarsa, bu nöqtədən ikiüzlü bucağın tilinə qədər məsafəni tapın.

Həlli: $A \in \alpha$ verilmiş nöqtə olsun. $AB \perp l$, $AC \perp \beta$ endirək. Üç perpendikulyar teoreminə görə $BC \perp l$. Deməli, $\angle ABC$ xətti bucaqdır və $\angle ABC = 30^\circ$. Şərtə görə $AC = a$ və 30°-li bucağın qarşısındakı katet hipotenuzun yarısına bərabər olduğu üçün ΔABC-dən $a = \dfrac{AB}{2}$. Buradan $AB = 2a$

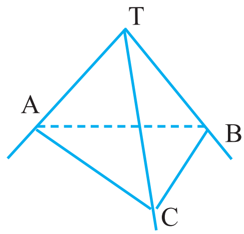


İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar

İki müstəvinin kəsişməsi zamanı alınan ikiüzlü bucaqlar düz bucaq deyilsə, qiymətcə kiçik olanı iki müstəvi arasındakı bucaq qəbul edilir. Şəkildəki α və β müstəviləri arasındakı bucaq dedikdə tərəfləri bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan θ bucağı nəzərdə tutulur.



ABC üçbucağı və onun müstəvisi xaricində T nöqtəsi götürüb, TA, TB, TC şüalarını çəkək.
Ortaq təpəsi T olub, bir müstəvi üzərində yerləşməyən $\angle ATC$, $\angle ATB$, və $\angle BTC$ müstəvi bucaqlarının əmələ gətirdiyi fiqura üçüzlü bucaq deyilir. Müstəvi bucaqlara üçüzlü bucağın üzləri, onların tərəflərinə üçüzlü bucağın tilləri, ortaq təpəyə üçüzlü bucağın təpəsi deyilir. Hər bir til eyni zamanda bir ikiüzlü bucağın tilidir.



Teorem 1. Üçüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının cəmi 360°-dən kiçikdir.
Teorem 2. Üçüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı o biri iki müstəvi bucağın cəmindən kiçikdir.
Nümunə 2. Müstəvi bucaqlarının dərəcə ölçüləri:
a) 130°, 100°, 140° ; b) 70°, 80°, 100° olan üçüzlü bucaq varmı?
Həlli: a) yoxdur, çünki $130° + 100° + 140° = 370° > 360°$
b) var, çünki $70° + 80° + 100° < 360°$ və verilmiş müstəvi bucaqlarının hər biri digər ikisinin cəmindən kiçikdir.

1. Sinif otağında ikiüzlü bucağa və üçüzlü bucağa nümunələr göstərin. İkiüzlü bucaqların və üçüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının qiymətlərini təxmin edin.

2. Müstəvi bucaqlarının dərəcə ölçüləri verilmiş üçüzlü bucaq varmı?
a) 30°; 70°; 50° b) 120°; 150°; 100° c) 60°; 100°; 170°

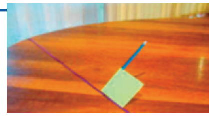
3. 45°-yə bərabər olan ikiüzlü bucağın bir üzündə o biri üzündən a məsafədə bir nöqtə götürülmüşdür. Bu nöqtənin tildən olan məsafəsini tapın.

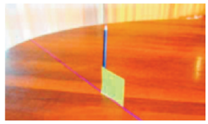
4. Düzbucaqlı üçbucağın katetləri 6 sm və 8 sm-dir. Üçbucağın müstəvisi ilə 30°-li bucaq əmələ gətirərək, hipotenuzdan keçən müstəvinin düz bucaq təpəsindən olan məsafəsini tapın.

5. Üçüzlü bucağın iki müstəvi bucağından hər biri 45°, üçüncüsü isə 60°-dir. Üçüncü müstəvi bucağın qarşısındakı ikiüzlü bucağı tapın.

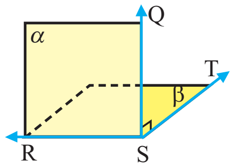
6. Tərəfləri AB = 18, BC = 12, AC = 10 olan ABC üçbucağı verilmişdir. AC tərəfindən üçbucağın müstəvisi ilə 45°-li bucaq əmələ gətirən α müstəvisi keçir. B təpəsindən α müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

Perpendikulyar müstəvilər

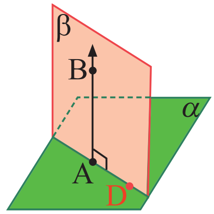




Praktik məşğələ. Kağız vərəqi karandaşa yapışqan lentlə bərkidin. Karandaş düz xəttin, kağız vərəq isə müstəvi modelidir. Karandaşı stol müstəvisi üzərində müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşdirməklə kağız vərəqlə stol müstəvisi arasındakı ikiüzlü bucaqların qiyməti haqqında fikirlərinizi söyləyin.



Tərif. İki müstəvinin kəsişməsi ilə alınan ikiüzlü bucaq düz bucaq olarsa, bu müstəvilərə perpendikulyar müstəvilər deyilir.
α müstəvisi üzərində $SQ \perp SR$ və β müstəvisi üzərində $TS \perp SR$. Üzləri α və β müstəviləri, tili isə RS olan ikiüzlü bucağın ölçüsü $\angle QST$ - xətti bucağın ölçüsü ilə eynidir. $\angle QST$ düz bucaqdırsa, $\alpha \perp \beta$.

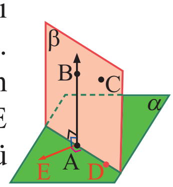


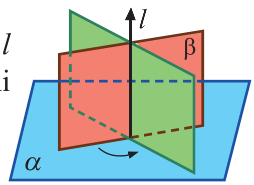
Teorem. (müstəvilərin perpendikulyarlıq əlaməti) Müstəvi digər müstəviyə perpendikulyar olan düz xətdən keçirsə, onda bu müstəvilər perpendikulyardır.

Verilir: AB düz xətti α müstəvisinə A nöqtəsində pependikulyardır. C isə α müstəvisi üzərində olmayan hər hansı nöqtədir.

İsbat edin: A, B, C nöqtələrindən keçən β müstəvisi α müstəvisinə perpendikulyardır.

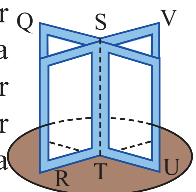
İsbatı: α və β müstəvilərinin kəsişməsini AD ilə işarə edək. AD bu müstəvilərin yaratdığı ikiüzlü bucağın tilidir. α müstəvisi üzərində olmaqla AD-yə perpendikulyar olan AE xəttini çəkək. $AB \perp \alpha$ olduğundan AB xətti A nöqtəsindən keçən istənilən xəttə perpendikulyardır. Yəni, $AB \perp AD$, $AB \perp AE$. $\angle BAE$ ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır, $AB \perp AE$ olduğundan ikiüzlü bucaq düz bucaqdır. Deməli, $\beta \perp \alpha$. Teorem isbat edildi.





Düz xətdən keçən istənilən müstəvini β müstəvisinin l düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan müstəvilər kimi modelləşdirmək olar.

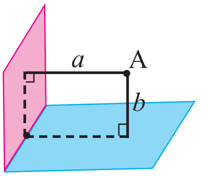
Tətbiqi nümunə. Otellərin, ticarət mərkəzlərinin girişindəki fırlanan qapılar perpendikulyar müstəvilərə nümunə ola bilər. Qapının sxematik təsvirindən görünür ki, ST düz xətti döşəməyə perpendikulyardır və qapı bu düz xətt ətrafında fırlandıqca STU, STR müstəviləri də RTU döşəmə müstəvisinə perpendikulyar olaraq qalırlar.



Perpendikulyar müstəvilər

7. Evdə və məktəbdə ətrafınızda gördüklərinizə görə perpendikulyar müstəvilərə aid nümunələr göstərin və onların perpendikulyar olduqlarını əsaslandırın.

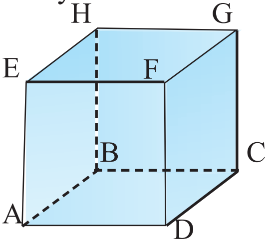
8. Nöqtə, perpendikulyar iki müstəvidən a və b məsafədədir. Bu nöqtədən müstəvilərin kəsişmə xəttinə qədər məsafəni tapın.



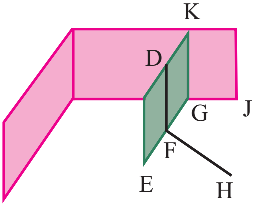
9. a) Kubun ADC müstəvisinə perpendikulyar olan tillərini yazın.

b) AE tili hansı müstəvilərə perpendikulyardır? Cavabınızı düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlığı haqqında teoremi yazmaqla izah edin.

c) Üç cüt perpendikulyar müstəvinin adını yazın. Onların perpendikulyarlığını öyrəndiyiniz teoremləri yazmaqla izah edin.



10. Təsəvvür edin ki, siz sinif otağınızı arakəsmə lövhələri ilə şəkildə göstərildiyi kimi iki hissəyə ayırmalısınız. Sizə kömək edən usta arakəsmə üzərində təbaşirlə DF, döşəmədə isə FH düz xəttini çəkdi.



a) Bu iki xəttin və günyənin köməyilə arakəsmənin modeli olan EFD müstəvisinin döşəməni göstərən EFH müstəvisinə perpendikulyar olduğunu necə müəyyən edərdiniz?

b) Arakəsmənin divara (KGJ) perpendikulyar olduğuna hansı yoxlamalarla əmin olmaq olar?

11. a) NML müstəvisini və bu müstəviyə perpendikulyar olan AM düz xəttini çəkin.

b) AM düz xəttindən keçən və NML müstəvisinə perpendikulyar olan üç müstəvi çəkin.

12. Hansı fikir doğru, hansı yanlışdır?

a) Düz xətt üzərində götürülmüş hər hansı nöqtədən bu düz xəttə yalnız bir perpendikulyar çəkmək olar.

b) A nöqtəsi α müstəvisi, B nöqtəsi β müstəvisi üzərində olarsa, AB düz xəttinin heç bir başqa nöqtəsi α müstəvisi üzərində ola bilməz.

c) İki kəsişən müstəvinin hər biri üçüncü müstəviyə perpendikulyar olarsa, bu müstəvilər bir-birinə də perpendikulyardır.

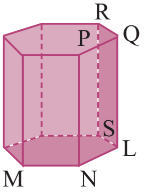
d) AB düz xətti A nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyardırsa və AB düz xətti β müstəvisi üzərində yerləşirsə, $\alpha \perp \beta$.

e) Düz xətt üzərində verilən nöqtədən bu düz xəttə yalnız bir perpendikulyar müstəvi keçirmək olar.

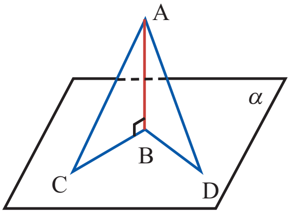
f) Müstəvi iki kəsişən düz xətdən birinə perpendikulyar olarsa, digərinə də perpendikulyardır.

Perpendikulyar müstəvilər

13. a) PN-nin MNL müstəvisinə perpendikulyar olması hansı müstəvinin də MNL müstəvisinə peprpendikulyar olduğunu göstərir?
b) Həm RSL, həm də PNL müstəvisinin MNL müstəvisinə perpendikulyar olması üçün hansı düz xətt MNL müstəvisinə perpendikulyar olmalıdır?



14. AB parçası α müstəvisinə B nöqtəsində perpendikulyardır.
α müstəvisi üzərindəki BC və BD parçaları konqruyentdir: BC ≅ BD.
AC ≅ AD olduğunu ikisütunlu cədvəli tamamlamaqla isbat edin. İsbatı dəftərinizdə yazın.



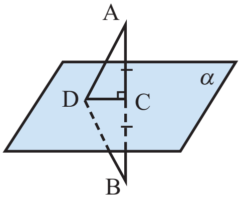
Verilir: $AB \perp \alpha$, BC ≅ BD C və D $\in \alpha$
İsbat edin: AC ≅ AD

Təklif	Əsası
1. $AB \perp \alpha$, BC ≅ BD, C və D $\in \alpha$	1. Verilir
2. $AB \perp BC$, $AB \perp BD$	2. ....
3. $\angle ABC$ və $\angle ABD$ düz bucaqlardır	3. Perpendikulyarın tərifinə görə
4. $\angle ABC \cong \angle ABD$	4. Hər ikisi düz bucaqdır
5. $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	5. ....
6. AC ≅ AD	6. ....

15. Bərabərtərəfli ABC üçbucağı α müstəvisi üzərindədir. AD parçası α müstəvisinə perpendikulyardır. BD ≅ CD olduğunu isbat edin.

16. AB oturacağı ortaq olan ABC və ABD bərabəryanlı üçbucaqlarının müstəviləri perpendikulyardır. AB = 16 sm, AC = BC = 17 sm, $AD \perp BD$ olarsa, CD məsafəsini tapın.

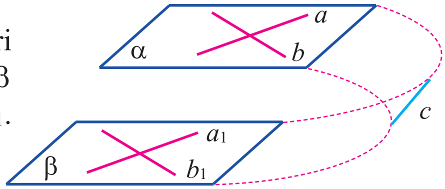
17. AB parçası α müstəvisinə C nöqtəsində perpendikulyar və AC ≅ CB. İsbat edin ki,α müstəvisi üzərindəki istənilən nöqtə A və B nöqtələrindən eyni məsafədədir.



18. Perpendikulyar iki müstəvi üzərində olan A və B nöqtələrindən müstəvilərin kəsişmə xəttinə AC və BD perpendikulyarları çəkilmişdir.
a) AC = 8 sm, BD = 9 sm, CD = 12 sm; b) AD = 6 m, BC = 7 m, CD = 2 m; c) AC = a, BD = b, CD = c olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.

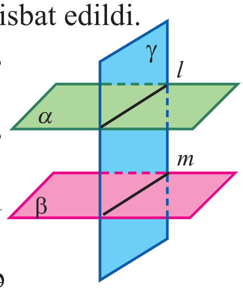
Paralel müstəvilər

Teorem 1. (Müstəvilərin paralellik əlaməti) Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paralel olarsa, bu müstəvilər bir-birinə paraleldir.

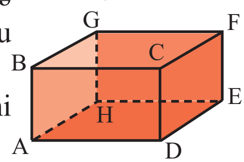


İsbatı: Tutaq ki, kəsişən a və b düz xətləri α müstəvisi, a_1 və b_1 düz xətləri isə β müstəvisi üzərindədir və $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Göstərək ki, α || β.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, α və β müstəviləri c düz xətti boyunca kəsişirlər. Düz xətlə müstəvinin paralellik əlamətinə görə $a \parallel c$ və $b \parallel c$. Belə çıxır ki, c düz xətti kəsişən a və b düz xətlərinin hər birinə paraleldir. Bu isə mümkün deyil. Deməli, fərziyyəmiz düz deyil, yəni α || β. Teorem isbat edildi.

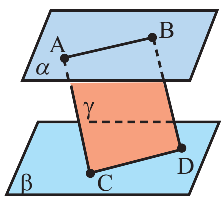


Teorem 2. İki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişirsə, onda kəsişmə xətləri paraleldir.
Yəni, paralel α və β müstəvilərini γ müstəvisi kəsərsə, onların l və m kəsişmə xətləri paraleldir.
Qısa yazılış: $\alpha \parallel \beta$ olarsa, γ müstəvisi α və β müstəvisini kəsirsə, $l \parallel m$



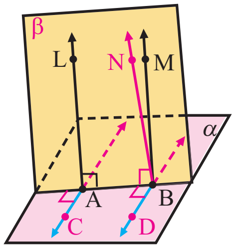
Tətbiqi nümunə. Düzbucaqlı paralelepipeddə ABG və DCF müstəviləri paraleldir. Hansı müstəvilər bu müstəviləri kəsərək paralel tilləri yaradır?
Həlli: 1. ABC müstəvisi ABG və DCF paralel müstəvilərini kəsərək AB və CD paralel tillərini yaradır: AB || CD
2. HGF müstəvisi ABG və DCF paralel müstəvilərini kəsərək GH və FE paralel tillərini yaradır: GH || FE

Teoremin isbatı:
Verilir: $\alpha \parallel \beta$, γ müstəvisinin α müstəvisi ilə kəsişməsi l, β müstəvisi ilə kəsişməsi m düz xətti olsun.
İsbat edin: $m \parallel l$
İsbatı: m və l düz xətləri γ müstəvisi üzərində olduqlarından çarpaz ola bilməzlər. Onlar kəsişə də bilməzlər, əks halda α və β müstəvilərinin ortaq nöqtəsi olardı. Doğrudan da, l və m düz xətləri hər hansı nöqtədə kəsişərlərsə, bu nöqtə l düz xətti üzərində, yəni α müstəvisi üzərində olmalıdır, həm də m düz xətti üzərində, yəni β müstəvisi üzərində olmalıdır. Lakin α və β müstəviləri paraleldir, heç bir ortaq nöqtələri yoxdur. Deməli, $m \parallel l$. Teorem isbat edildi.



Teorem 3. Paralel düz xətlərin paralel müstəvilər arasında qalan parçaları bərabərdir.
Teoremi müstəqil isbat edin.

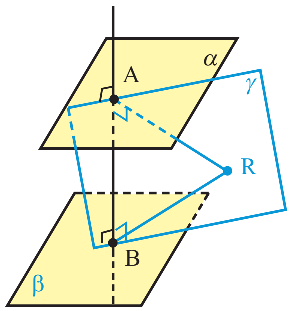
Teorem 4. Eyni müstəviyə perpendikulyar olan iki düz xətt paraleldir.
Verilir: α müstəvisi, $LA \perp \alpha$, $MB \perp \alpha$
İsbat edin: $LA \parallel MB$
Teoremin isbatı üçün LA-ya paralel olan BN düz xəttini çəkin və bu paralel düz xətlərdən β müstəvisi keçirin.
BN və BM xətlərinin üst-üstə düşdüyünü göstərməliyik.
Teoremi aşağıdakı addımlarla isbat edin.



1. α müstəvisi üzərində $AC \perp AB$ çəkin və $\angle LAC$-nin α və β müstəvilərinin əmələ gətirdiyi düz ikiüzlü bucağın xətti bucağı olduğunu göstərin.
2. İki paralel düz xətdən biri üçüncü düz xəttə perpendikulyardırsa, digəri də bu xəttə perpendikulardır. $LA \perp AB$ şərtinə görə, $NB \perp AB$ olduğunu göstərin.
3. α müstəvisi üzərində $BD \perp AB$ çəkin. α və β müstəvilərinin düz ikiüzlü bucağından istifadə etməklə $BD \perp NB$ olduğunu göstərin.
4. MB-nin α müstəvisinə B nöqtəsində çəkilmiş yeganə perpendikulyar olduğunu göstərin.

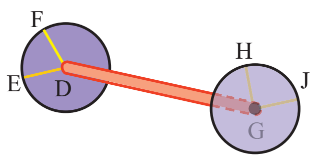
Teorem 5. Eyni düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi paraleldir.

Teoremin isbatı:
Verilir: α müstəvisi $\perp AB$, β müstəvisi $\perp AB$.
İsbat edin: $\alpha \parallel \beta$



İsbatı: Əksini fərz edək. Tutaq ki, α və β müstəviləri kəsişir və R nöqtəsi bu müstəvilərin kəsişmə xətti üzərində olan nöqtədir. A, B, R nöqtələrindən isə γ müstəvisi keçir. γ müstəvisi üzərində $RB \perp AB$, $RA \perp AB$. Lakin müstəvi üzərində eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paralel olmalıdır. Deməli, α və β müstəvilərinin kəsişməsi haqqındakı fərziyyə doğru deyil. Bu müstəvilər paraleldir: $\alpha \parallel \beta$. Teorem isbat edildi.

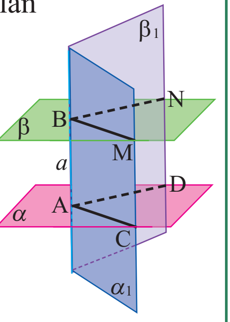
Tətbiqi nümunə. Kərim kartondan avtomobil modeli düzəldir. Təkərləri birləşdirən DG oxu təkərlərə perpendikulyar olmalıdır. Ox hansı xətlərə perpendikulyar olmalıdır ki, o, təkərlərin paralel olduğuna əmin olsun.



Həlli: DG oxu EFD müstəvisi üzərində olan ED və FD kəsişən xətlərinə və HGJ müstəvisi üzərində HG və GJ kəsişən xətlərinə perpendikulyar olarsa, Kərim təkərlərin paralel olduğuna əmin ola bilər.

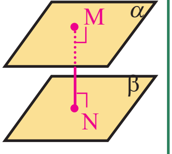
Paralel müstəvilər

Teorem 6. İki paralel müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt o birinə də perpendikulyardır.

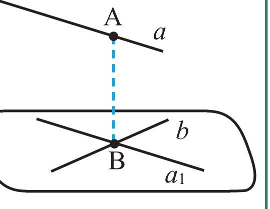


İsbatı. $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \alpha$ olsun. a düz xəttindən keçən α_1 və β_1 müstəviləri verilmiş α və β müstəvilərini paralel düz xətlər boyunca kəsirlər: $AC \parallel BM$, $AD \parallel BN$.
$a \perp AC$, $a \perp AD$ olduğundan, $a \perp BM$ və $a \perp BN$. Düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə $a \perp \beta$ olur. Teorem isbat olundu.

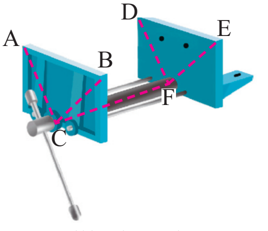
İki paralel müstəvi arasındakı məsafə. İki paralel müstəvi arasındakı məsafə bu müstəvilərdən birinin ixtiyari nöqtəsindən o birinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.



İki çarpaz düz xətt arasındakı məsafə. İki çarpaz düz xəttin hər birindən o birinə paralel müstəvi keçirmək olar. Məsələn, b düz xəttindən a düz xəttinə paralel müstəvi keçirək. Bunun üçün b düz xəttini kəsən və a-ya paralel olan a_1 düz xətti çəkək. a_1 və b kəsişən düz xətlərindən müstəvi keçirsək, bu müstəvi a düz xəttinə paraleldir. a düz xəttinin ixtiyari nöqtəsindən bu müstəviyə qədər məsafə a və b çarpaz düz xətləri arasındakı məsafəyə bərabərdir. $b \cap a_1 = B$ olarsa, α müstəvisinə perpendikulyar olan AB parçası a və b çarpaz düz xətlərinin ortaq perpendikulyarı olur.

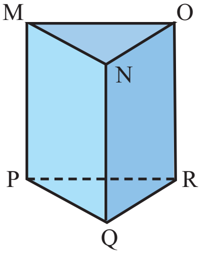


1. Dülgərlər, çilingərlər detalları iki paralel lövhə (məngənə) arasında sıxıb, bərkidir və onların üzərində lazımi işləri yerinə yetirirlər.
Şəkildə göstərilən və məngənəni xatırladan iki lövhənin bir-birinə paralel olması üçün hansı xətlər perpendikulyar olmalıdır?



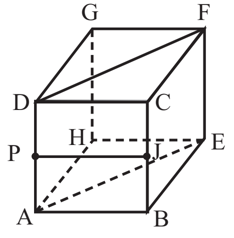
2. AB düz xətti α müstəvisinə paralel, β müstəvisinə perpendikulyardır. CD düz xətti β müstəvisi üzərindədir.
a) Şərtə uyğun şəkil çəkin.
b) Hansı doğrudur?
a) $\alpha \parallel \beta$ b) $\alpha \perp \beta$ c) $AB \parallel CD$ d) $CD \perp \alpha$

3. Verilən şərtləri şəklin üzərində əks etdirin.
α və β müstəviləri CD düz xətti boyunca kəsişir. AB düz xətti CD-ni E nöqtəsində kəsir. A, B, C, D, E nöqtələri eyni müstəvi üzərindədirlər.



4. MNO və PQR müstəviləri paralel müstəvilər və MP || NQ || QR olduğuna görə NO = QR olduğunu söyləmək olarmı? Cavabınızı izah edin.

5. Verilən təklifin doğru və ya yanlış olduğunu şəkildən nümunə gətirməklə izah edin.



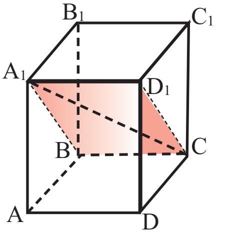
a) İki müstəvi perpendikulyardırsa, bu müstəvilərdən birinə paralel olan düz xətt digərinə də perpendikulyardır.
b) İki müstəvi eyni düz xəttə paraleldirsə, bu müstəvilər bir-birinə paraleldir.
c) Eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir.
d) Eyni müstəviyə perpendikulyar olan iki müstəvi bir-birinə paraleldir.
e) İki paralel düz xətdən birinə çarpaz olan düz xətt digərinə də çarpazdır.

6. ABC bərabəryanlı üçbucağının BC oturacağı α müstəvisi üzərindədir. α müstəvisinə paralel olan β müstəvisi AB tərəfini D nöqtəsində və AC tərəfini E nöqtəsində kəsir. İsbat edin ki, ADE üçbucağı da bərabəryanlı üçbucaqdır.

7. İki paralel müstəvi arasındakı məsafə 8 sm-dir. Uzunluğu 10 sm olan düz xətt parçasının ucları bu müstəvilərə söykənir. Parçanın hər iki müstəvi üzərindəki proyeksiyasını tapın.

8. İki paralel α və β müstəvisi arasında AC və BD parçaları çəkilmişdir ($A,B\in \alpha$; $C,D\in \beta$). AC = 17 sm, BD = 10 sm, AC və BD-nin müstəvilərdən biri üzərində proyeksiyalarının cəmi 21 sm-dir. Bu proyeksiyaların uzunluqlarını və müstəvilər arasındakı məsafəni tapın.

9. Verilir: düzbucaqlı paralelepiped, $AB = AD = 15$ sm, $AA_1 = 20$ sm. A_1C düz xətti ilə AD-ni üzərində saxlayan düz xətt arasındakı məsafəni tapın.
Göstəriş: AC diaqonalından AD-yə paralel müstəvi keçirin.



10. İki paralel müstəvi arasında 4 m uzunluqda perpendikulyar və 6 m uzunluqda mail çəkilmişdir. Hər müstəvinin üzərində bunların ucları arasında məsafə 3 m-dir. Perpendikulyarla mailin ortaları arasındakı məsafəni tapın.

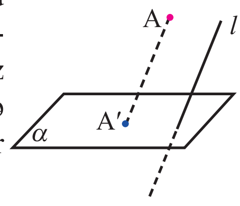
11. Düz xətt parçasının ucları müstəvidən a və b məsafədədir ($a > b$). Parçanın orta nöqtəsinin müstəvidən məsafəsini tapın:
a) Parça müstəvini kəsmirsə; b) Parça müstəvini kəsirsə.

12. Müstəvini kəsməyən düz xətt parçasının ucları müstəvidən 15 sm və 25 sm məsafədədir. Parçanı 3 : 7 nisbətində bölən nöqtənin müstəvidən məsafəsini tapın (iki hala baxın).

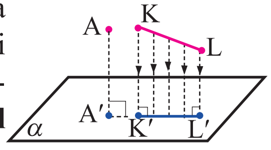
Proyeksiyalar və məsələ həlli

Məişət əşyalarının, sənaye avadanlıqlarının, maşın və mexanizmlərin istehsalını daha dəqiq təşkil etmək üçün onların müxtəlif tərəflərdən görünüş şəkillərini çəkməklə formalarının dəqiqləşdirilməsi işi görülür.

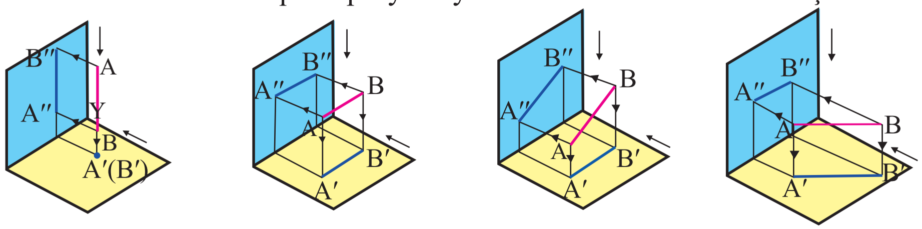
Fəza fiqurlarını müstəvi üzərində təsvir etməkdən ötrü proyeksiyalamadan istifadə edilir. α müstəvisini kəsən ixtiyari l düz xətti götürək. Fiqurun A nöqtəsindən l düz xəttinə paralel keçirilən xəttin α müstəvisi ilə A′ kəsişmə nöqtəsi A nöqtəsinin təsviri olacaqdır. Bu qayda ilə hər bir nöqtəsinin təsvirini qurmaqla, fiqurun təsviri alınar.



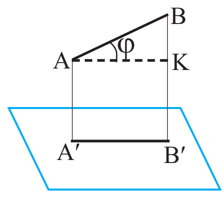
Bu halda fiqurun paralel parçaları paralel parçalarla təsvir edilir və paralel düz xətt parçalarının nisbəti saxlanılır. Xüsusi halda, l düz xətti α müstəvisinə perpendikulyar olduqda alınan təsvir fiqurun **ortoqonal proyeksiyası** olur.



Şəkildə müxtəlif vəziyyətlərdə olan parçanın həm üfüqi, həm də şaquli müstəvi üzərində ortoqonal proyeksiyasına aid nümunələr verilmişdir.

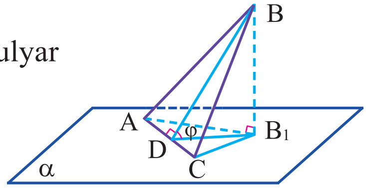


Parçanın proyeksiyasının uzunluğunu tapmaq üçün
A′B′ = AB cosφ əlaqəsindən istifadə edilir.



ΔABC-nin AC tərəfindən keçən α müstəvisi ilə üçbucaq müstəvisi arasındakı bucaq φ olarsa, bu üçbucağın α müstəvisi üzərində ortoqonal proyeksiyasının sahəsini tapaq.

$BD \perp AC$, $BB_1 \perp \alpha$ olarsa, üç perpendikulyar teoreminə görə $B_1D \perp AC$ olur.



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ ΔBB₁D-dən $\cos\varphi = \frac{B_1D}{BD}$,

$B_1D = BD \cdot \cos\varphi$ olduğundan

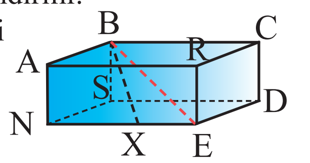
$$S_{AB_1C} = \frac{1}{2}\, AC \cdot B_1D = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$$

Ümumi halda, çoxbucaqlı müstəvisi ilə proyeksiya müstəvisi arasındakı bucaq φ olarsa, $S_p = S_f \cdot \cos\varphi$ düsturu doğrudur. Burada S_f - çoxbucaqlının sahəsi, S_p - ortoqonal proyeksiyanın sahəsidir.

Proyeksiyalar və məsələ həlli

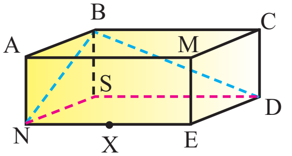
Nümunə. Düzbucaqlı paralelepiped yuxarıdan işıqlandırılır. Tələb olunan parçaların oturacaq müstəvisi üzərindəki proyeksiyalarını çəkin.

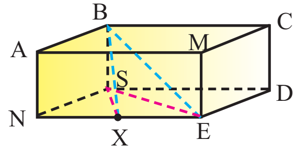
a) BD b) NB c) BE d) BX



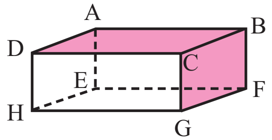
Oturacaq müstəvisinə proyeksiyaları:

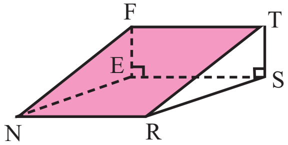
a) BD-nin proyeksiyası SD-dir.
b) NB-nin proyeksiyası NS-dir.
c) BE-nin proyeksiyası SE-dir.
d) BX-in proyeksiyası SX-dir.

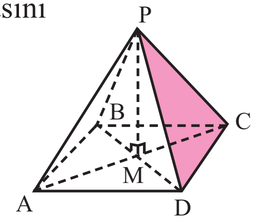




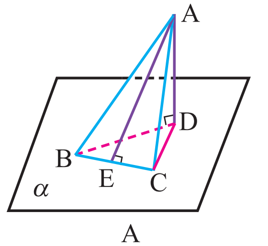
1. Rəngli hissələrin oturacaq müstəvisinə proyeksiyasını rəngləməklə göstərin.



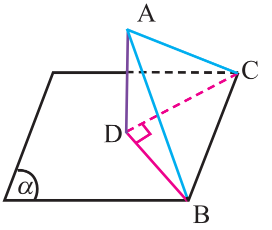




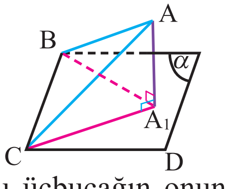
2. Bərabəryanlı CAB üçbucağının α müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası bərabərtərəfli üçbucaqdır.
$AD \perp \alpha$, $AE \perp BC$, $S_{\Delta CAB} = 48$ sm^2, $AE = 16$ sm olarsa, ΔBCD-nin sahəsini tapın.



3. ABC bərabərtərəfli üçbucağının α müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası BDC düzbucaqlı üçbucağıdır. AC = 8 sm-dirsə, DC-ni tapın.



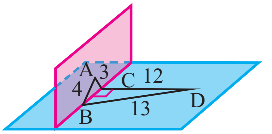
4. ABC üçbucağının müstəvisi ilə α müstəvisi arasındakı bucaq 30°-dir. BC = 12 sm, $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 = 8$ sm olarsa ABC üçbucağının α müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyasının sahəsini tapın.



5. Tərəfi a olan bərabərtərəfli üçbucaq verilmişdir. Bu üçbucağın onun müstəvisi ilə: a) 30°; b) 45°; c) 60°-li bucaq əmələ gətirən müstəvi üzərindəki ortoqonal proyeksiyasının sahəsini tapın.

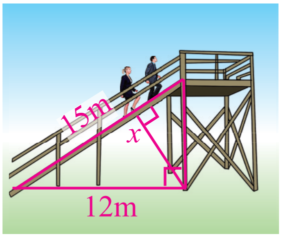
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Şəkilə görə yerinə yetirin.

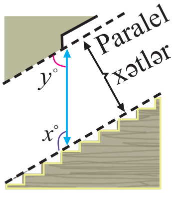


a) ABC üçbucağının düzbucaqlı üçbucaq olduğunu göstərin.
b) Şəkildə verilən ölçüləri elə dəyişin ki, BCD üçbucağı yenə düzbucaqlı üçbucaq olsun, ABC üçbucağı isə düzbucaqlı üçbucaq olmasın.

2. Şəkildə verilənlərə görə x-i tapın.



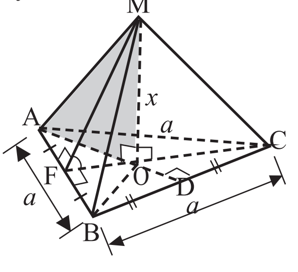
3. Pilləkanın əl tutalğacı tavana paraleldir. $\angle x = 122°$ olarsa, y bucağını tapın.



4. Tərəflərinin uzunluğu 6 sm olan bərabərtərəfli üçbucağın mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə 3 sm uzunluqda perpendikulyar qaldırılmışdır. Perpendikulyarın ucundan üçbucağın tərəflərinə qədər məsafəni tapın.

5. A və B nöqtələri ilə müstəvi arasındakı məsafə uyğun olaraq a və b-yə , bu nöqtələrdən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarların oturacaqları arasındakı məsafə c-yə bərabərdir. A və B nöqtələrinin müstəvinin eyni və müxtəlif tərəflərində ola biləcəklərini nəzərə alaraq AB məsafəsini tapın. $a = 7$ sm, $b = 2$ sm, $c = 12$ sm olduqda AB məsafəsini hesablayın.

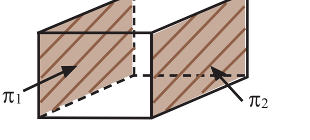
6. Bir tərəfinin uzunluğu a olan bərabərtərəfli üçbucağın O mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə qaldırılmış perpendikulyar üzərində ayrılmış OM parçasının uzunluğu x-dir.



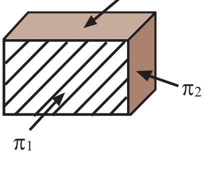
a) $MA \perp BC$ olduğunu göstərin.
b) $OM = x$ nə qədər olmalıdır ki, ABM və ABC müstəviləri arasındakı ikiüzlü bucaq 60° olsun.
c) $OM = x$ nə qədər olmalıdır ki, MA, MB, MC parçaları cüt-cüt qarşılıqlı perpendikulyar olsunlar.

7. Aşağıdakı fikirlərdən hansının doğru, hansının səhv olduğunu verilən şəkillərə görə müəyyən edin. Şəkilləri dəftərinizdə çəkin və cavabınızı yazın.

1. İki müstəvi eyni düz xəttə perpendikulyardırsa, bu müstəvilər paraleldir.



2. İki müstəvinin hər biri üçüncü müstəviyə perpendikulyardırsa, bu müstəvilər paraleldir.

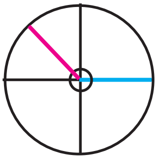


3 İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları

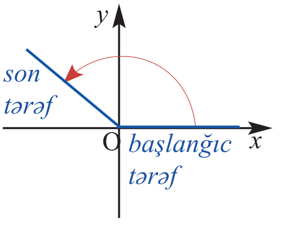
Dönmə bucaqları
Bucağın radian və dərəcə ölçüsü
Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi
Triqonometrik funksiyalar
İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları
Vahid çevrə və istənilən bucağın triqonometrik funksiyaları
Çevirmə düsturları
Triqonometrik eyniliklər
Toplama düsturları
Toplama düsturlarından alınan nəticələr
Triqonometrik ifadələrin sadələşdirilməsi

Dönmə bucaqları

Dönmə bucağı



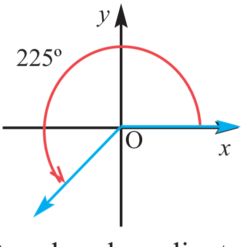
Biz indiyə qədər bucaq dedikdə iki tərpənməz tərəf arasında qalan bucaqlardan danışırdıq. Bucağa dönmənin ölçüsü kimi də baxmaq olar. Məsələn, tərpənməz ox ətrafında fırlanan təkərin başlanğıcda üfüqi vəziyyətdə yerləşən radiusu müəyyən müddətdən sonra əvvəlki vəziyyətlə müəyyən bucaq əmələ gətirəcək. Həm də bu bucağın qiyməti dönmənin hansı istiqamətdə baş verməsindən asılı olacaq. İstənilən bucağa şüanın öz başlanğıc nöqtəsi ətrafında fırlanmasından alınan fiqur kimi baxmaq olar.



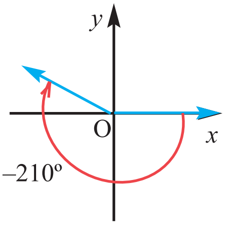
Şüanın başlanğıc vəziyyəti bucağın bir tərəfinə, şüanın son vəziyyəti isə bucağın digər tərəfinə uyğundur. Koordinat müstəvisi üzərində şüanı koordinat başlanğıcına nəzərən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində və ya əks istiqamətdə döndərməklə müxtəlif ölçülü bucaqlar yaratmaq olar.

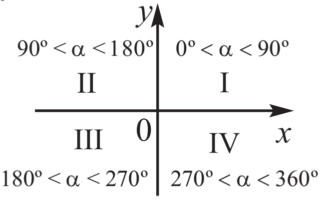
Dönmə bucaqlarının başlanğıc tərəfləri eyni olub, absis oxunun müsbət istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Koordinat başlanğıcına (bucağın təpəsi) nəzərən dönən tərəfi isə son tərəf adlandıraq. Dönmə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində olduqda bucağın ölçüsü müsbət, saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində olduqda isə mənfi qəbul edilir.

müsbət bucaq



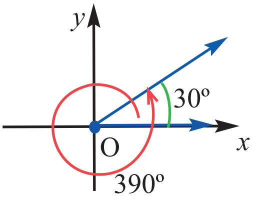
mənfi bucaq





Koordinat oxları koordinat müstəvisini 4 rübə ayırır. Bucağın son tərəfinin hansı rübdə olmasından asılı olaraq onun qiyməti müəyyən intervalda dəyişir.

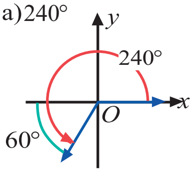
Son tərəf koordinat başlanğıcına nəzərən bir və ya bir neçə dəfə dönə bilər. Bir tam dönmə ilə 360°-li bucaq yaranır. Başlanğıc və son tərəfləri üst-üstə düşən sonsuz sayda dönmə bucaqları vardır. Məsələn, 30°-li bucaqla 390°-li bucağın son tərəfləri üst-üstə düşür. Ümumiyyətlə, α° və $\alpha^{\circ} + 360^{\circ} \cdot n$ (burada n istənilən tam ədəddir) dönmə bucaqlarının son tərəfləri eyni vəziyyətdə olub, üst-üstə düşürlər.



Dönmə bucaqları

Nümunə 1. Verilən ölçülərdə dönmə bucaqları çəkin, son tərəfinin hansı rübdə olduğunu müəyyən edin.

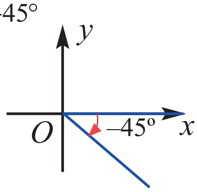
a) $240°$



$240° = 180° + 60°$

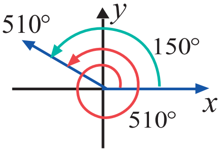
Bucağın işarəsi müsbətdir. Bucağın son tərəfi saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətdə başlanğıc tərəfdən $180° + 60°$ qədər döndərməklə çəkilir. Son tərəf III rübdədir.

b) $-45°$



Bucağın işarəsi mənfidir. Bucağın son tərəfi başlanğıc vəziyyətdən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində döndərməklə absis oxunun müsbət istiqaməti ilə 45°-li bucaq əmələ gətirməklə çəkilir. Son tərəf IV rübdədir.

c) $510°$

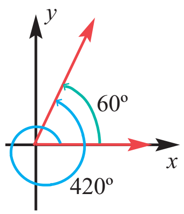


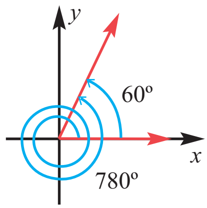
$510° = 360° + 150°$

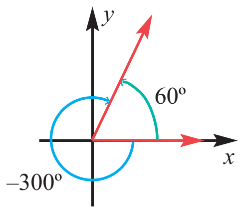
Bucağın son tərəfi başlanğıc tərəfdən saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətində başlanğıc tərəflə 150°-li bucaq əmələ gətirməklə çəkilir. Son tərəf II rübdədir.

Nümunə 2. Koordinat müstəvisində 60°-li bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən iki müsbət, bir mənfi dönmə bucağı göstərin və dərəcə ölçülərini yazın.

$60° + 360° = 420°$ $\qquad$ $60° + 2 \cdot 360° = 780°$ $\qquad$ $60° - 360° = -300°$







Öyrənmə tapşırıqları

1. α bucağı hansı rübün bucağıdır? Çəkin, göstərin.

a) $\alpha = 170°$ b) $\alpha = 290°$ c) $\alpha = -100°$ d) $\alpha = 320°$ e) $\alpha = -10°$

2. 0°–360° aralığında elə α dönmə bucağı göstərin ki, son tərəfi verilən bucaqla üst-üstə düşsün.

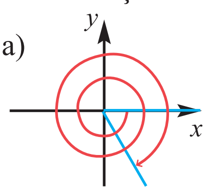
a) 420° b) –210° c) –330° d) 700° e) –200°

3. Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən bir müsbət, bir mənfi bucağı dərəcə ölçüsü ilə yazın və çəkin.

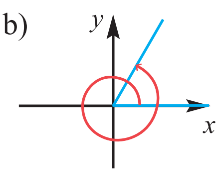
a) 200° b) 80° c) –100° d) 130° e) –70°

4. Hansı ölçü hansı bucağa uyğundur? 1) –210° 2) 420° 3) – 780°

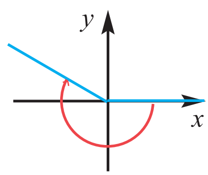
a)



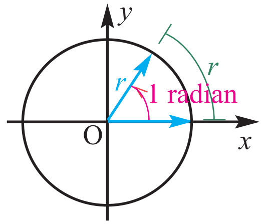
b)

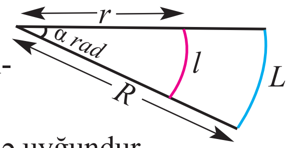


c)



Bucağın radian ölçüsü





Uzunluğu radiusa bərabər olan qövsə uyğun mərkəzi bucağın ölçüsünə **1 radian** deyilir. Qövsün uzunluğunun çevrənin radiusuna nisbəti uyğun mərkəzi bucağın radian ölçüsünü göstərir: $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{r}}$
Bucağın radian ölçüsü radiusun uzunluğundan asılı deyil(şəkildəki fiqurların oxşarlığına görə izah edin).

Nümunə 1. Radiusu 4 sm olan çevrənin 12 sm uzunluqda qövsünə uyğun mərkəzi bucağı neçə radiandır?

Həlli: Verilmiş çevrədə 1 radian 4 sm uzunluqda qövsə uyğundur. 12 sm qövsə uyğun bucaq 12 : 4 = 3 radian olar.

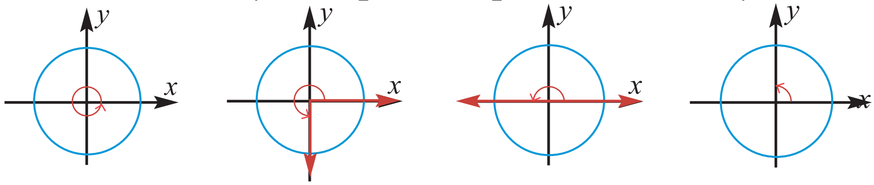
Çevrənin uzunluğu $2\pi r$-dir. Radiusa (r) bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 1 radiandırsa, $2\pi r$-ə bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 2π olar. Aşağıda müəyyən dönmələrə uyğun bucaqların radian ölçüləri göstərilib.

tam dönmə: 2π radian

3/4 dönmə: $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

1/2 dönmə: $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$

1/4 dönmə: $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

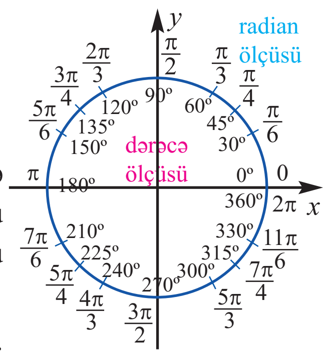


Bir tam dönmədə yaranan bucağın radian ölçüsü 2π , dərəcə ölçüsü isə 360°-dir. Yəni, 2π radian = 360°. Buradan radian və dərəcə ölçüləri arasındakı qarşılıqlı əlaqəni müəyyən etmək olar.

Radianın dərəcəyə çevrilməsi:	Dərəcənin radiana çevrilməsi:
2π radian = 360°	2π radian = 360°
$1 \text{ radian} = \dfrac{360^\circ}{2\pi} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$	$1^\circ = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$
1 radian ≈ 57°	$1^\circ = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$ radian

Deməli, π rad = 180º. Adətən, “rad” işarəsi yazılmır, məsələn, π rad = 180° əvəzinə, $\pi = 180°$ yazılır. Onda aydındır ki,

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ,\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ,\ \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$



Birinci rübdə yerləşən bəzi bucaqların radian və dərəcə ölçülərinin qarşılıqlı qiymətlərinə görə bu bucaqların misli olan bucaqların radian ölçüsünü tapmaq olar.

Məsələn, $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ olduğundan $150^\circ = \dfrac{5\pi}{6}$ olacaq.

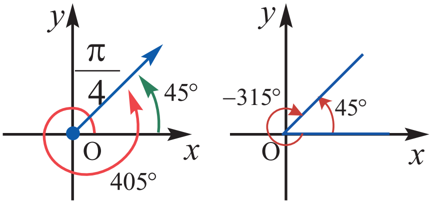
Nümunə 2. Dərəcə ölçüsü ilə verilmiş bucağı radian, radian ölçüsü ilə verilmiş bucağı dərəcə ölçüsü ilə ifadə edin: a) $60°$; b) $\frac{5\pi}{3}$

Həlli: a) $60° = 60 \cdot \frac{\pi}{180}$ radian $= \frac{\pi}{3}$ radian $\approx 1,047$ radian

b) $\frac{5\pi}{3}$ radian $= \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 5 \cdot 60° = 300°$

Nümunə 3. Son tərəfi $45°$-li bucaqla üst-üstə düşən bucaqları dərəcə və radianla ifadə edin.

Həlli: $45°$–li bucaqla $405°$–li və $-315°$-li bucağın son tərəfləri üst-üstə düşür.
$405° = 45° + 360°$; $-315° = 45° - 360°$, $45° + 2\cdot360°$, $45° - 2\cdot360°$; $45° + 3\cdot360°$, $45° - 3\cdot360°$ bucaqları və ya $45° \pm 360°$, $45° \pm 2\cdot360°$, $45 \pm 3\cdot360°$ və s. kimi sonsuz sayda bucaqların son tərəfləri $45°$-li bucağın son tərəfi ilə üst-üstə düşür.



Bunu radianla aşağıdakı kimi ifadə etmək olar: $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \pm 4\pi$ və s. ümumi şəkildə isə $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n$ $(n \in N)$ kimi bucaqların son tərəfləri $\frac{\pi}{4}$ radian bucağın son tərəfi ilə üst-üstə düşürlər.

Öyrənmə tapşırıqları

5. r radiuslu çevrənin l uzunluqlu qövsünə uyğun bucağın radian ölçüsünü tapın.

a) $r = 4$ sm, $l = 16$ sm b) $r = 5$ m, $l = 4$ m c) $r = 3,2$ sm, $l = 7,2$ sm

6. Verilən ölçüdə dönmə bucağını koordinat müstəvisi üzərində təsvir edin.

a) $40°$ b) $310°$ c) $-150°$ d) $150°$ e) $780°$

f) $\frac{2\pi}{3}$ g) $-\pi$ h) $\frac{5\pi}{2}$ i) $-400°$ j) $\frac{3\pi}{2}$

7. Dərəcə ölçüsü ilə verilmiş bucağı radianla ifadə edin, yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla təqribi qiymətini tapın.

a) $60°$ b) $120°$ c) $-45°$ d) $450°$ e) $-270°$ f) $15,5°$

8. Radian ölçüsü verilmiş bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{3\pi}{8}$ d) $-\frac{5\pi}{2}$ e) 1 f) 2 g) 3

9. Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən və verilmiş aralıqda yerləşən dönmə bucaqları yazın.

a) $65°$, $90° \le \theta < 720°$ b) $-40°$, $-180° \le \theta < 360°$ c) $140°$, $-720° \le \theta < 720°$

d) $\frac{\pi}{4}$, $-2\pi \le \theta < 2\pi$ e) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$ f) $\frac{2\pi}{3}$, $-2\pi \le \theta < 4\pi$

Bucağın radian və dərəcə ölçüsü

Nümunə. a) $65°$, $90° \le \theta < 720°$

$65°$-li bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını

$65° + 360 \cdot n$ və $65° - 360 \cdot n$ $(n \in N)$ düsturlarına görə tapa bilərik.

$n = 1$ $\quad 65° + 360 \cdot 1 = 425°$ $\quad 65° - 360 \cdot 1 = -295°$

$n = 2$ $\quad 65° + 360 \cdot 2 = 785°$ $\quad 65° - 360 \cdot 2 = -655°$

Göründüyü kimi, verilən intervala daxil olan yalnız $425°$–li bucaqdır.

Nümunə. e) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$

Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ və $\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$ $(n \in N)$ düsturlarına görə tapa bilərik.

n	1	2	3
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{27\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{21\pi}{4}$

$-4\pi \le \theta < 4\pi$ intervalında $\frac{3\pi}{4}$ bucağı ilə son tərəfi üst-üstə düşən bucaqlar: $\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{13\pi}{4}$

10. Dərəcə ölçüsü ilə verilmiş bucağı radian, radian ölçüsü ilə verilmiş bucağı dərəcə ölçüsü ilə ifadə edin.

1) $225°$ $\quad$ 2) $-15°$ $\quad$ 3) $135°$ $\quad$ 4) $\frac{7\pi}{6}$ $\quad$ 5) $-\frac{5\pi}{4}$ $\quad$ 6) $-\frac{2\pi}{3}$

11. Bucağın son tərəfinin verilən dönməsi ilə yaranan bucaqların dərəcə və radian ölçülərini yazın.

1) çevrənin $\frac{1}{9}$ -i $\quad$ 2) çevrənin $\frac{1}{24}$-i $\quad$ 3) çevrənin $\frac{1}{18}$ -i

4) çevrənin $\frac{2}{3}$ -si $\quad$ 5) çevrənin $\frac{7}{12}$ -si $\quad$ 6) çevrənin $\frac{4}{5}$ -ü

12. Verilən bucaqlarla son tərəfləri üst-üstə düşən və $(0;\ 2\pi)$ intervalında yerləşən bucağı radianla ifadə edin.

1) $-\frac{\pi}{3}$ $\quad$ 2) $-\frac{3\pi}{4}$ $\quad$ 3) $-\frac{19\pi}{4}$ $\quad$ 4) $\frac{16\pi}{3}$

5) $-\frac{7\pi}{5}$ $\quad$ 6) $\frac{45\pi}{8}$ $\quad$ 7) 8 $\quad$ 8) 12

13. a) Verilən bucaqlarla son tərəfləri üst-üstə düşən dörd bucaq müəyyən edin.

1) $\frac{\pi}{4}$ $\quad$ 2) $\frac{7\pi}{5}$ $\quad$ 3) $-\frac{\pi}{6}$ $\quad$ 4) $-\frac{4\pi}{3}$

b) Verilən dönmə bucaqlarından hansı ikisinin son tərəfləri üst-üstə düşür?

1) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ $\quad$ 2) $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{9\pi}{2}$ $\quad$ 3) $410°$, $-410°$ $\quad$ 4) $227°$, $-493°$

c) Verilən bucaqlarla son tərəfləri üst-üstə düşən bucaqları ümumi şəkildə yazın.

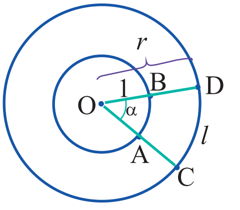
1) $-60°$ $\quad$ 2) $\frac{\pi}{5}$ $\quad$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ 4) $100°$

Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi

Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi

Qövsün uzunluğu. Radiusu r olan çevrədə m^{o}-li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğu düsturunu yazaq: $l = \frac{\pi m}{180} \cdot r$.

Qövsün uzunluğunu bucağın radian ölçüsündən istifadə etməklə daha sadə şəkildə yazmaq olar.



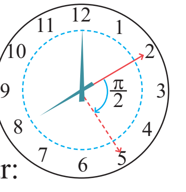
Radianın tərifinə görə $\frac{l}{r} = \alpha$ olduğundan qövsün uzunluğu bucağın radian ölçüsü ilə radiusun hasilinə bərabərdir: $l = \alpha \cdot r$

Qövsün uzunluğu çevrənin radiusu ilə düz mütənasibdir.

Sektorun sahəsi. m^{o}-li mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsi $S = \frac{\pi m}{360} \cdot r^2$;

m^{o}-li mərkəzi bucağın radian ölçüsü olduğunu nəzərə alaraq $\frac{\pi m}{180}$ - i α ilə işarə etsək, uyğun sektorun sahə düsturu $S = \frac{1}{2} \alpha r^2$ olar.

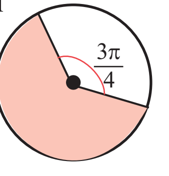
Nümunə 1. Saatın saniyə əqrəbinin uzunluğu 12 sm-dir. Saniyə əqrəbinin uc nöqtəsinin 15 saniyədə cızdığı qövsün uzunluğunu müəyyən edin.



Həlli. Saniyə əqrəbi 60 saniyədə bir tam dövr edir. Bu isə 2π radiandır. 15 saniyə tam dönmənin $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ hissəsinə uyğundur: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ radian.

Deməli, saniyə əqrəbi 15 saniyə ərzində $\frac{\pi}{2}$ radian mərkəzi bucağa uyğun qövs cızmış olur. Bu qövsün uzunluğu: $l = \alpha r = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi \approx 6 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$ (sm)

Nümunə 2. Radiusu 8 sm olan dairənin rəngli sektorunun sahəsini və bu sektorun perimetrini tapın.



Rəngli hissəyə uyğun mərkəzi bucaq: $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Sektorunun sahəsi: $S = \frac{1}{2} \cdot \alpha r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4} \cdot 8^2 = 40\pi$ (sm^2)

Sektorun perimetri = iki radiusun uzunluğu + qövsün uzunluğu

$P = 2 \cdot 8 + \frac{5\pi}{4} \cdot 8 = 16 + 10\pi \approx 47{,}4$ (sm)

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilənlərə görə tələb olunan kəmiyyətləri tapın. Burada r çevrənin radiusu, α mərkəzi bucaq, l qövsün uzunluğudur.

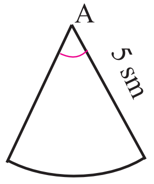
a) $r = 8{,}5$ sm, $\alpha = 75°$, $l =$ ▢ sm b) $r = 5$ m, $l = 13$ m, $\alpha =$ ▢ radian

c) $r =$ ▢ mm, $\alpha = 1{,}8$ radian, $l = 4{,}5$ mm

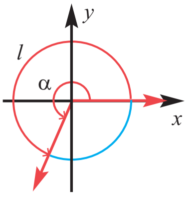
2. Verilən mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğunu və sektorun sahəsini tapın.

a) $r = 30$ sm; $\alpha = \frac{\pi}{3}$ b) $r = 12$ m; $\alpha = 90°$ c) $r = 1{,}8$ dm; $\alpha = \frac{5\pi}{3}$

3. Şəkildə göstərilən dairə sektorunun perimetri 16 sm-dir. Uyğun dairənin radiusu 5 sm olarsa, A mərkəzi bucağının radian ölçüsünü tapın.

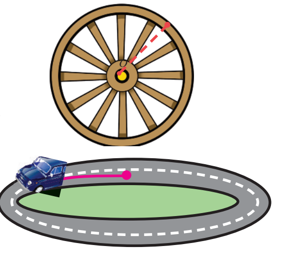


4. Radiusu 20 sm olan çevrənin l qövsünün uzunluğu 85 sm-dir. Uyğun mərkəzi bucağın radian ölçüsünü tapın.



Xətti sürət və bucaq sürəti

Çevrə üzrə hərəkətdə, məsələn, təkərin O nöqtəsi ətrafında fırlanması zamanı onun üzərində götürülmüş hər hansı P nöqtəsinin sürətini iki cür qiymətləndirmək olar. Bunlardan biri nöqtənin təkərin fırlanması zamanı qət etdiyi məsafəyə görə müəyyən edilən sürətdir. Bu xətti sürət adlanır. Digəri isə dönmə bucağına (mərkəzi bucaq) görə olan sürət, yəni bucaq sürəti adlanır.



$$\text{xətti sürət} = \frac{\text{gedilən yol}}{\text{zaman}}$$

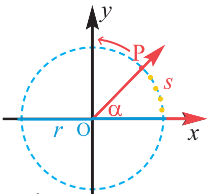
$$v_x = \frac{\alpha r}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, xətti sürət gedilən yolun (uyğun çevrə qövsünün uzunluğunun) zamana olan nisbətinə bərabərdir.

$$\text{bucaq sürəti} = \frac{\text{dönmə bucağı}}{\text{zaman}}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, bucaq sürəti dönmə bucağının zamana olan nisbətinə bərabərdir.



Burada, α (radianla) t zamandakı dönmə (fırlanma) bucağıdır.

Xətti sürətlə bucaq sürəti arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

xətti sürət = $r \cdot$ bucaq sürəti $\qquad v_x = r \cdot \omega$

Nümunə 3. Karusel dəqiqədə 8 tam dövr edir.

a) Karuselin bucaq sürətini tapın.

b) Mərkəzdən 3 m məsafədə olan at dəqiqədə neçə metr məsafə qət edir?

c) Mərkəzdən 2 m məsafədə olan at dəqiqədə neçə metr məsafə qət edir?

Həlli: a) Bir tam dövrə uyğun dönmə bucağı 2π-dir. 8 dövrdə bu bucaq $8 \cdot 2\pi = 16\pi$ olar. Bir dəqiqədəki bucaq sürəti $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{16\pi}{1} = 16\pi$ radian/dəq

b) Mərkəzdən 3 m məsafədə olan at radiusu 3 m olan çevrə üzrə hərəkət edir.

Xətti sürət: $\quad v_x = r \cdot \omega = 3 \cdot 16\pi = 48\pi \approx 151$ m/dəq

c) Mərkəzdən 2 m məsafədə olan at radiusu 2 m olan çevrə üzrə hərəkət edir.

Xətti sürət: $\quad v_x = r \cdot \omega = 2 \cdot 16\pi = 32\pi \approx 100$ m/dəq

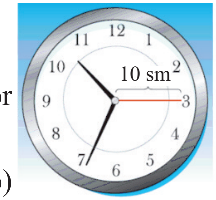
Göründüyü kimi, bucaq sürəti eyni olduğu halda, mərkəzdən daha uzaqda olan cisim daha sürətlə hərəkət edir, yəni xətti sürəti daha böyük olur.

5. Saatın saniyə əqrəbinin uzunluğu 10 sm-dir.

a) saniyə əqrəbinin bucaq sürətini (rad/san ilə) tapın

b) 2 dəqiqə 15 saniyə ərzində əqrəbin uc nöqtəsi nə qədər məsafə getmiş olar?

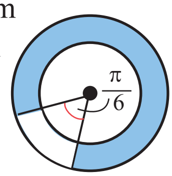
c) saniyə əqrəbinin uc nöqtəsinin xətti sürətini (sm/san ilə) tapın.



6. Avtomobilin təkərinin radiusu 40 sm olarsa, verilən məsafələri qət edənə qədər təkərlərin fırlanması ilə alınan bucaq neçə radiandır?

a) 100 m b) 15 m c) 1 km d) 300 m

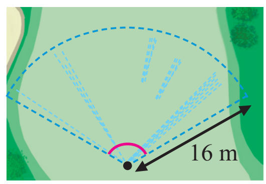
7. Şəkildəki çevrələr konsentrikdir (mərkəzləri eynidir). Kiçik çevrənin radiusu 4 sm, böyük çevrənin radiusu isə 6 sm-dir. Rəngli hissənin sahəsini tapın.



8. Suçiləyici hər 15 saniyədə bir dövrə vurur və ən uzağı 16 m məsafəyə su çiləyə bilir.

a) Suçiləyicinin $\frac{3\pi}{2}$ dönmədə suladığı sektorun sahəsini tapın.

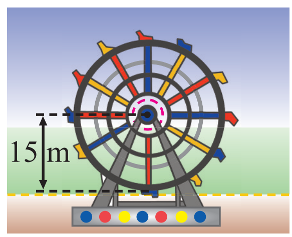
b) Suçiləyicinin 2 dəqiqə ərzində fırlanmasındakı bucağı radian və dərəcə ilə ifadə edin.



9. Karusel dəqiqədə 1,5 dövr edir.

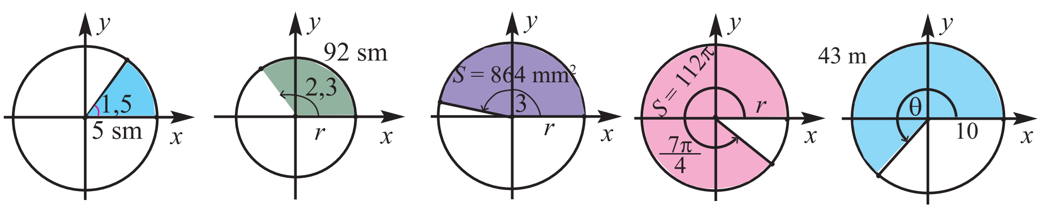
a) Karuselin bucaq sürətini tapın.

b) Karuselin oxundan 15 m məsafədə olan nöqtənin xətti sürətini (m/dəq ilə) tapın



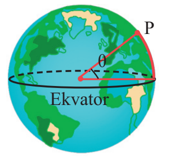
10. Diametri 65 sm olan velosiped təkəri 0,05 saniyədə 45° dönür. Velosiped 30 saniyədə hansı məsafəni qət edər?

11. Hər bir şəkildə verilənlərə görə elə hesablamalar aparın ki, bütün dairələr üçün radius, mərkəzi bucaq, qövsün uzunluğu, sektorun sahəsi müəyyən edilmiş olsun.

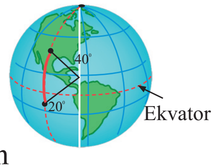


12. Radiusu 2 m olan çevrə üzrə hərəkət edən cisim hər 20 saniyədə 5 *m* yol gedir. Cismin xətti sürətini və bucaq sürətini tapın.

13. a) Bakı 40° şimal en dairəsində yerləşir. Meridian üzrə Bakının ekvatordan məsafəsini tapın. Yer kürəsinin radiusu təxminən 6400 km-dir.

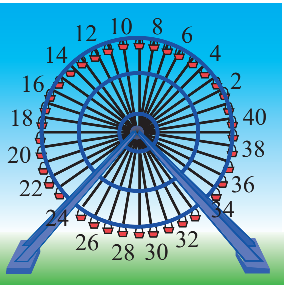


b) Meridian üzrə 40° şimal en dairəsində yerləşən məntəqə ilə 20° cənub en dairəsində yerləşən məntəqə arasındakı məsafəni tapın.



14. Uzunluğu 21 sm olan rəqqasın rəqsi hərəkəti zamanı ucunun cızdığı ən böyük qövsün uzunluğu 10,5 sm-dir. Bu zaman rəqqasın qolu neçə dərəcəli bucaq cızır?

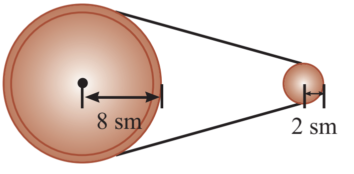
15. Karuselin kabinələri 1-dən 40-a qədər nömrələnmişdir. Təsəvvür edin ki, siz 3 nömrəli kabinədəsiniz. Karuselin $\frac{37\pi}{10}$ dönməsində sizin indi olduğunuz kabinənin yerində neçə nömrəli kabinə olacaq? Hər iki istiqamətdə dönmə halına baxın.



16. Təkərlərinin diametri 65 sm olan velosipedin sürəti saatda 30 km olarsa, velosipedin təkərləri dəqiqədə neçə tam dövr edir?

17. Yerdən Günəşə qədər məsafə təxminən $1{,}5 \cdot 10^8$ km-dir. Yerin Günəş ətrafında çevrə üzrə hərəkətdə 365 günə bir tam dövr etdiyini fərz edərək, xətti sürətini (km/saat ilə) müəyyən edin.

18. Radiusları 2 sm və 8 sm olan iki disk qayış vasitəsilə şəkildə göstərildiyi kimi birləşdirilmişdir. Kiçik disk dəqiqədə 3 dövr edirsə, böyük diskin dəqiqədə neçə dövr etdiyini tapın. **Göstəriş:** hər iki diskin çevrəsi üzərindəki nöqtələr eyni xətti sürətlə hərəkət edir.

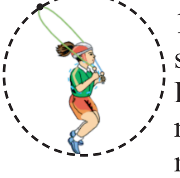


19. Cismin t zamanda r radiuslu çevrə üzrə ω bucaq sürəti ilə qət etdiyi məsafəni tapın.

a) $r = 6$ dm, $\omega = \frac{\pi \text{ rad}}{15 \text{ san}}$, $t = 10$ dəq.

b) $r = 12$ m, $\omega = \frac{3\pi \text{ rad}}{2 \text{ san}}$, $t = 100$ san.

c) $r = 30$ sm, $\omega = \frac{\pi \text{ rad}}{10 \text{ san}}$, $t = 25$ san.

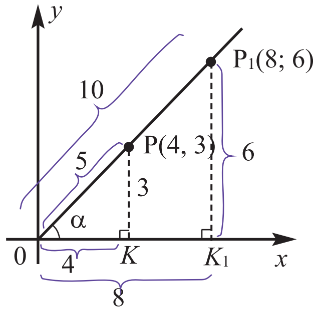


20. Suçiləyici bərkidildiyi yerdən 400 m məsafəyə dairəvi olaraq su vura bilir. Lakin fermer yalnız 120000 m² sahənin sulanmasını planlaşdırır. Bu sahəni çiləyicinin neçə dərəcə bucaq dönməsi ilə suvarmaq olar?

Praktik məşğələ

1) Son tərəfi P(4; 3) nöqtəsindən keçən α dönmə bucağı təsvir edin. P nöqtəsinin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın.

$$OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$



2) OPK düzbucaqlı üçbucağından α iti bucağı üçün triqonometrik nisbətləri yazın.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

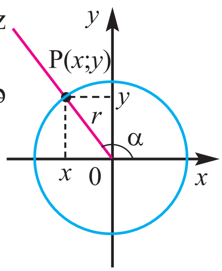
3) OP şüasını üzərində saxlayan düz xəttin tənliyini yazın. $k = \frac{3}{4}$, $\quad y = \frac{3}{4}x$

4) $P_1(8; 6)$ nöqtəsinin də OP şüası üzərində yerləşdiyini yoxlayın və ΔOP_1K_1-dən α bucağı üçün triqonometrik nisbətləri yazın.

$$r_1 = OP_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10, \qquad \sin\alpha = \frac{6}{10}, \qquad \cos\alpha = \frac{8}{10}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8}$$

5) 2-ci və 4-cü addımlarda yazılanlara əsasən izah edin:
α dönmə bucağının triqonometrik nisbətlərinin qiymətləri bucağın tərəfi üzərində hansı nöqtənin qeyd edilməsindən asılıdırmı?

Bucağın triqonometrik nisbətlərinin qiymətləri yalnız bucağın qiymətindən asılıdır.
Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan, r radiuslu çevrə ilə α dönmə bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsi $P(x; y)$ olsun.

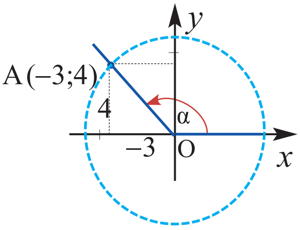


- P nöqtəsinin ordinatının radiusun uzunluğuna nisbətinə α bucağının sinusu deyilir: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$
- P nöqtəsinin absisinin radiusun uzunluğuna nisbətinə α bucağının kosinusu deyilir: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
- P nöqtəsinin ordinatının absisinə nisbətinə α bucağının tangensi deyilir:
  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (burada $x \neq 0$, yəni P nöqtəsi ordinat oxu üzərində deyil)
- P nöqtəsinin absisinin ordinatına nisbətinə α bucağının kotangensi deyilir:
  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ (burada $y \neq 0$, yəni P nöqtəsi absis oxu üzərində deyil)
- α bucağının kosekansı bu bucağın sinusunun tərsidir:
  $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y}$ (burada $y \neq 0$)
- α bucağının sekansı bu bucağın kosinusunun tərsidir:
  $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}$ (burada $x \neq 0$)

Triqonometrik funksiyalar

Nümunə 1. A (– 3; 4) nöqtəsi α dönmə bucağının son tərəfi üzərindədir.
a) Məsələnin şərtini əks etdirən şəkil çəkin.
b) α bucağı üçün triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini müəyyən edin.
Həlli:

a)



b) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

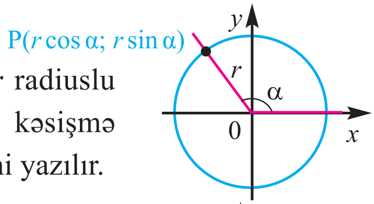
$\sin\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{4}{3}$ $\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{3}{4}$

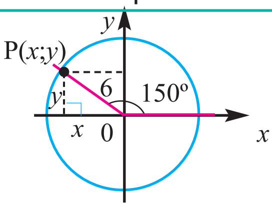
$\sec\alpha = \dfrac{r}{x} = -\dfrac{5}{3}$ $\qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{5}{4}$

Çevrə üzərindəki nöqtənin koordinatları

Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, r radiuslu çevrə ilə α dönmə bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsi koordinatları ilə **P(r cos α; r sin α)** kimi yazılır.



Nümunə 2. Şəkildə verilənlərə görə P nöqtəsinin koordinatlarını tapın.
P nöqtəsi II rübdə yerləşir və kosinusu mənfidir.

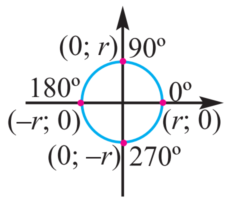


$\cos 150° = \dfrac{x}{r}$ $\qquad \sin 150° = \dfrac{y}{r}$

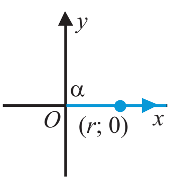
$-\cos 30° = \dfrac{x}{6}$ $\qquad \sin 30° = \dfrac{y}{6}$

$x = -6\cos 30° = -3\sqrt{3}$ $\qquad y = 6\sin 30° = 3$

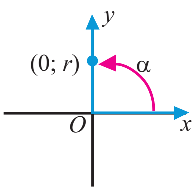
Bəzən bucağın son tərəfi koordinat oxlarından birinin üzərində yerləşir. Bu halda yaranan dönmə bucaqlarının ölçüsü φ = 0° və ya φ = 0 radian, φ = 90° və ya $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ radian, φ = 180° və ya φ = π radian, φ = 270° və ya $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ radian kimi ola bilər. Bu halda x və y koordinatları ya sıfır, ya da mütləq qiymətcə çevrənin radiusuna bərabər olur.



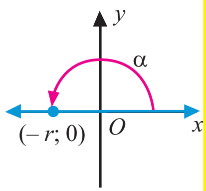
α = 0° və ya 0 radian



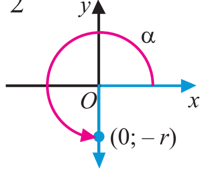
α = 90° və ya $\dfrac{\pi}{2}$ radian



α = 180° və ya π radian

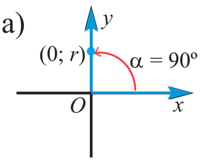


α = 270° və ya $\dfrac{3\pi}{2}$ radian



Nümunə 3. a) $\alpha = 90°$; b) $\alpha = 180°$; c) $\alpha = 270°$ olduqda triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini tapın.

a)



$\sin 90° = \dfrac{y}{r} = \dfrac{r}{r} = 1$

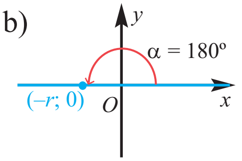
$\cos 90° = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{r} = 0$

$\mathrm{tg}\, 90° = \dfrac{y}{x} = \dfrac{r}{0}$

təyin edilməyib.

$\mathrm{ctg}\, 90° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{r} = 0$

b)



$\sin 180° = \dfrac{y}{r} = \dfrac{0}{r} = 0$

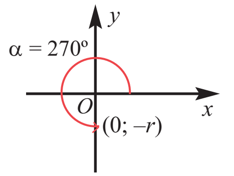
$\cos 180° = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-r}{r} = -1$

$\mathrm{tg}\, 180° = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{-r} = 0$

$\mathrm{ctg}\, 180° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-r}{0}$

təyin edilməyib.

c)



$\sin 270° = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-r}{r} = -1$

$\cos 270° = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{r} = 0$

$\mathrm{tg}\, 270° = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-r}{0}$

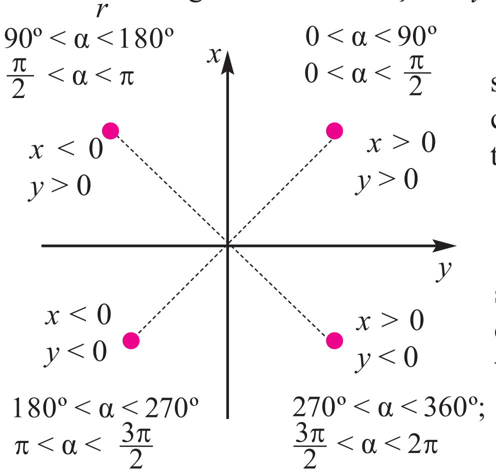
təyin edilməyib.

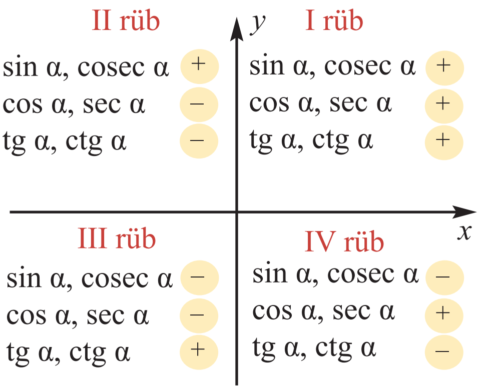
$\mathrm{ctg}\, 270° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{-r} = 0$

α-nın mümkün olan hər bir qiymətinə $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\mathrm{cosec}\,\alpha$-nın yeganə qiyməti uyğundur. Buna görə bu triqonometrik nisbətlər α bucağının funksiyalarıdır. Onları triqonometrik funksiyalar adlandırırlar.

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ olduğundan kosinusun işarəsi x-in işarəsi ilə,

$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ olduğundan sinusun işarəsi y-in işarəsi ilə üst-üstə düşür.





Triqonometrik funksiyalar

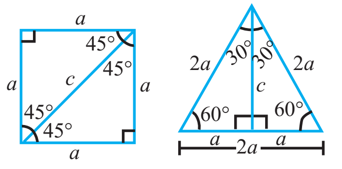
Öyrənmə tapşırıqları

1. 1) Son tərəfi verilmiş nöqtədən keçən α dönmə bucağının sinus, kosinus və tangensini müəyyən edin.

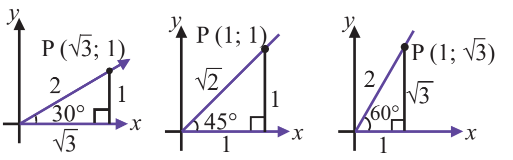
a) A(1; 2) b) B(2; 4) c) C(4; 8)

2) Aldığınız nəticələri müqayisə edin.

2. a)Şəkildə verilənlərə görə bucaqları $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ və $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ olan üçbucaqların tərəfləri nisbətinin uyğun olaraq $1:1:\sqrt{2}$, $1:\sqrt{3}:2$ olduğunu müəyyən edin.



b) Şəkildə verilmiş üçbucaqlardan 30°, 45°, 60° -li bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini müəyyən edin.



3. Hər bir bucağa uyğun triqonometrik nisbətin işarəsini müəyyən edin.

a) sin 20° c) cos 100° e) tg 250° g) sin 200°

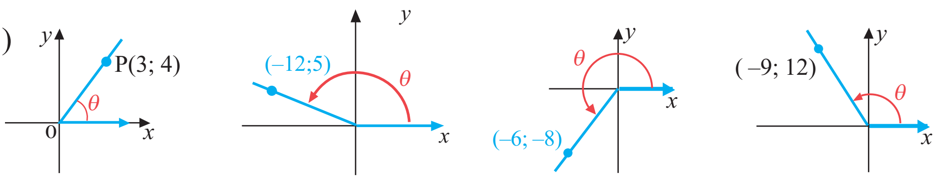
b) cos 50° d) tg 140° f) sin 310° h) cos 280°

4. İfadənin işarəsini müəyyən edin.

a) $\sin\frac{5\pi}{4}$ b) $\cos\frac{3\pi}{4}$ c) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$ d) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$

5. Son tərəfi verilən nöqtələrdən keçən bucaqlar üçün triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini hesablayın.

1)



2) a) (–12; –9) b) (–1; 1) c) (8; 6) d) (–1; 0)

e) (4; –3) f) (1; –1) g) (–3; –4) h) (–15; 20)

6. Verilənlərə görə α-nın hansı rübün bucağı olduğunu tapın.

a) $\sin\alpha > 0$ və $\cos\alpha < 0$ b) $\sin\alpha < 0$ və $\cos\alpha < 0$

c) $\cos\alpha < 0$ və $\operatorname{tg}\alpha > 0$ d) $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ və $\sin\alpha > 0$

7. Damalı vərəqdə 1 damanı vahid qəbul edərək, mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 5 vahid olan çevrə çəkin.

a) Sinusu $\frac{3}{5}$ -ə bərabər olan iki müxtəlif dönmə bucağı təsvir edin.

b) Kosinusu $\frac{4}{5}$ olan dönmə bucaqlarını təsvir edin.

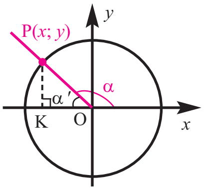
c) Sinusu $-\frac{3}{5}$ olan dönmə bucaqlarını təsvir edin.

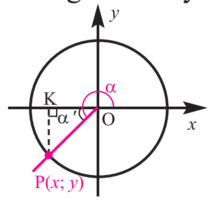
d) Kosinusu $-\frac{4}{5}$ olan dönmə bucaqlarını təsvir edin.

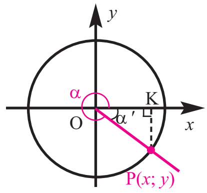
İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları

İstənilən bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərinin uyğun iti bucağa görə tapılması

Araşdırma. 1) r radiuslu çevrə çəkin və son tərəfi müxtəlif rüblərdə yerləşməklə müxtəlif dönmə bucaqlarını şəkildə göstərildiyi kimi təsvir edin.







2) Hər bir hal üçün α dönmə bucağının əsas triqonometrik funksiyalarını tərifə görə P(x; y) nöqtəsinin koordinatları ilə ifadə edin.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

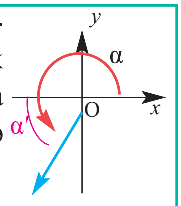
3) ΔOPK-da katetlərin uzunluqlarını P(x; y) nöqtəsinin koordinatları ilə ifadə edin:

$$PK = |y|,\quad OK = |x|$$

4) ΔOPK-da α′ iti bucağı üçün triqonometrik nisbətləri yazın:

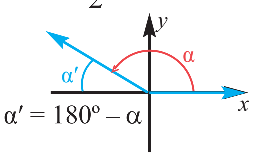
$$\sin\alpha' = \frac{|y|}{r},\qquad \cos\alpha' = \frac{|x|}{r},\qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{|y|}{|x|},\qquad \operatorname{ctg}\alpha' = \frac{|x|}{|y|}$$

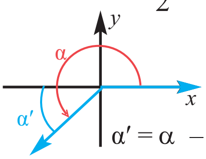
5) 2-ci və 4-cü addımlarda aldığınız nəticələri müqayisə edin.

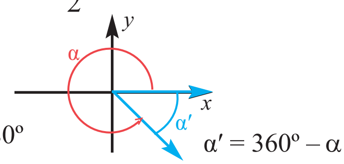


90°-dən böyük bucaqlara uyğun triqonometrik nisbətləri hesablamaq üçün onlara uyğun iti bucaqların triqonometrik nisbətlərindən istifadə etmək əlverişlidir. İstənilən α bucağına uyğun iti bucaq α bucağının son tərəfinin absis oxu ilə üst-üstə düşən düz xətlə əmələ gətirdiyi α′ iti bucağıdır.

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$







Uyğun iti bucaqdan istifadə etməklə istənilən bucağın triqonometrik nisbətlərini müəyyən etmək olar. Bu qiymətlər 30°, 45°, 60° bucaqlarına görə dəqiq tapıla bilir, iti bucaqların qalan bütün qiymətlərində isə kalkulyatorun köməyilə təqribi olaraq hesablanır.

Nümunə 1. Verilən bucaqlara uyğun iti bucaqları müəyyən edin.

a) $\alpha = 300^\circ$ $\qquad$ b) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

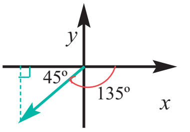
Həlli: a) 300°-li bucağın son tərəfi IV rübdə yerləşir. Uyğun iti bucaq:

$$360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

b) $\frac{7\pi}{6}$ - li bucağın son tərəfi III rübdə yerləşir. Uyğun iti bucaq:

$$\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$

Nümunə 2. $\alpha = -135°$-li bucağın əsas triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini hesablayın. Həll addımları:



1. Son tərəfi verilən bucaqla üst-üstə düşən və onu 360°-yə tamamlayan ən kiçik müsbət bucaq tapılır: $-135° + 360° = 225°$
2. 225°-yə uyğun iti bucaq tapılır: $225° - 180° = 45°$.
3. Verilən bucağın rübü müəyyən edilir: –135°-li bucaq III rübün bucağıdır.
4. 45°-li bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətləri və verilmiş bucağın triqonometrik funksiyalarının III rübdəki işarələri nəzərə alınır:

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = 1, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = 1.$$

İstənilən bucağın triqonometrik funksiyalarını aşağıdakı kimi müəyyən etmək olar:
- uyğun iti bucağı müəyyən edin;
- iti bucağa uyğun triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın;
- bucağın hansı rübdə yerləşdiyinə görə triqonometrik funksiyaların işarəsini müəyyən edin.

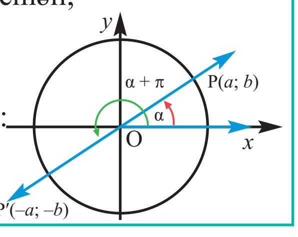
Bucaq tam sayda dövrlər qədər dəyişdikdə triqonometrik funksiyaların qiymətləri dəyişmir.

Hər hansı α $(0° \le \alpha < 360°)$ bucağının triqonometrik funksiyalarının qiyməti son tərəfləri α bucağı ilə üst-üstə düşən $\alpha + 360°\cdot k$ $(k \in Z)$ bucaqlarının triqonometrik funksiyalarının qiyməti ilə eynidir.

$$\sin(\alpha + 360°\cdot k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 360°\cdot k) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$$

Qeyd edək ki, bucaq tam dövrün yarısı qədər dəyişdikdə də tangens və kotangensin qiymətləri dəyişmir. Doğrudan da, α dönmə bucağına uyğun nöqtə $P(a; b)$ olarsa, $\alpha + 180°$ (və ya $\alpha + \pi$) dönmə bucağına uyğun nöqtə $P'(-a; -b)$ olduğundan $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\quad \mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, deməli,

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \pi)$$

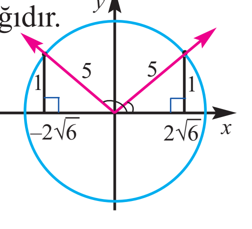


Ümumi halda $(k \in Z)$ aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$\mathrm{tg}(\alpha + 180°\cdot k) = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha + 180°\cdot k) = \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

Nümunə 3. $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ olduğuna görə $\cos\alpha$ -nın mümkün qiymətlərini tapın.

Sinus müsbət olduğundan bucaq ya I, ya da II rübün bucağıdır.



$\sin\alpha = \frac{1}{5}$, deməli, $r = 5$ olarsa, $y = 1$.

Uyğun nöqtənin absisi $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$.

Onda $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ və ya $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

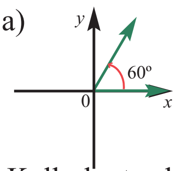
İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları

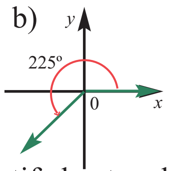
Öyrənmə tapşırıqları

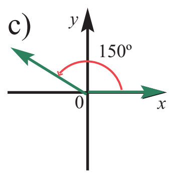
1. Verilən bucaqlara görə uyğun iti bucaqları çəkin.

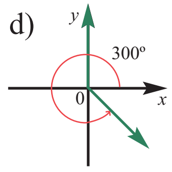
1) 240° 2) -515° 3) -170° 4) 315° 5) $\frac{25\pi}{4}$ 6) $-\frac{11\pi}{3}$ 7) $-\frac{3\pi}{4}$

2. Verilən bucaqlar üçün $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$-nın qiymətini hesablayın.

a) 

b) 

c) 

d) 

3. Kalkulyatordan istifadə etmədən verilən bucaqlara uyğun triqonometrik nisbətləri hesablayın.

1) $\sin 405^\circ$ 2) $\cos 420^\circ$ 3) $\operatorname{tg} 405^\circ$ 4) $\sin 390^\circ$ 5) $\operatorname{cosec} 450^\circ$

6) $\operatorname{ctg} 390^\circ$ 7) $\sec 420^\circ$ 8) $\cos\frac{33\pi}{4}$ 9) $\sin\frac{9\pi}{2}$ 10) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$

4. -60°-li bucağa uyğun iti bucaq neçə dərəcədir? $\cos(-60^\circ)$, $\sin(-60^\circ)$, $\operatorname{tg}(-60^\circ)$, $\operatorname{ctg}(-60^\circ)$-ni tapın. -60° və 60°-li bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini müqayisə edin.

5. İfadənin qiymətini kalkulyatordan istifadə etmədən tapın.

a) $\cos(-60^\circ)$ c) $\sin(-315^\circ)$ e) $\sin 495^\circ$ g) $\cos 600^\circ$

b) $\sin(-120^\circ)$ d) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$ f) $\cos(-225^\circ)$ h) $\operatorname{tg} 420^\circ$

6. $\sin 25^\circ \approx 0{,}42$ və $\cos 25^\circ \approx 0{,}91$ olduğuna görə kalkulyatordan istifadə etmədən ifadənin təqribi qiymətini tapın.

a) $\sin 155^\circ$ c) $\cos 335^\circ$ e) $\sin 205^\circ - \cos 155^\circ$

b) $\cos 205^\circ$ d) $\sin 335^\circ$ f) $\cos 385^\circ - \sin 515^\circ$

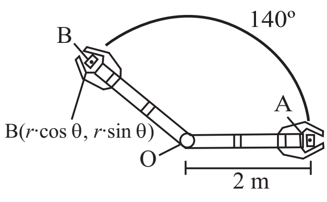
7. a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ və α bucağının II rübün bucağı olduğunu bilərək, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$-nın qiymətlərini hesablayın.

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ və α bucağının IV rübün bucağı olduğunu bilərək, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$-nın qiymətlərini tapın.

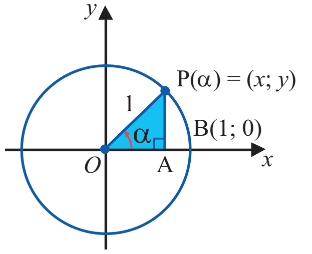
8. Kalkulyatordan istifadə etmədən hesablayın:

a) $\sin 400^\circ - \sin 40^\circ$ b) $\frac{\cos 410^\circ}{\cos 50^\circ}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 200^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ}$

9. Qolunun uzunluğu 2 m olan robot əşyanı A nöqtəsindən B nöqtəsinə gətirmişdir. Bu zaman robotun qolu 140° dönmüşdür. Robotun hərəkətinin dönmə bucağı kimi təsvirinə görə B nöqtəsinin koordinatlarını tapın.



Vahid çevrə və triqonometrik funksiyalar



Triqonometrik funksiyaların qiymətləri yalnız α bucağının qiymətindən asılı olub, çevrənin radiusundan asılı deyil. Ona görə də ümumiliyi pozmadan $R = 1$ qəbul edə bilərik. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 1-ə bərabər olan çevrəyə vahid çevrə deyilir. Vahid çevrənin üzərindəki nöqtələrin koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ tənliyini ödəyir.

$P(\alpha) = (x; y)$ nöqtəsi α bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişdiyi nöqtə olarsa, triqonometrik funksiyalarla nöqtənin koordinatları arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

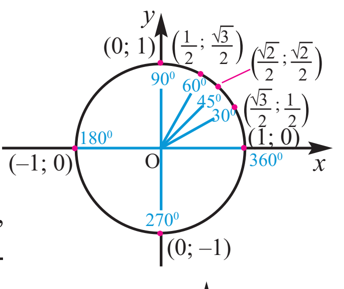
$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

Deməli, vahid çevrə üzərində α dönmə bucağına uyğun nöqtəni koordinatları ilə $P(\alpha) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ kimi yazmaq olar.

Həmçinin verilən koordinatlara görə tgα, ctgα, secα və cosecα kimi triqonometrik funksiyaları tapmaq olar.

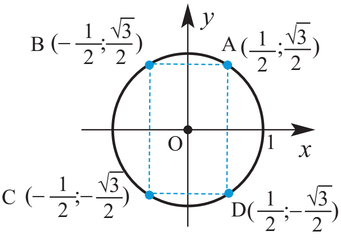
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}, \ \mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$ olduğuna görə vahid çevrə üzərindəki müəyyən dönmələrə uyğun nöqtələrin koordinatlarını müəyyən etmək olar. Bunun üçün aşağıdakı addımları yerinə yetirək.



1) $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ dönmə bucaqlarına uyğun nöqtələri vahid çevrə üzərində qeyd edək və bu nöqtələrin koordinatlarını $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$ düsturlarına görə hesablayaq.

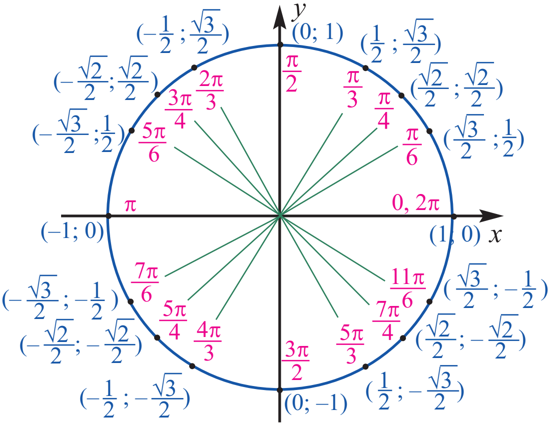
2) Vahid radiuslu çevrə üzərindəki hər hansı nöqtəyə, məsələn, $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nöqtəsinə uyğun simmetrik nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edək. Şəkildən göründüyü kimi, A nöqtəsi ilə simmetrik olan və II, III və IV rüblərdə yerləşən daha 3 nöqtə var.



B nöqtəsi A nöqtəsi ilə y oxuna nəzərən, C nöqtəsi koordinat başlanğıcına nəzərən, D nöqtəsi isə x oxuna nəzərən simmetrikdir. Bu dörd nöqtənin uyğun koordinatlarının mütləq qiymətləri bərabərdir, onlar yalnız işarələri ilə fərqlənirlər.

3) I rübdə müəyyən edilmiş digər nöqtələrin koordinatlarından bu qayda ilə istifadə etməklə yeni nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edə bilərik. Nəticədə üzərində dönmə bucaqlarının və uyğun nöqtələrin koordinatlarının qeyd edildiyi vahid çevrə alınmış olur.

Vahid çevrə və istənilən bucağın triqonometrik funksiyaları



Vahid çevrə üzərində istənilən nöqtənin koordinatları

$-1 \le x \le 1 \qquad -1 \le y \le 1$

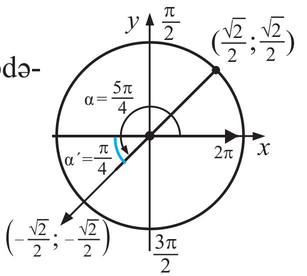
şərtini ödədiyindən alırıq ki:

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

$-1 \le \sin\alpha \le 1$

Yəni, $\sin\alpha$ və $\cos\alpha$ -nın ən böyük qiyməti 1-ə, ən kiçik qiyməti –1-ə bərabərdir.

Nümunə 1. $\frac{5\pi}{4}$ dönmə bucağı üçün əsas triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.



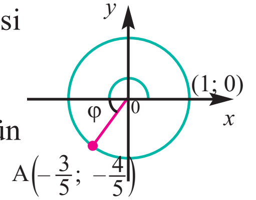
Həlli: $\frac{5\pi}{4}$ radiana uyğun dönmədə bucağın tərəfi III rübdədir. Bu bucağa uyğun iti bucaq $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ olar. $\frac{5\pi}{4}$ bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişmə nöqtəsi $\frac{\pi}{4}$ bucağına uyğun olan $(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ nöqtəsi ilə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

Deməli, $\frac{5\pi}{4}$ bucağının son tərəfi vahid çevrəni $(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$ nöqtəsində kəsir. Buradan, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = 1$.

Nümunə 2. Absisi $-\frac{3}{5}$ olan və III rübdə yerləşən A nöqtəsi vahid çevrə ilə φ bucağının tərəfinin kəsişmə nöqtəsidir.

a) A nöqtəsinin ordinatını tapın.

b) Məsələnin şərtini əks etdirən şəkil çəkin və φ bucağı üçün altı triqonometrik funksiyanın qiymətini müəyyən edin.



Həlli: a) $(-\frac{3}{5})^2 + y^2 = 1, \quad y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}, \quad y = \pm\frac{4}{5}.$

Nöqtə III rübdə yerləşdiyi üçün $y = -\frac{4}{5}$

b) $\sin\varphi = -\frac{4}{5}, \quad \cos\varphi = -\frac{3}{5},$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{3}{4}, \qquad \sec\varphi = -\frac{5}{3}, \qquad \operatorname{cosec}\varphi = -\frac{5}{4}.$

Nümunə 3. $3 + 2\sin\alpha$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ *hər iki tərəfi 2-yə vuraq*

$-2 \le 2\sin\alpha \le 2$ *hər iki tərəfə 3 əlavə edək*

$-2 + 3 \le 3 + 2\sin\alpha \le 2 + 3. \qquad 1 \le 3 + 2\sin\alpha \le 5$

Deməli, $3 + 2\sin\alpha$ ifadəsinin ƏKQ-i 1-ə, ƏBQ-i 5-ə bərabərdir.

Vahid çevrə və istənilən bucağın triqonometrik funksiyaları

Öyrənmə tapşırıqları

1. a) Vahid çevrə üzərində absisi $\frac{1}{2}$ olan neçə nöqtə var? Bu nöqtələrin ordinatlarını tapın. Hər bir nöqtəyə uyğun dönmə bucağını göstərin.
b) Vahid çevrə üzərində ordinatı $\frac{1}{2}$ olan neçə nöqtə var? Bu nöqtələrin absislərini tapın. Hər bir nöqtəyə uyğun dönmə bucağını göstərin.

2. $-\frac{7\pi}{6}$ bucağının triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini vahid çevrədən istifadə etməklə tapın.

3. $\frac{13\pi}{6}$ bucağının triqonometrik funksiyalarını tapın.

4. $A(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ vahid çevrə ilə φ bucağının tərəfinin kəsişmə nöqtəsidir. Uyğun şəkli çəkin, φ bucağının triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

5. $\alpha = 30^\circ$ olarsa, ifadənin qiymətini hesablayın:
a) $3 \sin \alpha$ b) $\sin 3\alpha$ c) $2 \cos \alpha$ d) $\cos 2\alpha$

6. $\sin \alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın:
a) $\alpha = 30^\circ$ olduqda b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olduqda

7. $\alpha = 15^\circ$ olduqda ifadənin qiymətini tapın.
a) $2 \sin(3\alpha + 15^\circ) + 3 \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha)$ b) $\operatorname{tg}(4\alpha - 15^\circ) - 2 \cos(2\alpha + 30^\circ)$

8. Bərabərsizlik doğrudurmu?
a) $\sin 45^\circ + \cos 60^\circ > 1$ b) $\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} > 1$

9. İfadənin ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.
a) $2 + 3\sin \alpha$ b) $1 - \sin \alpha$ c) $1 + \cos \alpha$ d) $3 - 2\cos \alpha$

10. İfadənin ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.
a) $2 + |\sin \alpha|$ b) $2 - |\cos \alpha|$ c) $1 + \sin^2 \alpha$ d) $4 + \cos^2 \alpha$

11. Bərabərlik mümkündürmü?
a) $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ b) $\cos \beta = \frac{4}{3}$ c) $\sin \alpha = \sqrt{5} - 1$ d) $\cos \beta = \sqrt{2} - 1$

12. Vahid çevrə üzərində verilən şərti ödəyən α dönmə bucağına uyğun nöqtələri göstərin.
a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

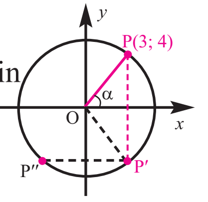
13. Vahid çevrə üzərində $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şərtini ödəyən dönmə bucağına uyğun neçə nöqtə var? Bu nöqtələrə uyğun dönmə bucaqlarının ümumi ifadəsini yazın.

14. Vahid çevrə üzərində $P(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ nöqtəsinə uyğun dönmə bucağının $\frac{7\pi}{4}$ olduğu məlumdur. Son tərəfi bu bucaqla üst-üstə düşən mənfi bucaq göstərin və həmin bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

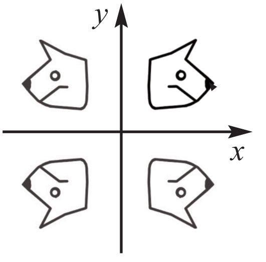
15. Vahid çevrədən istifadə etməklə $[0; 2\pi]$ aralığında $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərliyini ödəyən dönmə bucaqlarını göstərin.

Çevirmə düsturları

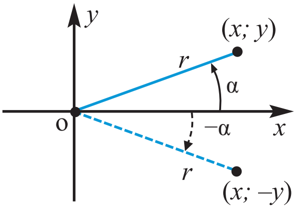
Praktik məşğələ

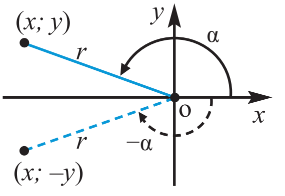


1) Radiusu 5 olan çevrə üzərində P(3; 4) nöqtəsini qeyd edin.
2) x oxuna görə əksetmədə P nöqtəsinin çevrildiyi P′ nöqtəsinin koordinatlarını göstərin.
3) P′ nöqtəsi y oxuna görə əksetmədə hansı nöqtəyə çevrilər?
4) P və P″ nöqtələrinin koordinatlarını müqayisə edin.
5) P″ və P nöqtələri koordinat başlanğıcına görə simmetrikdirlərmi?
6) P nöqtəsi α dönmə bucağına uyğundursa, P′ və P″ nöqtələri hansı dönmə bucaqlarına uyğundurlar?



Koordinat müstəvisi üzərində I rübdəki obyektin y oxuna nəzərən əksetməsi ilə obyekt II rübdə yerləşir. II rübdə yerləşən obyektin x oxuna nəzərən əksetməsi ilə bu obyekt III rübdə yerləşdirilir. Bu isə I rübdəki ilkin obyektin koordinat başlanğıcına nəzərən əksetməsi ilə üst-üstə düşür. Həmçinin diqqət edin ki, y oxuna nəzərən əksetmə x oxuna nəzərən əksetmənin 180° dönməsi ilə üst-üstə düşür.
x oxuna nəzərən bucağın son tərəfinin əksetməsi ilə onun üzərindəki nöqtələrin koordinatları şəkildə göstərildiyi kimi dəyişir. Yəni, x oxuna əksetmə zamanı yalnız y koordinatının işarəsi dəyişir.





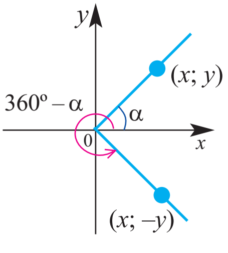
Deməli, kosinus x koordinatından asılı olduğundan dəyişmir, sinus isə işarəsini dəyişir. Beləliklə, α və –α bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimi olur:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Yəni, **sinus, tangens, kotangens funksiyaları tək, kosinus isə cüt funksiyadır.**

Nümunə 1. $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\qquad \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$ $\qquad \operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$



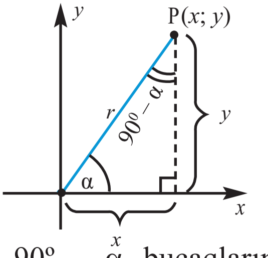
α və 360° – α dönmə bucaqlarının son tərəfləri x oxuna nəzərən simmetrikdir: $(x; y) \to (x; -y)$.
Buradan alırıq:

$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Çevirmə düsturları

İti bucağı α olan düzbucaqlı üçbucaqda α və 90° – α iti bucaqları üçün triqonometrik nisbətləri yazaq:



$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\sin(90^\circ - \alpha = \frac{x}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad$ $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$ $\quad$ $\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$

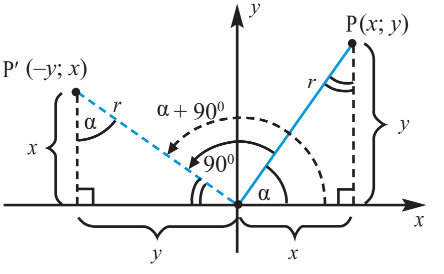
Bərabərliklərin cüt-cüt müqayisəsinə görə α və 90° – α bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimidir:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

α dönmə bucağının son tərəfini daha 90° döndərək. Bu zaman onun üzərində olan P(*x*; *y*) nöqtəsi P′(–*y*; *x*) nöqtəsinə çevrilir.

Triqonometrik funksiyaların tərifinə görə:



$\sin(\alpha + 90^\circ) = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$

$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha\,,$

$\mathrm{tg}\,(\alpha + 90^\circ) = -\frac{x}{y} = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

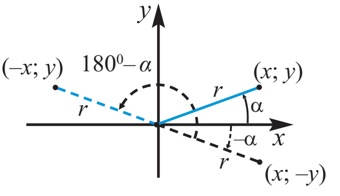
$\mathrm{ctg}\,(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{x} = -\mathrm{tg}\,\alpha$

Bu düsturları aşağıdakı şəkildə yazaq:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}\,(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

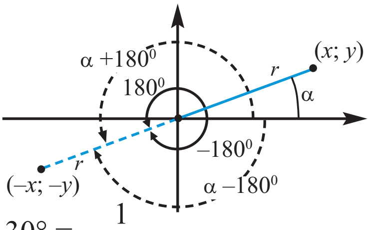
Şəkildən göründüyü kimi, *y* oxuna nəzərən əksetmə *x* oxuna nəzərən əksetmənin 180° dönməsinə ekvivalentdir. Koordinatların dəyişməsini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:



$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

Şəkildən göründüyü kimi, α bucağının son tərəfi 180° döndükdə əks qütbdə olmaqla eyni düz xətt üzərində yerləşir.



$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{ctg}\,(180^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

Nümunə 2. $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

Çevirmə düsturları

$270° + \alpha$ dönmə bucağının triqonometrik funksiyaları üçün də oxşar düsturları almaq üçün $270° + \alpha = 90° + (180° + \alpha)$ şəklində yazıb, uyğun düsturları ardıcıl tətbiq etmək kifayətdir. Məsələn:

$\sin(270° + \alpha) = \sin(90° + (180° + \alpha)) = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

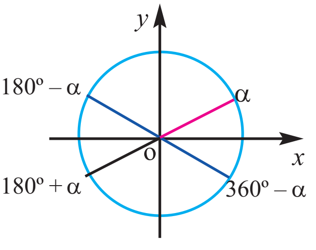
$\cos(270° + \alpha) = \cos(90° + (180° + \alpha)) = -\sin(180° + \alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

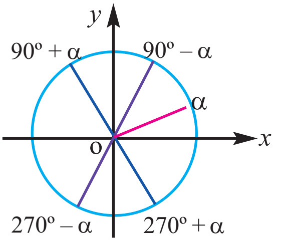
İndi isə $270° - \alpha$ dönmə bucaqları üçün uyğun düsturları yazaq. Məsələn:

$\sin(270° - \alpha) = \sin(270° + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270° - \alpha) = \cos(270° + (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Aldığımız düsturların köməyi ilə istənilən bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərinin tapılmasını iti bucağın triqonometrik funksiyasının tapılmasına gətirmək olar. Bu düsturlara çevirmə düsturları deyilir. Çevirmə düsturları üçün müəyyən qanunauyğunluğun olduğunu asanlıqla izləmək olar.





1) Arqument $90° \pm \alpha$ və ya $270° \pm \alpha$ şəklindədirsə, onda bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin "qoşma" triqonometrik funksiyasına çevrilir (yəni sinus kosinusa və tərsinə, tangens kotangensə və tərsinə).

2) Əgər arqument $180° \pm \alpha$, $360° \pm \alpha$ olarsa, bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin eyni adlı funksiyasına çevrilir.

Hər iki halda alınan funksiyanın işarəsi α bucağını iti bucaq qəbul etməklə çevrilən funksiyanın verilən rübdəki işarəsi ilə eyni olur.

Öyrənmə tapşırıqları

1. 1) Son tərəfi $\alpha = 32°$-li bucağın son tərəfinin:
a) x oxuna nəzərən; b) y oxuna nəzərən;
c) koordinat başlanğıcına nəzərən
əksetməsi ilə alınan ən kiçik mücbət bucağı tapın.
2) eyni tapşırıqları $\alpha = 220°$ üçün də yerinə yetirin.

2. Bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini iki üsulla hesablayın:
1) Son tərəfi verilmiş bucaqla eyni olan və [0°; 360°] aralığında yerləşən bucağın triqonometrik funksiyasına gətirməklə;
2) $-\alpha$ və α bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasındakı əlaqəni tətbiq etməklə.
a) $\alpha = -30°$ b) $\alpha = -120°$ c) $\alpha = -60°$

3. Sadələşdirin.

a) $\sin(180^\circ + \alpha)$ b) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ c) $\cos(180^\circ + \alpha)$

d) $\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha)$ e) $\mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha)$ f) $\cos(\pi - \alpha)$

4. $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ eyniliyinin doğruluğunu α bucağı I rübdə yerləşdiyi halda isbat etdik. Bucağı II rübdə yerləşdirməklə eyniliyi isbat edin.

5. $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ eyniliyinin 0°, 90°, 180°, 270° bucaqları üçün də doğru olduğunu göstərin.

6. Çevirmə düsturlarını tətbiq edərək, verilmiş ifadəni iti bucağın triqonometrik funksiyası ilə ifadə edin və qiymətini hesablayın.

a) $\cos 210^\circ$ b) $\cos 120^\circ$ c) $\sin 150^\circ$ d) $\mathrm{tg}\, 300^\circ$

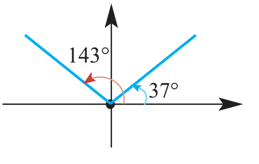
e) $\cos\frac{5\pi}{4}$ f) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}$ g) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{3}$ h) $\sin\frac{2\pi}{3}$

7. [0°; 360°] aralığında sinusu verilmiş ədədə bərabər olan bütün bucaqları tapın. a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. [0°; 360°] aralığında sinusu verilmiş ədədə bərabər olan bütün bucaqları tapın. a) $\sin\alpha = 0{,}6$ b) $\sin\alpha = 0{,}3$ c) $\sin\alpha = 0{,}8$

Nümunə. $0 \le \alpha \le 360^\circ$ intervalında $\sin\alpha = 0{,}6$ olan bütün bucaqları tapın.

Həlli: Kalkulyatorda **asin** düyməsini basaraq (0.6) yığın, ekranda ≈37° görsənəcək. Sinus ikinci rübdə də müsbət olduğundan $180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$ bucağının da sinusu ≈0,6 olacaq,çünki $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.



9. İfadəni sadələşdirin.

a) $\sin(\alpha - 180^\circ)$ b) $\cos(\alpha - 270^\circ)$ c) $\mathrm{tg}(\alpha - 90^\circ)$

d) $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})$ e) $\cos(\alpha - \pi)$ d) $\mathrm{tg}(\alpha - \frac{3\pi}{2})$

10. Sadələşdirin.

a) $\sin^2(\pi + \alpha)$ b) $\cos^2(180^\circ - \alpha)$ c) $\mathrm{ctg}^2(90^\circ + \alpha)$

11. 0°-dən 90°-yə kimi bucağın triqonometrik funksiyasına çevirin.

a) $\sin(-170^\circ)$ b) $\cos(-160^\circ)$ c) $\mathrm{tg}\, 130^\circ$ d) $\mathrm{ctg}\, 320^\circ$

12. Qonşu bucaqların sinuslarının bərabər, kosinuslarının isə qarşılıqlı əks ədədlər olduğunu göstərin.

13. α, β, γ üçbucağın bucaqları olduqda isbat edin:

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ b) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

14. İfadəni sadələşdirin.

a) $\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$ b) $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ}$ c) $\mathrm{tg}\, 40^\circ \cdot \mathrm{ctg}\, 50^\circ$ d) $\sin 72^\circ - \cos 18^\circ$

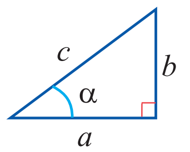
15. Sadələşdirin.

a) $\sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) + \mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) + \mathrm{ctg}(270^\circ - \alpha)$

b) $\cos(20^\circ - \alpha) + \sin(250^\circ + \alpha)$

Praktik məşğələ

Düzbucaqlı üçbucaqda α iti bucağı üçün $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ olduğunu aşağıdakı addımlarla göstərin.



1)Pifaqor teoremini yazın: $a^2 + b^2 = c^2$

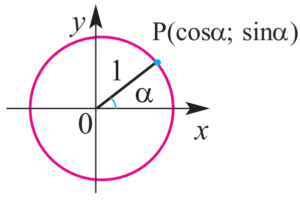
2) Bərabərliyin hər iki tərəfini c^2-na bölün: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

3) Qüvvətin xassələrini tətbiq edin: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$

4) $\frac{a}{c} = \cos\alpha$ $\quad \frac{b}{c} = \sin\alpha$ olduğunu nəzərə alın: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Eyni bucağın triqonometrik funksiyaları arasındakı münasibətlər

İstənilən α bucağı üçün $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ eyniliyinin doğruluğunu vahid çevrə üzərində götürülmüş nöqtələrin koordinatlarına görə izah etmək olar.



$x^2 + y^2 = 1$ ***Vahid radiuslu çevrənin tənliyi***

$\mathbf{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ ***vahid çevrə üzərindəki nöqtə üçün x=cosα və y=sinα olduğuna görə***

Vahid çevrə üzərindəki nöqtənin koordinatlarına və triqonometrik funksiyaların tərifinə görə alarıq:

$\cos\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\mathbf{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\sin\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\mathbf{ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

Bu bərabərliklərdən alırıq ki, eyni zamanda $\cos\alpha \neq 0$ və $\sin\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən α bucaqları üçün $\mathbf{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1}$ eyniliyi doğrudur.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bərabərliyinin hər iki tərəfini növbə ilə $\cos^2\alpha$-ya ($\cos\alpha \neq 0$) və $\sin^2\alpha$-ya ($\sin\alpha \neq 0$) bölsək, alarıq:

$$\mathbf{1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}, \qquad \mathbf{1 + ctg^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Eyni bucağın triqonometrik funksiyaları üçün yuxarıda aldığımız münasibətlərə əsas triqonometrik eyniliklər deyilir.

Əsas triqonometrik eyniliklərə görə yaza bilərik:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ → $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$tg\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$ → $tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}$; $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

Əsas triqonometrik eyniliklərin köməyi ilə verilmiş triqonometrik ifadəni sadələşdirmək və triqonometrik funksiyaların birinin verilmiş qiymətinə görə digərlərinin qiymətlərinin modulunu hesablamaq olur.

Triqonometrik eyniliklər

Nümunə 1. Əsas triqonometrik eyniliklərdən istifadə etməklə isbat edin:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{2}{\cos x}$$

İsbatı:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}$$

Nümunə 2. $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ və β bucağı III rüb bucağı olduğuna görə digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini hesablayın.

Həlli: $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ düsturundan alırıq ki: $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$

β III rübün bucağı olduğundan $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$

Onda $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$ və $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{3}{4}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Sadələşdirin.

a) $1-\sin^2\alpha$ b) $1-\cos^2\alpha$
c) $\sin^2\beta-1$ d) $\cos^2\beta-1$
e) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ f) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$
g) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$ h) $\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$

2. $\sin\alpha=0{,}6$ və $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ olarsa, $\cos\alpha$ və $\operatorname{tg}\alpha$ -nı tapın.

3. $\cos\alpha=0{,}8$ və $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ olarsa, $\sin\alpha$ və $\operatorname{ctg}\alpha$ -nı tapın.

4. Verilənlərə görə β bucağının triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

a) $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ və $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ b) $\cos\beta=-\frac{12}{13}$ və $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$
c) $\operatorname{tg}\beta=1$ və $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ d) $\operatorname{ctg}\beta=-\sqrt{3}$ və $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

5. Sadələşdirin.

a) $(1-\cos^2\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$ b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

c) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ d) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

e) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}:(1+(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha})^2)$ f) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}:(1+(\frac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha})^2)$

6. $\operatorname{tg}\alpha = 2$ olarsa, verilmiş ifadənin qiymətini tapın.

a) $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$

7. $\sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$ ifadəsini sadələşdirin:

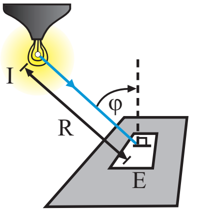
a) $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ olduqda b) $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ olduqda.

8. Eynilikləri isbat edin.

a) $\dfrac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{2} = \cos x \cdot \sin x$ b) $\dfrac{1 + \sec x}{\sin x + \operatorname{tg} x} = \operatorname{cosec} x$

c) $\dfrac{1 - \cos^2 x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \operatorname{tg}^2 x$ d) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x + \cos x} = \sec x$

9. İşıqlanma hər hansı mənbədən səthə düşən işıq selinin miqdarını göstərir və $E = \dfrac{I}{R^2\cos\varphi}$ kimi müəyyən edilir. İ burada işığın şiddətini, R isə işıq mənbəyindən məsafəni göstərir. Bu düsturun $E = \dfrac{I \cdot \operatorname{tg}\varphi}{R^2\sin\varphi}$ düsturu ilə ekvivalent olduğunu isbat edin.



10. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ olduqda $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın.

11. İfadəni sadələşdirin və verilənlərə görə qiymətini tapın.

a) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$

$\cos\alpha = 0{,}1$ olduqda $\sin\alpha = -\dfrac{1}{8}$ olduqda

12. $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$ olduğunu bilərək, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ hasilini tapın.

13. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{2}$ olduqda, $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın.

14. Verilmiş bərabərlikləri ödəyən dönmə bucağı varmı?

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ və $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ b) $\sin\beta = \dfrac{1}{3}$ və $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$

c) $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{3}{4}$ və $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{4}{3}$ d) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{2}{3}$ və $\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{3}{4}$

15. İfadəni sadələşdirin.

a) $(1 - \sin(-\alpha))\cdot(1 - \sin\alpha)$ b) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2(-\alpha)$

c) $\dfrac{1 - \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha)$ d) $\sin^2(-\alpha) + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)$

16. İsbat edin ki, β-nın mümkün qiymətlərində ifadənin qiyməti β-dan asılı deyil.

a) $(\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$ b) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$

17. İfadənin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

a) $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$ b) $\sin\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$

Toplama düsturları

Praktik məşğələ

1) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ olduqda $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ bərabərliyinin doğruluğunu aşağıdakı addımlarla göstərin.

a) Bərabərliyin sol tərəfindəki ifadənin qiyməti α və β-nın verilmiş qiymətlərində hesablayın.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Bərabərliyin sağ tərəfindəki ifadənin qiymətini tapın.

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} = 1\cdot\frac{1}{2} - 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

2) 45°-li və 30°-li bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərinə görə 45° – 30º = 15º-li bucağın triqonometrik funksiyalarını necə hesablamaq olar?

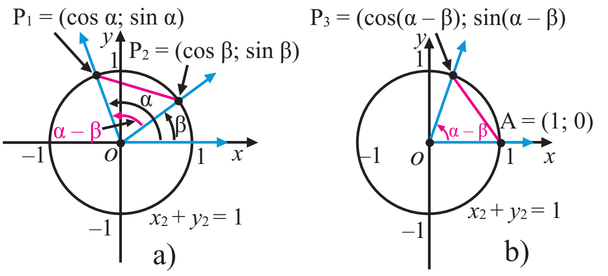
İki bucağın cəmi və fərqinin triqonometrik funksiyaları

$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$	$\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$
$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$	$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$

► Əvvəlcə $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ eyniliyini isbat edək.

a) şəklində göstərilən α və β bucaqlarının son tərəfləri vahid çevrəni, uyğun olaraq P_1 $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ və P_2 $(\cos\beta; \sin\beta)$ nöqtələrində kəsir.

$\alpha - \beta$ bucağını b) şəklində olduğu kimi yerləşdirək.



$\alpha - \beta$ bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişmə nöqtəsi P_3 $(\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$ olsun.

$\Delta P_1OP_2 \cong \Delta P_3OA$ (TBT əlamətinə görə) olduğundan $P_1P_2 \cong P_3A$.

$P_1P_2 = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$ *iki nöqtə arasında məsafə düsturu*

$P_3A = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$ *bərabərliyin xassəsi*

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \sin\beta + \sin^2\beta =$
$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$ *müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi*

$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) =$
$= (\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$ *toplama əməlinin xassələrinin və*
$2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$ *triqonometrik eyniliklərin tətbiqi*

$2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$ *bərabərliyin xassəsi*

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ *eyniliyin doğruluğu isbat edildi*.■

Toplama düsturları

▶ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ eyniliyinin isbatı

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ $\quad$ $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ olduğunu nəzərə alaq

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ *eyniliyinin doğruluğu isbat edildi* ■

▶ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ eyniliyinin isbatı

$$\sin(\alpha + \beta) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)}_{\text{çevirmə düsturuna görə}} = \underbrace{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)}_{\text{qruplaşdırma}} =$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\sin\beta}_{\text{fərqin kosinusu düsturuna görə}} = \underbrace{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}_{\text{çevirmə düsturlarını nəzərə almaqla}}$$

▶ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ eyniliyinin isbatı:

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) =$

$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

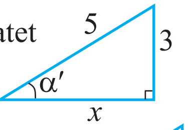
Nümunə 1. $\cos\frac{7\pi}{12}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Həlli: $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

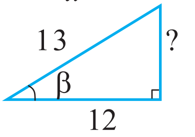
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Nümunə 2. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ və $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ olduqda $\sin(\alpha - \beta)$-nın qiymətini tapın.

Həlli: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$. α-ya uyğun iti bucaq α' olarsa, $\sin\alpha' = \frac{3}{5}$. Qarşıdakı katet 3, hipotenuz isə 5 olduqda, bitişik katet $x = \sqrt{25 - 9} = 4$ və α III rüb bucağı olduğundan $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ olur.



$\cos\beta = \frac{12}{13}$ olduğundan analoji qayda ilə $\sin\beta = \frac{5}{13}$ alarıq.



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = -\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$$

Tangens və kotangens üçün də toplama düsturlarını yazmaq olar:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \underbrace{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}}_{\text{tərifə görə}} = \underbrace{\frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}}_{\text{toplama düsturlarına görə}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}}_{\text{surət və məxrəci } \cos\alpha\,\cdot\,\cos\beta \text{ hasilinə bölməklə}} = \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}_{\text{sadələşdirmə}}$$

Deməli: $\mathbf{tg}\,(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \dfrac{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{1} - \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}$

Oxşar qayda ilə göstərin ki: $\mathbf{tg}\,(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \dfrac{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{1} + \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}$

Toplama düsturları

Öyrənmə tapşırıqları

1. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\sin 75°$ b) $\cos 75°$ c) $\sin(-15°)$ d) $\cos 15°$

e) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ g) $\sin\frac{\pi}{12}$ h) $\cos\frac{7\pi}{12}$

2. Sadələşdirin. Qiymətini hesablayın.

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$ 2) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$ 4) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

3. Toplama düsturlarını tətbiq edərək, bərabərliklərin doğruluğunu yoxlayın.

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

c) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ d) $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$

4. Sadələşdirin.

a) $\sin 12^\circ \cdot \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 18^\circ$ b) $\cos 17^\circ \cdot \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 43^\circ$

c) $\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ$ d) $\sin 23^\circ \cdot \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cdot \cos 97^\circ$

5. Sadələşdirin.

a) $\cos(36^\circ + \alpha)\cdot\cos(24^\circ - \alpha) - \sin(36^\circ + \alpha)\cdot\sin(24^\circ - \alpha)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

6. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\dfrac{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ}$ b) $\dfrac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \sin 65^\circ \cdot \sin 5^\circ}$

7. a) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olarsa, $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$-nı tapın.

b) $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ və $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ olarsa, $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$-nı tapın.

8. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, α III rübün, β isə IV rübün bucağı olarsa, tapın:

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$

9. α və β III rübün bucaqları və $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ olduqda tapın:

a) $\sin(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$

10. Üçbucağın iki iti bucağının sinusları uyğun olaraq $\frac{7}{25}$ və $\frac{4}{5}$ -ə bərabərdir. Üçbucağın üçüncü bucağının kosinusunu tapın.

Toplama düsturları

11. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{\text{tg } 13^\circ + \text{tg } 47^\circ}{1 - \text{tg } 13^\circ \cdot \text{tg } 47^\circ}$ b) $\dfrac{\text{tg } 46^\circ - \text{tg } 1^\circ}{1 + \text{tg } 46^\circ \cdot \text{tg } 1^\circ}$

12. $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$ olarsa, $\text{tg}(45^\circ + \alpha)$-nı tapın.

13. $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$, $\text{tg } \beta = \frac{1}{3}$ olarsa, tapın:

a) $\text{tg}(\alpha + \beta)$ b) $\text{tg}(\alpha - \beta)$

14. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\text{tg } 15^\circ$ b) $\text{tg } 75^\circ$ c) $\text{ctg } 105^\circ$

15. $\cos 72^\circ \sin 48^\circ + \cos 18^\circ \sin 42^\circ$ ifadəsinin qiymətini çevirmə düsturlarından və toplama düsturlarından istifadə etməklə hesablayın.

16. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \sin\beta}$ b) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$

17. Sadələşdirin.

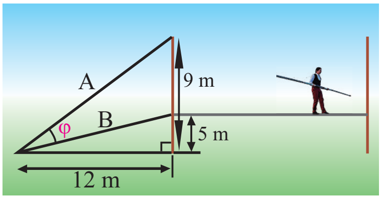
a) $\dfrac{\text{tg}(45^\circ + \alpha) - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \text{tg } \alpha}$ b) $\dfrac{\text{tg}(\frac{\pi}{8} + \alpha) + \text{tg}(\frac{\pi}{8} - \alpha)}{1 - \text{tg}(\frac{\pi}{8} + \alpha) \cdot \text{tg}(\frac{\pi}{8} - \alpha)}$

18. a) $\text{tg}(\alpha + \beta) = -1$, $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ olarsa $\text{tg } 2\beta$-nı tapın.

b) $\text{ctg}(\alpha + \beta) = 2$, $\text{ctg}(\alpha - \beta) = 1$ olarsa, $\text{tg } 2\alpha$-nı tapın.

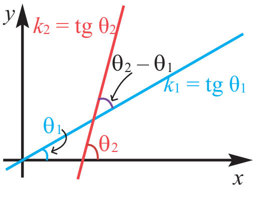
Tətbiq tapşırıqları

19. Kəndirbazın qurğusunda A kəndiri 9 m hündürlüyü olan dirəyə bağlanmışdır. Kəndirbaz B kəndiri üzərində 5 m hündürlükdə yeriyir. A və B kəndirləri dirəkdən 12 m aralıda yerə bərkidilib. Onlar arasında qalan φ bucağının sinusunu hesablayın və bu bucağın dərəcə ölçüsünü ondabir dəqiqliklə tapın.



20. Bucaq əmsalları k_1 və k_2 olan iki düz xəttin kəsişməsindən alınan $\theta_2 - \theta_1$ bucağını aşağıdakı düsturla müəyyən etmək olar:

$$\text{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$



a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ və $y = 2x - 1$; b) $y = x + 2$ və $y = 3x - 1$ düz xətlərinin kəsişməsindən alınan iti bucağı tapın.

Toplama düsturlarından alınan nəticələr

Praktik məşğələ

$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ$ cəmini aşağıdakı addımlarla hasilə çevirin.

1) $\begin{cases} x + y = 70^\circ \\ x - y = 10^\circ \end{cases}$ tənliklər sistemini həll etməklə elə iki bucaq tapın ki, cəmi 70°-yə, fərqi 10°-yə bərabər olsun: $x = 40^\circ$ $y = 30^\circ$

2) $70^\circ = 40^\circ + 30^\circ$, $10^\circ = 40^\circ - 30^\circ$ yazmaqla verilmiş ifadəni sadələşdirin.

$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ = \sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ) = \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 40^\circ \cdot$

$\cdot \sin 30^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ = 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \sin 40^\circ$

Cəmin (fərqin) hasilə çevrilməsi

$\alpha = x + y$
$\beta = x - y$ olarsa, $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y.$ Deməli,

$\mathbf{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}}$ Oxşar qayda ilə alırıq:

$\mathbf{\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}}$

$\mathbf{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}}$

$\mathbf{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}}$

1. Hasilə çevirin: a) $\sin 52^\circ + \sin 32^\circ$ b) $\sin 72^\circ - \sin 32^\circ$
c) $\cos 32^\circ + \cos 2^\circ$ d) $\cos 42^\circ - \cos 22^\circ$

2. İfadənin qiymətini hesablayın.
a) $\cos 130^\circ + \sin 80^\circ - \sin 20^\circ$ b) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ - \cos 10^\circ$

3. Cəmi (fərqi) hasilə çevirin.
$\sin 6x + \sin 2x$ | $\cos 4x - \cos 2x$ | $\sin \dfrac{\pi}{12} - \sin \dfrac{5\pi}{12}$ | $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

4. Sadələşdirin.

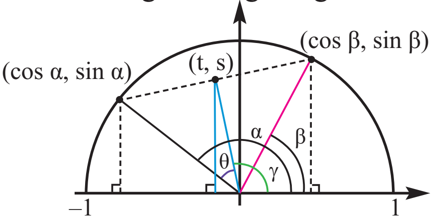
a) $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}$ c) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$

5. Aşağıdakı bərabərlikləri şəkillə əlaqələndirin və doğru olduğunu göstərin.

$\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = s = \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = t = \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}$



6. Hasil şəklində göstərin: a) $\dfrac{1}{2} + \sin \alpha$ b) $\dfrac{1}{2} + \cos \alpha$ c) $2 \cos \alpha - \sqrt{3}$

Toplama düsturlarından alınan nəticələr

Hasili cəmə çevirmə düsturları

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$

Bu eyniliklərin doğruluğunu toplama düsturlarından istifadə etməklə göstərək:

tərəf-tərəfə toplanır

$$+\begin{array}{l}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y\end{array}$$

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

tərəf-tərəfə toplanır

$$+\begin{array}{l}\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y\end{array}$$

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$

Aşağıdakı eyniliyi analoji qayda ilə isbat edin.

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

7. Hasilin cəmə çevrilməsi eyniliklərini tətbiq etməklə hesablayın.

a) $\sin 15°\cdot\cos 15°$ b) $\sin 105°\cdot\sin 15°$ c) $\cos 75°\cdot\cos 75°$

8. Hasilləri cəm və ya fərq şəklində ifadə edin.

$\sin6x\cdot\sin2x$ $\sin x\cdot\cos2x$ $\cos9x\cdot\cos2x$ $\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$

$\cos7x\cdot\cos3x$ $\sin8x\cdot\sin4x$ $\sin2x\cdot\cos3x$ $\cos\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$

9. $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ olduğunu isbat edin.

10. Hesablayın.

a) $2\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$ b) $2\sin 40^\circ\cdot\sin 10^\circ+\cos 50^\circ$

11. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\sin 15^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 79^\circ\cdot\cos 11^\circ-\sin 86^\circ\cdot\sin 4^\circ$

b) $\cos 73^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 13^\circ\cdot\cos 21^\circ-\cos 86^\circ\cdot\cos 4^\circ$

12. Vuruqlara ayırın.

a) $\sin 2x\cdot\cos 4x-\sin 6x\cdot\cos 8x$ b) $\cos 5x\cdot\cos x-\cos 4x\cdot\cos 2x$

Toplama düsturlarından alınan nəticələr

İkiqat arqumentin triqonometrik funksiyaları

Toplama düsturları sin 2α, cos 2α, tg 2α ifadələrini α bucağının triqonometrik funksiyası ilə ifadə etməyə imkan verir.

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Beləliklə, ikiqat bucağın düsturları adlanan eynilikləri alırıq:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\qquad \mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}}$$

Yarım arqumentin düsturları

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Buradan:

$$\mathbf{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\qquad \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

Bu düsturlarda α-nın əvəzinə $\frac{\alpha}{2}$ yazmaqla alarıq:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}\qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Yarımqat bucaqlar üçün triqonometrik eyniliklər:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

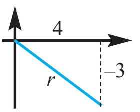
Bu bərabərliklərdə sağ tərəfin işarəsi $\frac{\alpha}{2}$ bucağının hansı rübdə yerləşməsindən asılıdır.

Nümunə 1. $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli: $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

Nümunə 2. Kalkulyatordan istifadə etmədən α bucağının IV rübün bucağı və $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$ olduğunu bilərək, sin 2α və cos 2α-nın qiymətlərini tapın.



Həlli: $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}\qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\frac{4}{5})^2 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}$

Nümunə 3. $\cos\frac{\pi}{8}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Həlli: Yarımbucaq eyniliklərindən istifadə edək: $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\frac{\pi}{8}$ bucağı I rübdə yerləşir və bu rübdə kosinus funksiyası müsbətdir.

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1+(\sqrt{2}/2)}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

Öyrənmə tapşırıqları

13. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha$

c) $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)\cdot \sin 2\alpha$ d) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

14. $\cos\alpha = -0{,}8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ olarsa, tapın:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\mathrm{tg}\, 2\alpha$

15. $\sin\beta = -\frac{12}{13}$ və β III rübün bucağı olarsa, tapın:

a) $\sin 2\beta$ b) $\cos 2\beta$ c) $\mathrm{tg}\, 2\beta$

16. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}$

17. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ b) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

c) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$ d) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

e) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\, 22^\circ 30'}{1-\mathrm{tg}^2\, 22^\circ 30'}$ f) $\dfrac{4\,\mathrm{tg}\, 75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\, 75^\circ}$

18. Tapın:

a) $\sin 22^\circ 30'$ b) $\cos 22^\circ 30'$ c) $\mathrm{tg}\, 22^\circ 30'$ d) $\mathrm{tg}\, 15^\circ$ e) $\cos 67{,}5^\circ$

19. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ olarsa, tapın:

a) $\sin\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ c) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

20. Verilənlərə görə $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha$-nı tapın.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

21. Verilənlərə görə $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$-ni tapın.

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

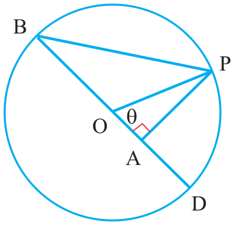
Toplama düsturlarından alınan nəticələr

22. İki bucağın cəminin triqonometrik eyniliklərindən istifadə etməklə aşağıdakı eyniliklərin doğruluğunu isbat edin.
a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

23. $90° < \alpha < 180°$ və $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ olduğunu bilərək:
a) $\sin 2\alpha$-nın qiymətini tapın; b) $\cos 2\alpha$-nın qiymətini tapın;
c) α bucağının radian ölçüsünü kalkulyatorun köməyilə hesablayın.
d) *a* və *b* bəndində apardığınız hesablamaların doğruluğunu da kalkulyatorla yoxlayın.

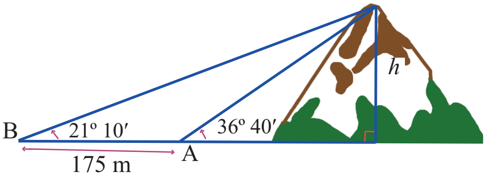
24. Eynilikləri isbat edin.
a) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ b) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$

Tətbiq tapşırıqları



25. **Həndəsə.** O mərkəzli vahid çevrə üzərində verilənlərə görə $\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ eyniliyinin doğru olduğunu isbat edin.

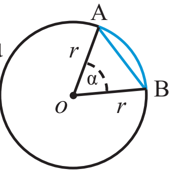
26. Dağın hündürlüyünü tapmaq üçün planda aralarındakı məsafə 175 m olan A və B nöqtələri seçilmiş və dağın təpəsinə yüksəliş bucağı ölçülmüşdür.

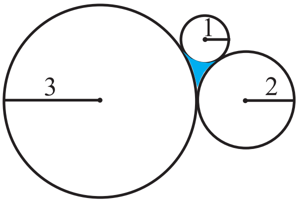


Bucaqların ölçüləri $\angle A = 36°40'$, $\angle B = 21°10'$ olmuşdur. Bu plana görə dağın hündürlüyü neçə metrdir?

27. İstənilən ΔABC-də aşağıdakı eyniliklərin doğru olduğunu isbat edin ($\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ olduğunu nəzərə alın).
a) $\sin(\angle A + \angle B) = \sin\angle C$
b) $\cos\angle C = \sin\angle A \cdot \sin\angle B - \cos\angle A \cdot \cos\angle B$

28. a) Seqmentin sahəsi üçün $S_{seq} = \dfrac{1}{2} r^2(\alpha - \sin\alpha)$ düsturunun doğru olduğunu göstərin.
b) Radiusu 2 sm olan dairədə 3 sm uzunluqlu vətərin ayırdığı seqmentin sahəsini tapın.





29. Radiusları 1; 2; 3 olan üç çevrə şəkildə göstərildiyi kimi xaricdən toxunurlar. Rəngli sahəni hesablayın.

Triqonometrik ifadələrin sadələşdirilməsi

Nümunə 1. $\cos x\,(\operatorname{tg} x - \sec x)$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli: $\cos x\,(\operatorname{tg} x - \sec x) =$

$= \cos x \cdot \operatorname{tg} x - \cos x \cdot \sec x =$ *vurmanın paylama qanunu*

$= \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} =$ *$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ və $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ əvəzetməsi*

$= \sin x - 1$ *sadələşdirmə*

Nümunə 2. $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$ ifadəsini vuruqlara ayırmaqla sadələşdirin.

Həlli: $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x =$

$= \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$ *ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması*

$= \cos^2 x \cdot 1 = \cos^2 x$ *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ düsturunun tətbiqi*

Nümunə 3. $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli:

$\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} =$ *$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ əvəzetməsi*

$= \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1 + \sin x}{1 + \sin x} =$ *surət və məxrəci eyni ifadəyə vurub-bölmə*

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *ortaq məxrəcə gətirmə*

$= \dfrac{1 + \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ düsturunun tətbiqi*

$= \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$ *sadələşdirmə*

Nümunə 4. $\sqrt{\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}}$ ifadəsində məxrəci radikaldan azad edin.

Həlli: Burada $\operatorname{tg} x > 0$ olmalıdır.

$$\sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x}} = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}} = \sqrt{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Mötərizədən azad etməklə sadələşdirin.

1) $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$
2) $\operatorname{tg} x\,(\cos x + \operatorname{ctg} x)(1 - \sin x)$
3) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$
4) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 - \sec^2\alpha$

2. Vuruqlara ayırın:

1) $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x$
2) $\sin^4 x - \cos^4 x$
3) $\sin^3 x + 27$
4) $4\sin^2 y + 8\sin y + 4$
5) $3\operatorname{ctg}^2\beta + 6\operatorname{ctg}\beta + 3$
6) $2\cos^2 x + \cos x - 3$

3. Sadələşdirin.

1) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha + 1}$ 2) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 3) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

4) $\dfrac{4\cos^3 x}{\sin^2 x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{4\cos x}\right)^2$ 5) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin\alpha - 2}{2\sin\alpha - 4}$ 6) $\dfrac{\sin^2\alpha - 9}{2\cos\alpha + 1}\cdot\dfrac{10\cos\alpha + 5}{3\sin\alpha + 9}$

4. İfadələri bir triqonometrik funksiya daxil olan vuruqların hasili (məsələn, $(\sin x - 3)(1 + 2\sin x)$) şəklində yazın.

1) $\cos^2 x + 2\cos x + 1$ 2) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$ 3) $\sin x - \cos^2 x - 1$

5. Məxrəci radikaldan azad edin.

a) $\dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ c) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{\sin x}}$

6. Sadələşdirin.

a) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha$ b) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$

c) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ d) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

7. Eynilikləri isbat edin.

1) $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1 - \operatorname{ctg}\theta} = \sin\theta + \cos\theta$ 2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} + 1 = 2\cos^2\theta$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta} + 1 = 2\sin^2\theta$ 4) $\operatorname{tg}\theta + \dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \sec\theta$

5) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$ 6) $\dfrac{1 - \cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\cos^4\alpha$

8. İfadənin ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.

a) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$ b) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$ c) $\sin\alpha + \cos\alpha$

Göstəriş: $a\sin x + b\cos x$ ifadəsini $c\cdot\left(\dfrac{a}{c}\cdot\sin x + \dfrac{b}{c}\cdot\cos x\right)$ şəklində yazın və $\dfrac{a}{c} = \cos\varphi$, $\dfrac{b}{c} = \sin\varphi$ olmaqla köməkçi bucaq daxil edin. Burada $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nümunə. $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) =$
$= 2(\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha + \sin 60^\circ\cdot\cos\alpha) = 2\sin(\alpha + 60^\circ)$, ƏBQ $= 2$, ƏKQ $= -2$.

9. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ olduqda $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}$ ifadəsini sadələşdirin.

10. $\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$ ifadəsini sadələşdirin.

a) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ olduqda b) $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ olduqda

11. $\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Üçbucağın bucaqları 2; 3; 5 ədədləri ilə mütənasibdir. Üçbucağın bucaqlarının radian ölçülərini tapın.

2. İfadənin mənası varmı?
a) $\sqrt{\sin 170^\circ}$ b) $\sqrt{\cos 150^\circ}$ c) $\sqrt{\operatorname{tg} 200^\circ}$

3. $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ olarsa, α hansı rübün bucağıdır?

4. İsbat edin ki, $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$

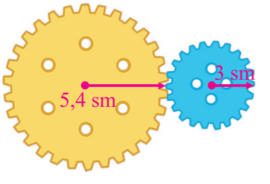
5. $\sin 10^\circ = a$ olarsa, a ilə ifadə edin:
a) $\cos 80^\circ$ b) $\cos 100^\circ$ c) $\sin 170^\circ$ d) $\sin 190^\circ$

6. Kalkulyatordan istifadə etmədən hesablayın.

a) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$ b) $4\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}$

7. Hansı bərabərlik doğru, hansı yanlışdır?
a) $\sin 151° = \sin 29°$ b) $\cos 135° = \sin 225°$ c) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg} 225°$
d) $\sin 60° = \cos 330°$ e) $\sin 270° = \cos 180°$ f) $\cos(-60°) = -\sin 330°$

8. İki dişli çarxdan birinin radiusu 5,4 sm, digərininki isə 3 sm-dir. Əgər kiçik çarx 170° dönürsə, böyük çarx neçə dərəcə dönməlidir?



9. a) Suçiləyici ən çoxu $140°$ dönməklə 35 metr məsafəyə su çiləyir. Sulana bilən hissəni sxematik olaraq təsvir edin və sahəsini hesablayın.
b) 70 m məsafəyə su vuran çiləyici ilə $3000\ m^2$ sahəni sulamaq üçün çiləyici neçə dərəcə dönməlidir?

10. İsbat edin.

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} = -\operatorname{ctg} 2x \qquad \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x$$

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x \qquad \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 4x} = \operatorname{tg} 3x$$

11. $\alpha - \beta = 90^\circ$ olduqda $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

12. İsbat edin ki: a) $\cos(60^\circ - \alpha) = \sin(30^\circ + \alpha)$ b) $\operatorname{ctg}(80^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(10^\circ + \alpha)$.

13. Göstərin ki: $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 31^\circ + \sin 11^\circ} = \dfrac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

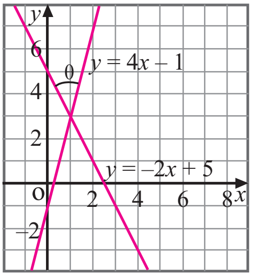
14. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}4$ olduqda $\left|\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\right|$ ifadəsinin qiymətini tapın.

15. İfadənin qiymətini tapın.

a) $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)$

b) $\sin\dfrac{\pi}{16} \cdot \cos^3\dfrac{\pi}{16} - \sin^3\dfrac{\pi}{16} \cdot \cos\dfrac{\pi}{16}$

16. $y = 4x - 1$ və $y = -2x + 5$ düz xətləri arasındakı iti bucağı tapın.



17. Hesablayın.

a) $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$

b) $8 \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$

18. Sadələşdirin: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \cdot \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$

19. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ və $\sin\beta = -\dfrac{1}{2}$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ olduqda ifadələrin qiymətlərini tapın.

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

d) $\sin(\alpha - \beta)$ e) $\cos(\alpha - \beta)$ f) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

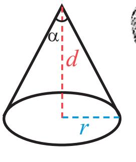
20. Sadələşdirin.

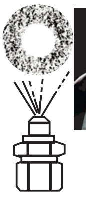
a) $\dfrac{6\cos 64^\circ}{\sqrt{3}\cos 34^\circ - \sin 34^\circ}$ b) $\dfrac{\cos 36^\circ + \sqrt{3}\sin 36^\circ}{4\cos 24^\circ}$

21. Mayepüskürdücü (çiləyici) ilə α bucağı altında d məsafədə olan obyektə maye vurulursa, maye çilənən sahəni

a) $S = \pi d^2 \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$ həmçinin $S = \dfrac{\pi d^2 (1 - \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha}$ düsturları ilə hesablamağın mümkün olduğunu göstərin.

b) Mayeçiləyici $d = 30$ sm məsafəyə $\alpha = 45^\circ$ bucaq altında olmaqla maye çiləyirsə, nə qədər sahəyə maye vurulmuş olacaq?





22. 1) Eynilikləri isbat edin. a) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ b) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

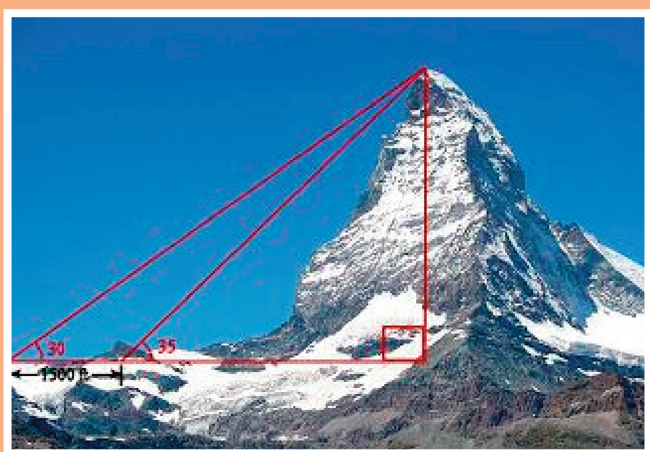
2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ olarsa, tapın: a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$

4 Sinuslar və kosinuslar teoremi

Sinuslar teoremi

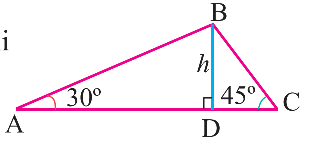
Kosinuslar teoremi

XII əsrdə yaşamış dahi Azərbaycan alimi Nəsrəddin Tusi astronomiya, riyaziyyat, fəlsəfə elmlərinə böyük töhfələr vermişdir. Nəsrəddin Tusi ilk dəfə olaraq triqonometriyanı astronomiyadan ayırmış və sinuslar teoreminin isbatını vermişdir.



Sinuslar teoremi

Praktik məşğələ



1) Şəkildə verilənlərə görə ΔABC-nin AB və BC tərəflərini h ilə ifadə edin.

2) $\dfrac{AB}{\sin \angle C} = \dfrac{BC}{\sin \angle A}$ bərabərliyinin doğruluğunu yoxlayın.

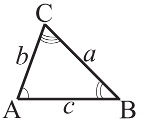
3) AC tərəfinin uzunluğunu h ilə ifadə edin və $\angle B = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ olduğuna görə sin ∠B-ni hesablayın.

4) $\dfrac{AC}{\sin \angle B}$ nisbətini tapın və onu 2-ci bənddəki nisbətlərlə müqayisə edin.

5) ΔABC-nin tərəfləri ilə qarşı bucaqların sinusları arasında hansı əlaqə vardır?

Sinuslar teoremi

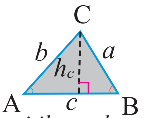
İstənilən ΔABC-də a, b, c tərəfləri uyğun olaraq, ∠A, ∠B, ∠C-nin qarşısında duran tərəflər olarsa:



$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$$

Üçbucağın tərəfləri onun qarşı bucaqlarının sinusları ilə mütənasibdir.

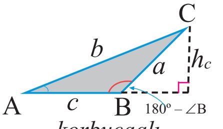
İsbatı: Düzbucaqlı üçbucaq üçün teoremin doğruluğunu özünüz göstərin. İsbatı itibucaqlı və korbucaqlı üçbucaq üçün yerinə yetirək.



itibucaqlı üçbucaq

Üçbucağın C təpəsindən AB tərəfinə h_c hündürlüyü çəksək, alınmış iki düzbucaqlı üçbucaqdan,

$\dfrac{h_c}{b} = \sin\angle A$ və $\dfrac{h_c}{a} = \sin\angle B$ olduğunu yaza bilərik.



korbucaqlı üçbucaq

Korbucaqlı üçbucaqdan da

$\dfrac{h_c}{a} = \sin(180 - \angle B) = \sin \angle B$ olduğu görünür.

Bu nisbətlərdən h_c dəyişənini tapaq: $h_c = b \sin\angle A$, $h_c = a \sin\angle B$

Buradan $b \sin\angle A = a \sin\angle B$ və ya $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$

Analoji qayda ilə A təpəsindən BC tərəfinə hündürlük çəkməklə $\dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$ olduğunu göstərmək olar. Bərabərliyin xassəsinə görə yaza bilərik:

$\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$ Teorem isbat olundu.

Bu nisbətlərin üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə bərabər olduğuna diqqət edin.

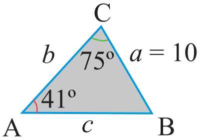
Nəticə. 1) Üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısında duran tərəflərin uzunluqları bərabərdir.
2) Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf və böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur.

Doğrudan da, əgər α və β bucaqları itidirsə, $\alpha > \beta$ olduqda $\sin\alpha > \sin\beta$ olur. $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ olduğundan, $a > b$ alınır. Əgər α kor bucaqdırsa, onda $(180^o - \alpha)$ iti bucaqdır, həm də $(180^o - \alpha)$ bucağı üçbucağın β bucağına qonşu olmayan xarici bucağı olduğundan β-dan böyükdür.

Ona görə $\sin\alpha = \sin(180^o - \alpha) > \sin\beta$. Buradan da $a > b$ alınır.

Üçbucağın iki bucağı və bir tərəfi verildikdə, iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verildikdə sinuslar teoremini tətbiq edərək qalan tərəfləri və bucaqları tapmaq mümkündür.

I hal. Üçbucağın iki bucağı və bir tərəfi verilir.



Nümunə 1. ΔABC-də $a = 10$, $\angle A = 41°$, $\angle C = 75°$

Həlli: Üçbucağın daxili bucaqlarınınn cəminin 180° olduğunu bilərək, verilən iki bucağına görə üçüncü bucağını, sinuslar teoreminə görə isə verilməyən iki tərəfini tapa bilərik.

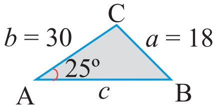
$$\angle B = 180 - (\angle A + \angle C) = 180 - (41° + 75°) = 64°$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \Rightarrow b = \frac{a\sin\angle B}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin 64°}{\sin 41°} \approx \frac{10\cdot 0{,}899}{0{,}656} \approx 13{,}7$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C} \Rightarrow c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin 75°}{\sin 41°} \approx \frac{10\cdot 0{,}966}{0{,}656} \approx 14{,}7$$

II hal. Üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verilir.

Nümunə 2. 1) ΔABC-də $a = 18$, $\angle A = 25°$, $b = 30$



Həlli: $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B}$

$$\sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a} = \frac{30\sin 25°}{18} \approx 0{,}7044$$

0,7044 ədədini kalkulyatora daxil edib $\boxed{\sin^{-1}}$ düyməsini işarələsək, B bucağının 44,8° olduğunu görərik: $\angle B \approx 44{,}8°$

Lakin $\sin\angle B = \sin(180 - \angle B)$ olduğundan, burada B bucağının ikinci bir qiyməti də var: $\angle B \approx 180° - 44{,}8° = 135{,}2°$

$\boxed{\angle B \approx 44{,}8°}$ olduqda

$$\angle C \approx 180° - (25° + 44{,}8°) = 110{,}2°$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

$$c \approx \frac{18\sin 110{,}2°}{\sin 25°} \approx \frac{18\cdot 0{,}938}{0{,}423} \approx 40$$

$\boxed{\angle B \approx 135{,}2°}$ olduqda

$$\angle C \approx 180° - (25° + 135{,}2°) = 19{,}8°$$

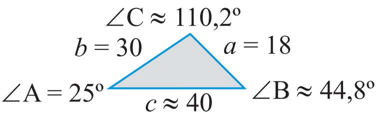
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

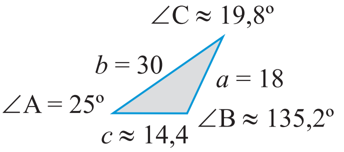
$$c \approx \frac{18\sin 19{,}8°}{\sin 25°} \approx \frac{18\cdot 0{,}938}{0{,}423} \approx 14{,}4$$

Deməli, verilən qiymətlərə uyğun iki üçbucaq var.

1. $\angle B \approx 44{,}8°$, $\angle C \approx 110{,}2°$, $c \approx 40$



2. $\angle B \approx 135{,}2°$, $\angle C \approx 19{,}8°$, $c \approx 14{,}4$



II hal üçün aşağıdakı vəziyyəti də nəzərdən keçirək.

1) $\triangle ABC$-də $a = 5$, $\angle A = 30°$, $b = 12$ olarsa, sinuslar teoreminə görə

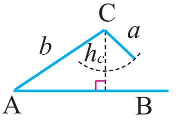
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B}, \qquad \sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a} = \frac{12\cdot\sin 30°}{5} = 1{,}2 \quad \text{alarıq.}$$

İstənilən bucaq üçün $\sin\angle B \le 1$ olduğundan, $\sin\angle B = 1{,}2$ ola bilməz.

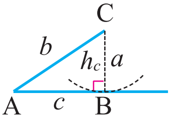
Deməli, belə bir üçbucaq qurmaq mümkün deyil.

Üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verildikdə mümkün həllərin – üçbucaqların sayı bu tərəflərin uzunluğunun ədədi qiymətindən və bucağın növündən (dərəcə ölçüsündən) asılı olaraq dəyişir.

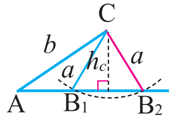
$\angle A < 90°$ olduqda



a) $a < h_c < b$ həlli yoxdur

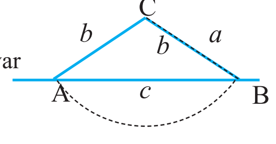


b) $a = h_c < b$ bir həlli var

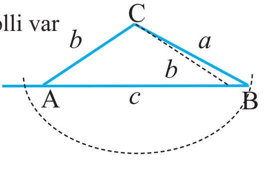


c) $h_c < a < b$ iki həlli var

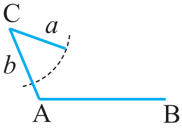
d) $a = b$ bir həlli var



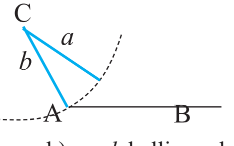
e) $a > b$ bir həlli var



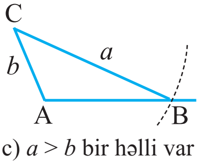
$\angle A \ge 90°$ olduqda



a) $a < b$ həlli yoxdur



b) $a = b$ həlli yoxdur



c) $a > b$ bir həlli var

Öyrənmə tapşırıqları

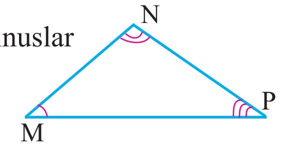
1. Naməlum tərəfi və ya bucağı tapın.

a) $\dfrac{b}{\sin 45°} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 30°}$ b) $\dfrac{a}{\sin 35°} = \dfrac{10}{\sin 40°}$

c) $\dfrac{\sin\angle B}{6} = \dfrac{\sin 60°}{3\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{\sin\angle A}{25} = \dfrac{\sin 62°}{32}$

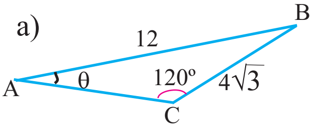
Sinuslar teoremi

2. Təpələri M, N, P kimi işarə edilmiş üçbucaq üçün sinuslar teoremini yazın.

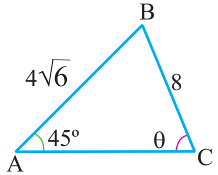


3. Şəkildə verilənlərə görə θ bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

a)

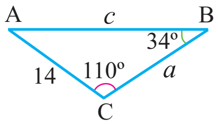


b)

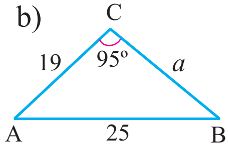


4. Naməlum tərəfləri və bucaqları tapın.

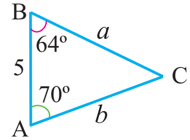
a)



b)



c)



5. Verilənlərə görə hansı halda bir, hansı halda iki üçbucaq qurmaq mümkündür, hansı halda məsələnin həlli yoxdur? Hesablamalarla göstərin.

1) $a = 10$, $\angle A = 35°$, $\angle B = 25°$ 2) $b = 40$, $\angle B = 75°$, $c = 35$
3) $\angle A = 40°$, $\angle B = 45°$, $c = 15$ 4) $a = 5$, $\angle A = 42°$, $b = 7$
5) $a = 40$, $\angle A = 25°$, $c = 30$ 6) $a = 5$, $\angle A = 47°$, $b = 9$
7) $a = 12$, $\angle A = 94°$, $b = 15$ 8) $a = 15$, $\angle A = 94°$, $b = 12$
9) $a = 22$, $\angle A = 50°$, $c = 27$ 10) $a = 11$, $\angle A = 50°$, $c = 20$

6. $\dfrac{x}{\sin 60°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$ bərabərliyinə görə üçbucaq çəkin. x-in qiymətini tapın.

7. Verilənlərə görə Δ ABC-ni çəkin və tələb olunan tərəfi tapın.

a) **Verilir:** Δ ABC, $\angle A = 57°$, $\angle B = 73°$, AB = 24 cm.
AC = ?

b) **Verilir:** ΔABC, $\angle B = 38°$, $\angle C = 56°$, BC = 63 cm
AB = ?

c) **Verilir:** Δ ABC, $\angle A = 50°$, $\angle B = 50°$, AC = 27 m, AB = ?

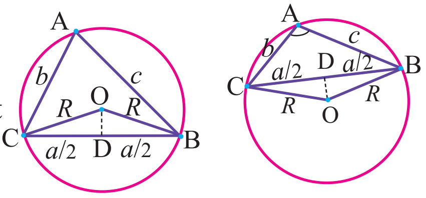
d) **Verilir:** Δ ABC, $\angle A = 23°$, $\angle C = 78°$, AB = 15 cm, BC = ?

8. a) ΔABC-də AC = 7 sm, AB = 11 cm, $\angle B = 25°$-dir. $\angle C$-ni tapın.
b) ΔKLM-də LM = 16,8 sm, KM = 13,5 sm, $\angle K = 56°$ olduğuna görə $\angle L$-i tapın.
Hər iki məsələdə axtarılan bucağa "bir iti", "bir kor bucaq" olmaqla iki bucaq uyğundur fikri doğrudurmu?

Sinuslar teoremi

9. Üçbucağın tərəflərindən birinin uzunluğu 43 m, digərininki isə 11 m-dir. Bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq 35°-dir. Üçbucağın verilməyən tərəfini və bucaqlarını tapın.

10. Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucaqdan istifadə etməklə sinuslar teoremini isbat edin.



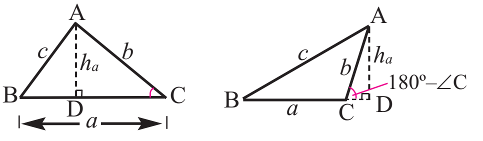
İsbat üçün plan: Əvvəlcə $\dfrac{a}{\sin\angle A} = 2R$ olduğunu, analoji qayda ilə $\dfrac{b}{\sin\angle B} = 2R$ və $\dfrac{c}{\sin\angle C} = 2R$ olduğunu göstərin.

11. Bucaqları daha dəqiq ölçmək üçün dərəcə ölçü vahidi ilə yanaşı daha kiçik vahidlərdən- dəqiqə (′) və saniyədən (″) də istifadə edilir. 1° = 60′, 1′ = 60″ olduğunu nəzərə almaqla bucaqların ölçülərini dərəcə ilə onluq kəsr şəklində ifadə edin.

a) 20°15′36″ b) 45°12′18″ c) 34°20′54″

12. Üçbucağın sahəsi düsturlarına görə:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$$
$$S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$$
$$S = \frac{1}{2}ac\sin\angle B$$

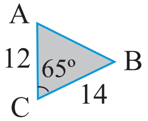


Verilənlərə görə üçbucaqların sahələrini tapın.

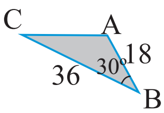
1) $\angle B = 42^\circ$, $a = 6$ m, $c = 8$ m 2) $\angle A = 17^\circ\ 12'$, $b = 10$ sm, $c = 13$ sm

3) $\angle C = 82^\circ\ 54'$, $a = 4$ dm, $b = 6$ dm 4) $\angle C = 75{,}16^\circ$, $a = 1{,}5$ m, $b = 2{,}1$ m

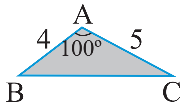
5)



6)

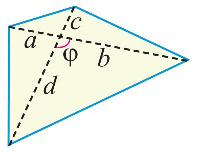


7)



13. İsbat edin ki, qabarıq dördbucaqlının sahəsi diaqonalların və onlar arasındakı bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir.

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$



14. a) Paraleloqramın diaqonalları 10sm və 12 sm olub, aralarındakı bucaq 60°- dir. Bu paraleloqramın sahəsini tapın.

b) Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalları $12\sqrt{2}$ sm olub, aralarındakı bucaq 45°-dir. Bu trapesiyanın sahəsini tapın.

Sinuslar teoremi

15. Sinuslar teoreminin ikisütunlu cədvəllə isbatını dəftərinizdə tamamlayın.

Təklif	Əsası
$\frac{1}{2}b c\sin\angle A=\frac{1}{2}\ a c\sin\angle B=\frac{1}{2}a b\sin\angle C$	
$bc\sin\angle A = ac\sin\angle B = ab\sin\angle C$	
$\frac{bc\sin\angle A}{abc}=\frac{ac\sin\angle B}{abc}=\frac{ab\sin\angle C}{abc}$	
$\frac{\sin\angle A}{a}=\frac{\sin\angle B}{b}=\frac{\sin\angle C}{c}$	
$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$	

16. Hər bir mümkün hala uyğun bir üçbucaq çəkin.

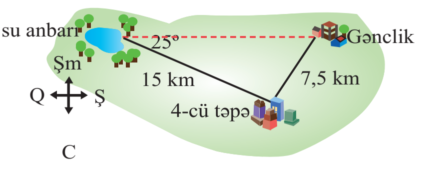
a) ΔABC də $\angle A = 30°$, $AC = 50$ sm olduqda məsələnin iki həlli olması üçün BC tərəfinin uzunluğu hansı intervalda dəyişməlidir?

b) $\angle A = 60°$ və $AC = 12\sqrt{3}$ sm-dir. BC tərəfinin uzunluğu hansı intervalda dəyişsə, üçbucaq qurmaq mümkün olmaz?

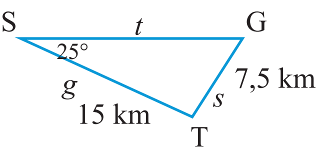
c) $\angle A = 45°$ və $AC = 18\sqrt{2}$ sm olarsa, BC tərəfinin uzunluğunun hansı qiymətlərində yalnız bir üçbucağın həlli mümkündür?

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. Su anbarı 4-cü Təpə yaşayış məntəqəsindən 25° şimal-qərb istiqamətində 15 km, Gənclik yaşayış məntəqəsi su anbarından şərqdə olmaqla 4-cü Təpə yaşayış məntəqəsindən şimal şərq istiqamətində 7,5 km məsafədə yerləşir. Gənclik yaşayış məntəqəsi su anbarından neçə kilometr aralıda yerləşir?



Həlli: Plana uyğun üçbucağı yenidən çəkək və təpələrini obyektlərin adına uyğun olaraq Su anbarı – S, 4-cü Təpə – T, Gənclik – G hərfləri ilə işarələyək. Məsafələr isə uyğun olaraq s, t və g kimi olsun.



Sinuslar teoreminə görə:

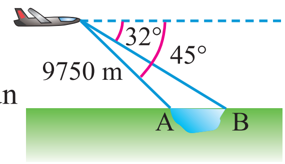
$$\frac{s}{\sin\angle S}=\frac{g}{\sin\angle G},\quad \frac{7,5}{\sin 25°}=\frac{15}{\sin\angle G},\quad \sin\angle G=\frac{15\cdot\sin 25°}{7,5}\approx\frac{15\cdot 0,4226}{7,5}=0,8452$$

$$\angle G\approx 58°,\qquad \angle T\approx 180°-25°-58°\approx 97°$$

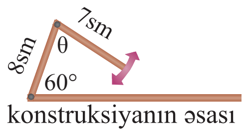
$$\frac{s}{\sin\angle S}=\frac{t}{\sin\angle T},\quad \frac{7,5}{\sin 25°}\approx\frac{t}{\sin 97°},\quad t\approx\frac{7,5\cdot\sin 97°}{\sin 25°}\approx\frac{7,5\cdot 0,9925}{0,4226}\approx 17,6\ \text{km}$$

Sinuslar teoremi

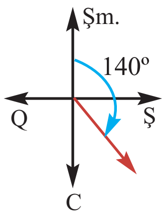
17. Müşahidə aparılan təyyarədən gölün iki müxtəlif sahilindəki A və B nöqtələrinə eniş bucağı uyğun olaraq, 45° və 32°-dir. Şəkildə verilənlərə görə gölün bu iki nöqtə arasındakı eni təqribən neçə metrdir?

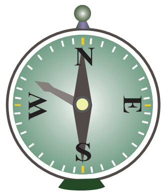


18. Uzunluğu 8 sm olan taxta çubuq konstruksiyanın əsasına 60º bucaq əmələ gətirməklə yapışdırılmışdır. Uzunluğu 7 sm olan çubuq bu çubuğun digər ucuna və konstruksiyanın oturacağına bərkidilməlidir. Bunun üçün şəkildə göstərilən θ bucağının mümkün dərəcə ölçüsünü tapın.

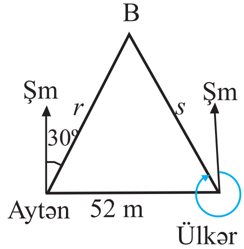


19. **Naviqasiya** dəniz və hava yollarında nəqliyyatın yerini və hərəkət kursunu müəyyənetmə işlərini əhatə edir.
Naviqasiyada istiqamət adətən, azimuta görə müəyyən edilir. Azimut saat əqrəbinin hərəkəti üzrə olmaqla şimal istiqamət ilə verilən istiqamət arasında qalan bucaqdır.
Məsələn, şəkildə 140° azimut təsvir edilmişdir.

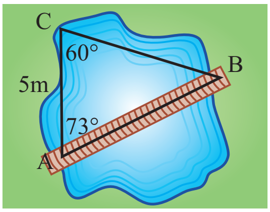




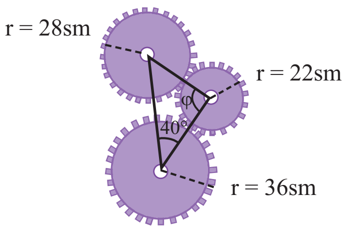
Ülkərgilin mindiyi yelkənli qayıq Aytəngilin mindiyi qayıqdan şərq istiqamətində 52 m aralıdadır. Aytəngil dənizdəki canlılar üzərində müşahidə aparan tədqiqat stansiyasını 30° azimutla, Ülkərgil isə 320º azimutla görürlər. Ülkərgil stansiyadan təqribən neçə metr aralıdadırlar?



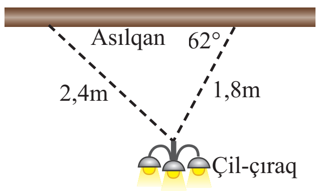
20. **Körpü inşaatı.** Şəkildə verilənlərə görə quraşdırılmalı olan körpünün uzunluğu neçə metr olmalıdır?



21. **Konstruksiya.** Şəkildə verilən dişli çarx konstruksiyasına görə φ bucağını tapın.

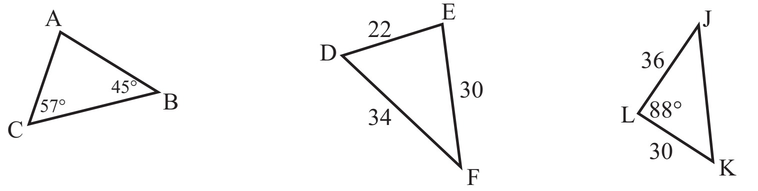


22. Çilçıraq taxta asılqana uzunluğu 1,8 m və 2,4 m olan zəncirlərlə bərkidilmişdir. 1,8 m uzunluğundakı zəncir asılqanla 62º bucaq əmələ gətirir. Digər zəncirin asılqanla əmələ gətirdiyi bucağı tapın.



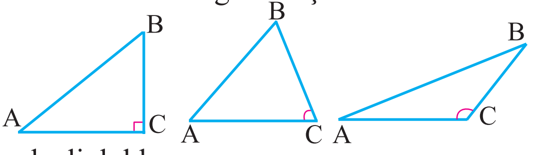
Kosinuslar teoremi

Araşdırma 1. Verilən ölçülərə görə hər üçbucaq üçün tapşırıqları yerinə yetirin:
1) Üçbucaqların bucaqlarını artan sıra ilə yazın.
2) Verilməyən tərəfi və ya bucağı sinuslar teoremini tətbiq etməklə tapmaq mümkündürmü?



Araşdırma 2. 1) Dəftərinizdə iki tərəfi və bu tərəflər arasındakı bucağı verilmiş üçbucaqlar çəkin və üçüncü tərəfin uzunluğunu ölçün.

1. $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $\angle C = 90^\circ$
2. $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $\angle C = 60^\circ$
3. $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $\angle C = 120^\circ$



2) Bu üçbucaqlar üçün aşağıdakı cədvəli doldurun.

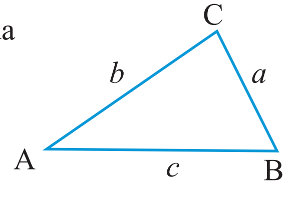
Üçbucağın tərəfləri (sm-lə)	c^2	$a^2 + b^2$	$2ab\cos \angle C$
$a = 3,\ b = 4,\ c = 5$			
$a = 3,\ b = 4,\ c =$ ■			
$a = 3,\ b = 4,\ c =$ ■			

3) $a^2 + b^2 - 2ab\cos \angle C$ və c^2 ifadələrinin qiymətlərini müqayisə edin.

Kosinuslar teoremi

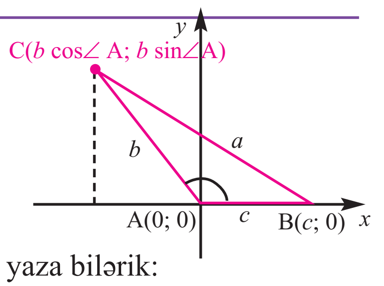
Tərəfləri a, b və c olan istənilən ABC üçbucağında

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \angle A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \angle B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \angle C}$$



Üçbucağın hər hansı tərəfinin kvadratı bərabərdir: qalan iki tərəfin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərlə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinin iki misli.

İsbatı: Kosinuslar teoremini isbat etmək üçün ABC üçbucağını koordinat sistemində şəkildə göstərildiyi kimi elə yerləşdirək ki, A təpəsi koordinat başlanğıcında yerləşsin. Bu halda təpə nöqtələrinin koordinatları:



A(0; 0), B(c; 0), C($b\cdot\cos\angle$A; $b\cdot\sin\angle$A) kimi olacaq. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə yaza bilərik:

$$a^2 = (c - b\cos\angle A)^2 + (b\sin\angle A - 0)^2 =$$
$$= c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A + b^2\cos^2\angle A + b^2\sin^2\angle A =$$
$$= c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A + b^2(\cos^2\angle A + \sin^2\angle A) = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A$$

Kosinuslar teoremi

Beləliklə, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$ olduğu isbat edildi.
Üçbucağın digər tərəfləri üçün olan düsturların da doğruluğunu üçbucağın digər təpə nöqtələrini (B və C) koordinat başlanğıcında yerləşdirməklə isbat etmək olar.
Qeyd: Tutaq ki, $\angle C = 90°$. $\cos 90° = 0$ olduğundan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C$ düsturundan $c^2 = a^2 + b^2$ alınır. Bu isə Pifaqor teoremini ifadə edir. Ona görə də kosinuslar teoreminə bəzən Pifaqor teoreminin ümumiləşməsi də deyilir.

Nümunə 1. İki tərəfi və onlar arasında qalan bucağına görə üçbucağın həlli.
ΔABC-də $a = 12$ sm, $c = 16$ sm, $\angle B = 38°$ olduğuna görə üçbucağı həll edin.

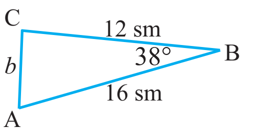
Həlli:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$ ***Kosinuslar teoremi***

$b^2 = 144 + 256 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos 38°$ ***a, c və ∠B-nin qiymətləri yerinə yazılır***

$b^2 \approx 400 - 384 \cdot 0{,}788 \approx 97{,}4$ ***Sadələşdirilir***

$b \approx \sqrt{97{,}4} \approx 9{,}87$ (sm) ***Kvadrat kök alınır***



Üçbucağın üç tərəfi və bir bucağı məlum olduğundan sinuslar teoremini tətbiq etmək olar. A bucağını tapaq. Verilənlərə görə a tərəfi c tərəfindən kiçik olduğundan onun qarşısında duran bucaq da kiçik olacaq, yəni $\angle A$ kor bucaq ola bilməz.

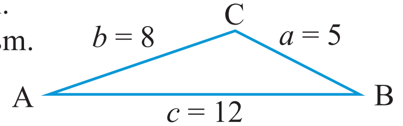
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \qquad \frac{12}{\sin\angle A} = \frac{9{,}87}{\sin 38°} \qquad \sin\angle A = \frac{12\sin 38°}{9{,}87} \approx 0{,}7485$$

Kalkulyatorda $\sin^{-1}$ düyməsi ilə və 0,7485 ədədini daxil etməklə,
$\angle A = \sin^{-1}(0{,}7485) \approx 48{,}5°$ olduğunu hesablamaq olar. Artıq ABC üçbucağının üç tərəfi və iki bucağı məlumdur. Üçüncü bucağı isə üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi düsturundan tapa bilərik:

$$180° - (38° + 48{,}5°) = 93{,}5° \quad \angle C \approx 93{,}5°$$

$a = 12$ sm, $b \approx 9{,}87$ sm, $c = 16$ sm, $\angle A \approx 48{,}5°$, $\angle B = 38°$, $\angle C \approx 93{,}5°$

Nümunə 2. Üç tərəfinə görə üçbucağın həlli.
ΔABC-də $a = 5$ sm, $b = 8$ sm, $c = 12$ sm. Üçbucağı həll edin.



Həlli: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos\angle A = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{183}{192} \approx 0{,}9531$$

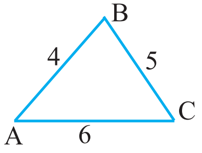
$\angle A \approx \cos^{-1}(0{,}9531) \approx 18°$

Oxşar qayda ilə üçbucağın B və C təpə bucaqları da tapılır.

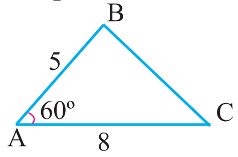
Kosinuslar teoremi

Öyrənmə tapşırıqları

1. Üçbucağın üç tərəfinə görə bucaqlarını tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

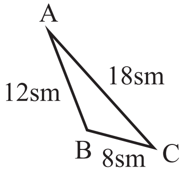


2. Üçbucağın iki tərəfinə və onlar arasında qalan bucağına görə verilməyən tərəfini və bucaqlarını tapın.

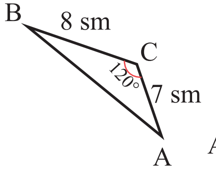


3. Verilənlərə görə üçbucaqları həll edin. Cavabı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

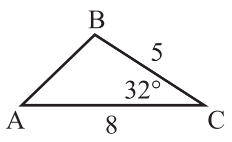
a)



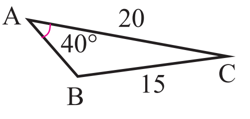
b)



c)



d)



4. Verilənlərə görə tələb olunanı tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

1) Verilir: ΔABC-də
$a = 27$, $b = 22$
$\angle C = 40^\circ$,
Tapın: c tərəfini.

2) Verilir: ΔABC,
$a = 18$, $c = 15$
$\angle B = 110^\circ$.
Tapın: b tərəfini.

3) Verilir: ΔABC,
$a = 9$, $b = 10$, $c = 11$.
Tapın: $\angle A$

4) Verilir: $\Delta\ ABC$,
$a = 120$, $b = 90$, $c = 105$.
Tapın: Üçbucağın ən böyük bucağını tapın.

5) Verilir: $\Delta\ ABC$,
$a = 16$, $b = 21$, $c = 19$.
Tapın: Üçbucağın ən kiçik bucağını tapın.

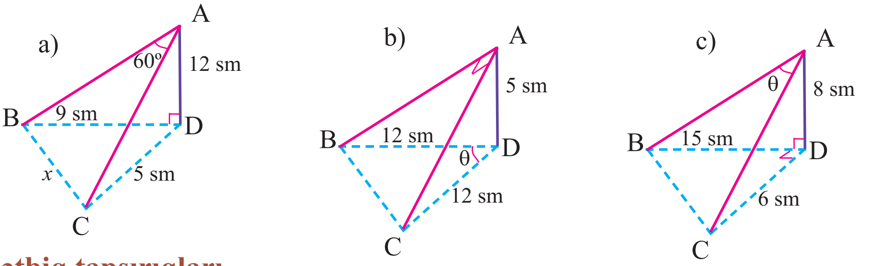
5. a) Tərəfləri 5 m, 6 m, 7 m olan üçbucağın böyük hündürlüyünü tapın.
b) Tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm olan üçbucağın kiçik hündürlüyünü tapın.
c) Tərəfləri 10 sm, 12 sm, 14 sm olan üçbucağın medianlarını tapın.

6. ΔABC-ni həll etmək üçün sinuslar, kosinuslar və ya Pifaqor teoremindən istifadə edin. Cavabı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

a) $A = 96^\circ$, $B = 39^\circ$, $b = 13$
b) $A = 34^\circ$, $b = 17$, $c = 48$
c) $A = 48^\circ$, $B = 51^\circ$, $c = 36$
d) $C = 104^\circ$, $b = 11$, $c = 32$
e) $a = 48$, $b = 51$, $c = 36$
f) $C = 90^\circ$, $a = 4$, $b = 11$

7. a) Tərəfləri 6 sm, 8 sm, iti bucağı 60° olan paraleloqramın diaqonallarını tapın.
b) Tərəfləri a, b, diaqonalları d_1 və d_2 olan paraleloqram üçün $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ olduğunu isbat edin.

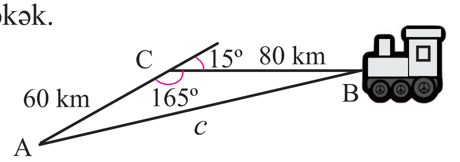
8. AD parçası ΔBCD müstəvisinə perpendikulyadır. Verilənlərə görə məchulu tapın.



Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. A məntəqəsindən hərəkətə başlayan qatar 60 km gedib C məntəqəsinə çatdıqdan sonra, hərəkət istiqamətini 15° dəyişərək, daha 80 km qət etdi. Qatar A məntəqəsindən neçə kilometr aralanmışdır?

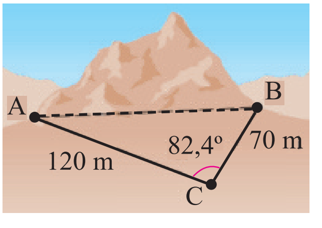
Həlli: Məsələnin şərtinə uyğun şəkil çəkək.



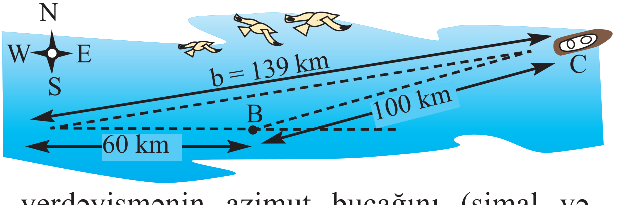
Şəkildən görünür ki, üçbucağın iki tərəfi və onlar arasında qalan bucağı məlumdur. Kosinuslar teoremini tətbiq etməklə c tərəfini tapa bilərik:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$
$$c^2 = 80^2 + 60^2 - 2 \cdot 80 \cdot 60 \cos 165° \approx 19273; \quad c \approx 139 \text{ km}$$

9. Dağın A və B nöqtələri arasındakı hissəsində tunel tikintisi planlaşdırılır. Şəkildə verilənlərə görə tunelin uzunluğunun neçə metr olduğunu müəyyən edin.

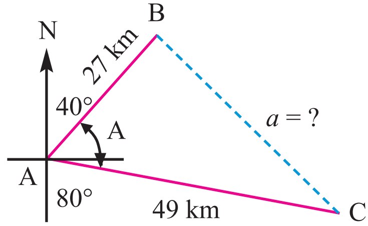


10. Gəmi 60 km şərqə hərəkət etdikdən sonra istiqamətini şəkildə göstərildiyi kimi şimala doğru dəyişərək daha 100 km yol qət etdi.

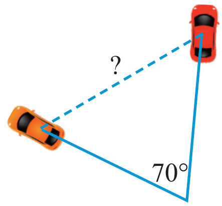


Şəkildə verilənlərə görə yerdəyişmənin azimut bucağını (şimal və yerdəyişmə istiqamətlərinin saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində əmələ gətirdiyi bucaq) müəyyən edin.

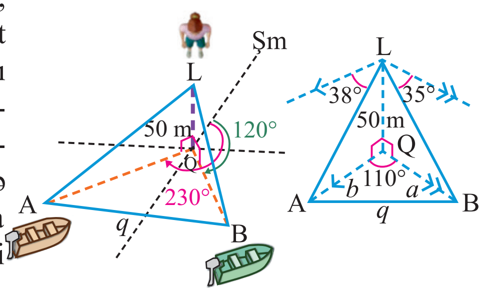
11. A məntəqəsindən hərəkətə başlayan iki gəmidən biri B, digəri isə C məntəqəsinə yetişdi. Bu hərəkətləri təsvir edən şəkildən istifadə edərək:
a) Gəmilərin hərəkət istiqamətləri arasındakı bucağı tapın;
b) B və C məntəqələri arasındakı məsafəni tapın.



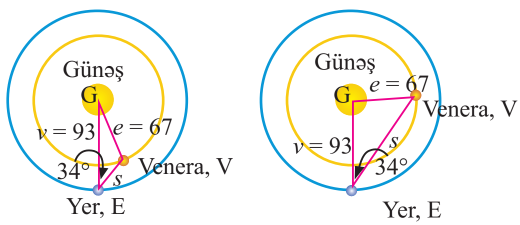
12. Binanın həyətindən eyni vaxtda hərəkətə başlayan iki avtomobilin hərəkət istiqamətləri 70° bucaq əmələ gətirir. Onlardan biri orta sürəti 35 km/saat, digəri isə 45 km/saat olmaqla hərəkət edir. Avtomobillər 45 dəqiqədən sonra iş yerlərinə çatdılar. Bu iki iş yeri arasındakı məsafə təqribən neçə kilometrdir?



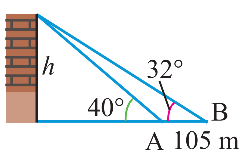
13. Leyla körpünün üzərində dayanaraq, 50 metr hündürlükdən çayda hərəkət edən qayıqları müşahidə edir. A qayığı 230°, B qayığı isə 120° azimutla hərəkət edir. Leyla A qayığını 38°, B qayığını isə 35° eniş bucağı ilə müşahidə etdiyini təxmin edir. Bu məlumatlara görə qayıqlar arasındakı məsafəni tapın.



14. **Astronomiya.** İlin müəyyən vaxtlarında səhərlər Venera planetini göy üzündə görmək mümkündür.
Venera planeti ilə Günəş arasındakı məsafə təqribən 67 milyon mil, Yer planeti ilə Günəş arasındakı məsafə 93 milyon mildir. Günəş ilə Venera 34° bucaq əmələ gətirməklə görünürsə, Yer planeti ilə Venera planeti arasındakı məsafənin təqribən 35 milyon mil və ya 119 milyon mil olduğunu göstərin.

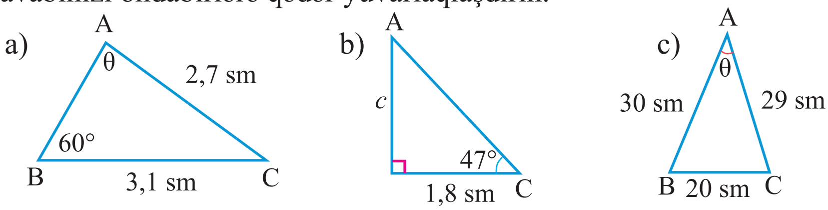


15. Bir-birindən 105 m məsafədə olan A və B nöqtələrindən h hündürlüklü obyekt yüksəklik bucağı uyğun olaraq, 40° və 32° olmaqla müşahidə edilir. Obyektin hündürlüyü neçə metrdir?



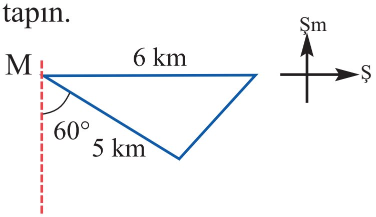
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Şəkildə verilənlərə görə dəyişənlə işarələnmiş bucağı və ya tərəfi tapın. Cavabınızı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

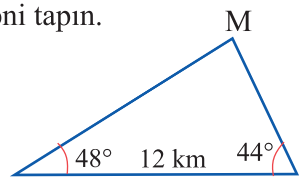


2. İki xizəkçinin M nöqtəsindən başlanan hərəkəti haqqında məlumatı əks etdirən şəkillərə görə məsələləri həll edin.

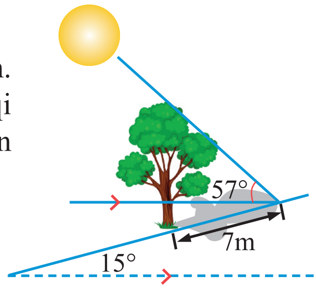
a) Xizəkçilər arasındakı məsafəni tapın.



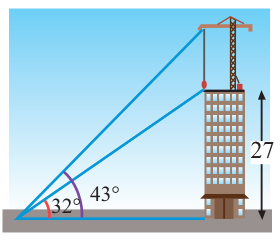
b) Hər bir xizəkçinin qət etdiyi məsafəni tapın.



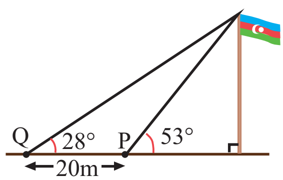
3. Yoxuşda bitən ağacın hündürlüyünü müəyyən edin. Yoxuş üfüqlə 15°-li bucaq, Günəş şüaları üfüqi xətlə 57°-li bucaq əmələ gətirir, Ağacın kölgəsinin uzunluğu 7 m-dir.



4. a) Binanın tikintisində istifadə edilən kranın ən yüksək nöqtəsi ilə binanın ən yüksək nöqtəsinin yerdəki müşahidəçinin ölçmələrinə görə yüksəliş bucaqları uyğun olaraq 43° və 32°-dir. Binanın hündürlüyü 27 m-dir. Kranın ən hündür nöqtəsi ilə müşahidəçi arasındakı məsafə neçə metrdir?



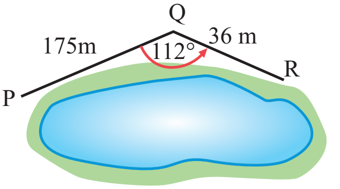
b) Eldar parkdakı bayrağın hündürlüyünü müəyyən etmək istəyir. O, əvvəlcə Q, sonra isə P nöqtəsindən yüksəliş bucağını ölçdü. Bu iki nöqtə arasındakı məsafənin 20 m olduğunu bilərək bayrağın hündürlüyünü hesabladı. $\angle Q = 28°$, $\angle P = 53°$ olarsa, bayrağın hündürlüyünü siz də hesablayın.



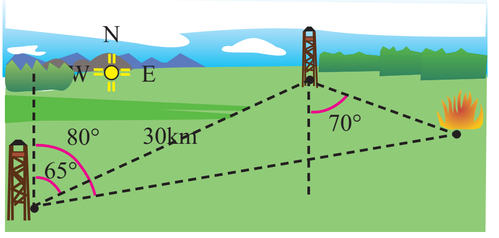
5. Əhməd və Rəşad eyni nöqtədən bir-biri ilə 120° bucaq əmələ gətirən istiqamətlərdə qaçmağa başladılar. Əhməd saatda 8 km sürətlə, Rəşad isə 7 km sürətlə qaçırdı. 30 dəqiqədən sonra onlar arasındakı məsafə nə qədər olacaq? Məsələni uyğun şəkil çəkməklə həll edin.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

6. İbrahim P nöqtəsindən R nöqtəsinə getmək üçün əvvəlcə Q nöqtəsinə, oradan isə R nöqtəsinə getməli oldu. Şəkildə verilənlərə görə P və R nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.



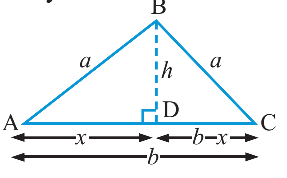
7. Şəkildə verilənə görə yanğın yerindən hər bir stansiyaya qədər məsafəni tapın.

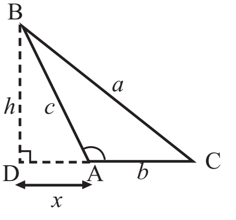


8. Kosinuslar teoremini şəkildə verilmiş üçbucaqlardan istifadə etməklə isbat edin.

İsbat üçün plan. 1) Üçbucağın hündürlüyünün iki düzbucaqlı üçbucağa (ΔADB və ΔBDC) görə müxtəlif ifadələrini və onların bərabərliyini yazın.

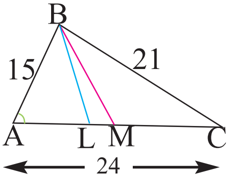
2) Pifaqor teoremindən və $\cos(180 - \angle A) = -\cos\angle A$ eyniliyindən istifadə edin.





9. Paraleloqramın tərəfləri 10 sm və 12 sm-dir. Kiçik diaqonalın 15 sm olduğunu bilərək paraleloqramın iti bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

10. Verilir: ΔABC, $AB=15$, $BC=21$, $AC=24$
BM-median, BL-tənbölən.
Tapın:
1) $\angle A$ 2) AM və BM 3) AL və BL



11. Polis helikopteri 400 m yüksəklikdə uçur. Polis məmuru şimala baxdıqda 20° eniş bucağı ilə qəza törədən avtomobili, cənuba baxdıqda isə 15° eniş bucağı ilə hadisə yerinə gələn təcili yardım maşınını görür.
a) Təcili yardım maşını hadisə yerindən neçə kilometr aralıdadır?
b) Təcili yardım maşınının sürəti saatda 100 km olarsa, neçə dəqiqədən sonra hadisə yerinə çatar?

12. İtibucaqlı üçbucağın həllinə aid real həyati situasiyanı əks etdirən bir məsələ qurun. Məsələnizi ümumsinif müzakirəsinə təqdim edin.

5 Triqonometrik funksiyalar

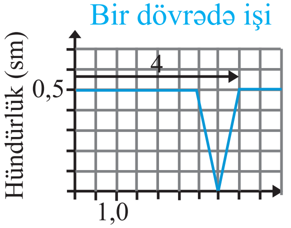
Dövri funksiyalar
$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafikləri
$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri
Beş əsas nöqtəsinə görə sinusoidin qurulması
Triqonometrik funksiyalar və periodik hadisələr
$y = \operatorname{tg} x$ və $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyalarının qrafikləri
Tərs triqonometrik funksiyalar

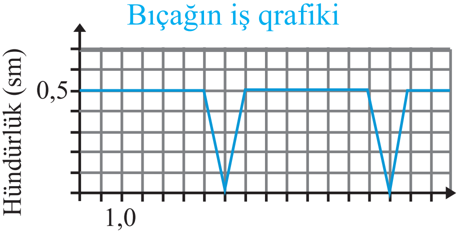
Dövri funksiyalar

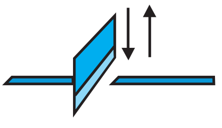
Təbiətdə bir çox hadisələr – günəşin doğması və batması, kometlərin görünməsi, mövsümi olaraq temperaturun dəyişməsi, okeanda dalğaların qabarması və çəkilməsi və s. kimi təbiət hadisələri periodik olaraq təkrarlanır. Həmçinin istehsal sahələrindəki cihazların işini, avtomobillərin hissələrinin hərəkətini dövri funksiyalarla modelləşdirmək olar.

Dövri dəyişməni aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraq.

Lent kəsən cihazın işi. Ölçmə üçün metr aləti istehsal edən şirkətdə kəsici alət uzunluğu 3 m olan nazik lentlər kəsir və lentlər yuvarlanmaqla metr ölçü aləti satış üçün hazırlanır. Cihazın işini göstərən qrafik və izahedici yazı divardan asılmışdır.







1. Bıçaq ən çoxu 0,5 sm hündürlüyə qalxır.
2. Bıçaq 3 saniyə dayanır, 0-3, 4 -7 saniyələrdə və s.
3. 3-cü saniyədən 3,5 saniyəyə qədər bıcaq aşağı enir, lenti kəsir. 3,5 – 4-cü saniyədə bıcaq yuxarı qalxır.
4. Bir tam dövrə 4 saniyə sərf edilir.

Sizcə bıçaq növbəti dəfə neçənci saniyədə lenti kəsəcək?

Ölçmə lentini kəsən cihazın işi periodik olaraq təkrarlanır. Bir period 4 saniyə davam edir. Cihazın bıçağının səthdən hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərən qrafik də bir dövrə uyğun qrafikin təkrarlanması ilə çəkilmişdir. Növbəti dəfə bıçaq 11,5-ci saniyədə lenti kəsəcək.

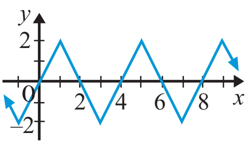
Bu cür xassəyə malik funksiyalar dövri (periodik) funksiyalardır. Dövri funksiyaların qiymətləri müəyyən intervallarda eynilə təkrarlanır.

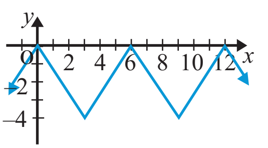
Tutaq ki, elə $T \neq 0$ ədədi var ki, funksiyanın təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $x \pm T$ də təyin oblastına daxildir və $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ ödənir. Onda $f(x)$ funksiyasına dövrü T olan dövri funksiya deyilir. T dövrdürsə, onda $n \cdot T$ də ($n \in Z$) dövrdür.

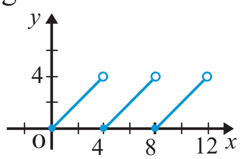
Doğrudan da, məsələn, $f(x \pm 2T) = f((x \pm T) \pm T) = f((x \pm T) = f(x)$

Funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünə onun əsas dövrü deyilir.

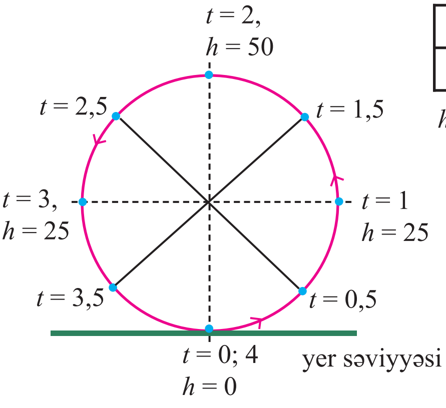
1. Qrafiklərinə görə funksiyaların dövri olub-olmadığını göstərin.



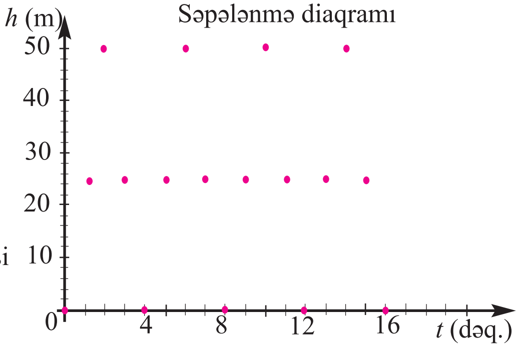




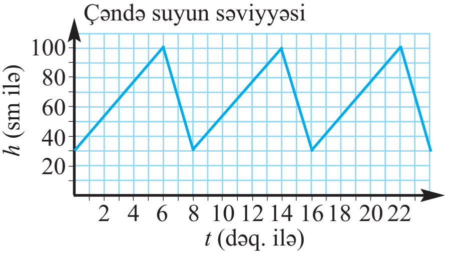
2. **Karuselin hərəkəti.** Diametri 50 m olan sürətli karusel bir tam dövrü 4 dəqiqədə başa vurur. Cədvələ görə $h = 0$ hündürlüyündə kabinə əyləşən şəxs 1-ci, 5-ci, 9-cu dəqiqədə yerdən hansı hündürlükdə olacaq? Karuseldəki şəxsin yerdən hündürlüyünün zamandan asılılığı cədvəllə və koordinat müstəvisi üzərində səpələnmə diaqramı ilə göstərilmişdir. Cədvəli və diaqramı dəftərinizdə çəkin. Uyğun nöqtələri rəngli karandaşlarla karuselin hər tam dövrünü ayrıca göstərmək şərtilə ardıcıl birləşdirin.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0	25	50	25	0	25	50	25	0



3. Çəndən su müəyyən müddət axır, sonra əvvəlki səviyyəyə qədər doldurulur və yenidən müəyyən müddət axır və s.



1) Çənin bir dəfə dolması və boşalmasına nə qədər vaxt sərf edilir?
2) Bu funksiyanın qiymətlər çoxluğunu yazın.
3) 60-cı dəqiqədə çəndə suyun dərinliyi nə qədər olacaq?
4) Növbəti dəfə nə vaxt çəndə suyun dərinliyi 1 m olacaq?

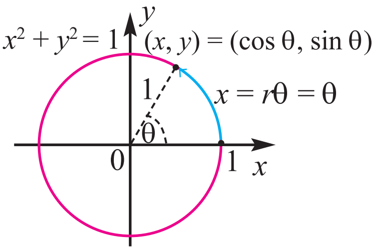
Triqonometrik funksiyaların dövriliyi

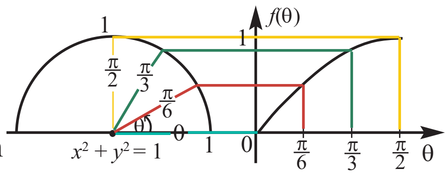
Son tərəfləri üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını nəzərdən keçirərkən, onların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərinin eyni olduğunu gördük.
Məsələn, x-in bütün qiymətləri üçün $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Deməli, triqonometrik funksiyanın qiymətləri təkrarlanır. Sinus və kosinus funksiyalarının qiymətləri 2π, tangens funksiyasının qiymətləri isə π periodu ilə təkrarlanır. x ədədi arqumentinin triqonometrik funksiyası x radian bucağının eyniadlı triqonometrik funksiyasına deyilir. Bucağın triqonometrik funksiyalarının bütün xassələri (tək-cütlüyü, dövriliyi və s.) ədədi arqumentin triqonometrik funksiyası üçün də eynidir. Bu funksiyaların qrafikini uzunluğu dövrə bərabər olan parçada qurub, bu hissəni təkrarlamaq kifayətdir.

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafikləri

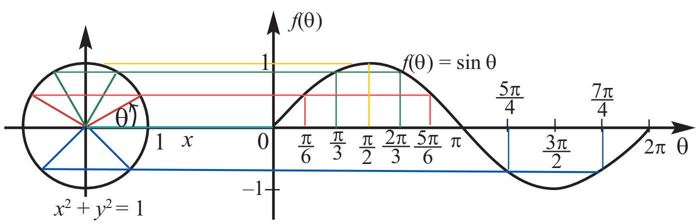
$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki

$f(\theta) = \sin\theta$ dövri funksiyası çevrə üzrə hərəkətdə θ bucağı qədər dönmədə nöqtənin x oxundan hündürlüyünü (şaquli məsafəni) göstərir. Vahid çevrə üzərində hər bir nöqtənin koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ tənliyini ödəməklə $(x; y) = (\cos\theta; \sin\theta)$ kimidir. Burada θ bucağı vahid radiusun x oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Deməli, $(x; y)$ nöqtəsi çevrə üzrə dəyişir və onun y koordinatını $\sin\theta$ təyin edir. Nöqtənin çevrə qövsü boyu hərəkəti ilə $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qiymətləri arasında birqiymətli asılılıq vardır. Vahid çevrənin I rübdə yerləşən qövsünü üç bərabər qövsə ayıraq və bölgü nöqtələrindən $\left(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ absis oxuna paralel düz xətlər keçirib, bu xətlərin uyğun olaraq $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtələrini qeyd edib, uyğun nöqtələri birləşdirsək, şəkildəki qrafiki alarıq.

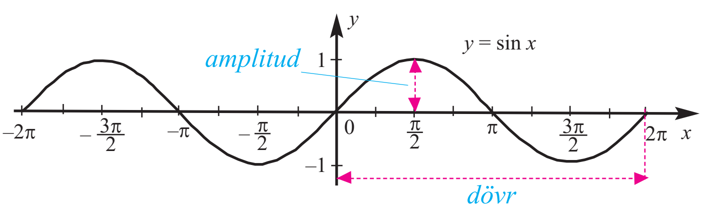




Vahid çevrə boyu tam dönmənin 360° və ya 2π radian olduğu məlumdur. $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ aralığında analoji qayda ilə quraq:



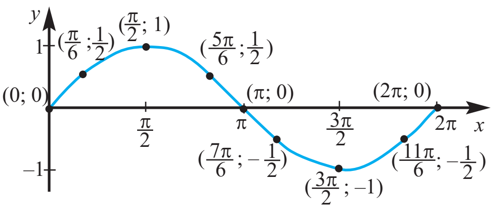
Sinus dövri funksiya olduğundan uzunluğu 2π olan aralıqlarda $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafiki eyni ilə təkrarlanır. Arqument üçün x, funksiya üçün y işarələməsindən istifadə etməklə funksiyanı $y = \sin x$ şəklində yazaq. $y = \sin x$ funksiyasının $[-2\pi; 2\pi]$ aralığında qrafiki aşağıdakı kimi olacaq:

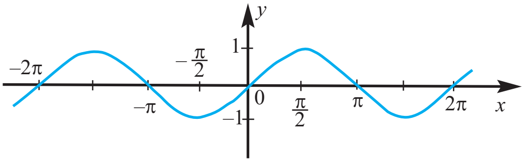


$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki (amplitudu 1, dövrü 2π olan) sinusoid adlanır.

$y = \sin x$ funksiyasının qrafikini qiymətlər cədvəlinin köməyi ilə də qurmaq olar. Sinus dövri funksiya olduğundan qrafikini uzunluğu 2π olan $[0; 2\pi]$ parçasında qurmaq kifayətdir. Cədvəldəki nöqtələri koordinat müstəvisi üzərində yerləşdirək və səlis əyri ilə birləşdirək. Alınan qrafik $y = \sin x$ funksiyasının qrafikidir və sinusoid adlanır.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$(x; y)$	$(0; 0)$	$(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\pi; 0)$	$(\frac{7\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{11\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(2\pi; 0)$





Qiymətlər cədvəli, həmçinin qrafik göstərir ki, $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcından – $(0; 0)$ nöqtəsindən keçir. x-in qiyməti 0-dan $\frac{\pi}{2}$ -yə qədər artdıqda y-in qiyməti 0-dan 1-ə qədər artır; x-in qiyməti $\frac{\pi}{2}$ -dən π-yə qədər artdıqda y-in qiymətləri 1-dən 0-a qədər azalır; x-in qiyməti π-dən $\frac{3\pi}{2}$ -yə qədər artdıqda y-in qiyməti 0-dan –1-ə qədər azalır; x-in qiyməti $\frac{3\pi}{2}$ -dən 2π -yə qədər artdıqda y-in qiyməti –1-dən 0-a qədər artır.

$y = \sin x$ funksiyasının qiymətlər cədvəli və qrafiki əsasında onun xassələrini sadalayaq:

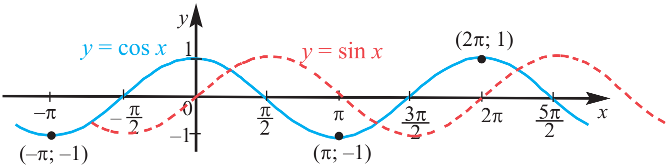
1. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
2. Qiymətlər çoxluğu $[-1; 1]$ parçasıdır.
3. $\sin x$ funksiyası tək funksiyadır: $\sin(-x) = -\sin x$. Yəni qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.
4. Dövrü 2π olan dövri funksiyadır: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
5. Sinusoid absis oxunu ... , -2π; $-\pi$; 0; π; 2π; 3π, ... və s. nöqtələrində kəsir, yəni $x = \pi n$ $(n \in Z)$ olduqda $y = \sin x$ funksiyası sıfra çevrilir.

   Sinusoid koordinat başlanğıcından keçir.
6. Funksiyanın maksimum qiyməti 1-dir və bu qiyməti x-in ... , $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; ..., yəni $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.
7. Funksiyanın minimum qiyməti –1-dir və bu qiyməti x-in ... , $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$; ..., yəni $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafikləri

$y = \cos x$ funksiyasının qrafiki

$y = \cos x$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ parçasında $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə analoji qaydada vahid çevrədən istifadə etməklə həndəsi üsulla, həmçinin qiymətlər cədvəlinə görə qurmaq olar. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ olduğundan $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürməklə $y = \cos x$ funksiyasının qrafiki alınır.



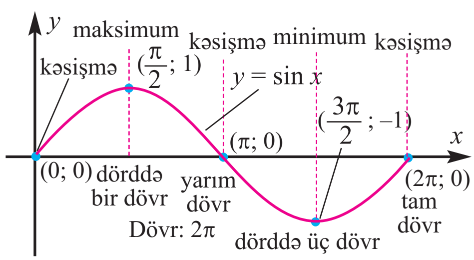
$y = \cos x$ funksiyasının qrafiki əsasında onun xassələrini sadalayaq:

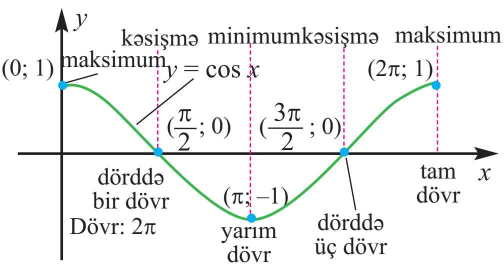
1. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. $x \in R$
2. Qiymətlər çoxluğu $[-1; 1]$ parçasıdır.
3. $y = \cos x$ funksiyası cüt funksiyadır (qrafiki y oxuna nəzərən simmetrikdir).
4. Əsas dövrü 2π olan dövri funksiyadır: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5. Qrafik absis oxunu $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ və s. nöqtələrində kəsir, yəni $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ olduqda $y = \cos x$ funksiyası sıfra çevrilir.

   Qrafik ordinat oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir.
6. Funksiyanın maksimum qiyməti 1-dir və bu qiyməti x-in $\ldots, -2\pi; 0; 2\pi; 4\pi, 6\pi, \ldots$, yəni $x = 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.
7. Funksiyanın minimum qiyməti -1-dir və bu qiyməti x-in $\ldots, -\pi; \pi; 3\pi; 5\pi, \ldots$, yəni $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyasılarının qrafiklərini beş əsas nöqtəyə (absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri və ekstremum nöqtələri) görə qurmaq əlverişlidir.
Beş əsas nöqtə $y = \sin x$ funksiyası üçün $[0; 2\pi]$ aralığında aşağıdakı ardıcıllıqla növbələşir: **sıfrı** **maksimum nöqtəsi** **sıfrı** **minimum nöqtəsi** **sıfrı**

Beş əsas nöqtə $y = \cos x$ funksiyası üçün $[0; 2\pi]$ aralığında aşağıdakı ardıcıllıqla növbələşir: **maksimum nöqtəsi** **sıfrı** **minimum nöqtəsi** **sıfrı** **maksimum nöqtəsi**





$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafikləri

Öyrənmə tapşırıqları

1. a) $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini $[0;\ 2\pi]$ parçasında beş əsas nöqtəyə görə qurun.
b) $[0;\ 2\pi]$ aralığında $\sin x = \frac{1}{3}$ bərabərliyini ödəyən neçə x ədədi var?

2. a) $y = \cos x$ funksiyasının qrafikini $[0;\ 2\pi]$ parçasında beş əsas nöqtəyə görə qurun.
b) $[0;\ 2\pi]$ aralığında $\cos x = 0{,}6$ bərabərliyini ödəyən neçə x ədədi var?

3. Funksiyaların qrafikini verilən aralıqlarda qurun.

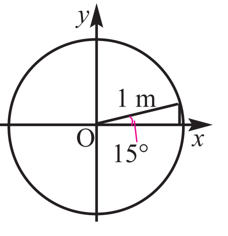
$y = \sin x,\ 0 \le x \le 4\pi$ $\qquad$ $y = \cos x,\ 0 \le x \le 4\pi$

$y = \sin x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$ $\qquad$ $y = \cos x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

4. $y = \sin x$ funksiyasının maksimum nöqtələrinə uyğun arqumentin üç qiymətini yazın.

5. $y = \cos x$ və $y = \sin x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun, oxşar və fərqli cəhətlərini yazın.

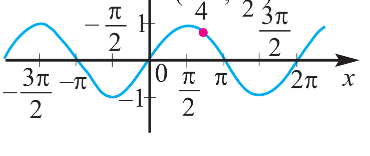
6. Diametri 2 m olan diskin hərəkətini tənzimləmək üçün diskin üzərinə işarə qoyulmuşdur və müəyyən zaman anlarında bu işarənin su səthindən hündürlüyü yoxlanılır. Bu yoxlamadakı şəkilləri çəkin və riyazi hesablamaları siz də yerinə yetirin. Bunun üçün vahid radiuslu çevrəni 15° addımla dönmə bucaqlarına bölün və hər addıma uyğun çevrə üzərindəki nöqtənin x oxundan məsafəsini müəyyən edin. Bu işi iki dövr (720°) üçün yerinə yetirin. Daha bir dövr üçün də uyğun qiymətləri bu yolla müəyyən etməyə ehtiyac varmı? Ehtiyac yoxdursa, bu qiymətləri birbaşa yazın, varsa hesablayın.



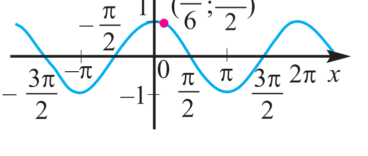
a) Diskin 15°, 375°, 735° dönmələrində işarə su səthindən neçə metr hündürlükdə olacaq?
b) Vahid çevrə üzərindəki qiymətləri koordinat müstəvisi üzərində qeyd etməklə qrafik qurun. Bu qrafik hansı funksiyanın qrafikinə oxşayır?

7. $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiki üzərində bir nöqtənin koordinatları qeyd edilmişdir. Ordinatı verilən nöqtənin ordinatına bərabər olmaqla qrafik üzərində yerləşən daha 4 nöqtənin koordinatlarını yazın.

a)



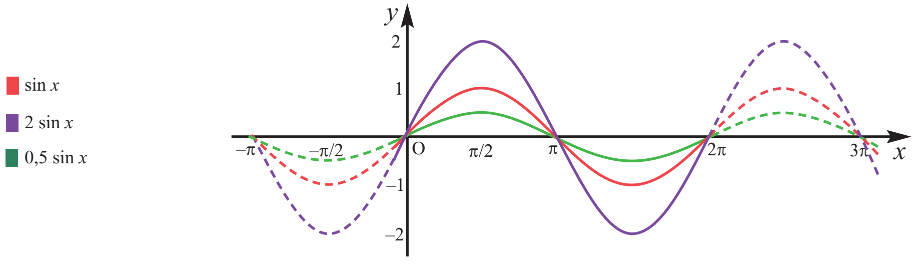
b)



$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri

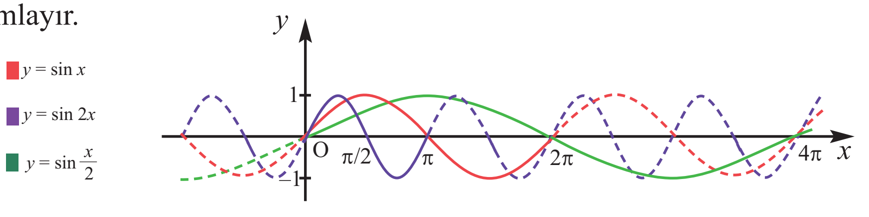
Sıxılma və dartılma

Nümunə 1. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtənin absisini olduğu kimi saxlayıb, ordinatını 2-yə vursaq, $y = 2 \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtə alınır. Bu o deməkdir ki, $y = 2 \sin x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin absis oxundan 2 dəfə dartılması ilə qurula bilər. $y = 0{,}5 \sin x$ funksiyasının qrafiki isə $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini absis oxuna 2 dəfə sıxmaqla alınar.



$y = a \sin x$ və $y = a \cos x$ funksiyalarının qrafikləri uyğun olaraq $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin $|a| > 1$ olduqda absis oxundan dartılması ilə, $|a| < 1$ olduqda isə absis oxuna sıxılması ilə alınır.
$a < 0$ olduqda funksiyanın qrafiki x oxuna nəzərən simmetrik çevrilir.

Nümunə 2. $y = \sin 2x$ funksiyası $y = \sin x$ funksiyasını 2 dəfə "qabaqlayır". $y = \sin x$ funksiyası 0-dan 1-ə qədər qiymətlərini $[0; \frac{\pi}{2}]$ parçasında, $y = \sin 2x$ funksiyası isə bu qiymətləri $[0; \frac{\pi}{4}]$ parçasında alır. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtənin ordinatını dəyişməyib, absisini $\frac{1}{2}$-ə vursaq, $y = \sin 2x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtə alınır.
$y = \sin 2x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən 2 dəfə sıxılmış olur, tam dövrünü $[0; \pi]$ parçasında tamamlayır.
$y = \sin \frac{1}{2} x$ funksiyasının qrafiki isə $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin ordinat oxundan 2 dəfə dartılması ilə alınır, tam dövrünü $[0; 4\pi]$ parçasında tamamlayır.



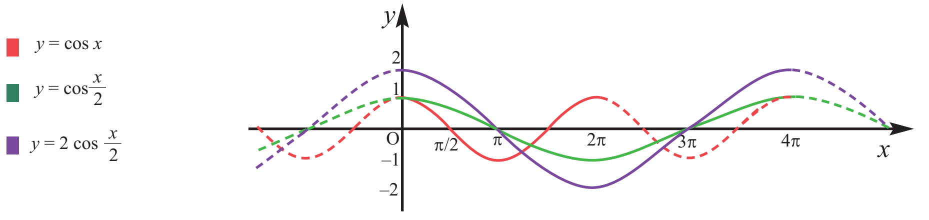
$y = \sin bx$ və $y = \cos bx$ funksiyalarının qrafikləri uyğun olaraq $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin $b > 1$ olduqda ordinat oxuna sıxılması ilə, $0 < b < 1$ olduqda isə ordinat oxundan dartılması ilə alınır.
$b < 0$ olan hal isə sinus funksiyasının tək, kosinus funksiyasının cüt olması nəzərə alınmaqla yuxarıdakı hala gətirilir.

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri

$y = a \sin bx$ ($y = a \cos bx$) funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ ($y = \cos x$) funksiyasının qrafikinin koordinat oxları boyunca ardıcıl dartılması və ya sıxılması ilə alınan sinusoid olur. $|a|$-nın qiyməti böyüdükcə amplitud artır, kiçildikcə amplitud azalır. $|b|$-nin qiyməti böyüdükcə funksiyanın dövrü kiçilir, kiçildikcə isə dövrü böyüyür.

Nümunə 3. $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafikini qurun.

1. $y = \cos x$ funksiyasının qrafiki ordinat oxundan 2 dəfə dartılmaqla $y = \cos\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafiki qurulur.
2. Alınmış qrafik absis oxundan 2 dəfə dartılır.



Öyrənmə tapşırıqları

1. $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini:
a) absis oxundan 4 dəfə dartdıqda; b) absis oxuna 3 dəfə sıxdıqda;
c) ordinat oxundan 2 dəfə dartdıqda hansı funksiyanın qrafiki alınar?

2. Funksiyaların hər birinin $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.
a) $y = 5\sin x$ b) $y = \frac{2}{5}\sin x$ c) $y = \sin 3x$ d) $y = -3\sin 4x$

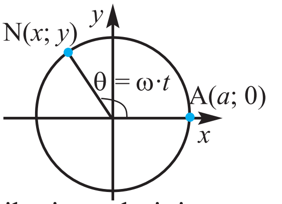
3. Funksiyaların hər birinin $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.
a) $y = 4\cos x$ b) $y = \frac{1}{3}\cos x$ c) $y = \cos 4x$ d) $y = -4\cos 3x$

4. $y = \sin x$ funksiyasının $[0; 2\pi]$ parçasında qrafikini beş əsas nöqtəyə görə qurun. Koordinat oxlarından dartılmada (sıxılmada) bu beş nöqtənin çevrildiyi nöqtələrə görə uyğun funksiyanın qrafikini təsvir edin.
a) $y = 3\sin x$ b) $y = \frac{1}{2}\sin x$ c) $y = \sin 2x$ d) $y = 4\sin 2x$

5. $y = \cos x$ funksiyasının $[0; 2\pi]$ parçasında qrafikini beş əsas nöqtəyə görə qurun. Koordinat oxlarından dartılmada (sıxılmada) bu beş nöqtənin çevrildiyi nöqtələrə görə uyğun funksiyanın qrafikini təsvir edin.
a) $y = 2\cos x$ b) $y = \frac{1}{2}\cos x$ c) $y = \cos 2x$ d) $y = 4\cos 2x$

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri

Araşdırma. Başlanğıc anda A(a; 0) nöqtəsində olan maddi nöqtə radiusu a olan çevrə üzrə ω bucaq sürəti ilə hərəkət edir.



1) Bu nöqtənin koordinatlarını t zamanından asılı ifadə edin.

2) Nöqtənin ordinatının və absisinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

3) Zamanın bir-birindən $\frac{2\pi}{\omega}$ qədər fərqli anlarında nöqtənin eyni vəziyyətdə olduğunu əsaslandırın.

$y = a\sin bx$, $y = a\cos bx$ funksiyasının dövrü və amplitudu

Teorem: $y = f(x)$ funksiyası əsas dövrü T olan dövri funksiyadırsa, $y = a{\cdot}f(bx)$ funksiyası əsas dövrü $\frac{T}{|b|}$ olan dövri funksiyadır (burada a və b sıfırdan fərqli həqiqi ədədlərdir).

Buradan alınır ki, $y = a\ \sin bx$ (və $y = a\ \cos bx$) funksiyalarının **əsas dövrü** $\frac{2\pi}{|b|}$ olur. Doğrudan da,

$$f(x) = a\sin bx = a\sin(bx + 2\pi) = a\sin b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

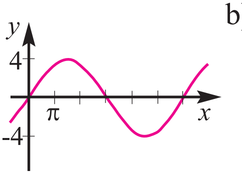
$$g(x) = a\cos bx = a\cos(bx + 2\pi) = a\cos b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = g\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

$|a|$ **amplitudu** göstərir. Amplitud maksimum və minimum qiymətlərin fərqinin yarısına bərabərdir.

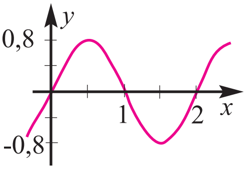
Nümunə. $y = -3\sin 4x$ funksiyasının amplitudu $|-3|$ və ya 3, əsas dövrü $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ -dir.

6. Verilən funksiyaların amplitudunu və dövrünü tapın.

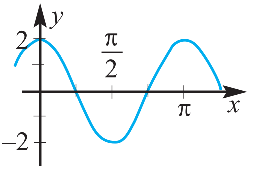
a)



b)



c)



d) $y = \frac{1}{2}\cos \pi x$ e) $y = \sin 2x$ f) $y = 3\cos\frac{1}{4}x$

g) $y = 5\cos\frac{1}{2}x$ h) $y = 2\sin\frac{1}{2}\pi x$ i) $y = \frac{1}{3}\sin 4\pi x$

7. 1) Amplitud və dövrü verilən $y = a\sin bx$ funksiyasının düsturunu yazın (burada $a > 0$, $b > 0$).

a) Amplitudu: $\frac{1}{2}$
Dövrü: 3π

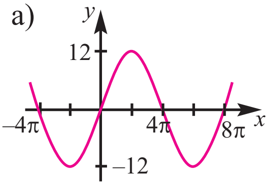
b) Amplitudu: 4
Dövrü: π

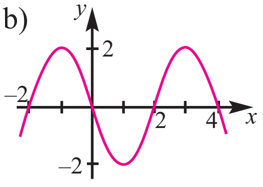
c) Amplitudu: 2
Dövrü: 2π

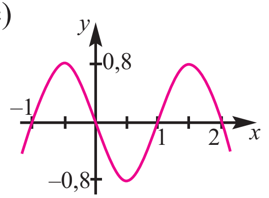
2) Amplitud və dövrü verilən $y = a \cos bx$ funksiyasının düsturunu yazın (burada $a > 0$, $b > 0$).

a) Amplitudu: $\frac{1}{3}$ Dövrü: 5π b) Amplitudu: 2 Dövrü: π c) Amplitudu: 5 Dövrü: $\frac{\pi}{2}$

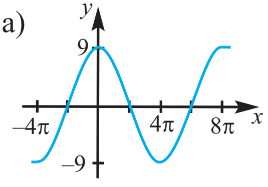
8. Verilən qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a \sin bx$ şəklində yazın.

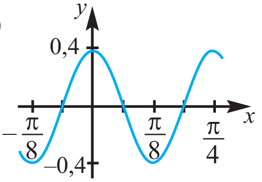
a)


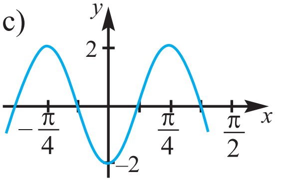
b)


c)


9. Verilən qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a \cos bx$ şəklində yazın.

a)


b)


c)


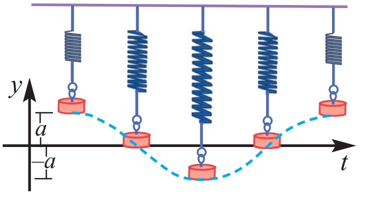
10. Verilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının əsas dövrlərini müəyyən edin. Onların ortaq dövrünü tapın.

a) $f(x) = 2 \sin \frac{2x}{3}$, $g(x) = 3 \cos \frac{1}{2} x$ b) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $g(x) = 4 \cos 3x$ c) $f(x) = 3 \sin \frac{1}{3} x$, $g(x) = \frac{2}{3} \cos \frac{2}{5} x$

Göstəriş: Verilən funksiyaların dövrləri T_1 və T_2, ortaq dövrləri T olarsa, $T = mT_1 = nT_2$ bərabərliyini ödəyən ən kiçik natural m və n ədədlərini tapın.

Tətbiq tapşırıqları. $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyaları ilə modelləşdirmə

11. **Fizika.** Şəkildə yaydan asılmış cismin hərəkəti təsvir edilmişdir. Cisim sükunətdə olduqda sistem tarazlıqdadır. Cismin sükunət halı hərəkətin başlanğıcı olaraq qəbul edilir. ***a*** hərəkət başlanğıcından **yerdəyişməni** göstərir. Vahid zamandakı dövrlərin sayı **tezlik (ω)**, cismin tam bir rəqsə sərf etdiyi zaman rəqsin dövrü, **periodu** (T) adlanır. Tezlik və period qarşılıqlı tərs kəmiyyətlərdir: $\omega = \frac{1}{T}$



Cismin rəqsi hərəkətini $y = a \cos kt$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada y yayın tarazlıq vəziyyətindən şaquli yerdəyişməsini (sm-lə), a başlanğıc yerdəyişməni, k sabiti yayın elastiklik əmsalını, t isə zamanı (saniyə ilə) göstərir. $a = 0{,}5$ sm və $k = 5\pi$ olarsa, rəqsi hərəkətin amplitudunu, periodunu və tezliyini tapın.

12. Karuselin hərəkəti. Karuselin hər hansı kabinəsində oturmuş olsanız, sizin yerdən olan məsafəniz zamandan asılı olaraq periodik dəyişəcək. Karuselin oxu ilə eyni səviyyədən hərəkətə başlandığını qəbul edək. Karuselin diametri 20 m-dir və 3 dəqiqədə 4 dəfə dövr edir.

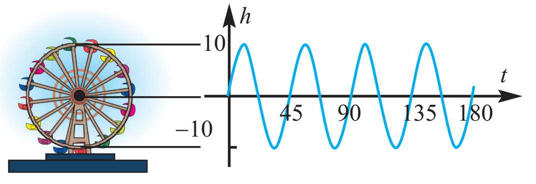
a) Absis oxu üzərində zamanı (saniyə ilə), ordinat oxu üzərində başlanğıc nöqtədən olan məsafəni qəbul etməklə karuselin hərəkət qrafikini çəkin.

b) Karuselin hərəkətinə uyğun funksiyanın əsas dövrünü tapın və düsturunu yazın.

Həlli: Tezlik, yəni bir dəqiqədəki dövrlərin sayı $\frac{4}{3}$-dür. Tezliyin tərsi olduğundan period dəqiqənin $\frac{3}{4}$ - ü qədər, yəni 45 saniyədir.

Karuselin kabinəsi başlanğıc vəziyyətdən 20 : 2 = 10 m yuxarıda (10) və aşağıda (–10) olacaq. Bu hərəkətin qrafikinin periodu 45 saniyə olan sinusoid olduğunu görərik.

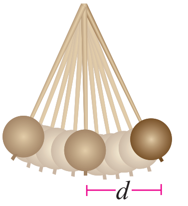
Funksiyanın düsturunu $y = a \sin bx$ şəklində yazaq.



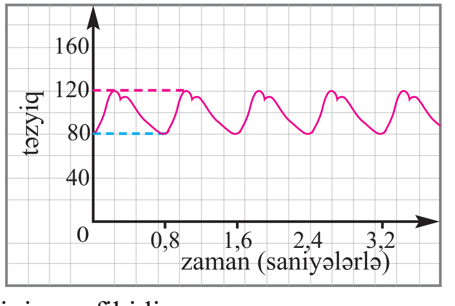
$$T = \frac{2\pi}{b}, \qquad \frac{2\pi}{b} = 45, \qquad b = \frac{2\pi}{45}. \qquad \text{Amplitud: } 10$$

Funksiyanın düsturu: $h = 10 \sin \frac{2\pi}{45} t$.

13. Rəqqasın hərəkətini $d = 4 \cos 8\pi t$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Burada, d rəqqasın başlanğıc vəziyyətindən məsafəsini (santimetrlə), t zamanı (saniyələrlə) göstərir. Rəqqas başlanğıc vəziyyətindən ən çoxu neçə santimetr uzaqlaşır? Rəqsin dövrünü və tezliyini tapın.



14. İnsanın hər ürək döyüntüsündə (ürək bir dəfə vurduqda) qanın təzyiqi ən yüksək və ən aşağı qiyməti arasında dəyişir. Normal qan təzyiqinin yuxarı səviyyəsi tibbdə sistola adlanır və 120 mm civə sütunu, aşağı səviyyəsi isə diastola adlanır və 80 mm civə sütunu səviyyəsində qəbul edilir.



Şəkildəki qrafik bir şəxsin qan təzyiqinin qrafikidir.

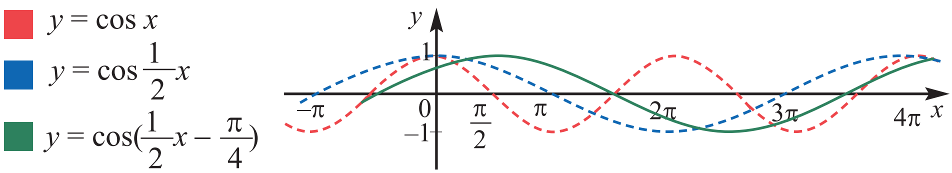
1) Qrafikə görə periodu (bir ürək döyüntüsünə sərf olunan vaxt) və amplitudu təyin edin.
2) Bu şəxsin bir dəqiqədəki ürək döyüntülərinin sayını tapın.

Üfüqi sürüşmə – faza.

$y = a\ sinb(x - c)$, $y = a\ cosb(x - c)$ funksiyasında c həddi qrafikin üfüqi sürüşməsini göstərir və **faza sürüşməsi** adlanır.

Nümunə. $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ funksiyasının qrafikini qurun.

$y = \cos x$ funksiyasının qrafikini ordinat oxundan 2 dəfə dartmaqla $y = \cos\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafiki qurulur. $y = \cos\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{2}$ vahid sağa sürüşdürməklə $y = \cos\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})$, yəni $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ funksiyasının qrafiki alınır.



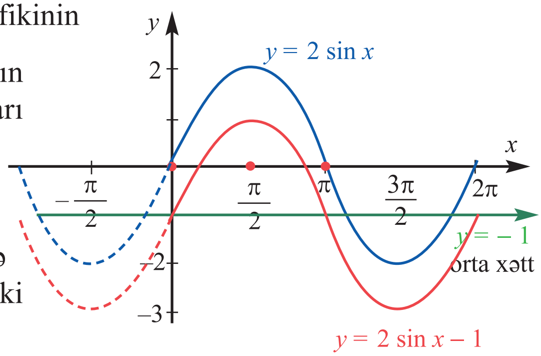
Şaquli sürüşmə.

$y = a\ sin\ bx + d$, $y = a\ cos\ bx + d$ funksiyalarında d həddi şaquli istiqamətdə sürüşməni göstərir: $d > 0$ olarsa, funksiyanın qrafiki yuxarı, $d < 0$ olarsa, aşağı sürüşdürülür.

Nümunə. $y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli: $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin $y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafikinə çevrilmə addımları aşağıdakı kimidir:

1. Amplitudu 2 dəfə artırılır, $y = 2 \sin x$ qrafiki alınır.
2. Bir vahid aşağı sürüşdürülür və $y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafiki alınır.

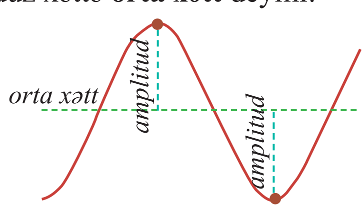


Funksiyanın qiymətlər çoxluğu $-3 \le y \le 1$ olacaq.

$y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafikinin $y = -1$ düz xəttinə nəzərən 2 vahid yuxarı və aşağı dəyişməsi müşahidə edilir. Bu düz xəttə **orta xətt** deyilir.

$$\text{orta xətt} = \frac{\text{maksimum} + \text{minimum}}{2}$$

maksimum = orta xətt + amplitud
minimum = orta xətt – amplitud



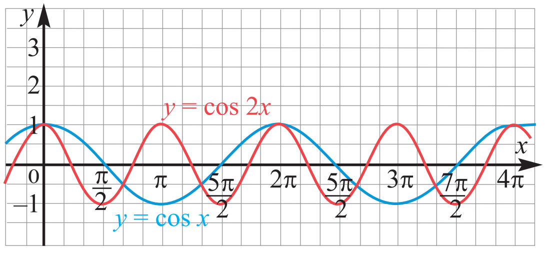
$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri

$$y = a \sin b(x - c) + d$$

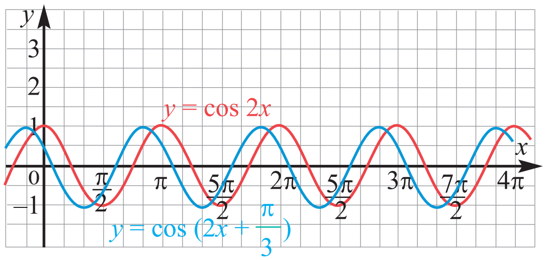
- a — amplituda təsir edir
- b — əsas dövrə təsir edir
- c — üfüqi yerdəyişməyə təsir edir
- d — şaquli yerdəyişməyə təsir edir

Nümunə. $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$ funksiyasının qrafikini qurun.

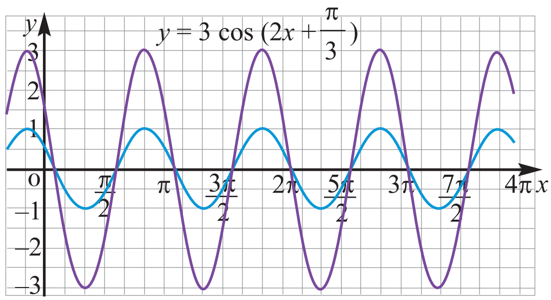
1) $y = \cos x$ funksiyasının qrafikini ordinat oxuna 2 dəfə sıxmaqla $y = \cos 2x$ funksiyasının qrafiki alınır.



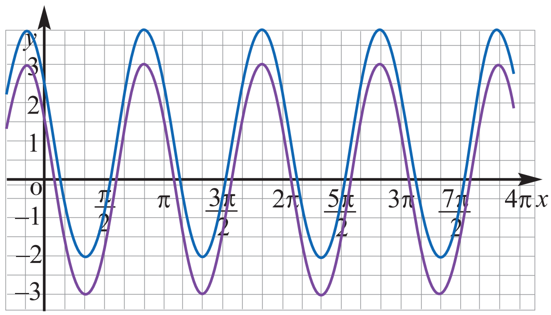
2) $y = \cos 2x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{6}$ vahid sola sürüşdürməklə $y = \cos 2(x + \frac{\pi}{6})$, yəni $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki qurulur.



3) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafikini ordinat oxu boyunca 3 dəfə dartmaqla $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki qurulur.



4) $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafikini şaquli istiqamətdə 1 vahid yuxarı sürüşdürməklə $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$ funksiyasının qrafiki qurulur.



15. Funksiyaların hər birinin qrafikinin $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.

a) $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ b) $y = 3\sin\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$ c) $y = 2\sin(x + 60^\circ) - 4$

16. Funksiyaların hər birinin qrafikinin $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.

a) $y = \cos(x - \frac{5\pi}{6})$ b) $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ c) $y = 4\cos(x - 15^\circ) + 3$

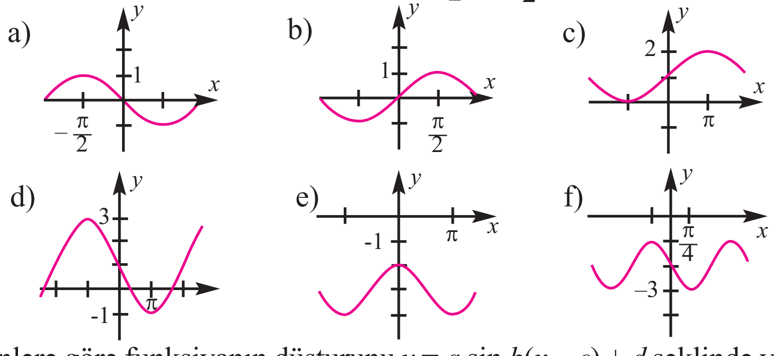
17. Funksiyaların maksimum və minimumunu tapın, qiymətlər çoxluğunu yazın.

a) $y = 3\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 5$ b) $y = \frac{1}{2}\sin 3x - 3$ c) $y = \frac{1}{3}\cos(x + 50^\circ) + \frac{1}{6}$

18. Hansı qrafikin hansı funksiyaya aid olduğunu müəyyən edin.

1) $y = -2 + \sin(2x + \pi)$ 3) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 5) $y = -\sin(x + \pi)$

2) $y = -3 + \cos x$ 4) $y = 1 + 2\cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$ 6) $y = 1 + \sin\frac{1}{2}x$



19. Verilənlərə görə funksiyanın düsturunu $y = a\sin b(x - c) + d$ şəklində yazın.

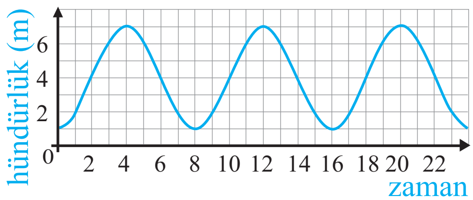
a) amplitud 4, dövrü π, faza sürüşməsi $\frac{\pi}{4}$ vahid sağa, şaquli yerdəyişmə 6 vahid aşağı.

b) amplitud 0,5, dövrü 3π, faza sürüşməsi $\frac{\pi}{3}$ vahid sola, şaquli yerdəyişmə 2 vahid yuxarı.

20. Funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

a) $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{4})$ b) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 2$ c) $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 3$

21. **Nərgiz karuseldə.** Qrafik Nərgizin karuseldə olarkən yerdən hündürlüyünün (metrlə) zamandan (saniyə ilə) asılılığını əks etdirir.



1) Təsvir olunmuş funksiyanın dövrünü tapın. Bu nəyi ifadə edir?

2) Bu fuksiyanın qiymətlər çoxluğunu yazın.

3) Nərgiz 24 -30 saniyə intervalının hansı anında 4 m hündürlükdə olacaq?

Beş əsas nöqtəsinə görə sinusoidin qurulması

Hərəkət və oxşarlıq çevrilmələrində əyrinin "forması" saxlanılır. Ona görə də ancaq sinusun qrafiki deyil, eyni zamanda oxlar boyunca sıxılmanın (dartılmanın) və ardıcıl hərəkətin köməyi ilə alınan əyri də sinusoid adlanır. $y = a\sin bx$ və $y = a\cos bx$ şəklində funksiyaların xassələrinin sinusun (yaxud kosinusun) xassələrinə analoji olması belə funksiyaların tədqiqini asanlaşdırır. Başlıcası onların dövrünün və qiymətlərinin 0 və ya $\pm a$-ya bərabər olduğu nöqtələrin tapılmasıdır.

$y = a\sin bx$ və $y = a\cos bx$ funksiyalarının $[0; \frac{2\pi}{|b|}]$ parçasında qrafikini x-in 5 mühüm nöqtədəki qiymətinə görə aşağıdakı addımlarla qurmaq olar:

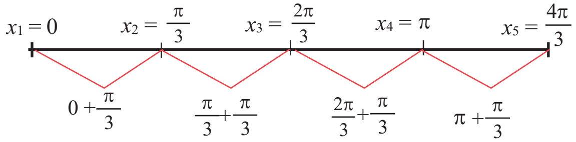
1. Qrafikin amplitudu müəyyən edilir.
2. Funksiyanın əsas dövrü müəyyən edilir. $\frac{2\pi}{|b|} = T$
3. $[0; T]$ parçası 4 bərabər hissəyə bölünür: $0, \frac{T}{4}; \frac{T}{2}; \frac{3T}{4}; T$.
4. Beş mühüm nöqtə - ***x* oxu ilə kəsişmə nöqtələri**, **maksimum və minimum** nöqtələridir. x-in qeyd edilmiş qiymətlərində y-in qiymətləri hesablanır.
5. $(x; y)$ nöqtələri (5 nöqtə) koordinat müstəvisi üzərində qeyd edilir.
6. Bu nöqtələr birləşdirilir. Alınan sinusoidal əyri uyğun funksiyanın bir tam dövrdəki qrafikidir. Bu qrafiki təkrarlamaqla istənilən parçada verilmiş funksiyanın qrafikini qurmaq olar.

Nümunə 1. $y = \cos\frac{3x}{2}$ funksiyasının qrafikini 5 əsas nöqtəyə görə qurun.

Həlli: Amplitud: $a = 1$

Əsas dövr: $T = \frac{2\pi}{|b|}$; $b = \frac{3}{2}$, $T = 2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$

x oxu üzərində uzunluğu bir tam dövrə bərabər olan parçanı dörd bərabər hissəyə bölək. Tam dövrün $\frac{1}{4}$-i $\frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ olduğundan $x_1 = 0$ nöqtəsindən başlamaqla $\frac{\pi}{3}$ qədər sağda dövrün $\frac{1}{4}$-nə uyğun $x_2 = \frac{\pi}{3}$ nöqtəsini, sonra dövrün $\frac{1}{2}$-nə uyğun $x_3 = \frac{2\pi}{3}$ nöqtəsini, daha sonra dövrün $\frac{3}{4}$-nə uyğun $x_4 = \pi$ və nəhayət tam dövrə uyğun $x_5 = \frac{4\pi}{3}$ nöqtələrini qeyd edək.



Beş əsas nöqtəsinə görə sinusoidin qurulması

x-in qeyd olunan qiymətlərinə uyğun $y = \cos\dfrac{3x}{2}$ funksiyasının qiymətlərini hesablayaq:

1. $x = 0 \quad y = 1 \qquad (0;1)$ **maksimum nöqtəsi**

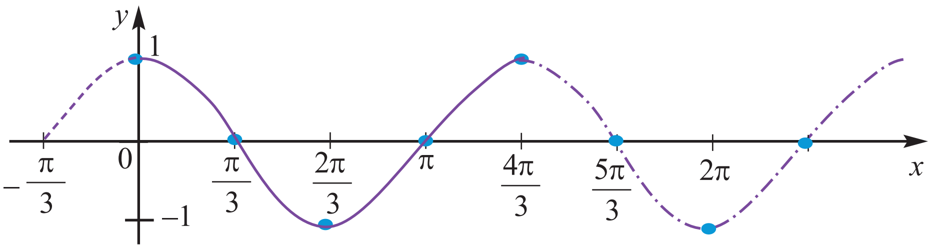
2. $x = \dfrac{\pi}{3} \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \qquad \left(\dfrac{\pi}{3};0\right)$ **absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi**

3. $x = \dfrac{2\pi}{3} \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \cos\pi = -1 \qquad \left(\dfrac{2\pi}{3};-1\right)$ **minimum nöqtəsi**

4. $x = \pi \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\pi = 0 \qquad (\pi\,;\,0)$ **absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi**

5. $x = \dfrac{4\pi}{3} \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4\pi}{3} = \cos 2\pi = 1 \qquad \left(\dfrac{4\pi}{3};\,1\right)$ **maksimum nöqtəsi**

Bu nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd edib, səlis xətt ilə birləşdirsək, $y = \cos\dfrac{3x}{2}$ funksiyasının $[0; \dfrac{4\pi}{3}]$ parçasında qrafikini qururuq. Bu qrafiki absis oxu boyunca $\dfrac{4}{3}\pi n \ (n \in Z)$ qədər sürüşdürməklə $y = \cos\dfrac{3x}{2}$ funksiyasının bütün ədəd oxunda qrafiki alınır (şəkildə punktirlə göstərilmişdir).



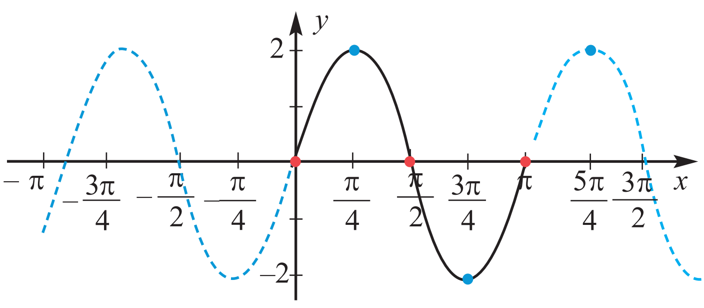
Nümunə 2. $y = 2\sin 2x$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli: **Amplitud**: $a = 2$, y-in qiyməti –2 və 2 arasında dəyişəcək.

Əsas dövr: $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$, $b = 2$; $T = \pi$

x-in $[0;\ \pi]$ parçasını (bir dövrü) 4 bərabər hissəyə bölən qiymətlərində funksiyanın uyğun qiymətlərini tapaq və bunun əsasında qrafiki quraq..

	x	$y = 2\sin 2x$
kəsişmə	0	0
maksimum	$\frac{\pi}{4}$	2
kəsişmə	$\frac{\pi}{2}$	0
minimum	$\frac{3\pi}{4}$	–2
kəsişmə	π	0

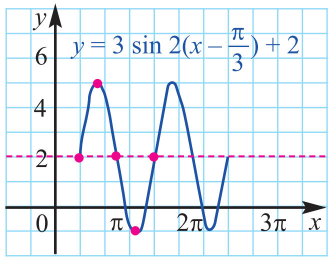


Beş əsas nöqtəsinə görə sinusoidin qurulması

Nümunə 3. $y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ funksiyasının tam dövrünə uyğun başlanğıc və son nöqtələrini tapmaq üçün $0 \le 2(x - \frac{\pi}{3}) \le 2\pi$ bərabərsizliyi həll edilir:

$$0 \le x - \frac{\pi}{3} \le \pi \qquad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$$

Burada $\frac{\pi}{3}$ başlanğıc nöqtə olmaqla, həm də fazanı göstərir.



$[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$ parçasını 4 bərabər hissəyə bölməklə 5 əsas nöqtəni müəyyən etmək lazımdır. Verilən funksiyanın 5 əsas nöqtəsi üçün x-in qiymətləri $\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{12}; \frac{4\pi}{3}$ olur.

x-in bu qiymətlərini $y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ düsturunda nəzərə almaqla $(\frac{\pi}{3}; 2)$ $(\frac{7\pi}{12}; 5)$ $(\frac{5\pi}{6}; 2)$ $(\frac{13\pi}{12}; -1)$ $(\frac{4\pi}{3}; 2)$ nöqtələri müəyyən edilir və funksiyanın qrafiki qurulur.

$y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ funksiyasının:
amplitudu: $a = 3$, dövrü: π, faza sürüşməsi: $\frac{\pi}{3}$, orta xətti: $d = 2$,
maksimum qiyməti: $d + a = 2 + 3 = 5$, minimum qiyməti: $d - a = 2 - 3 = -1$,
təyin oblastı: həqiqi ədədlər çoxluğu ($x \in R$), qiymətlər çoxluğu: $-1 \le y \le 5$

Öyrənmə tapşırıqları

1. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qrafiklərini nümunəyə uyğun qiymətlər cədvəli tərtib etməklə eyni koordinat müstəvisində qurun.

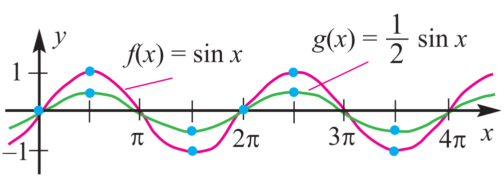
a) $f(x) = \sin x$ və $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$

Funksiyalar	$f(x) = \sin x$	$g(x) = \frac{1}{2}\sin x$
x oxu ilə kəsişmə	$(0; 0)$	$(0; 0)$
Maksimum	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2})$
x oxu ilə kəsişmə	$(\pi; 0)$	$(\pi; 0)$
Minimum	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{3\pi}{2}; -\frac{1}{2})$
x oxu ilə kəsişmə	$(2\pi; 0)$	$(2\pi; 0)$

b) $f(x) = \sin x$; $g(x) = -3\sin x$

c) $f(x) = \cos x$; $g(x) = 4\cos x$

d) $f(x) = \cos x$; $g(x) = -\frac{1}{2}\cos x$



Beş əsas nöqtəsinə görə sinusoidin qurulması

2. Əsas dövrü T: a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{4\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 4 olan $y = \sin bx$ funksiyası üçün b-nin qiymətini tapın. Uzunluğu dövrə bərabər olan $[0; T]$ parçasını 4 bərabər intervala bölün və x-in bölgü nöqtələrindəki qiymətlərində y-in uyğun qiymətlərini hesablayın.

3. a) $y = \sin x$ funksiyasının $[0; 2\pi]$ intervalında yerləşən 5 əsas nöqtəsinin koordinatlarını yazın.
b) $y = \sin 2x$ funksiyasının $[0; \pi]$ parçasında qrafikini 5 əsas nöqtəyə görə qurun, artma və azalma aralıqlarını göstərin.

4. Funksiyaların qrafikini uzunluğu bir dövrə bərabər olan parçada 5 əsas nöqtəsini müəyyən etməklə qurun.

a) $y = \sin \frac{1}{4}x$ b) $y = 5 \sin 2\pi x$ c) $y = 3 \cos 4x$ d) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

5. Verilən funksiyaların dövrünü radian və dərəcə ilə yazın. Qrafiklərini uzunluğu bir dövrə bərabər olan parçada 5 əsas nöqtəyə görə qurun.

a) $y = \sin 4x$ b) $y = \sin \frac{2}{3}x$ c) $y = \cos \frac{1}{2}x$ d) $y = \cos 2x$

6. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində 5 əsas nöqtəyə görə qurun.

1) $f(x) = -2 \sin x$, $g(x) = 4 \sin x$
2) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin \frac{x}{3}$
3) $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = -\cos 4x$

7. 1) Verilən amplitud və perioda görə funksiyanın düsturunu $y = a \sin bx$ şəklində yazın və qrafikini 5 əsas nöqtəyə görə qurun.

a) amplitud = 2,5; dövr = 6π b) amplitud = 4; dövr = $\frac{\pi}{2}$

2) Verilən amplitud və perioda görə funksiyanın düsturunu $y = a \cos bx$ şəklində yazın və qrafikini 5 əsas nöqtəyə görə qurun.

a) amplitud = 5; dövr = 2π b) amplitud = $\frac{3}{2}$; dövr = π

8. **Açıq tipli sual.** Dövrü $\frac{\pi}{2}$, amplitudu 1,5 olan bir sinus və bir kosinus funksiyası yazın.

9. Funksiyanın dövrünü, amplitudunu müəyyən edin. Uzunluğu dövrə bərabər olan parçada qrafikini 5 əsas nöqtəyə görə qurun.

a) $y = 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) - 2$ b) $y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 3$

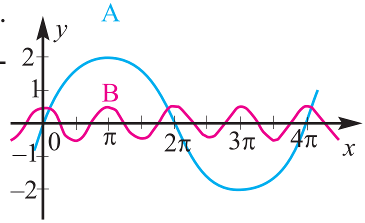
10. Funksiyaların qrafikinə görə əsas dövrünü və amplitudunu müəyyən edərək, düsturunu $y = a \sin bx$ və $y = a \cos bx$ şəklində yazın.

Nümunə.

A qrafiki: Əvvəlcə amplitudu müəyyən edək. ən böyük qiyməti 2, ən kiçik qiyməti –2 olduğundan, $a = \dfrac{2-(-2)}{2} = 2$

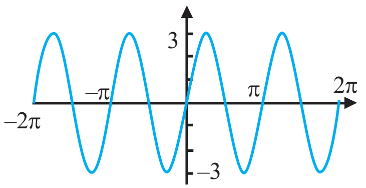
Dövrü 4π-dir.

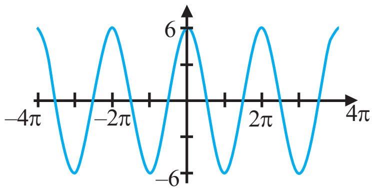
$T = \dfrac{2\pi}{|b|}$ olduğundan, $4\pi = \dfrac{2\pi}{|b|}$; $b = \dfrac{1}{2}$

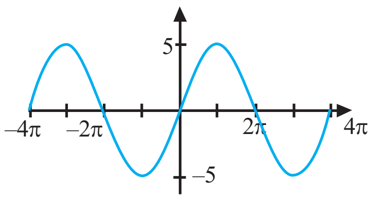


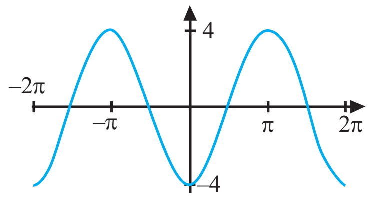
A qrafiki sinus funksiyasının qrafikinə uyğundur, burada amplitudun $a = 2$ və $b = \dfrac{1}{2}$ olduğunu nəzərə alsaq, $y = 2 \sin \dfrac{1}{2} x$ olar.

B qrafiki: Analoji qayda ilə amplitudun $a = 0{,}5$, əsas dövrün π və $\pi = \dfrac{2\pi}{|b|}$ bərabərliyindən $b = 2$ olduğunu tapırıq. Qrafik kosinus funksiyasının qrafikinə uyğundur. Funksiyanın düsturu $y = 0{,}5 \cos 2x$ şəklindədir.

a) 

b) 

c) 

d) 

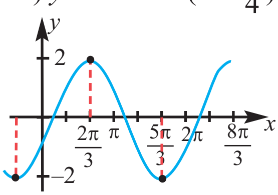
11. Funksiyaların qrafiklərini qurun.

1) $y = 2 + \sin x$ 2) $y = 5 - \cos x$ 3) $y = -2 + \cos x$

4) $y = \cos(x + \dfrac{\pi}{2})$ 5) $y = -\sin(x + \pi)$ 6) $y = \sin(x - \dfrac{\pi}{2})$

7) $y = 5 - \cos(x - \dfrac{\pi}{4})$ 8) $y = -2 - \sin(x - \pi)$ 9) $y = 3 + \cos(x + \dfrac{\pi}{4})$

12. Verilən qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a \cos(bx + c)$ şəklində yazın. Funksiyanın qrafikini x oxunun müsbət istiqamətində daha bir dövr davam etdirməyə imkan verən 5 nöqtənin koordinatlarını yazın.



Triqonometrik funksiyalar və periodik hadisələr

Təbiətdə, real həyati situasiyalarda çoxlu sayda periodik dəyişən hadisələrə rast gəlinir. Yer kürəsinin fırlanması, fəsillərin dəyişməsi, insanın nəfəs alması, ürək döyünməsi və s. Həmçinin bir çox fiziki hadisələrin (elektrik hadisələri, optika, rəqsi hərəkətlər və s.) tədqiqində dövri funksiyalardan istifadə edilir. Ən sadə rəqsi hərəkət olan harmonik rəqslər $y = a\ \sin(bx + c)$ və ya $y = a\ \cos(bx + c)$ şəklində triqonometrik funksiyalarla ifadə edilir.

Nümunə 1. Biologiya. Bioloqlar heyvanların, quşların çoxalmasını araşdırmaq üçün triqonometrik funksiyalarla modelləşdirir, müəyyən proqnozlar verirlər. Alimlər eyni regionda bayquşların və siçanların çoxalmasını araşdırmışlar. Onların tədqiqatları əsasında bayquşların zamandan (aylarla) asılı sayını $B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, siçanların sayını $S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.

Bu funksiyaların qrafiklərinə görə bayquşların və onların yemi olan siçanların sayının dəyişməsi haqqında fikir yürütmək mümkündür.

a) Hər iki funksiyanın qrafikini qurun.

b) Bayquşların və siçanların sayının dəyişməsi haqqında fikir yürüdün.

c) Bayquşların sayının siçanların sayına nisbətinin dəyişməsini zamana görə araşdırın.

Həlli: a) $B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$

Bayquşların sayına uyğun funksiyanın maksimumu 1100, minimumu 900-dür.

Amplitudu: 100 Şaquli sürüşmə: $d = 1000$ (ilkin sayı)

Orta xətt = 1000 Dövrü: $\frac{2\pi}{|b|}$, $b = \frac{\pi}{12}$ olduğundan $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$

Deməli, əsas dövr 24 aydır.

$S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$

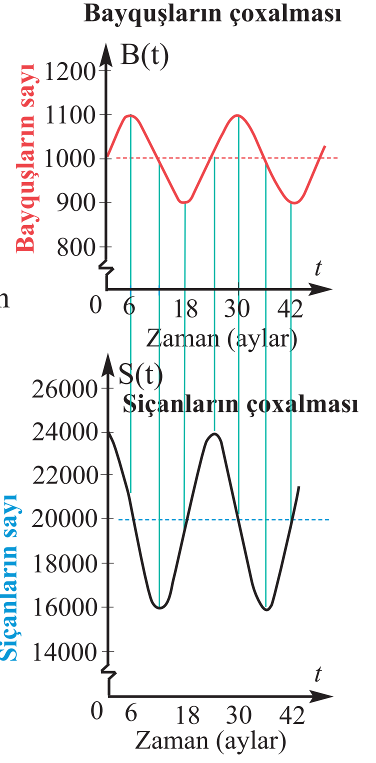
Siçanların sayına uyğun funksiyanın maksimumu 24 000, minimumu 16 000-dir.

Amplitudu: 4000 Şaquli sürüşmə: $d = 20000$ vahid (ilkin sayı)

Orta xətt = 20000 Əsas dövrü: $\frac{2\pi}{|b|}$, $b = \frac{\pi}{12}$ olduğundan $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$

Deməli, bu funksiyanın da əsas dövrü 24 aydır.

b) Qrafiklər eyni miqyasla qurulduğundan onları müqayisə etmək olar. Bu müqayisə göstərir ki, bayquşların sayı artdıqda siçanların sayı azalır və bayquşlara yem olan siçanların sayı minimum qiymətə yaxınlaşır. Siçanların sayı bayquşların sayı azaldıqda artmağa başlayır.

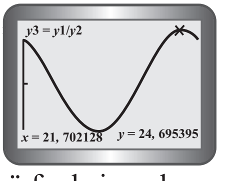


c) Cədvəldə hər 6 ayda bayquşların sayının siçanların sayına olan nisbəti verilmişdir.

Vaxt	Bayquş	Siçan	Nisbət
0	1000	24000	0,041
6	1100	20000	0,055
12	1000	16000	0,062
18	900	20000	0,045
24	1000	24000	0,041

Bu nisbət müəyyən qanunauyğunluqla dəyişməlidir. Qanunauyğunluğu görmək üçün qrafkalkulyatorda nisbətə uyğun funksiyanın qrafikini aşağıdakı qayda ilə quraq.

Qrafkalkulyatora $B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ funksiyasını y_1
$S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ funksiyasını y_2 kimi daxil
etməklə $y = \frac{y_1}{y_2}$ funksiyasının qrafikini quraq.



Göründüyü kimi, bu halda iki dövrü funksiyanın nisbəti də dövrü funksiya olur.

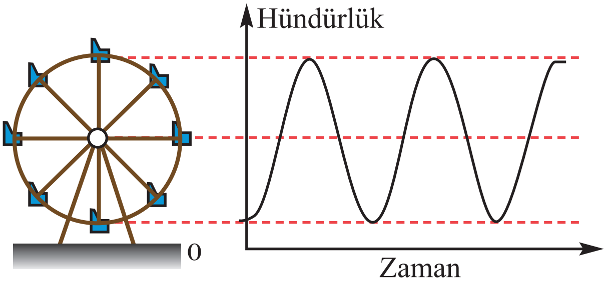
Tətbiq tapşırıqları

1. Hava proqnozu. Cədvəldə verilmiş məlumat aylıq orta temperaturu göstərir. Yanvar ayını $t = 1$, fevral ayını $t = 2$ və s. qəbul etməklə ayları üfüqi, temperaturu isə şaquli ox üzərində qeyd edərək cədvələ uyğun qrafik qurun. Temperatur dəyişməsini triqonometrik funksiya ilə modelləşdirin.

Aylar	Yanvar	Fevral	Mart	Aprel	May	Iyun	Iyul	Avqust	Sentyabr	Oktyabr	Noyabr	Dekabr
Orta temperatur (°C)	–14,8	–12,7	–6,8	1,2	9,2	15,1	17,2	15,1	9,1	1,3	–6,7	–12,6

2. **Sağlamlıq.** $P = 100 - 20\cos\dfrac{5\pi t}{2}$ funksiyası ilə sakit dayanmış şəxsin t (saniyə) zamanındakı qan təzyiqini müəyyən etmək olar.
a) funksiyanın periodunu müəyyən edin.
b) şəxsin 1 dəqiqədəki ürək döyüntülərinin sayını müəyyən edin.

3. Karusel yerdən 10 m hündürlükdəki ox ətrafında hər 60 saniyədə bir dövrə vurur. Sərnişinlər karuselə kabinələr ən aşağıda, yerdən 2 m hündürlükdə olduqda minirlər. Şəkildəki qrafik karuselin ilk 150 saniyədəki hərəkətini təsvir edir.



a) Karusel hərəkətə başladıqda ən aşağıda yerləşən kabinənin istənilən anda yerdən olan hündürlüyünü müəyyən edən funksiyanın düsturunu yazın.
b) Günel karusel hərəkətə başlayanda ən aşağıdakı kabinədə idi. Hərəkətin 2,5 dəqiqəsində Günelin yerdən təqribən hansı hündürlükdə olduğunu müəyyən edin.

4. **Biologiya.** Dovşanların $D(t)$ və çaqqalların $Ç(t)$ sayını göstərən riyazi modellər:
$D(t) = 30000 + 15000\cos\dfrac{\pi t}{12}$
$Ç(t) = 4000 + 2000\sin\dfrac{\pi t}{12}$ kimidir.
Hər iki funksiyanın qrafikini eyni koordinat sistemində qurun və şəkildə göstərilmiş şərti diaqramı qrafik üzərində təqdim edin.

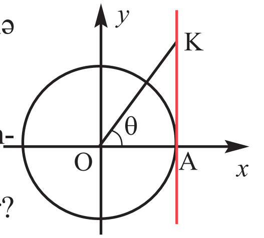
5. Velosipedin gecə düz yolda hərəkəti video-qeydə alınmışdır. Velosipedin təkərinin üzərində olan işığın müxtəlif vaxtlarda yerdən olan hündürlükləri videodan ölçülmüş və cədvəl tərtib edilmişdir.

Zaman (t san)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Hündürlük (H sm)	27	45	54	45	27	18	27	45	54

a) Funksiyanın bir dövrə uyğun qrafikini qurun.
b) H-ın t-dən asılılığını triqonometrik funksiya ilə modelləşdirin.
c) Velosipedin təkərinin diametrini tapın.
d) Velosiped hansı sürətlə hərəkət edib?

$y = \text{tg}\, x$ və $y = \text{ctg}\, x$ funksiyalarının qrafikləri

Araşdırma. Bucağın tangensinin dəyişməsi. 1) Damalı vərəqdə koordinat müstəvisi və mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu çevrə çəkin. Çevrəyə (1;0) nöqtəsində toxunan çəkin.



2) θ dönmə bucağının son tərəfinin bu toxunanla kəsişmə nöqtəsini K ilə qeyd edin. ΔOAK-dan tg θ–nı tapın.

$\text{tg}\,\theta = \frac{AK}{OA} = \frac{AK}{1} = AK$

İti θ dönmə bucağı üçün tg θ qiymətcə AK parçasının uzunluğuna bərabərdir.

3) 45°-li bucağın son tərəfi toxunanla hansı nöqtədə kəsişir?

4) Transportirin köməyilə müxtəlif ölçülü daha bir neçə bucaq çəkin və onların toxunanla kəsişmə nöqtələrinin ordinatını tapın.

5) θ bucağı 90°-yə yaxınlaşdıqca, K nöqtəsinin ordinatı necə dəyişir? $\theta = 90°$ olduqda bucağın son tərəfi toxunanla kəsişərmi?

6) Dövrü T olan funksiyanı araşdırmaq üçün uzunluğu T olan intervalda onun dəyişməsini öyrənmək kifayətdir.

tg θ -nin dəyişməsini hansı aralıqda öyrənmək məqsədəuyğun olardı?

7) tg θ $\theta = 90°$ və $\theta = -90°$ olduqda təyin olunmayıb, (–90°; 90°) aralığında təyin olunmuşdur.

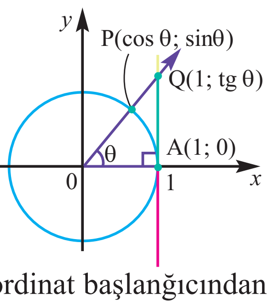
Cədvəli doldurun və tangens funksiyasının qrafikini qurun.

Bucağın ölçüsü	–70°	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°	70°
toxunan üzərindəki nöqtənin ordinatı									

8) $y = \text{tg}\,\theta$ funksiyasının qrafikini qrafkalkulyatorla da qurun.

$y = \text{tg}\, x$ funksiyası

θ bucağının tangensinin qiyməti koordinat başlanğıcı və vahid çevrə üzərində yerləşən (cos θ; sin θ) nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalının qiymətidir.

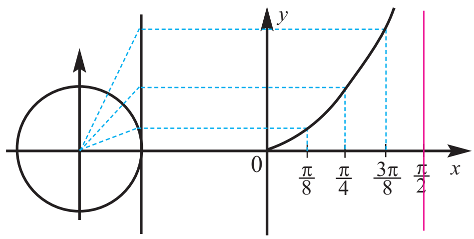


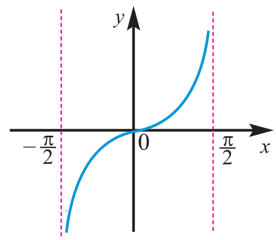
Şəkildən göründüyü kimi toxunanın AQ parçasının uzunluğu Q nöqtəsinin ordinatının qiymətinə bərabərdir. Q nöqtəsinin koordinatları (1; tg θ) kimidir. AQ düz xəttinə tangenslər xətti deyilir.

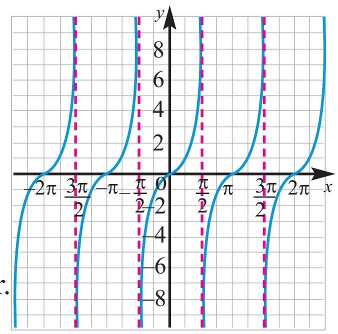
tg 0 = 0 olduğundan $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcından keçir. x dəyişəni $\frac{\pi}{2}$ -dən kiçik qalmaqla ona yaxınlaşdıqca tg x artır və $+\infty$-a yaxınlaşır. $x = \frac{\pi}{2}$ şaquli düz xəttinə, eləcə də $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$ ($k \in Z$) düz xətlərinə $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafikinin şaquli asimptotları deyilir.

$y = \text{tg}\, x$ və $y = \text{ctg}\, x$ funksiyalarının qrafikləri

Vahid radiuslu çevrənin I rübünü və $[0; \frac{\pi}{2})$ aralığını 4 bərabər hissəyə bölək və tangenslər xətti üzərində qiyməti uyğun bucaqların tangensinə bərabər olan parçalar quraq. Tangenslər xətti üzərində alınmış hər bir nöqtədən Ox oxu üzərində absisi uyğun bucağın qiymətinə bərabər olan nöqtədən qaldırılmış perpendikulyarı kəsənə qədər Ox oxuna paralellər çəkək. Göstərilən kəsişmə nöqtələrini ardıcıl olaraq səlis xətlə birləşdirsək, $[0; \frac{\pi}{2})$ aralığında $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafikini alarıq. $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$ olduğu üçün, alınmış qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik çevirməklə $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ intervalında tg x-in qrafiki qurulur.







$y = \text{tg}\, x$ dövrü π olan dövri funksiyadır. Ona görə qurulmuş qrafiki π qədər sağa və sola davam etdirməklə tangensoid adlanan əyri alırıq.

- Funksiyanın qrafiki kəsilməz əyri deyil, x-in $\frac{\pi}{2}$ və onun tək misillərinə uyğun qiymətlərində kəsilir.
- Funksiyanın maksimumu və minimumu yoxdur.
- Funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlərdir.
- Funksiyanın əsas dövrü π-yə bərabərdir.
- Funksiyanın qrafiki x oxunu $x = \pi n$, $(n \in Z)$ nöqtələrində kəsir
- Funksiya $\frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in Z)$ qiymətlərində təyin olunmamışdır. Bu nöqtələrdən keçən və punktirlə çəkilmiş xətlər qrafikin şaquli asimptotlarıdır.
- $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının təyin oblastı: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $(n \in Z)$
- Funksiya iki qonşu asimptotu arasında artandır.
- Tək funksiyadır: $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$

Öyrənmə tapşırıqları.

1. Tangens funksiyasının xassələrindən istifadə etməklə hesablayın.

a) $\text{tg}(-\frac{\pi}{4})$ b) $\text{tg}(\frac{5\pi}{4})$ c) $\text{tg}(-\frac{11\pi}{3})$

2. $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının $[-2\pi; 2\pi]$ aralığında qrafikini qurun.

$y = \text{tg}\, x$ və $y = \text{ctg}\, x$ funksiyalarının qrafikləri

$y = \text{ctg}\, x$ funksiyası

$y = \text{ctg}\, x$ funksiyasının qrafikini qurmaqdan ötrü

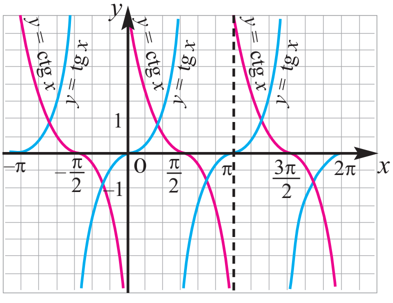
$\text{ctg}\, x = -\,\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ eyniliyindən istifadə edək.

1) $y = \text{tg}\, x$ tangensoidi absis oxu boyunca $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürülür.

2) Alınan əyri absis oxuna nəzərən simmetrik əks etdirilir.

$x = \pi n$ olduqda tangensin qiyməti sıfıra brabərdir, kotangens funksiyası isə x-in bu qiymətlərində təyin olunmamışdır:

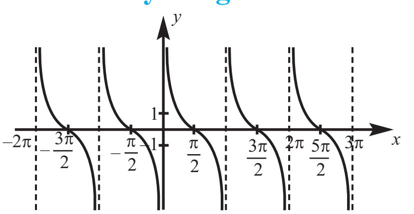
$$\text{ctg}\, x = \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$



Qrafikdən göründüyü kimi, tangens və kotangens funksiyalarının qrafiklərinin x oxu ilə kəsişmə nöqtələri (sıfırları) və asimptotları yerini dəyişmişdir.

Əsas xassələri:

y = ctg x



- Əsas dövrü π-dir.
- Təyin oblastı πn-dən (n istənilən tam ədəddir) fərqli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
- Qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlərdir.
- İki qonşu asimptotu arasında azalan funksiyadır.
- Tək funksiyadır. $\text{ctg}\,(-x) = -\,\text{ctg}\, x$

Öyrənmə tapşırıqları.

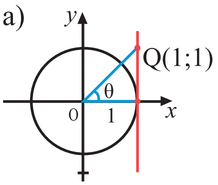
3. Apardığınız araşdırmaya görə aşağıdakı suallara cavab verin.

a) $\alpha = 90°$ və $\alpha = -90°$ olduqda tangens funksiyası təyin olunmamışdır. Bu qrafikdə özünü necə göstərir?

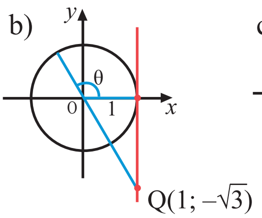
b)Tangens funksiyasının dövrü neçə radian və ya neçə dərəcədir?

4. tg θ-nı və θ bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

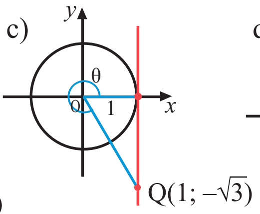
a)



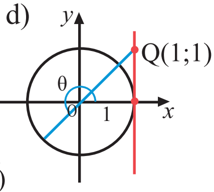
b)



c)

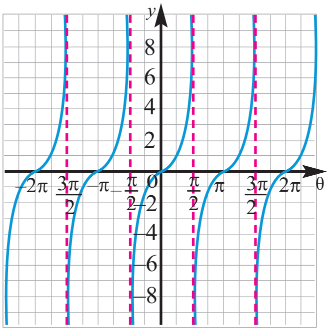


d)



$y = \text{tg}\, x$ və $y = \text{ctg}\, x$ funksiyalarının qrafikləri

5. tg θ funksiyasının qrafikinə görə onun tələb olunan qiymətlərini tapın.



a) $\text{tg}\,\frac{\pi}{4}$ b) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$ c) $\text{tg}(-\frac{7\pi}{4})$

d) tg 0 e) tg π f) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$

6. Funksiyaların qrafiklərini tələb olunan aralıqda qurun.

a) $y = \text{tg}\, x \quad -90° < x < 90°$

b) $y = \text{tg}\, x \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

c) $y = \text{tg}\, x \quad -90° < x < 270°$

d) $y = \text{tg}\, x \quad -\pi \le x \le \pi$

7. a) $\alpha = \frac{11\pi}{24}$ olduqda tg α ≈ 7,6 olduğunu bilərək və tangens funksiyasının əsas dövründən istifadə edərək, bu qiymətə uyğun bucağın daha 3 qiymətini yazın.

b) α = 1,25 olduqda tg α ≈ 3 olduğunu bilərək və tangens funksiyasının əsas dövründən istifadə edərək, bu qiymətə uyğun bucağın daha 3 qiymətini yazın.

c) $-\pi \le x \le \pi$ aralığında x-in elə iki qiymətini yazın ki, bu qiymətlərdə $y = \text{tg}\, x$ funksiyası təyin olunmasın.

8. $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafiki x-in 90º-yə yaxınlaşdığı hissədə sanki şaquli düz xətt formasını alır. Aşağıdakı cədvəllərdə tangensin verilən bucaqlara uyğun qiymətlərini kalkulyatorla hesablayın. θ bucağı 90º-yə yaxınlaşdıqca tangensin qiyməti necə dəyişir? 90º-dən uzaqlaşdıqda necə dəyişir?

θ	tg θ
89,5º	
89,9º	
89,999º	
89,999999º	

θ	tg θ
90,5º	
90,01º	
90,0001º	
90,000001º	

9. Hər bir funksiyanın $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında: a) sıfırlarını; b) şaquli asimptotlarını tapın.

1) $y = \text{tg}\, x$ 2) $y = \text{ctg}\, x$

10. $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında x-in elə üç qiymətini yazın ki, bu qiymətlərdə

a) kotangens; b) tangens funksiyası təyin olunmasın.

11. $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$ funksiyalarının qrafiklərini qurun və bu qrafiklərə görə onların tək və ya cüt olduqlarını izah edin. Bu fikri cəbri yazılışlarla da göstərin.

$y = \operatorname{tg} x$ və $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyalarının qrafikləri

$y = a \operatorname{tg} bx$ funksiyasının qrafiki

a və b sıfırdan fərqli həqiqi ədədlər olduqda $y = a \operatorname{tg} bx$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün aşağıdakı əsas göstəriciləri müəyyən etmək lazımdır:

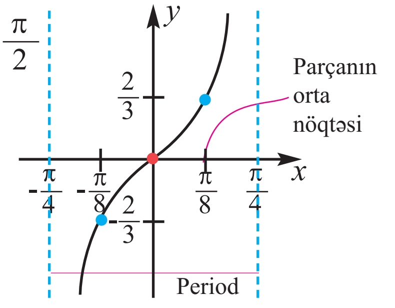
1. Dövrü: $\frac{\pi}{|b|}$. Məsələn, $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ funksiyasının əsas dövrü $\frac{\pi}{3}$-dür.
2. Şaquli asimptotları: $x = \frac{\pi}{2|b|} \cdot (2n+1)$, $n \in Z$ düz xətləridir.

   Məsələn, $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ funksiyasının şaquli asimptotları

   $x = (2n+1)\frac{\pi}{2\cdot 3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$ düz xətləridir.
3. x oxu ilə kəsişmə nöqtəsi ilə asimptot arasındakı parçanın orta nöqtəsi müəyyən edilir. Bu nöqtədə y-in qiyməti ya a, ya da $-a$-ya bərabər olur.

Nümunə 1. $y = \frac{2}{3} \operatorname{tg} 2x$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli: Period: $T = \frac{\pi}{|b|}$, $b = 2$ olduğundan $T = \frac{\pi}{2}$



Absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi: (0; 0)

Koordinat başlanğıcına ən yaxın asimptotları:

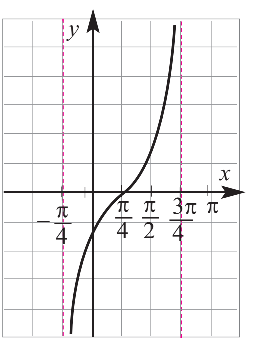
$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ yəni } x = \frac{\pi}{4}$$

və $$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ yəni } x = -\frac{\pi}{4}$$

Orta nöqtələr : $x = (0 + \frac{\pi}{4}) : 2 = \frac{\pi}{8}$, $x = (-\frac{\pi}{4} + 0) : 2 = -\frac{\pi}{8}$ və qrafik üzərində bunlara uyğun nöqtələr $(\frac{\pi}{8}; \frac{2}{3})$, $(-\frac{\pi}{8}; -\frac{2}{3})$.

Nümunə 2.

$y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ funksiyasının bir dövrdəki qrafikini qurun.



Həlli: $\operatorname{tg} x$ funksiyasının bir dövründə x-in qiymətləri $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ kimidir.

$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ funksiyasının bir dövrünə uyğun aralığı $-\frac{\pi}{2} < (x - \frac{\pi}{4}) < \frac{\pi}{2}$ bərabərsizliyini həll etməklə tapaq:

$$-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \qquad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

Asimptotlar $-\frac{\pi}{4}$ və $\frac{3\pi}{4}$ nöqtələrindən keçən şaquli xətlərdir. (0; –1) və $(\frac{\pi}{2}; 1)$ qiymətlərini nəzərə almaqla, qrafiki sxematik olaraq quraq.

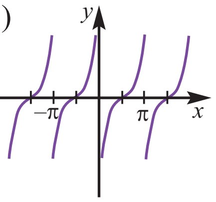
12. Funksiyaların asimptotlarını, sıfırlarını və orta nöqtələri tapın.

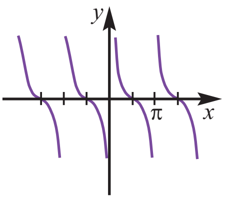
a) $y = 3\ \text{tg}\, x$ b) $y = 2\text{tg}\dfrac{1}{3}x$ c) $y = \text{tg}\, 2\pi x$

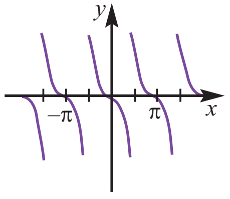
13. Funksiyaların qrafiklərini qurun.

$y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $y = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ $y = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

14. Hansı qrafik hansı funksiyaya aiddir?

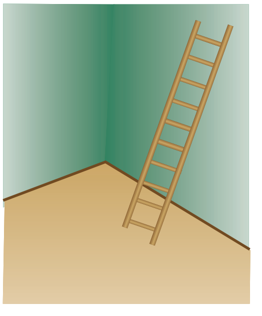
1) 

2) 

3) 

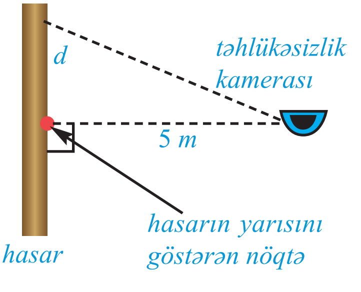
a) $y = \text{ctg}\, x$ b) $y = \text{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $y = -\text{ctg}\, x$

15. Nərdivan divardan 3 m aralıdan döşəmə ilə α bucağı əmələ gətirməklə divara söykədilmişdir. Nərdivan divarın h m hündürlüyünə çatır.



a) h ilə α bucağı arasındakı münasibəti tangens funksiyasının köməyilə yazın.
b) Funksiyanın qrafikini $0° \leq \alpha \leq 70°$ intervalında qurun.
c) α bucağının böyüməsi ilə h hündürlüyü necə dəyişir?
d) $\alpha = 90°$ olduqda nə baş verir?

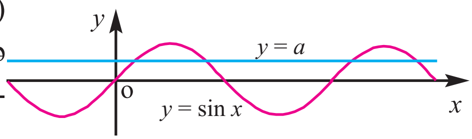
16. Hasarı müşahidə altında saxlayan təhlükəsizlik kamerası hasarın yarısında götürülmüş nöqtədən 5 m məsafədə quraşdırılmışdır. Kameranın fırlanaraq bir tam dövrə vurması 60 saniyə çəkir.



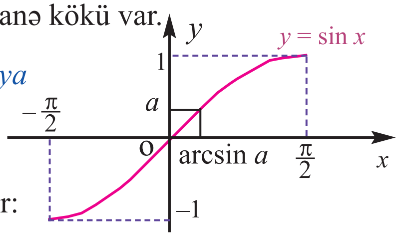
a) Kameranın hasarın ortasından başlayaraq hasar boyu izlədiyi d uzunluğunun zamandan asılılıq funksiyasını tangens funksiyası ilə ifadə edin. Kameranın hasarın orta nöqtəsini izlədiyi vaxtı başlanğıc, $t = 0$ qəbul edin.
Göstəriş: Kamera bir tam dövrdə 360° dönür. Bir saniyədə neçə dərəcə döndüyünü tapın.
b) Bu funksiyanın $-15 < t < 15$ intervalında qrafikini qurun.
c) $t = 10$ san olduqda hasarın hansı hissəsi izlənmiş olacaq ?
d) $t = 15$ olduqda nə baş verəcək?

Tərs triqonometrik funksiyalar

Absis oxuna paralel olan $y = a$ ($|a| \leq 1$) düz xətt sinusoidi sonsuz sayda nöqtədə kəsir. Bu o deməkdir ki, bütün ədəd oxunda $y = \sin x$ funksiyasının tərsi yoxdur.



Lakin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında $y = \sin x$ artandır və –1-dən 1-ə kimi bütün qiymətləri alır, həm də hər bir qiymətini arqumentin yalnız bir qiymətində alır. Deməli, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında $\sin x$ funksiyası dönəndir və $|a| \leq 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında yeganə kökü var.



$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığından götürülən və sinusu a-ya bərabər olan bucağa a ədədinin arksinusu deyilir, arcsin a kimi işarə edilir.

$x = \arcsin a$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 2) $\sin x = a$

Nümunələr. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, çünki $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

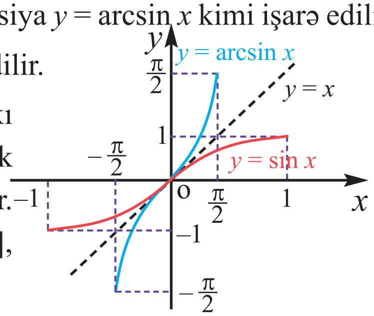
$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, çünki $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ və $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Tərifdən aydındır ki, $\sin(\arcsin a) = a$

Göstərmək olar ki, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Arksinusun köməyi ilə [–1; 1] parçasında təyin olunan və qiymətlər çoxluğu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ olan funksiya təyin etmək olar. Bu funksiya $y = \arcsin x$ kimi işarə edilir.

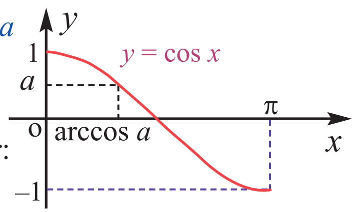
$y = \arcsin x$ funksiyası $y = \sin^{-1}x$ kimi də işarə edilir.



$y = \sin x$ funksiyasının $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığındakı qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y = \arcsin x$ funksiyasının qrafiki alınır.

$y = \arcsin x$ funksiyasının təyin oblastı [– 1; 1], qiymətlər çoxluğu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ olur.

Oxşar qayda ilə göstərilir ki, bütün ədəd oxunda $y = \cos x$ funksiyasının tərsi yoxdur. Lakin [0; π] parçasında $y = \cos x$ azalandır və [–1; 1] parçasına daxil olan bütün qiymətləri alır. Yəni, [0; π] parçasında $y = \cos x$ funksiyası dönəndir və $|a| \leq 1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin [0; π] parçasında yeganə kökü var.



[0; π] parçasından götürülən və kosinusu a-ya bərabər olan bucağa a ədədinin arkkosinusu deyilir, arccos a kimi işarə edilir.

$x = \arccos a$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $0 \leq x \leq \pi$ 2) $\cos x = a$

Nümunələr. $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, çünki $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$

$\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$, çünki $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ və $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$.

Tərifə görə: $\cos(\arccos a)=a$

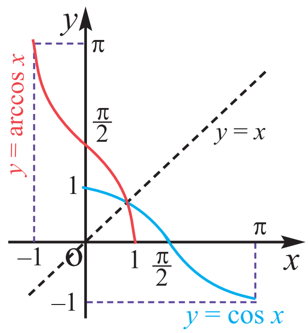
Göstərmək olar ki, $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

$[-1;1]$ parçasında təyin olunmuş $y=\arccos x$ funksiyası $[0;\pi]$ parçasında təyin olunmuş $y=\cos x$ funksiyasının tərsidir.

$y=\arccos x$ funksiyası $y=\cos^{-1}x$ kimi də yazılır.

$y=\cos x$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasındakı qrafikini $y=x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y=\arccos x$ funksiyasının qrafiki alınır.

$y=\arccos x$ funksiyasının təyin oblastı $[-1;1]$, qiymətlər çoxluğu $[0;\pi]$ kimidir.

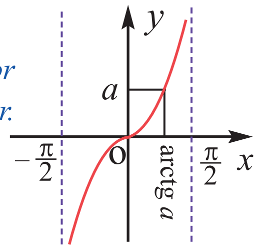


$y=\text{tg}\,x$ funksiyası $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında artandır və $(-\infty;+\infty)$ aralığındakı bütün qiymətləri alır. Ona görə də istənilən a ədədi üçün $\text{tg}\,x=a$ tənliyinin $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında yeganə kökü var.

$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığından götürülən və tangensi a-ya bərabər olan bucağa a-nın arktangensi deyilir, arctg a kimi işarə edilir.

$\text{arctg}\,a=x$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 2) $\text{tg}\,x=a$



Nümunələr. $\text{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, çünki $\text{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ və $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

$\text{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, çünki $\text{tg}(-\frac{\pi}{4})=-1$ və $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

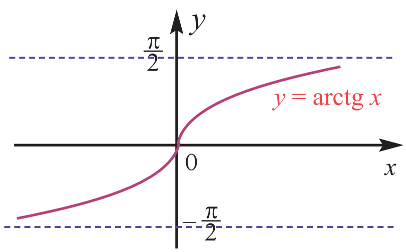
Tərifə görə: $\text{tg}(\text{arctg}\,a)=a$

Göstərmək olar ki, $\text{arctg}(-a)=-\text{arctg}\,a$.

$y=\text{arctg}\,x$ funksiyası $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında $y=\text{tg}\,x$ funksiyasının tərsidir.

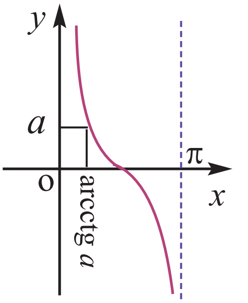
$y=\text{tg}\,x$ funksiyasının $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığındakı qrafikini $y=x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y=\text{arctg}\,x$ funksiyasının qrafiki alınır.

$y=\frac{\pi}{2}$ və $y=-\frac{\pi}{2}$ düz xətləri $y=\text{arctg}\,x$ funksiyasının üfüqi asimptotlarıdır.



Oxşar qayda ilə arkkotangens anlayışı daxil edilir.

$(0;\ \pi)$ aralığından götürülən və kotangensi a-ya bərabər olan ədədə a-nın arkkotangensi deyilir, arcctg a kimi işarə edilir.



arcctg $a = x$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $0 < x < \pi$ 2) ctg $x = a$

Nümunələr. arcctg $1 = \frac{\pi}{4}$, çünki ctg $\frac{\pi}{4} = 1$ və $\frac{\pi}{4} \in (0;\ \pi)$

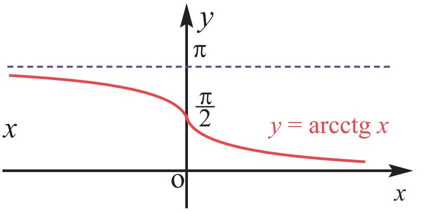
arcctg$(-1) = \frac{3\pi}{4}$, çünki ctg $\frac{3\pi}{4}$ = ctg$(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -1$ və $\frac{3\pi}{4} \in (0;\ \pi)$.

Tərifə görə: ctg(arcctg a) = a

Göstərmək olar ki,   arcctg$(-a) = \pi$ – arcctg a.

y = arcctg x funksiyası $(0;\ \pi)$ aralığında y = ctg x funksiyasının tərsidir.

y = ctg x funksiyasının $(0;\ \pi)$ aralığındakı qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə y = arcctg x funksiyasının qrafiki alınır. Absis oxu və $y = \pi$ düz xətti y = arcctg x funksiyasının üfüqi asimptotlarıdır.



y = arctg x funksiyasını $y = \text{tg}^{-1}x$ kimi, y = arcctg x funksiyasını $y = \text{ctg}^{-1}x$ kimi də işarə edirlər.

Kalkulyatorlarda $\text{ctg}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ kimi düymələr nəzərdə tutulmamışdır. Çünki bu funksiyaları $\text{tg}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ funksiyalarının köməyilə ifadə etmək mümkündür. Məsələn, $y = \sec^{-1}x$ isə deməli, $\sec y = x$ və bu funksiyanı kosinus ilə ifadə edə bilərik. $\frac{1}{\cos y} = x$ $\cos y = \frac{1}{x}$ Buradan: $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

Deməli, biz $y = \sec^{-1}x$ hesablamaq üçün $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$ -i hesablamalıyıq.

Diqqət edin! $\sin^{-1}x \xrightarrow{\text{deməkdeyil}} \frac{1}{\sin x}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilmiş bərabərliyi ödəyən və verilmiş aralıqda yerləşən t bucağını tapın.

a) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ b) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$

c) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0;\ \pi]$ d) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\ \pi]$

e) tg $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$ f) ctg $t = -1$, $(0;\ \pi)$

2. İfadənin qiymətini radian və dərəcə ilə ifadə edin.

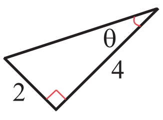
$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{arctg}\, \sqrt{3}$	$\text{arcctg}\, \sqrt{3}$
$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arccos 0$	$\text{arctg}\, 1$	$\text{arcctg}\, \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\arcsin(-\frac{1}{2})$	$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\text{arctg}(-\sqrt{3})$	$\text{arcctg}(-\sqrt{3})$
		$\text{arctg}(-1)$	$\text{arcctg}\, 0$

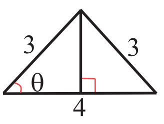
3. İfadələrin qiymətlərini kalkulyatorun köməyilə hesablayın. Nəticəni yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

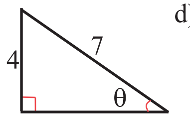
a) $\text{tg}^{-1}\, 3{,}9$ b) $\cos^{-1} 0{,}24$ c) $\sin^{-1} 0{,}24$ d) $\sin^{-1} 0{,}75$

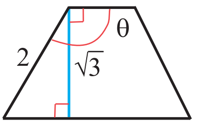
e) $\sin^{-1} (-0{,}4)$ f) $\cos^{-1} (-0{,}6)$ g) $\text{tg}^{-1} (-0{,}2)$ h) $\text{tg}^{-1}\, 2{,}25$

4. Verilənlərə görə θ bucağını tapın.

a)


b)


c)


d)


5. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\arcsin 0 + \arcsin 1$ b) $\arccos(-1) - \arccos 0$

c) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\text{arctg}(-1) + \text{arcctg}(-1)$

6. Bərabərliklərin doğruluğunu yoxlayın.

a) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$ b) $\text{arctg}\, \sqrt{3} + \text{arcctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$

7. Hesablayın.

a) $\cos(\arcsin \frac{1}{2})$ b) $\sin(\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}))$ c) $\text{tg}(2 \cdot \text{arctg}\, \sqrt{3})$

d) $\text{ctg}(2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$ e) $\sin(2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$ f) $\cos(3 \cdot \arccos \frac{1}{2})$

8. Verilən münasibətlərə görə α bucağını tapın.

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ d) $\text{tg}\, \alpha = 1$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ e) $\text{tg}\, \alpha = -\sqrt{3}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ f) $\text{ctg}\, \alpha = 1$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

9. α bucağının hansı qiymətində bərabərlik doğrudur? Kalkulyatorun köməyilə hesablayın.

a) $\sin \alpha = -0{,}35$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ c) $\text{tg}\, \alpha = 2{,}4$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\cos \alpha = 0{,}43$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ d) $\sin \alpha = 0{,}8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

10. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\sin(\arccos \frac{3}{5})$ b) $\cos(\arcsin(\frac{5}{13}))$

c) $\sin(2\cdot\arccos \frac{4}{5})$ d) $\cos(2\cdot\arccos \frac{3}{5})$

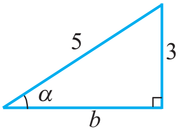
e) $\cos(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{12}{13})$ f) $\sin(\arccos \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13})$

Nümunə. $\sin(2\cdot\arcsin \frac{3}{5})$ ifadəsinin qiymətini tapın.

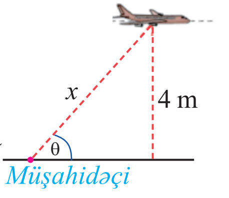
Həlli: $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$ olsun. Deməli, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ və $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

İti bucağının sinusu $\frac{3}{5}$ olan düzbucaqlı üçbucaqda α bucağına bitişik kateti tapaq:
$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

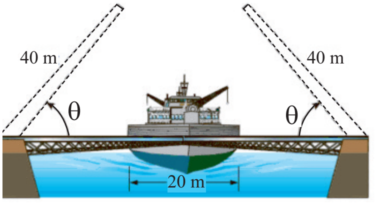
Buradan, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ olur. İşarələməni nəzərə almaqla yaza bilərik:
$\sin(2\cdot\arcsin \frac{3}{5}) = \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.



11. Motorlu oyuncaq təyyarə yerdən 4 m hündürlükdə uçur.
a) Müşahidəçidən təyyarəyə qədər olan məsafənin θ yüksəliş bucağından asılılığını göstərən funksiyanı yazın.
b) Müşahidəçi ilə təyyarə arasındakı məsafə 25 m olduqda θ bucağı neçə dərəcə olacaq?



12. Böyük çaylar üzərində körpülər salınarkən böyük gəmilərin keçidini təmin etmək üçün onlar elə konstruksiya edilir ki, qaldırılıb endirilə bilsin. Çayın üzərində salınmış belə körpünün hər qanadının uzunluğu 40 m -dir. Eni 20 m olan hər hansı hündürlükdə gəminin maneəsiz keçməsi üçün körpünün qanadları ən azı neçə dərəcə bucaq altında qaldırılmalıdır?



13. Hesablayın.

a) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6})$ b) $\arccos(\cos \frac{\pi}{6})$ c) $\text{arctg}(\text{tg} \frac{\pi}{3})$

14. $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3})$ ifadəsinin qiymətini Ənvər və Lalə aşağıdakı kimi hesabladılar.

Ənvər: $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$

Lalə: $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{\pi}{3})) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

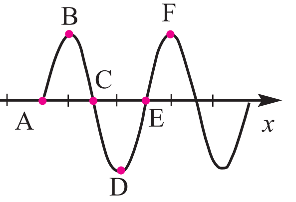
Verilən ifadənin qiymətini kim doğru tapmışdır? Cavabınızı əsaslandırın.

15. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{6})$ b) $\arccos(\cos \frac{4\pi}{3})$ c) $\text{arctg}(\text{tg} \frac{2\pi}{3})$

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Qrafik üzərində qeyd edilmiş nöqtələr x oxu ilə kəsişmə nöqtələrini, maksimum və minimum qiymətləri göstərir.



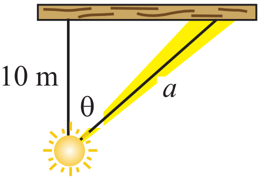
a) Qrafik $y = 2\sin 3x$ funksiyasının qrafikinə uyğun olub, A nöqtəsinin koordinatları (0; 0) olarsa, B, C, D, E, F nöqtələrinin koordinatlarını tapın.
b) Qrafik $y = 3\cos 2x$ funksiyasının qrafikinə uyğun olub, B nöqtəsinin koordinatları (0; 3) olarsa, A,C, D, E, F nöqtələrinin koordinatlarını tapın.
c) Qrafik $y = \sin\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafikinə uyğun olub, A nöqtəsinin koordinatları $(-2\pi; 0)$ olarsa, B, C, D, E, F nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

2. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğu $\{x \mid x \in R\}$, qiymətlər çoxluğu $[-3; 3]$ parçası olmaqla iki müxtəlif sinus və kosinus funksiyası yazın.

3. Funksiyaların əsas dövrünü tapın və qrafikini qurun.

1) $y = 6\sin\frac{2}{3}x$ 2) $y = 3\cos\frac{1}{2}x$ 3) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$ 4) $2y = \operatorname{tg}2x$

4. 10 m aralıda qoyulmuş mənbədən binanın üzərinə vurulmuş reklam yazısı işıqlandırılır.



a) a məsafəsinin θ bucağından asılılığını triqonometrik funksiya ilə ifadə edin.
b) Cədvəli a-nın qiymətlərini ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla doldurun.

θ	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$
a				

c) Cədvəldən göründüyü kimi, θ-nın qiymətləri bərabər addımlarla artır. a-nın qiymətləri haqqında da bu fikri demək olarmı?

d) $0 \le \theta \le \frac{4\pi}{9}$ olarsa, mənbə lövhənin ən çox nə qədər hissəsini işıqlandırır?

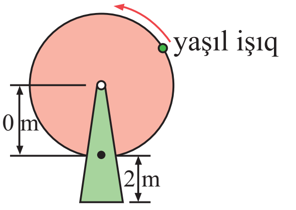
5. a) Sinusoidin minimumu (18;44), maksimumu (30; 68) nöqtəsində yerləşir. Bu funksiyanın amplitudunu tapın.
b) Bir dövr ərzində sinusoid maksimumu (4; 12) nöqtəsində, minimumu isə (12; –2) nöqtəsində alır. Bu funksiyanın periodunu tapın.
c) Uzunluğu dövrə bərabər olan parçada sinusoidin maksimumu $(\pi;7)$, minimumu $(\frac{\pi}{2}; 3)$ nöqtəsində yerləşir. Bu funksiyanın düsturunu $y = d + a\cos bx$ şəklində yazın.

6. Hesablayın.

a) $\sin(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2})$ b) $\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{4}{5})$

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

7. Karuselin üzərindəki yaşıl işığın fırlanma mərkəzinə görə istənilən anda yerdən məsafəsini triqonometrik funksiya ilə modelləşdirin. $t = 0$ olduqda yaşıl işığın ən aşağı səviyyədə olduğunu qəbul edin. Karusel bir tam dövrəni 100 saniyəyə başa vurur.



8. Suyun dərinliyi. Cədvəldə gecə yarısından günortaya qədər dənizin çimərlik hissəsində suyun dərinliyinin dəyişməsi haqqında məlumat verilmişdir.

a) Suyun dərinliyinin dəyişməsini $y = d + a\cos(bt + c)$ funksiyası ilə modelləşdirin.

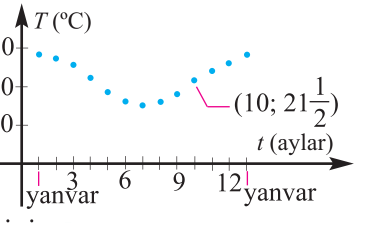
b) Səhər saat 7-dən saat 9-a qədər dərinlik nə qədər dəyişmişdir?

Vaxt, t	Dərinlik, y
Gecə yarısı	3,2
02:00	9
04:00	11,9
06:00	9
08:00	3,2
10:00	0,3
Günorta	3,2

9. Temperatur dəyişməsi. Cənubi Afrika ölkələrinin iqlimi tropik və subtropik iqlimdir. Yer kürəsinin bu hissəsində iyun-avqust qış aylarıdır. Cədvəldə Cənubi Afrikada yerləşən Keyp Taun (Cape Town) şəhərində bir il ərzində aylar üzrə maksimum temperatur verilmişdir.

Aylar	Yanv.	Fev.	Mart	Apr.	May	Iyun	Iyul	Avq.	Sent.	Okt.	Noyabr	Dek.
Temperatur (°C)	28	27	25	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Yanvar ayını $t = 1$, fevralı $t = 2$ və s., qəbul etməklə ayları üfüqi ox üzərində, temperaturu isə şaquli ox üzərində qeyd etməklə cədvələ görə qrafik qurulmuşdur. Cədvəli və qrafiki dəftərinizə köçürün. Yanvar ayından başlayaraq aylıq orta temperaturun təxminən yenə 12 aydan bir təkrarlanacağını bilərək, bu qrafiki növbəti 12 ay üçün davam etdirin.

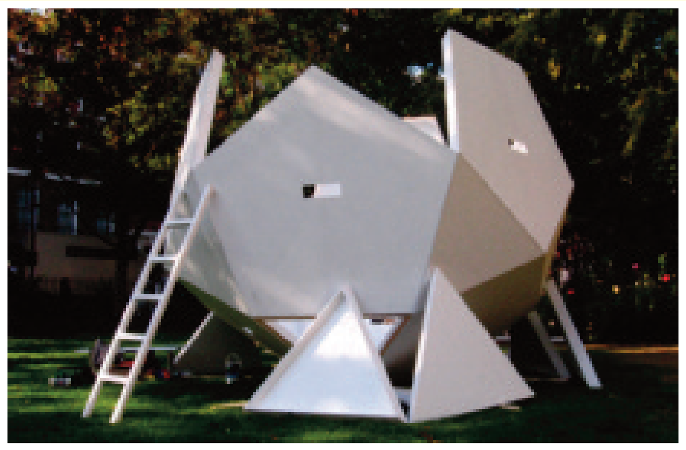


10. Dalğaların qaldırıb- endirməsi nəticəsində gəminin şaquli yerdəyişməsini (metrlə) $d = 0{,}6\sin\pi t$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada t vaxtı (saniyə ilə) göstərir. Bu funksiyanın dövrünü və amplitudunu göstərin, qrafikini çəkin.

11. Açıq tipli sual. Amplitudu $\frac{1}{2}$, periodu π olan triqonometrik funksiya yazın və qrafikini qurun.

6 Çoxüzlülər

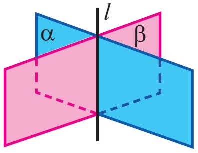
Çoxüzlülər
Prizmalar
Çoxüzlülər və onların müxtəlif tərəflərdən görünüşləri
Prizmanın səthinin sahəsi
Prizmanın müstəvi kəsikləri
Piramida. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsi
Piramidanın kəsikləri. Kəsik piramida



Çoxüzlülər

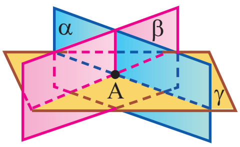
Məlumdur ki, müstəvilər fəzada müxtəlif qarşılıqlı vəziyyətdə ola bilərlər.

Kəsişən müstəvilər.



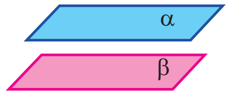
$\alpha \cap \beta = l$

Üç və daha çox sayda müstəvinin bir ortaq nöqtəsi ola bilər.



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A$

Kəsişməyən müstəvilər.

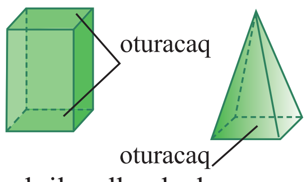


$\alpha \parallel \beta$

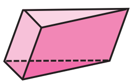
Müstəvilərin müxtəlif qarşılıqlı vəziyyəti çoxüzlülər adlanan fəza fiqurlarını (cisimlərini) yaradır.

Çoxüzlü - səthi sonlu sayda müstəvi fiqurlardan - çoxbucaqlılardan ibarət olan cisimdir. Çoxüzlünü hüdudlandıran çoxbucaqlılara onun **üzləri** deyilir. Çoxüzlünün ən azı 4 üzü var. Üzlərin kəsişdiyi düz xətt parçaları **til**, **tillərin** kəsişdiyi nöqtələr təpə adlanır. Çoxüzlünün səthini təşkil edən qonşu çoxbucaqlılar bir müstəvi üzərində deyildir, üç və daha çox üzə aid olan nöqtə təpə nöqtəsidir.

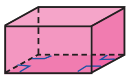
Prizma oturacaq adlanan iki üzü paralel və konqruyent çoxbucaqlı, qalan üzləri isə paraleloqram olan çoxüzlüdür.
Piramida oturacağı çoxbucaqlı, yan üzləri isə ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüdür.



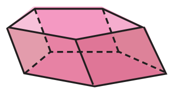
Prizma və piramida oturacaqlarındakı çoxbucaqlının adı ilə adlandırılır.



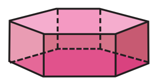
üçbucaqlı prizma



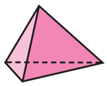
dördbucaqlı prizma



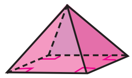
beşbucaqlı prizma



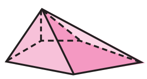
altıbucaqlı prizma



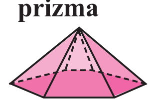
üçbucaqlı piramida



dördbucaqlı piramida

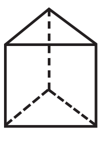


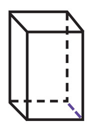
beşbucaqlı piramida

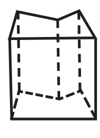


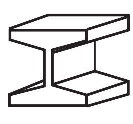
altıbucaqlı piramida

Çoxüzlülər qabarıq və çökük olmaqla iki növə ayrılır. Çoxüzlü səthindəki hər bir müstəvi çoxbucaqlının müstəvisinə görə bir tərəfdə yerləşərsə, ona qabarıq çoxüzlü deyilir. Qabarıq çoxüzlünün istənilən iki nöqtəsini birləşdirən parça onun daxili oblastına aid olur. A və B qabarıq, C və D fiqurları çökük çoxüzlüdür.

A. 

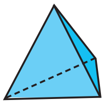
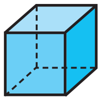
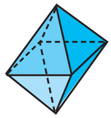
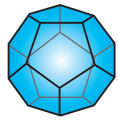
B. 

C. 

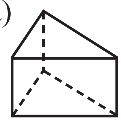
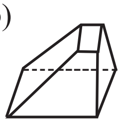
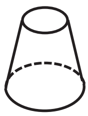
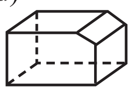
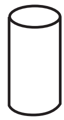
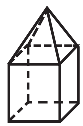
D. 

Çoxüzlülər

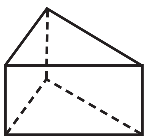
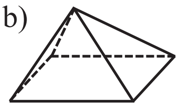
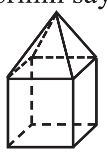
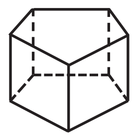
Bütün üzləri konqruyent düzgün çoxbucaqlılar olan və hər bir təpəsindən eyni sayda til çıxan qabarıq çoxüzlüyə düzgün çoxüzlü deyilir. Bu fiqurlara platonik fiqurlar da deyilir. Məsələn, kub düzgün çoxüzlüdür. Platonik fiqurların tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr kimi 5 növü var.

düzgün tetraedr	**kub**	**düzgün oktaedr**	**düzgün dodekaedr**	**düzgün ikosaedr**
				
hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 4 üzü var	*hər biri kvadrat olan 6 üzü var*	*hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 8 üzü var*	*hər biri düzgün beşbucaqlı olan 12 üzü var*	*hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 20 üzü var*

1. Fiqurlardan hansına çoxüzlü demək olar?

a)  b)  c)  d)  e)  f)  g) 

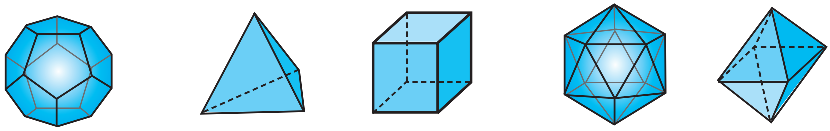
2. Hər bir çoxüzlünün üzlərinin, təpələrinin, tillərinin sayını müəyyən edin.

a)  b)  c)  d) 

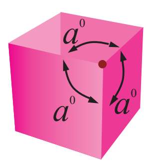
3. Cədvəli dəftərinizdə doldurun.

İstənilən çoxüzlünün üzlərinin, tillərinin və təpələrinin sayı arasındakı əlaqə Eyler düsturu ilə ifadə olunur: $F + V - E = 2$, burada F (fase) üzlərin, V (vertex) təpələrin, E (edges) tillərin sayını göstərir. Eyler düsturunu yoxlayın.

Çoxüzlü	Üzünün forması	Üzü (F)	Təpəsi (V)	Tili (E)
tetraedr				
kub				
oktaedr				
dodekaedr				
ikosaedr				



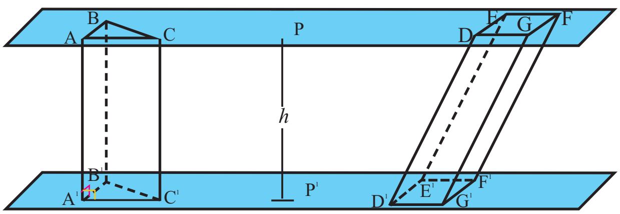
4. Nə üçün platonik fiqurların yalnız 5 növü vardır? Bu suala cavab vermək üçün bir təpədə kəsişən üç çoxbucaqlının bu təpədəki bucaqlarının cəminin çoxüzlünü təşkil edən fiqurların növündən asılı olaraq necə dəyişdiyinə diqqət edin. Bu cəm ən çoxu neçə dərəcə ola bilər? Çoxüzlünü təşkil edən çoxbucaqlılar altıbucaqlı olsa, ortaq təpəli bucaqların cəmi neçə dərəcə olar?



Prizmalar

Paralel müstəvilər üzərində yerləşən və paralel köçürmədə üst-üstə düşən iki konqruyent çoxbucaqlı və bu çoxbucaqlıların uyğun nöqtələrini birləşdirən bütün parçalardan ibarət fiqur prizma adlanır. Çoxbucaqlılara ***prizmanın oturacaqları***, oturacaqların uyğun təpələrini birləşdirən düz xətt parçalarına prizmanın ***yan tilləri*** deyilir. Yan tillərdən keçən müstəvi hissəyə ***prizmanın yan üzləri*** deyilir. Pirizmanın yan üzləri paraleloqramlardır. Bu paraleloqramların hər birinin iki tərəfi oturacaqların uyğun tərəfləri, digər iki tərəfi isə uyğun yan tillərdir.

Yan tilləri oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan prizmalar ***düz prizma***, perpendikulyar olmayanlar isə ***mail prizma*** adlanır.

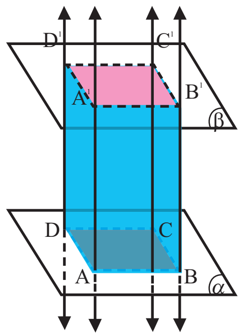


a) $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Oturacaqları üçbucaq olan düz prizma

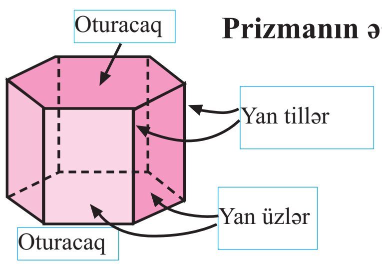
b) $DEFG \cong D'E'F'G'$

Oturacaqları dördbucaqlı olan mail prizma

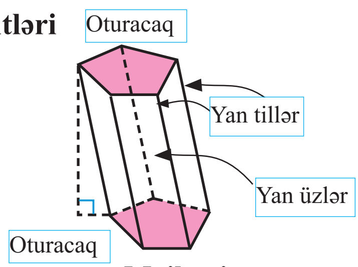


Düz prizmanın bütün yan üzləri düzbucaqlılardan ibarətdir.
Oturacağı düzgün çoxbucaqlı olan düz prizmaya düzgün prizma deyilir.

Prizmanın əsas elementləri



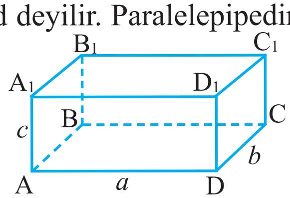
Düz prizma



Mail prizma

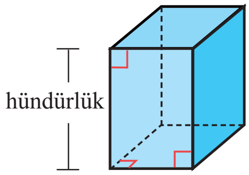
Prizmanın oturacaqları n-bucaqlıdırsa, ona n-bucaqlı prizma deyilir.
n-bucaqlı prizmanın $2n$ sayda təpə nöqtəsi, $n+2$ sayda üzü, $3n$ sayda tili var.

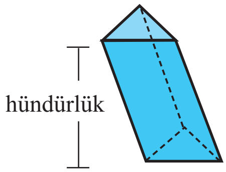
Oturacağı paraleloqram olan prizmaya paralelepiped deyilir. Paralelepipedin qarşı üzləri paralel və konqruyentdir. Oturacağı düzbucaqlı olan düz paralelepipedə düzbucaqlı paralelepiped deyilir. Şəkildə $ABCDA'B'C'D'$ düzbucaqlı paralelepipeddir. Düzbucaqlı paralelepipedin bir təpəsindən çıxan tillərinin uzunluqları onun üç ölçüsünü göstərir.



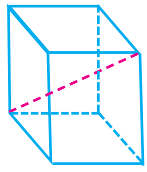
Prizmalar

Prizmanın oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə onun ***hündürlüyü*** deyilir. Düz prizmanın yan tili onun hündürlüyünə bərabərdir.



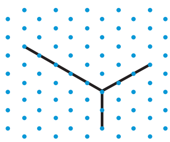


Prizmanın eyni üzündə olmayan iki təpəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun ***diaqonalı*** deyilir.

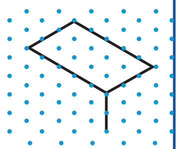


İzometrik nöqtəli vərəqdə 5×3×2 ölçüdə düzbucaqlı paralelepipedi verilən addımlarla çəkin.

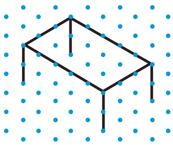
Prizmanın təpəsini - bir nöqtəni seçin, bu nöqtədən 2 vahid aşağı, 5 vahid sola, 3 vahid sağa düz xətt parçası çəkin.



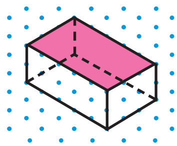
Prizmanın üst oturacağını göstərən paraleloqramı çəkin.



Paraleloqramın hər bir təpəsindən uzunluğu 2 vahid olan parçalar çəkin.



Parçaların uclarını ardıcıl olaraq birləşdirin. Görünməyən tilləri qırıq xətlərlə çəkməyi unutmayın.

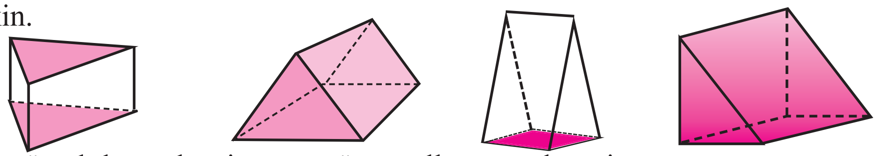


1. Tələb edilən ölçülərdə paralelepiped çəkin.

a) 3×4×3 ölçüdə düzbucaqlı paralelepiped

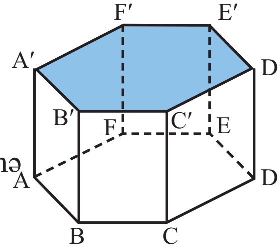
b) Tilinin uzunluğu 5 vahid olan kub.

2. Şəkildəki prizmanın iki paralel və konqruyent üzləri üçbucaqdır və onun 5 üzü, 9 tili, 6 təpəsi var. Üçbucaqlı prizma müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşə bilər. Bu prizmaların 2 üzünün üçbucaq, 3 üzünün dördbucaqlı olduğuna diqqət edin. İzometrik vərəqdə göstərilən vəziyyətlərdə üçbucaqlı prizmalar çəkin.



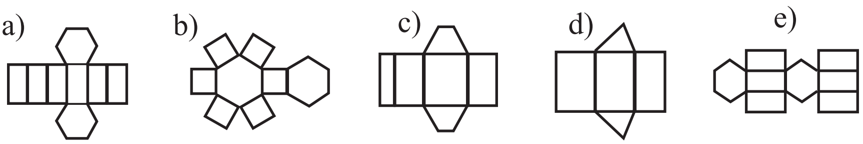
3. Düzgün altıbucaqlı prizmaya görə suallara cavab verin.

a) CDE müstəvisinə paralel olan müstəvi hansıdır?
b) Hansı müstəvilər A′AB müstəvisinə paralel deyil?
c) Hansı parçalar ABC müstəvisinə perpendikulyardır?
d) Nə üçün AA′ və DD′ parçalarının uzunluqları bir-birinə bərabərdir?
e) Çoxüzlünün üzlərinin adlarını yazın.

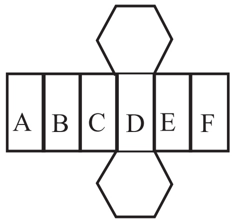


Prizmalar

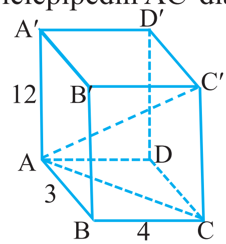
4. Çoxüzlünü bəzi tilləri boyunca kəsib, müstəvi üzərinə sərsək, çoxüzlünün açılışını alarıq. Hər bir açılışın hansı prizmaya aid olduğunu müəyyən edin. Üzlərinin, tillərinin, təpələrinin sayını yazın.



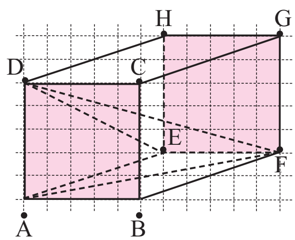
5. Şəkildə düzgün altıbucaqlı prizmanın açılışı verilib və yan üzlər hərflərlə işarələnib. Bu prizmanın hansı üzü F üzünə paraleldir?



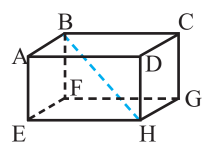
6. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri 3×4×12 kimidir. Oturacağın AC diaqonalını və paralelepipedin AC′ diaqonalını tapın.



7. Şəkildəki düzbucaqlı paralelepipedin iki qarşı yan üzü tərəfləri 4 sm olan kvadratlardır. AE tili 7 sm-dir. DF-in uzunluğunu tapın.

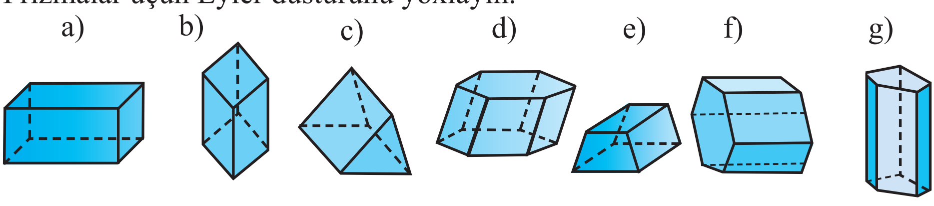


8. Şəkildə göstərilən düzbucaqlı paralelepipedə görə tapşırıqları yerinə yetirin.



a) ABC və EHG üzlərindəki B və H təpələrini birləşdirən diaqonalı çəkilmişdir. Digər mümkün diaqonalları çəkin və hansı üzlərdəki təpələri birləşdirdiyini yazın.
b) Prizmanın perpendikulyar olan hər hansı iki üzünü göstərin və cavabınızı müxtəlif teoremlərə və ya tərifə görə əsaslandırın.

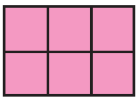
9. Hər bir prizmanın adını, neçə tili, neçə təpəsi, neçə üzü olduğunu yazın. Prizmalar üçün Eyler düsturunu yoxlayın.



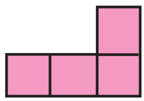
Kublarla müxtəlif konstruksiyalar quraşdırmaq olar. Bu cür konstruksiyalar kuboid də adlandırılır. Kuboidlərin müxtəlif tərəflərdən görünüşlərinin (planlarının) çəkilməsinin və ya əksinə müxtəlif görünüşlərin planına görə kuboidlərin quraşdırılması böyük praktiki əhəmiyyət daşıyır.

Praktik məşğələ. Aşağıda konstruksiyanın yuxarıdan, yandan və öndən görünüşünə görə fiqur quraşdırılmış və izometrik kağızda şəkli çəkilmişdir. Nümunə olaraq kub konstruksiyanın yuxarıdan, öndən və yandan görüntüləri verilmişdir. Siz kublardan müxtəlif konstruksiyalar düzəldin. Konstruksiya etdiyiniz fiqurun müxtəlif nöqtələrdən görünüşünü və izometrik vərəqdə təsvirini çəkin.

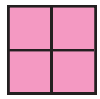
Yuxarıdan görünüş



Yandan görünüş



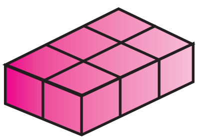
Öndən görünüş



Yuxarıdan görünüşdən istifadə etməklə fiqurun oturacağını quraşdıraq.

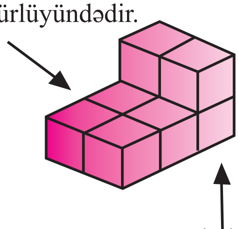
Yandan görünüşdən istifadə etməklə quraşdırmanı tamamlayaq

Öndən görünüşlə konstruksiyanın doğruluğunu yoxlayaq.



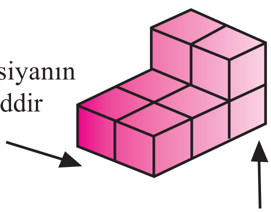
Oturacaq ölçüləri 2×3 vahid (kubla) olan düzbucaqlı formasındadır.

1-ci və 2-ci cərgə 1 kub hündürlüyündədir.



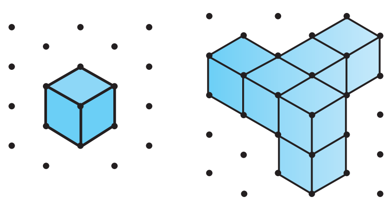
3-cü cərgə 2 kub hündürlüyündədir.

Konstruksiyanın eni 2 vahiddir



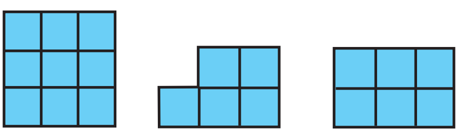
Konstruksiyanın hündürlüyü 2 vahiddir

Üçölçülü fiqurları təsvir etmək üçün izometrik nöqtəli vərəqlər əlverişlidir. Məsələn, kubun vahidə bərabər tilləri nöqtələr arasındakı vahid məsafəyə bərabərdir. Kubun təpələrini qeyd edib və ardıcıl birləşdirməklə onun üçölçülü görüntüsünü almaq olar. Analoji qayda ilə kuboidi təşkil edən bütün kublar çəkilir.

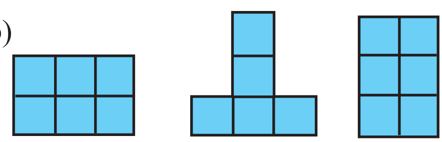


1. Müxtəlif tərəflərdən görünüşlərə görə konstruksiyaları kublardan quraşdırın və izometrik nöqtəli vərəqdə təsvirini çəkin.

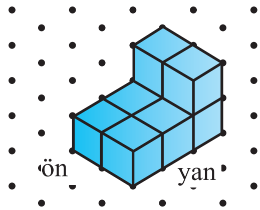
a)



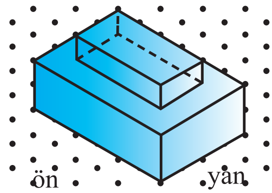
b)



2. Şəkildəki konstruksiyanın hansı görünüşü: *yuxarıdan, yandan,* yoxsa *öndən* görünüşü konsturksiyanın eyni hündürlüklü olmadığını müəyyən etməyə imkan verir? Çəkin, göstərin.



3. Şəkildə yeni tikiləcək binanın təsviri verilmişdir. Binanın yuxarıdan, yandan və öndən görünüşlərini çəkin. Şəkildəki hər vahid reallıqda 15 m-ə uyğundur. Yuxarıdan görünüşlə binanın neçə kvadrat metr sahəni tutduğunu müəyyən edin.



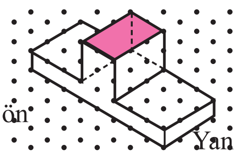
4. Hər bir konstruksiyaya görə tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Müxtəlif tərəflərdən görünüşlərini çəkin

b) Rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.

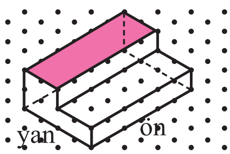
c) Konstruksiyanın ən hündür hissəsinin uzunluğu neçə santimetrdir?

Fəxri kürsü



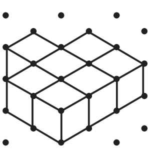
1 vahid = 0,2 m

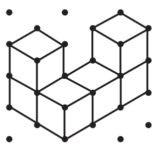
Pilləkən

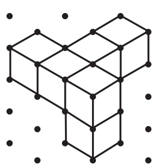


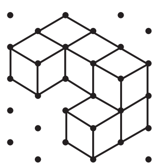
1 vahid = 0,25 m

5. Hər bir konstruksiyanı izometrik nöqtəli vərəqdə çəkin. Konstruksiyaların yuxarıdan, öndən və yandan görünüşlərini çəkin.

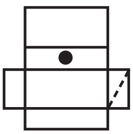
a) 

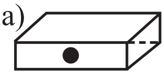
c) 

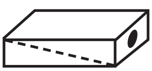
b) 

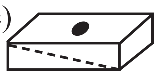
d) 

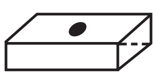
6. Verilən açılış şəkli hansı fiqura aiddir?



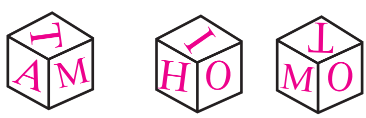
a) 

b) 

c) 

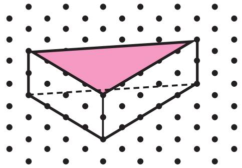
d) 

7. Kubun üç müxtəlif görünüşünə görə qarşı üzlərdə hansı hərflərin olduğunu müəyyən edin.



8. İzometrik nöqtəli vərəqdə tələb olunan prizmaları çəkin.

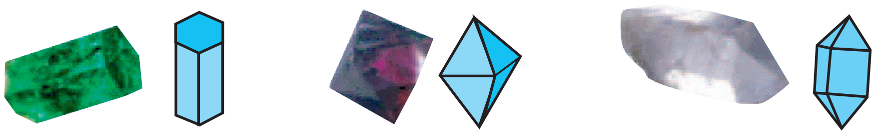
Nümunə. a) Hündürlüyü 2 vahid, oturacağındakı düzbucaqlı üçbucaqların katetləri 4 vahid və 5 vahid olan düz üçbucaqlı prizma.



b) Hündürlüyü 2 vahid, eni 3 vahid, uzunluğu 5 vahid olan düzbucaqlı paralelepiped

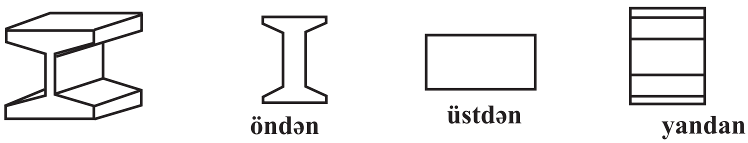
c) Hündürlüyü 2 vahid, oturacağındakı düzbucaqlı üçbucaqların katetləri 3 vahid və 5 vahid olan düz üçbucaqlı prizma.

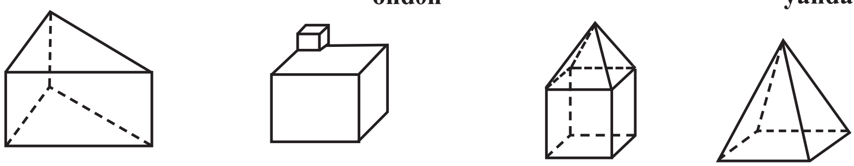
9. Təbiətdə minerallar müxtəlif formalı kristallar şəklində aşkar edilir. Mineralların ametist, kvars, emerald, florid və s. kimi bahalı olmayan növləri ilə yanaşı, almaz, yaqut, firuzə, sapfir kimi bahalı növləri var. Şəkildə kristallar və onların formasındakı həndəsi fiqurlar verilmişdir. Kristalların yuxarıdan və yandan görünüşlərini çəkin.



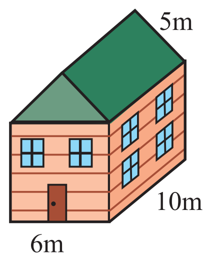
10. Çoxüzlülərin öndən, yandan və üstdən görünüşlərini çəkin.

Nümunə.





11. a) Evin yuxarıdan, öndən, yandan görünüşlərini çəkin.
b) Evin damının ölçülərini tapın.



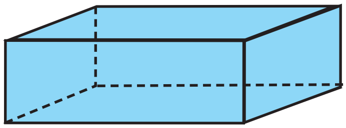
12. Verilmiş üç ölçüsünə görə düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalını tapın.
a) 6; 8; 24 b) 12; 16; 21

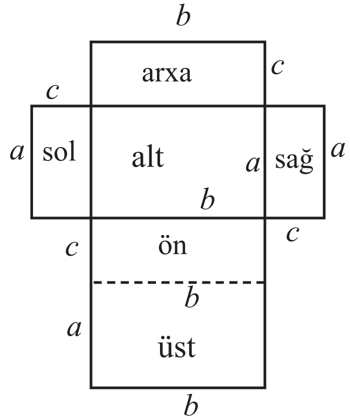
13. Düz paralelepipedin yan tili 5 sm, oturacağı isə tərəfləri 6 sm və 8 sm, diaqonallarından biri 12 sm olan paraleloqramdır. Paralelepipedin diaqonallarını tapın.

14. Hər tili a və oturacağının iti bucağı 60° olan düz paralelepipedin diaqonallarını tapın.

Prizmanın səthinin sahəsi

Araşdırma 1. Ölçüləri a, b, c olan düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsini tapın.





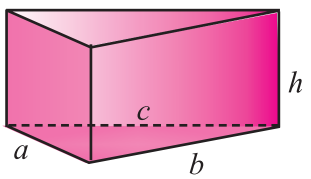
Paralelepipedin açılışı cüt-cüt konqruyent düzbucaqlılar olmaqla 6 düzbucaqlıdan ibarətdir. Paralelepipedin tam səthini hesablamaq üçün onun üzlərinin sahələrini hesablayaq.

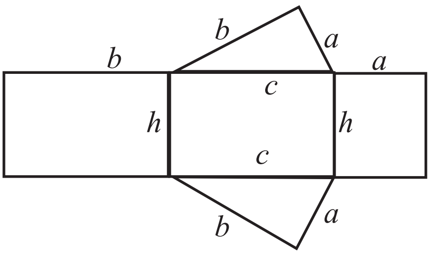
Üzlər	Sahəsi
1. Sol və sağ:	$ac + ac = 2ac$
2. Üst və alt:	$ab + ab = 2ab$
2. Ön və arxa:	$bc + bc = 2bc$

Bütün üzlərin sahələri cəmi: $S = 2ab + 2bc + 2ac$

Uzunluğu a, eni b, hündürlüyü c olan düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsi $S = 2(ab + ac + bc)$ düsturu ilə hesablanır.

Araşdırma 2. Hündürlüyü h və oturacağındakı üçbucağın tərəfləri a, b, c olan düz üçbucaqlı prizmanın yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayın.





Prizmanın açılışını çəkək.

Prizmanın yan səthi üç düzbucaqlıdan ibarətdir. Bu düzbucaqlıların sahələri cəmi prizmanın yan səthinin sahəsinə bərabərdir.

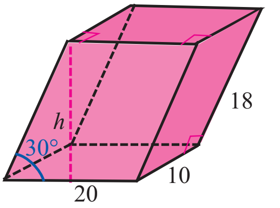
Yan səthini təşkil edən düzbucaqlıların sahələri cəmi:

$ah + bh + ch = (a + b + c)h = Ph$

Burada P oturacaqdakı üçbucağın perimetridir.

Prizmanın tam səthinin sahəsi yan səthinin sahəsi ilə oturacaqları təşkil edən iki üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir. Prizmanın tam səthini tapmaq üçün oturacaqlarının sahələrini tapmalıyıq. Prizmanın oturacaqları bu halda üçbucaqşəkillidir və bu üçbucaqların sahələri Heron düsturu ilə hesablana bilər.

Araşdırma 3. Mail prizma oturacaqları, tərəfləri 10×20 olan iki düzbucaqlıdan, iki yan üzü (sağ və sol) ölçülərindən biri 10, digəri isə 18 olan konqruyent düzbucaqlılardan, digər iki yan üzü (ön və arxa) isə ölçüləri 20 və 18, iti bucağı 30º olan paraleloqramlardan ibarətdir. Verilən ölçülərinə görə pirizmanın tam səthinin sahəsini tapın.



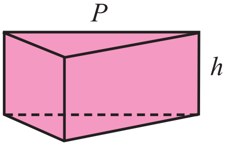
Prizmanın paraleloqram şəkilli ön və arxa üzlərinin sahəsini tapmaq üçün prizmanın hündürlüyünü tapaq.

$$\sin 30° = \frac{h}{18} \qquad h = 9$$

Ön və arxa üzlərinin sahələri cəmi: $2 \cdot 20 \cdot 9 = 360$ (kv vahid)
Sağ və sol üzlərinin sahələri cəmi: $2 \cdot 10 \cdot 18 = 360$ (kv vahid)
Oturacaqların sahələri cəmi: $2 \cdot 20 \cdot 10 = 400$ (kv vahid)
Prizmanın tam səthi: $360 + 360 + 400 = 1120$ (kv vahid)

Düz prizmanın yan səthinin sahəsi

Düz prizmanın yan səthinin sahəsi oturacağındakı çoxbucaqlının perimetri ilə hündürlüyü (yan tili) hasilinə bərabərdir.



$$S_{yan} = Ph$$

Burada P oturacağın perimetrini, h prizmanın hündürlüyünü göstərir.

Prizmanın tam səthinin sahəsi

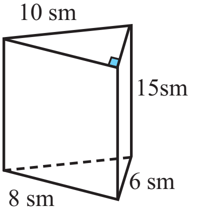
Prizmanın tam səthinin sahəsi oturacaqları ilə yan səthinin sahələri cəminə bərabərdir.

$$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan}$$

Düz prizmanın tam səthinin sahəsi $S_{tam} = 2S_{ot} + Ph$ düsturu ilə hesablanır.

Nümunə. Düz prizmaların tam səthinin sahəsini hesablayın.

a) Oturacaqları düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizmanın tam səthinin sahəsini tapaq.



$$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan} = 2S_{ot} + Ph$$

$2S_{ot} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$ (sm²)
$S_{yan} = Ph = (10 + 8 + 6) \cdot 15 = 360$ (sm²)
$S_{tam} = 48 + 360 = 408$ (sm²)

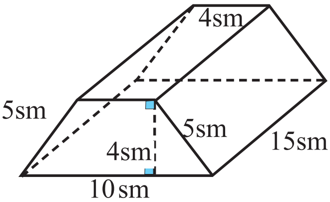
b) Oturacaqları trapesiya olan düz prizmanın tam səthinin sahəsini tapaq.

$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan} = 2S_{ot} + Ph$

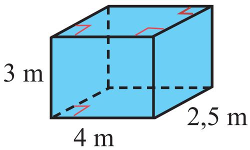
$2S_{ot} = 2 \cdot (\frac{1}{2}(10 + 4) \cdot 4) = 56\ (sm^2)$

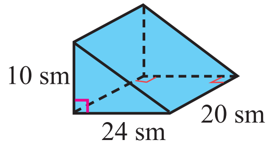
$S_{yan} = Ph = (10 + 5 + 5 + 4) \cdot 15 = 360\ (sm^2)$

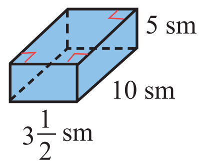
$S_{tam} = 56 + 360 = 416\ (sm^2)$

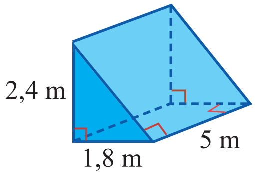


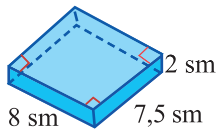
1. Düz prizmaların yan və tam səthlərini hesablayın.

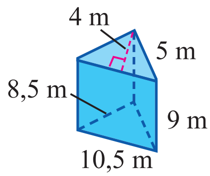




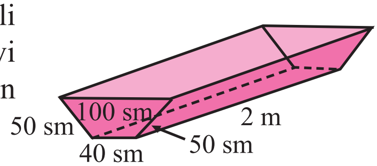






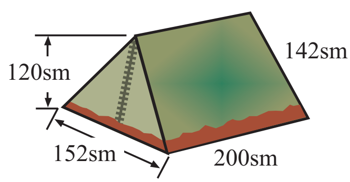


2. a) Hikmət atları üçün oturacağı trapesiya şəkilli olan düz prizma formalı su qabı düzəltməyi planlaşdırır. Verilən ölçüdə qab düzəltmək üçün ona ən azı nə qədər material lazımdır?



b)Hündürlüyü 6 m olan düz prizmanın oturacaqları bərabəryanlı trapesiyalardır. Trapesiyanın oturacaqları 2 m və 8 m, yan tərəfləri 5 m-dir. Prizmanın tam səthinin sahəsini tapın. Uyğun prizmanı çəkin və verilən ölçülərini üzərində yazın.

3. Şəkildəki çadıra ən azı neçə kvadrat metr parça işlədilmişdir?

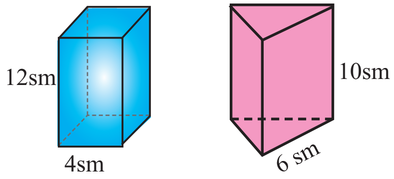


4. Tilləri 3 : 7 : 8 nisbətində olan düzbucaqlı paralelepipedin səthi 808 sm^2-dır. Tilləri tapın.

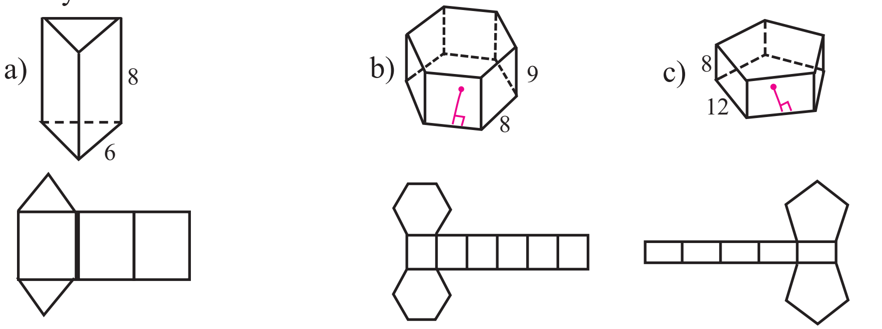
5. Düz paralelepipedin oturacağının 6 sm və 8 sm olan tərəfləri 30^o-li bucaq əmələ gətirir. Yan tilinin 5 sm olduğunu bilərək, bu paralelepipedin tam səthini tapın.

6. Diaqonalı 14 sm, yan üzünün diaqonalı isə 10 sm olan düzgün dördbucaqlı prizmanın hündürlüyünü və oturacağının sahəsini tapın.

7. Şəkildə verilən ölçülərinə görə düzgün prizmaların tam səthinin sahəsini tapın.

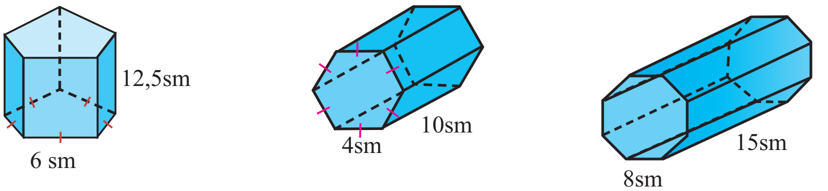


8. Düzgün prizmaları və açılış şəkillərini dəftərinizdə çəkin. Uyğun ölçüləri açılış şəkilləri üzərində yazın. Prizmaların tam səthlərinin sahələrini hesablayın.

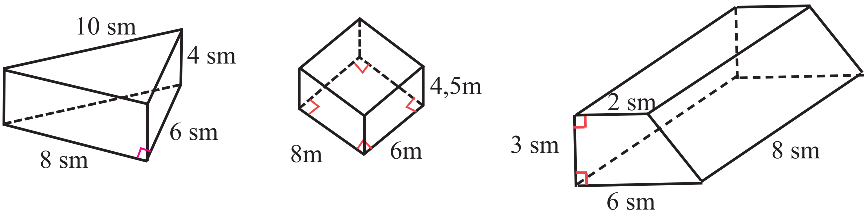


9. Şəkildəki pirizmaların tam səthinin sahəsini tapın.

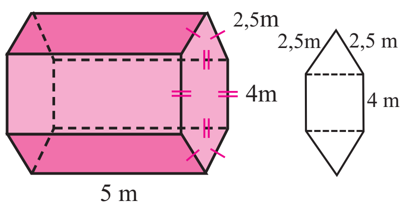
düzgün beşbucaqlı | düzgün altıbucaqlı | düzgün səkkizbucaqlı



10. Düz prizmaları və açılış şəkillərini çəkin. Tam səthlərinin sahələrini hesablayın.



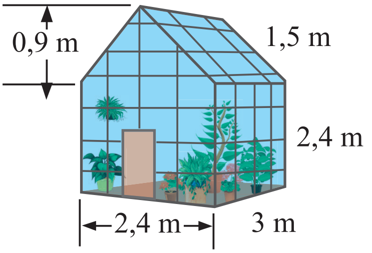
11. Düz prizmanın verilən ölçülərinə görə tapın:
a) oturacaqlarının sahəsini;
b) yan səthinin sahəsini;
c) tam səthinin sahəsini.



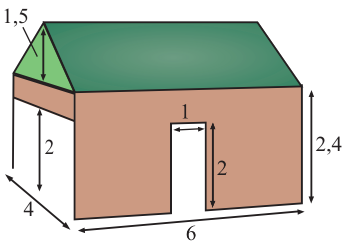
12. Verilənlərə görə düz prizmaların şəklini çəkin və tam səthinin sahəsini hesablayın.

Prizmanın oturacağı	Prizmanın hündürlüyü
a) tərəfləri 8 vahid olan bərabərtərəfli üçbucaq	10 vahid
b) tərəfləri 13; 14; 15 vahid olan üçbucaq	12 vahid
c) tərəfləri 12; 10; 10 vahid olan bərabəryanlı üçbucaq	7 vahid
d) tərəfləri 10; 5; 4; 5 vahid olan bərabəryanlı trapesiya	20 vahid
e) diaqonalları 8 və 6 vahid olan romb	10 vahid
f) tərəfi 8 vahid olan düzgün altıbucaqlı	11 vahid

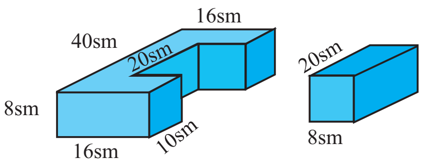
13. Şəkildəki qış bağının divarları və damı şəffaf plastik lövhələrlə örtülməlidir. Qapının sahəsinin 1,8 m^2 olduğunu bilərək, verilən ölçülərə görə qış bağını örtmək üçün neçə kvadrat metr lövhə lazım olduğunu hesablayın.



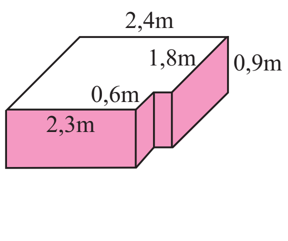
14. 30 m^2 sahəni rəngləmək üçün təxminən 4 *l* boya işlədilir. Şəkildəki qarajın üzlərini iki dəfə rəngləmək üçün təxminən neçə litr boya lazımdır? Ölçülər metrlə verilmişdir.

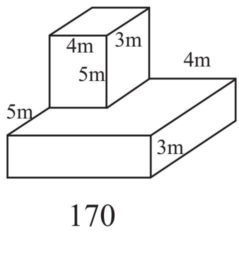


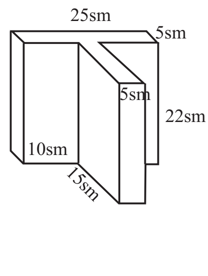
15. Düzbucaqlı paralelepiped şəkilli taxtadan şəkildə göstərilən hissə kəsilib çıxarılmışdır. Qalan taxta hissəsinin tam səthinin sahəsi necə dəyişmişdir? Cavabınızı hesablamalarla əsaslandırın.



16. Düzbucaqlı paralelepipedlərdən kəsilib çıxarılmaqla alınmış fiqurların tam səthlərinin sahəsini hesablayın.



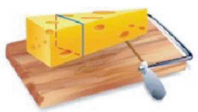




Prizmanın müstəvi kəsikləri

Araşdırma. Pendir düz üçbucaqlı prizma şəklindədir. Siz pendiri necə doğrasanız keçirilmiş kəsik tələb olunan formalarda olar?

a) düzbucaqlı

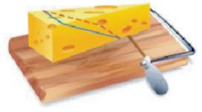


a) Pendirin öndən və yandan görüntüsü düzbucaqlı şəklindədir. Pendiri şaquli olaraq doğrasaq, kəsikdə düzbucaqlı yaranacaq.

b) üçbucaq

a) Pendirin üstdən görüntüsü üçbucaq şəklindədir. Pendiri üfüqi olaraq doğrasaq, kəsik üçbucaq şəklində olacaq.

c) trapesiya

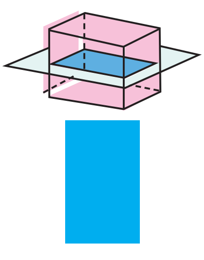


a) Pendirin yandan görüntüsü düzbucaqlı şəklindədir. Pendiri müəyyən bucaq altında doğrasaq, kəsik trapesiya şəklində olacaq.

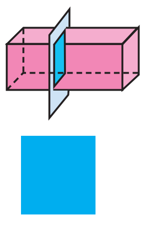
Prizmanın müstəvi kəsikləri

Prizmaların müstəvi ilə kəsişməsi nəticəsində onun üzərində qalan iz müstəvi kəsiyinin formasını müəyyən edir. Şəkildə düzbucaqlı paralelepipedin müstəvi kəsikləri təsvir edilmişdir.

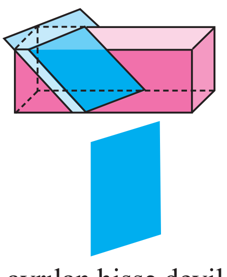
Oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsişməsi. **Düzbucaqlı alınır**



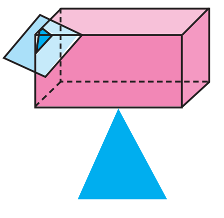
Oturacaqa perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsi. **Düzbucaqlı alınır.**



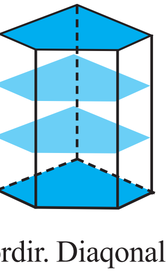
Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə qarşı üzləri kəsən müstəvi. **Paraleloqram alınır.**



Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə bir təpədən çıxan tilləri kəsən müstəvi. **Üçbucaq alınır**.



Diqqət edin! Müstəvi kəsiyi dedikdə ayrılan hissə deyil, fiqurun üzərində qalan iz nəzərdə tutulur.



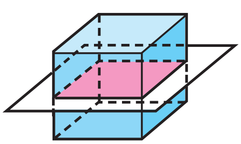
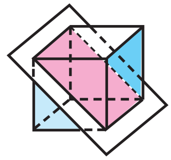
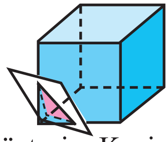
Prizmanın yan tillərinə perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsindən alınan çoxbucaqlıya onun perpendikulyar kəsiyi deyilir. Prizmanın oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiyi oturacaqlara konqruyent çoxbucaqlıdır.

Prizmanın eyni üzə aid olmayan iki yan tilindən keçən kəsiyə diaqonal kəsiyi deyilir.

n-bucaqlı prizmanın diaqonal kəsiklərinin sayı $\frac{n(n-3)}{2}$-yə bərabərdir. Diaqonal kəsiklərinin hər biri paraleloqram olduğundan alınır ki, n bucaqlı prizmanın $n(n-3)$ sayda diaqonalı var.

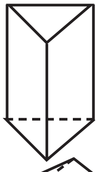
Prizmanın müstəvi kəsikləri

1. Kubun şəkildə göstərilən müstəvi ilə kəsişməsindən hansı çoxbucaqlı alınır?

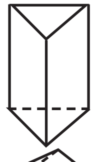




2. Hər bir prizmanın uyğun müstəvi ilə kəsişməsini çəkib göstərin. Kəsişmədən alınan çoxbucaqlının növünü müəyyən edin.

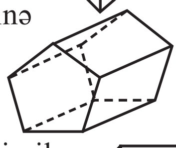
Oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə



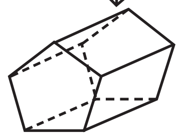
Oturacaq müstəvisinə perpendikulyar müstəvi ilə



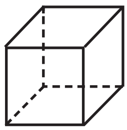
Oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə



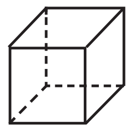
Oturacaq müstəvisinə perpendikulyar müstəvi ilə



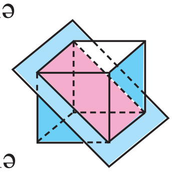
Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə bir təpədən çıxan üç tili kəsən müstəvi ilə



Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə ön və arxa üzləri kəsən müstəvi ilə



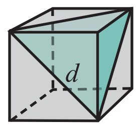
3. 1) Tili 6 sm olan kubun şəkildə göstərilən müstəvi kəsiyinin perimetrini tapın.



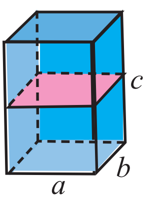
2) Kub bir təpədən çıxan üç tilin uclarından keçən müstəvi ilə kəsilmişdir. Kəsikdə hansı fiqur alınır?

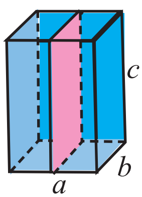
a) Kubun tili 1 sm olarsa, d parçasının uzunluğunu tapın.

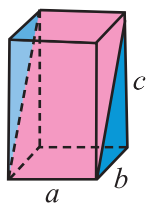
b) Kubun tili $3\sqrt{2}$ sm olarsa, müstəvi kəsiyinin perimetrini tapın.

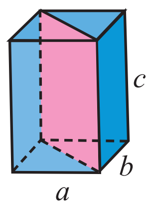


4. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri verilib: $a = 9$ sm, b = 12 sm, c = 20 sm. Hər bir müstəvi kəsiyindən alınan fiqurun perimetrini və sahəsini hesablayın.









5. Düzbucaqlı paralelepipedin oturacağının tərəfləri 7 sm və 24 sm, paralelepipedin hündürlüyü isə 8 sm-dir. Diaqonal kəsiyinin sahəsini tapın.

6. Düzgün altıbucaqlı prizma verilmişdir.

a) Ən böyük diaqonal kəsiyinin sahəsi 2 sm^2-dır. Prizmanın yan səthini tapın.

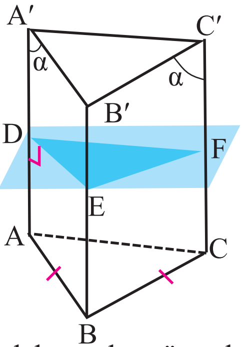
b) Bu prizmanın neçə diaqonalı var?

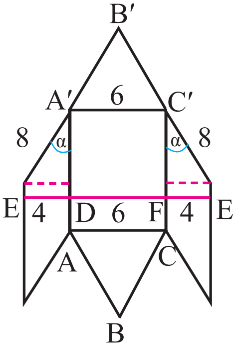
7. Oturacağı romb olan düz prizmanın diaqonal kəsiklərinin sahələri 42 sm^2 və 56 sm^2-dır. Bu prizmanın yan səthinin sahəsini tapın.

8. Diaqonalları 8 sm və 5 sm, hündürlüyü 2 sm olan düz prizmanın oturacağı rombdur. Yan səthinin sahəsini tapın.

Prizmanın yan səthinin sahəsini onun perpendikulyar kəsiyindən istifadə etməklə ümumi şəkildə ifadə etmək olar.
Prizmanın yan səthinin sahəsi onun perpendikulyar kəsiyinin perimetri ilə yan tilinin uzunluğu hasilinə bərabərdir.
$\boldsymbol{S_{yan} = P_{\perp kəs} \cdot l}$
Düz prizmanın oturacaqları ilə perpendikulyar kəsikləri konqruyent çoxbucaqlılardır. Ona görə də düz prizmada perpendikulyar kəsiyin perimetri əvəzinə oturacağın perimetri ifadəsindən istifadə edilir. Perpendikulyar kəsiyin perimetrindən mail prizmanın yan səthinin sahəsini taparkən istifadə etmək olar. Mail prizmanın yan səthini onun üzlərinin sahələrini ayrı-ayrı tapıb cəmləməklə də hesablamaq olar (Araşdırma 3-də olduğu kimi).

Nümunə. Mail prizmanın oturacaqları bərabəryanlı üçbucaq, $ACC'A'$ üzü düzbucaqlıdır. $AA' = 12$ sm, $AB = BC = 8$ sm, $AC = 6$ sm, $\alpha = 30°$ olarsa, prizmanın yan səthini tapın.



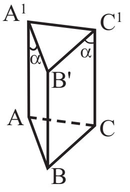


Həlli: Prizmanın yan səthi:
$S_{yan} = P_{\perp kəs} \cdot l$
Prizmanın perpendikulyar kəsiyində DEF üçbucağı alınır. Məsələnin həllini prizmanın açıq şəkli üzərində daha aydın görmək olar.
DE və FE 30°-li bucaq qarşısındakı katetə bərabər olduqlarından 4 sm olacaqlar. DEF perpendikulyar kəsiyinin perimetri
$DE + DF + FE = 4 + 6 + 4 = 14$ (sm). $S_{yan} = P_{\perp kəs} \cdot AA' = 14 \cdot 12 = 168$ (sm^2)

9. Mail prizmanın oturacağı, tərəfləri 6 sm və 4 sm olan düzbucaqlıdır. Yan üzlərindən ikisi ölçüləri 6 sm × 8 sm olan düzbucaqlılar, digər iki yan üz isə ölçüləri 4 sm × 8 sm, iti bucağı 30° olan paraleloqramdır. Mail prizmanın hər üzünün sahəsini hesablamaqla yan səthinin sahəsini tapın.

10. Mail üçbucaqlı prizmanın yan tilləri arasındakı məsafələr 4 sm, 6 sm və 8 sm-dir. Prizmanın yan səthini sahəsi 90 sm^2-dır. Prizmanın yan tilini tapın.

11. Şəkildəki mail prizmanın oturacaqları bərabərtərəfli üçbucaq, $ACC'A'$ üzü düzbucaqlıdır. $AA' = 10$ sm, $AB = 4$ sm, $\alpha = 45°$ olarsa, prizmanın yan səthini tapın.



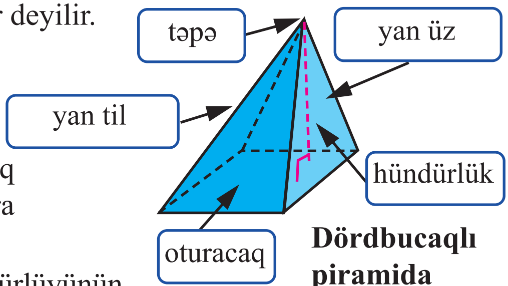
Piramida. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsi

Piramida bir üzü çoxbucaqlı, qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüdür. Ortaq təpəli üçbucaqlar piramidanın yan üzləri, çoxbucaqlı isə oturacağıdır.

Yan üzlərin ortaq tərəflərinə yan tillər deyilir.

Yan üzlərdəki üçbucaqların ortaq təpəsinə piramidanın təpəsi deyilir.

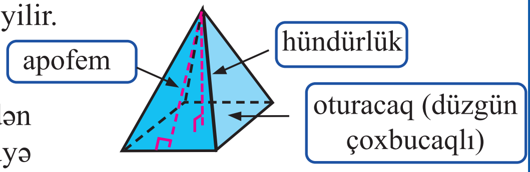
Piramidanın təpəsindən oturacaq müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyara piramidanın hündürlüyü deyilir.



Dördbucaqlı piramida

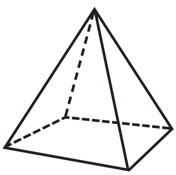
Oturacağı düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyünün oturacağı bu çoxbucaqlının mərkəzi ilə üst-üstə düşən piramidaya düzgün piramida deyilir.

Düzgün piramidanın yan üzündə təpədən oturacağın tərəfinə çəkilmiş hündürlüyə apofem deyilir.

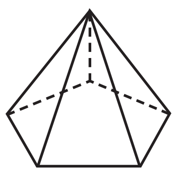


Düzgün dördbucaqlı piramida

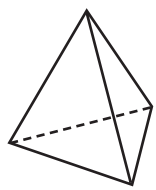
Piramida oturacağındakı çoxbucaqlının adı ilə adlandırılır. Məsələn, üçbucaqlı piramida, dördbucaqlı piramida və s.



Dördbucaqlı piramida



Beşbucaqlı piramida

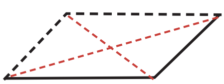


Üçbucaqlı piramida

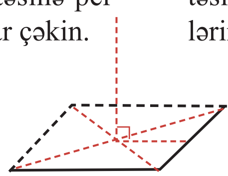
Düzgün piramidanın yan tilləri konqruyentdir.
Düzgün piramidanın yan üzləri konqruyent bərabəryanlı üçbucaqlardır.
Düzgün üçbucaqlı piramidaya tetraeder də deyilir. *Tetra* yunanca dörd deməkdir, yəni 4 üzü (hər biri üçbucaq formasında) olan çoxüzlü.

Xüsusi halda piramidanı aşağıdakı addımlarla çəkmək olar.

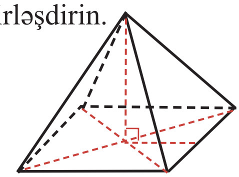
1. Paraleleoqram və onun diaqonallarını çəkin.



2. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsinə perpendikulyar çəkin.

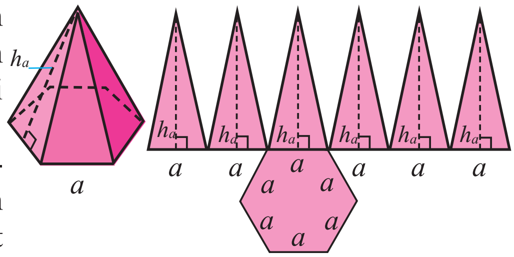


3. Perpendikulyarın uc nöqtəsi ilə paraleloqramın təpələrini birləşdirin.



Piramida. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsi

Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi onun yan üzlərini təşkil edən konqruyent üçbucaqların sahələri cəmidir.
Məsələn, şəkildəki altıbucaqlı piramidanın yan səthinin sahəsi onun yan səthini təşkil edən 6 konqruyent üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir.



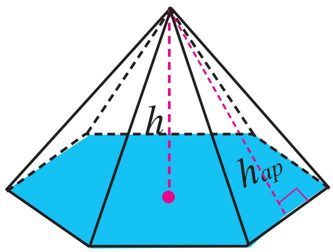
$$S=\frac{1}{2}ah_{ap}+\frac{1}{2}ah_{ap}+\frac{1}{2}ah_{ap}+\frac{1}{2}ah_{ap}+\frac{1}{2}ah_{ap}+\frac{1}{2}ah_{ap}=$$

$$=\frac{1}{2}h_{ap}(a+a+a+a+a+a)=\frac{1}{2}Ph_{ap}; \qquad S=\frac{1}{2}Ph_{ap}$$

Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi

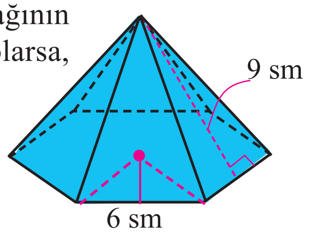
Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi oturacağındakı çoxbucaqlının perimetri ilə piramidanın apofemi hasilinin yarısına bərabərdir.

$$\boldsymbol{S_{\text{yan}}=\frac{1}{2}Ph_{ap}}$$



Burada P oturacağın perimetrini, h_{ap} piramidanın apofemini göstərir.
Piramidanın tam səthinin sahəsi oturacağı ilə yan səthinin sahələri cəminə bərabərdir. $\boldsymbol{S_{\text{tam}}=S_{yan}+S_{ot}}$

Nümunə 1. Düzgün altıbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfinin uzunluğu 6 sm-dir. Apofemi 9 sm olarsa, piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.



Həlli:
Verilir: $a = 6$ sm, $h_{ap} = 9$ sm
Tapın: $S_{\text{tam}} = ?$

$S_{\text{yan}}=\frac{1}{2}Ph_{ap}=\frac{1}{2}6\,a\,h_{ap}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot 9=162\ (\text{sm}^2)$

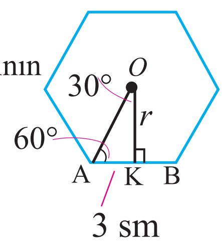
Oturacağın sahəsini tapmaq üçün əvvəlcə düzgün altıbucaqlının apofemini (r) tapmalıyıq. $S_{\text{ot}}=\frac{1}{2}Pr$

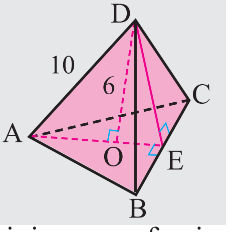
Düzgün altıbucaqlının mərkəzi bucağı: 360° : 6 = 60°.

Onda $\angle AOK = 30°$.

$r=3\ \text{tg}60°=3\sqrt{3}$; $S_{\text{ot}}=\frac{1}{2}\ 36\cdot 3\sqrt{3}\approx 93{,}5\ (\text{sm}^2)$

$S_{\text{tam}}=S_{yan}+S_{ot}\approx 162\ \text{sm}^2+93{,}5\ \text{sm}^2=255{,}5\ (\text{sm}^2)$





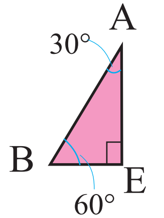
Nümunə 2. Düzgün üçbucaqlı piramidanın yan tilləri 10 sm, hündürlüyü 6 sm-dir. Piramidanın tam səthinin sahəsini tapın. **Həlli:**
Verilir: AD = 10 sm, DO = 6 sm
Tapın: $S_{tam} = ?$

Piramidanın yan səthini tapmaq üçün oturacağın perimetrini və apofemi tapmalıyıq. Perimetri tapmaq üçün isə düzgün üçbucağın bir tərəfini tapmaq kifayətdir.

ΔADO-dan $AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (sm)

Məlumdur ki, $AO = \frac{2}{3}AE$ (izah edin); $\frac{2}{3}AE = 8$ (sm); $AE = 12$ sm

ΔAEB-nin bucaları 30°, 60°, 90° olduğundan (izah edin)



$BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$; $BC = 2 \cdot BE = 8\sqrt{3}$; $P = 3 \cdot BC = 24\sqrt{3}$

ΔDOE-dən apofemi tapaq. $OE = 12 - 8 = 4$ (sm)

$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$S_{yan} = \frac{1}{2}Ph_{ap} = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39}$ (sm²)

$S_{ot} = \frac{1}{2}BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3}$ (sm²)

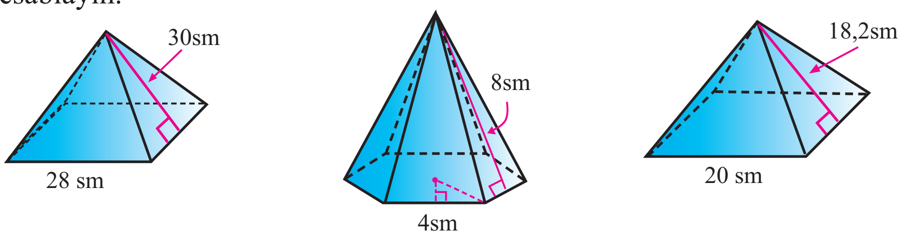
$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot} = 24\sqrt{39} + 48\sqrt{3} \approx 150 + 83 = 233$ (sm²)

Öyrənmə tapşırıqları

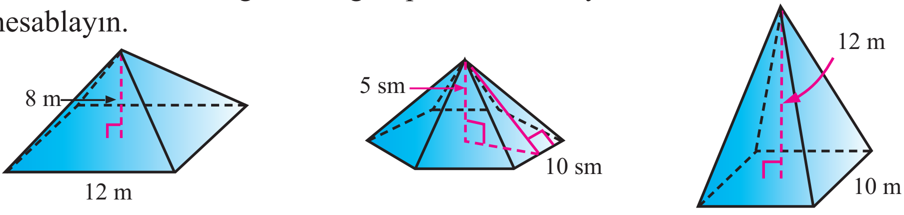
1. Bir tərəfi 6 sm, o biri tərəfi 8 sm olan düzbucaqlı piramidanın oturacağıdır. Piramidanın yan tillərinin uzunluqları 13 sm-dir. Hündürlüyünü tapın.

2. Düzgün dördbucaqlı piramidanın hündürlüyü 7 sm, oturacağının tərəfi 8 sm-dir. Yan tilini tapın.

3. Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidaların yan səthlərinin sahələrini hesablayın.

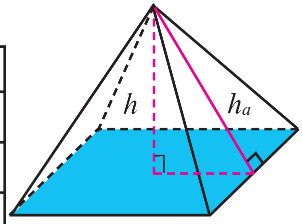


4. Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidaların yan səthlərinin sahələrini hesablayın.



5. Cədvəldə verilənlərə görə düzgün dördbucaqlı piramidanın tələb olunan ölçülərini tapın.

Hündürlük	6	12	24	?	?	6
Apofem	10	15	?	13	5	?
Oturacağın tərəfi	?	?	14	?	8	?
Yan səthi	?	?	?	624	?	320



6. Verilən ölçülərə görə düzgün piramidaları çəkin və yan səthinin sahəsini tapın:

a) oturacağının tərəfi 8 vahid, yan tili 5 vahid olan düzgün dördbucaqlı piramida;

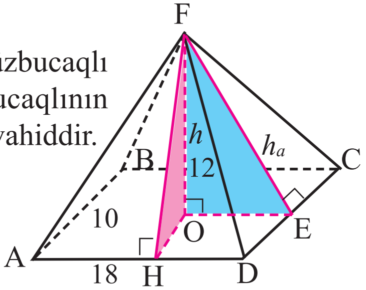
b) oturacağının tərəfi 4 vahid, apofemi 6 olan düzgün üçbucaqlı piramida;

b) oturacağının tərəfi 10 vahid, yan tili 13 vahid olan düzgün altıbucaqlı piramida.

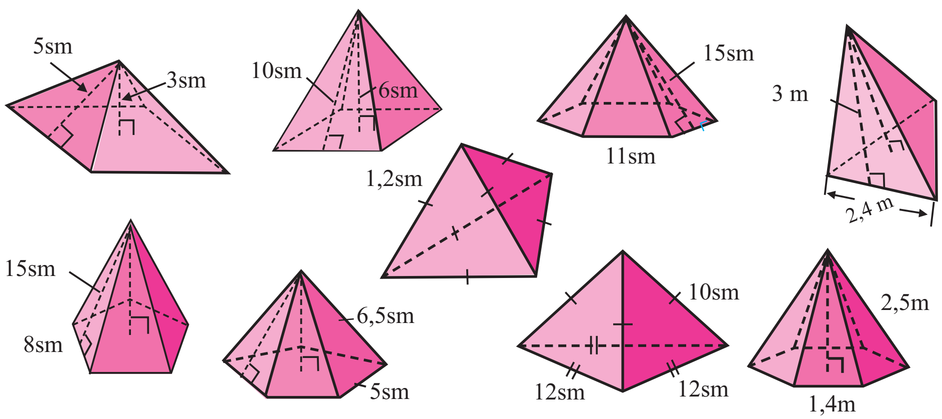
7. Tərəfləri 10 və 18 vahid uzunluğunda olan düzbucaqlı piramidanın oturacağıdır. O nöqtəsi düzbucaqlının mərkəzidir. Piramidanın hündürlüyü FO = 12 vahiddir.

a) FH və FE-ni tapın;

b) Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın. $S_{\text{yan}} = \dfrac{1}{2} Ph_a$ düsturunu tətbiq etmək olarmı?



8. Düzgün piramidaların yan səthlərinin sahəsini tapın.



9. Üçbucaqlı piramidanın yan tilləri 4 sm, 6 sm və 8 sm olub, cüt-cüt perpendikulyardır. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

10. Piramidanın oturacağı tərəfləri 9 sm və 5 sm olan düzbucaqlıdır. Yan tillərdən biri 12 sm olub, oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır. Bu piramidanın yan səthini tapın.

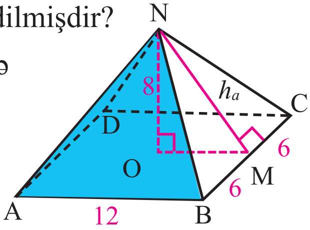
Piramida. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsi

11. Evin dam örtüyü dördbucaqlı piramida şəklindədir. Piramidanın oturacağı tərəfləri 12 m və 10 m olan düzbucaqlıdır,yan tillərinin hər biri 10 m-dir. Dam örtüyünə neçə kvadrat metr material sərf edilmişdir?

12. Düzgün dördbucaqlı piramidada verilənlərə görə tələb edilənləri tapın.

a) OM b) h_a c) NC

d) $S_{\Delta NBC}$ e) S_{yan} f) S_{tam}



13. Dünyanın böyük şəhərlərinin arxitekturasında piramidaşəkilli tikililər mühüm yer tutur. Bu tikililər arasında nadir abidələr (Misir piramidaları, Romadakı sesti piramidası) də, şəhərlərə müasirlik verən yeniləri də var (Parisdə Luvr muzey, Bakıda İçərişəhər metro stansiyasının girişi kimi).

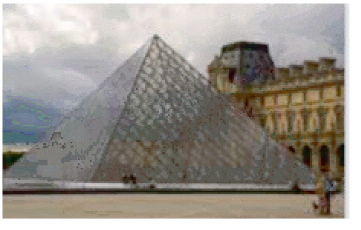
a) Heops və Luvr piramidaları düzgün dördbucaqlı piramıdalardır. Verilən ölçülərinə görə hər birinin yan səthinin sahəsini hesablayın.

Heops piramidası. Misir

Oturacağın tərəfi 230 m, apofemi 186 m

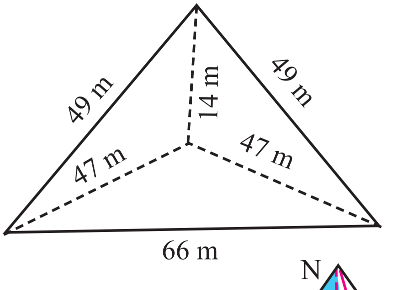
Luvr piramidası. Paris

Oturacağın tərəfi 35 m, apofemi 28 m



b) Şəkildə İçərişəhər metro stansiyasının piramidaşəkilli girişinin planı verilmişdir. Planda verilmiş ölçülərə görə piramidanın yan səthinin sahəsini hesablayın.

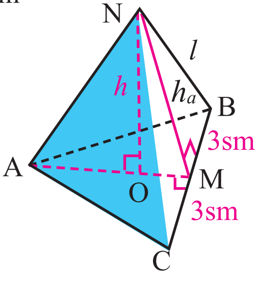
İçərişəhər metro piramidası



14. Düzgün tetraedrdə verilənlərə görə tələb edilənləri tapın.

a) OM b) h_a c) NC

d) $S_{\Delta NBC}$ e) S_{yan} f) S_{tam}



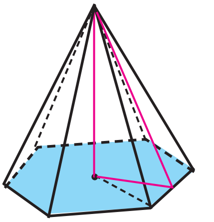
15. a) Piramidanın apofemi hündürlüyündən kiçik deyil. Bu fikri əsaslandırın.

b) Oturacağının tərəfi 10 sm, yan tili 13 sm olan düzgün dördbucaqlı piramidanın hündürlüyünü və apofemini tapın.

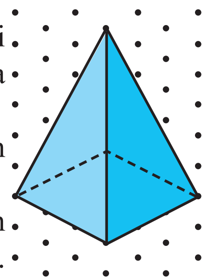
c) Piramidanın oturacağı diaqonanlları 12 sm və 16 sm olan rombdur. Yan üzlər oturacaq müstəvisi ilə 60° bucaq əmələ gətirərlərsə, bu pramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

16. Piramidanın oturacağı tərəfləri 6 sm, 6 sm, 8 sm olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Yan tillərinin hər birinin uzunluğu 5 sm-dir. Bu piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

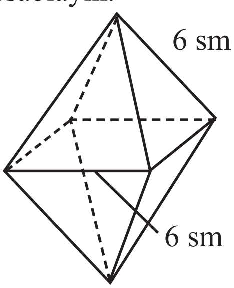
17. Düzgün altıbucaqlı piramidanın bir yan üzünün sahəsi $8\sqrt{3}$, oturacağının sahəsi isə $24\sqrt{3}$ kvadrat vahiddir.
Piramidanın:
a) oturacağının tərəfinin uzunluğunu;
b) apofemini;
c) yan tilinin uzunluğunu;
d) hündürlüyünü tapın.



18. Düzgün dördbucaqlı piramida üzərində araşdırma.
a) İzometrik nöqtəli vərəqdə şəkildə verildiyi kimi oturacağının tərəfi 3 vahid olan düzgün dördbucaqlı piramida çəkin.
b) Piramidanın yan səthinin sahəsini onun apofemi 3; 9 olan hallar üçün hesablayın və cədvəl tərtib edin.
c) oturacağın ölçülərini dəyişmədən apofemin uzunluğunun 3 dəfə artması ilə yan səthin sahəsinin necə dəyişdiyini yazın.
d) həm oturacağın tərəfi, həm də apofem 3 dəfə artsa, yan səth necə dəyişər?



19. Şəkildəki fiqurun (düzgün oktaedrin) səthinin sahəsini hesablayın.



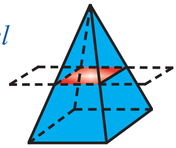
20. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 6 sm, yan tilin oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucaq 45°-dir. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

21. Piramidanın oturacağı yan tərəfləri 10 sm, oturacağı 12 sm olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Yan üzlərin oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucağın dərəcə ölçüsü 60°-dir. Piramidanın apofemini və hündürlüyünü tapın.

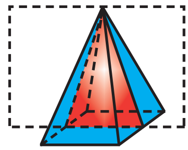
Piramidanın kəsikləri. Kəsik piramida

1. Düzgün dördbucaqlı piramidanın müstəvi ilə kəsiyində müxtəlif formalı çoxbucaqlılar yaranır. Aşağıdakı halları araşdırın, şəkillə və sözlə yazılı olaraq təqdim edin.

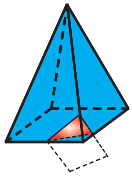
Oturacağına paralel müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə kvadrat alınır.



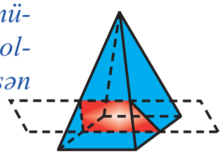
Təpədən keçməklə oturacağına perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə bərabəryanlı üçbucaq alınır.



Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq altında olmaqla bir təpədə birləşən qonşu üzləri kəsən müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə üçbucaq alınır.

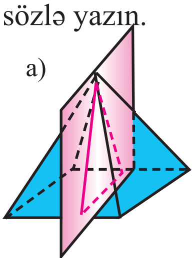


Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq altında olmaqla qarşı üzləri kəsən müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə trapesiya alınır.

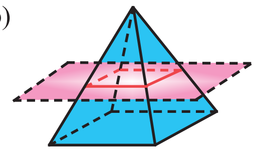


2. Piramida və müstəvinin kəsişməsini sözlə yazın.

a)

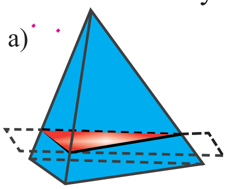


b)

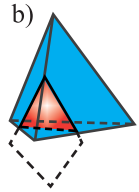


3. Üçbucaqlı piramida və müstəvinin şəkildə göstərilən kəsişmələrini sözlə yazın.

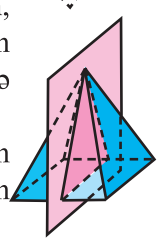
a)



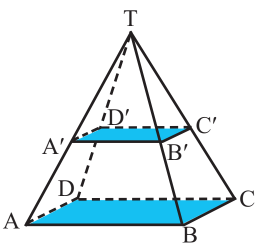
b)



4. a) Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 14 sm, yan tilinin uzunluğu 10 sm-dir. Diaqonal kəsiyinin (piramidanın təpə nöqtəsindən və oturacağın diaqonalından keçən müstəvi ilə kəsiyinin) sahəsini tapın.
b) Hündürlüyü 12 vahid, oturacağının tərəfi 8 vahid olan düzgün dördbucaqlı piramidanın iki qarşı yan üzünün apofemlərindən keçən müstəvi kəsiyindəki çoxbucaqlının sahəsini tapın.



5. Aşağıdakı təkliflərin doğruluğunu isbat edin.
Piramidanı oturacağa paralel müstəvi ilə kəsdikdə:
1) bu müstəvi piramidanın yan tillərini və hündürlüyünü mütənasib hissələrə bölür;
2) Kəsikdə alınan çoxbucaqlı oturacağa oxşar olur;
3) Kəsiyin və oturacağın sahələri nisbəti onların təpədən olan məsafələrinin kvadratları nisbətinə bərabər olur.

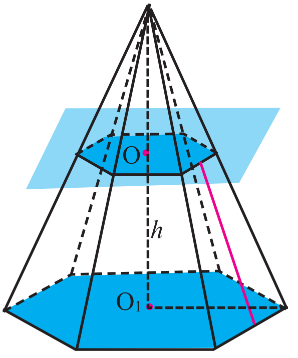


İsbat üçün plan. Piramidanın paralel müstəvi kəsiyi ilə yan üzlərdə yaranan ABT və A′B′T kimi üçbucaqların oxşarlıqlarından istifadə edin.

6. Piramidanın hündürlüyü 4 bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələrindən oturacağa paralel müstəvilər keçirilmişdir. Oturacağın sahəsinin 400 m^2 olduğunu bilərək, alınan kəsiklərin sahələrini tapın.

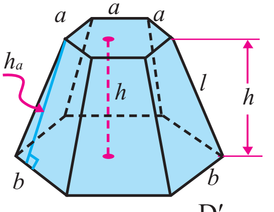
7. Piramidanın hündürlüyü 16 sm, oturacağın sahəsi 512 sm^2-dir. Sahəsi 50 sm^2 olan, oturacağa paralel kəsiyin oturacaq müstəvisindən məsafəsini tapın.

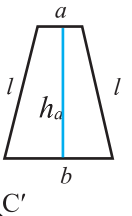
Piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə bu müstəvi ilə piramidanın oturacağı arasında qalan çoxüzlüyə kəsik piramida deyilir.
Kəsik piramidanın paralel üzləri onun oturacaqları, qalan üzləri isə yan üzləridir. Oturacaq müstəvilərinə perpendikulyar olan düz xəttin bu müstəvilər arasında qalan parçasına kəsik piramidanın hündürlüyü deyilir.
Düzgün piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə alınan kəsik piramida da düzgün kəsik piramidadır.
Düzgün kəsik piramidanın yan üzləri konqruyent bərabəryanlı trapesiyalardır. Bu trapesiyaların hündürlüyü düzgün kəsik piramidanın apofemidir.



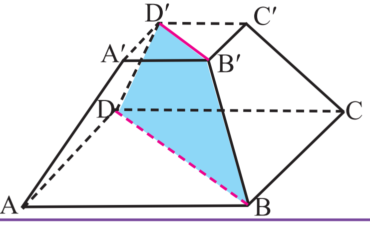
Düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi $S_{yan} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot h_a$ düsturu ilə tapılır.
Burada P_1 və P_2 düzgün kəsik piramidanın oturacaqlarının perimetrləri, h_a - apofemdir.
Kəsik piramidanın tam səthinin sahəsi isə yan səthinin , alt və üst oturacaqların sahələri cəmi kimi tapılır.

$$S_{tam} = S_{yan} + S_{alt} + S_{üst}$$



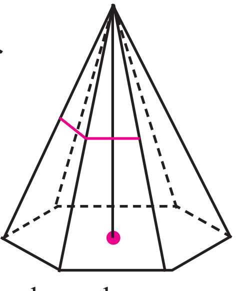


Kəsik piramidanın bir üzündə olmayan iki yan tilindən keçən müstəvi kəsiyi onun diaqonal kəsiyi adlanır.

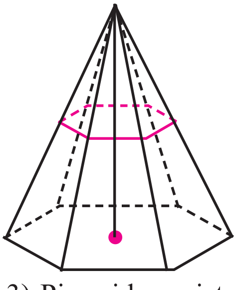


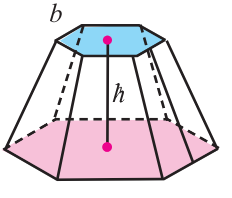
Kəsik piramidanı qurma addımları.

1) Piramidanın oturacağındakı çoxbucaqlını çəkin.



2) Çoxbucaqlının mərkəzinə müəyyən uzunluqda perpendikulyar çəkin və təpəsini oturacağın təpələri ilə birləşdirin.





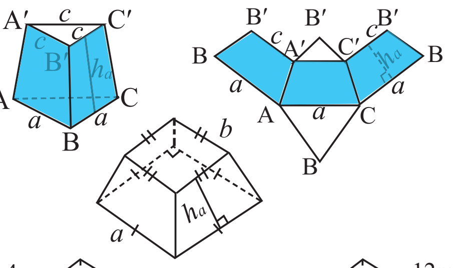
3) Piramidanın istənilən tili üzərində bir nöqtədən başlayaraq oturacağın tərəflərinə paralel parçalarla piramidanın digər oturacağını çəkin. Yan tillərin təpədən kiçik oturacağa qədər olan hissələrini silin

8. a) Hündürlüyü 6 sm, oturacaqlarının tərəflərinin uzunluğu uyğun olaraq 4 sm və 6 sm olan düzgün dördbucaqlı kəsik piramida çəkin.

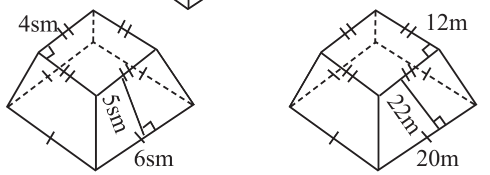
b) Hündürlüyü 8 sm, oturacaqlarının tərəflərinin uzunluğu uyğun olaraq 2 sm və 3 sm olan düzgün altıbucaqlı kəsik piramida çəkin.

c) Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının sahələri 36 sm^2 və 64 sm^2-dır. Piramidanın yan tili alt oturacaq müstəvisi ilə 45°-li bucaq əmələ gətirir. Diaqonal kəsiyinin sahəsini tapın.

9. Düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi üçün $S_{yan} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot h_a$ düsturunun doğru olduğunu şəkildə verilən düzgün piramidalar üzərində göstərin.

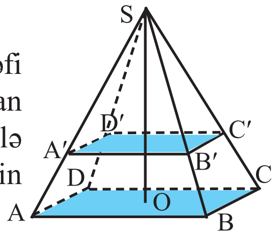


10. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidaların yan və tam səthlərinin sahələrini hesablayın.



11. Hündürlüyü 8 sm, oturacağının tərəfi 12 sm olan düzgün dördbucaqlı piramida hündürlüyünün ortasından oturacağa paralel keçən müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kəsik piramidanın ölçülərini müəyyən edin, şəklini çəkin və tam səthinin sahəsini tapın.

12. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının AB tərəfi 12 sm, SO hündürlüyü 8 sm-dir. Piramida oturacaqdan 2 sm məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kəsik piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.



13. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın hündürlüyü 28 sm, apofemi 35 sm-dir. Oturacaqların tərəfləri nisbəti 5:2 kimidir. Piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

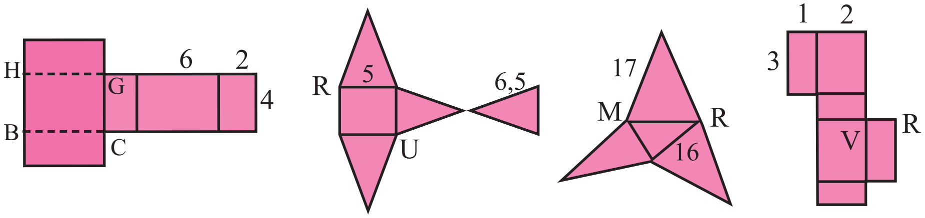
14. Oturacağının tərəfi 30 sm, hündürlüyü 36 sm olan düzgün dördbucaqlı piramida oturacağına paralel müstəvilərlə (təpədən başlayaraq hər 12 sm-dən hündürlüyü boyu) hissələrə bölünmüş, şüşə lövhələr metal çubuqlarla bərkidilərək zinət əşyaları qabı düzəldilmişdir. Bu konstruksiyanı bütünlüklə şüşə ilə örtmək üçün:

a) ən azı neçə kvadrat santimetr şüşə lövhə lazımdır?

b) ən azı neçə santimetr metal çubuq lazımdır?

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

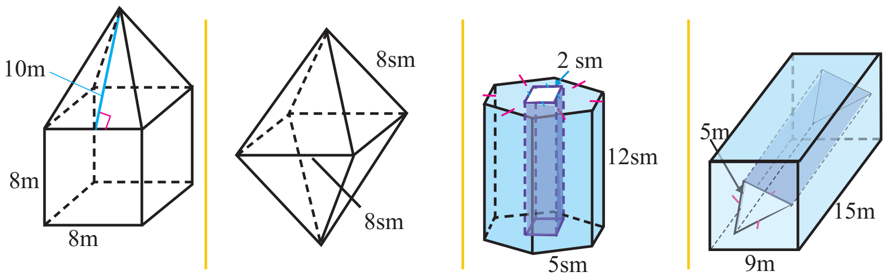
1. Verilən açılış şəkillərinə və ölçülərinə görə prizma və düzgün piramidaları çəkin. Fiqurların müəyyən təpələri adlandırılmışdır, digərlərini siz adlandırın və tam səthlərinin sahələrini hesablayın.



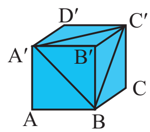
2. Düzgün dördbucaqlı piramidanın əsas ölçüləri oturacağının tərəfi, apofeminin uzunluğu, hündürlüyü, yan səthinin sahəsi və tam səthinin sahəsidir. Verilən iki ölçüyə görə digərlərini tapın.

a) $a = 3$ sm, $S_{yan} = 15$ sm^2 b) $h = 12$ m, $a = 10$ m
c) $h_a = 5$ m, $S_{yan} = 60$ m^2 d) $S_{yan} = 80$ sm^2, $S_{tam} = 144$ sm^2

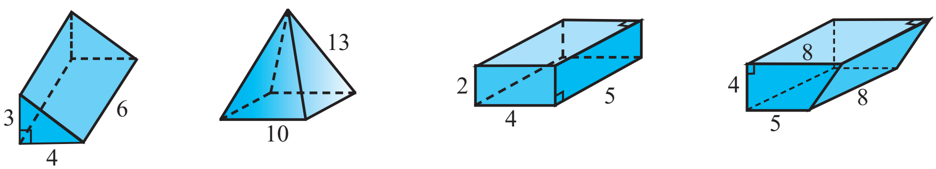
3. Şəkildə verilənlərə görə düzgün prizma və piramidalardan təşkil olunmuş mürəkkəb fiqurların səthlərinin sahəsini hesablayın.



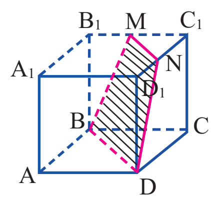
4. Tərəfi 6 sm olan kubun A', B, C' təpələrindən keçən müstəvi ilə kəsiyindən ayrılan piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.



5. Düz prizmaların və düzgün piramidanın açılış şəkillərini çəkin. Tam səthlərinin sahəsini hesablayın.

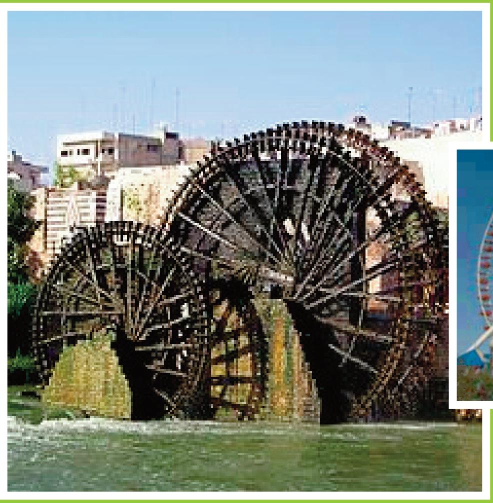


6. Tili a olan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubu verilmişdir. Oturacağın BD diaqonalından, B_1C_1 və C_1D_1 tillərinin orta nöqtələrindən (M və N) keçən müstəvi ilə kəsiyinin sahəsini tapın.



7 Triqonometrik tənliklər

Sadə triqonometrik tənliklər
Triqonometrik tənliklərin həll üsulları
Triqonometrik tənliklərin tətbiqi ilə məsələ həlli
Triqonometrik bərabərsizliklər



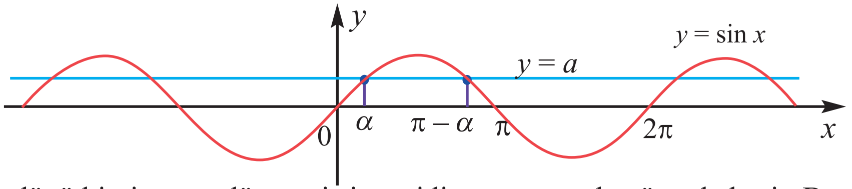
Sadə triqonometrik tənliklər

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ tənlikləri ən sadə triqonometrik tənliklərdir.

$\sin x = a$ tənliyi

Sinusun dəyişmə oblastı $[-1;\ 1]$ parçasıdır. Ona görə də, $|a| > 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin həlli yoxdur. $|a| \le 1$ olan hallara baxaq.

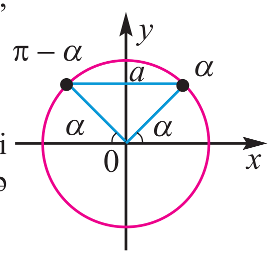
Eyni koordinat müstəvisində $y = \sin x$ və $y = a$ funksiyalarının qrafiklərini quraq.



Göründüyü kimi, $y = a$ düz xətti sinusoidi sonsuz sayda nöqtədə kəsir. Bu o deməkdir ki, $|a| \le 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin sonsuz sayda kökü var.

Sinus dövri funksiya olduğundan, uzunluğu dövrə bərabər, yəni 2π olan hər hansı aralıqda kökləri tapmaq kifayətdir.

Qrafikdən görünür ki, $|a| < 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin $[0;\ 2\pi]$ parçasında iki kökü var.



Nöqtənin çevrə üzrə fırlanma hərəkətinə baxdıqda da eyni nəticəyə gəlmək olar: Tam dövr ərzində sinusu eyni ədədə bərabər olan iki bucaq tapılır.

Dönmə bucaqlarından biri α olarsa, digəri $\pi - \alpha$ olur.

$\sin x = a$ ($|a| < 1$) tənliyinin qalan həlləri isə bu iki həllə dövrün misillərini əlavə etməklə alınır. Deməli, α $\sin x = a$ tənliyinin hər hansı həllidirsə, bu tənliyin bütün həlləri $x = \alpha + 2\pi n$, $x = \pi - \alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində yazılır. Bu iki həll ailəsini bəzən bir düsturla verirlər: $x = (-1)^k\alpha + \pi k$, $(k \in Z)$

$k = 2n$ (cüt) olduqda I həll ailəsi, $k = 2n + 1$ (tək) olduqda II həll ailəsi alınır.

$|a| \le 1$ olduqda **sin *x* = *a* tənliyinin** $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ parçasında kökü $x = \arcsin a$ olduğundan, bu tənliyin bütün həlləri $x = \arcsin a + 2\pi n$,

$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $(n \in Z)$ düsturları ilə tapılır. Bu düsturları birləşdirib, **ümumi həlli** $\boldsymbol{x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k\ (k \in Z)}$ şəklində yazmaq olar.

Nümunə 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ tənliyinin $[0;3\pi]$ parçasında neçə kökü var?

Həlli: Tənliyin həllini $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $(k \in Z)$ şəklində yazıb, $k = 0;\ 1;\ 2;3$ qiymətlərinə uyğun dörd kök tapırıq: $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$, $x_3 = \frac{17\pi}{6}$.

k parametrinin digər qiymətlərinə uyğun köklər verilən parçaya aid olmur.

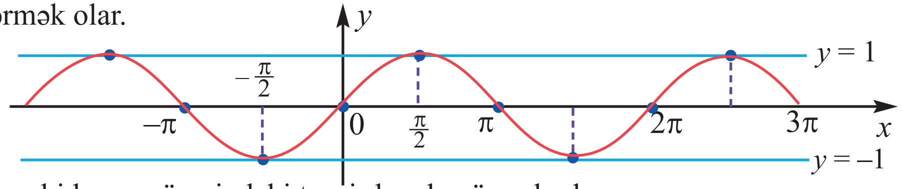
Nümunə 2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ olduğundan $x = (-1)^k \cdot (-\frac{\pi}{4}) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$,

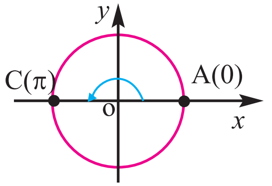
$(k \in Z)$

Sadə triqonometrik tənliklər

$a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin həllərini daha sadə şəkildə göstərmək olar.

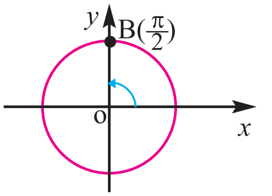


Bunu vahid çevrə üzərindəki təsvirdən də görmək olar.



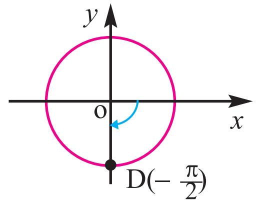
ordinatı 0 olan nöqtələr A(0) və C(π)

$$\sin t = 0$$
$$t = \pi k\ (k \in Z)$$



ordinatı 1 olan nöqtə $B(\frac{\pi}{2})$

$$\sin t = 1$$
$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$$



ordinatı –1 olan nöqtə $D(-\frac{\pi}{2})$

$$\sin t = -1$$
$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$$

Nümunə 3. $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x + \frac{\pi}{3} = t$ əvəz etsək,

$\sin t = 1$ tənliyini alarıq. Bu tənliyin həlli $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$ olur.

Əvəzləməni nəzərə alaq: $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$

Buradan $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\ (k \in Z)$

Nümunə 4. $\sin(x - 30^\circ) = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada x-in dərəcələrlə ifadə edilmiş bucaq olduğu aydındır. Ona görə tənliyin həllini belə yazmaq olar:

$x - 30^\circ = 180^\circ \cdot k \qquad x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k\ \ (k \in Z)$.

Öyrənmə tapşırıqları

1. x-in verilən qiymətlərindən hansı verilmiş tənliyin köküdür? Dövriliyə əsasən tənliyin biri müsbət, biri mənfi olmaqla daha iki kökünü yazın və yoxlayın.

a) $2\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ b) $\sqrt{8}\sin x = \sqrt{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$

2. Tənliklərin: 1) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasındakı kökünü tapın; 2) ümumi həllini yazın; 3)həlli qrafik olaraq təsvir edin.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ c) $2\sin x = -\sqrt{3}$ d) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$

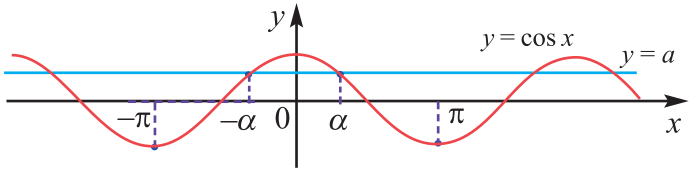
e) $\sin x = 1$ f) $1 + \sin x = 0$ g) $2\sin x - 1 = 0$ h) $\sin x = 0$

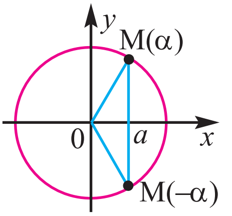
3. Tənlikləri həll edin.

a) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ b) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ c) $2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

$\cos x = a$ tənliyi

Oxşar qayda ilə alırıq ki, $|a| > 1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin həlli yoxdur, $|a| \leq 1$ olduqda isə sonsuz sayda kökü var. Qrafikdən (eləcə də vahid çevrədən) görünür ki, uzunluğu dövrə (yəni 2π-yə) bərabər olan parçada $\cos x = a$ ($|a| < 1$) tənliyinin iki kökü var.





Əgər α $\cos x = a$ tənliyinin köküdürsə, onda $-\alpha$ da köküdür, çünki $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Beləliklə, $\cos x = a$ tənliyinin bir kökünün α olduğu məlumdursa, bu tənliyin həllərini $x = \alpha + 2\pi n$ və $x = -\alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$ düsturları ilə tapmaq olar. Bu iki düsturu bəzən birləşdirib, $x = \pm\alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində yazırlar. $|a| \leq 1$ olduqda $\boldsymbol{\cos x = a}$ tənliyinin $[0; \pi]$ parçasındakı kökü $x = \arccos a$ olduğundan bu tənliyin bütün həlləri

$\boldsymbol{x = \pm \arccos a + 2\pi n \ (n \in Z)}$ şəklində olur.

Nümunə 5. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x = \frac{\pi}{4}$ tənliyin bir köküdür.

Onda bütün həlləri $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ və $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ olur.

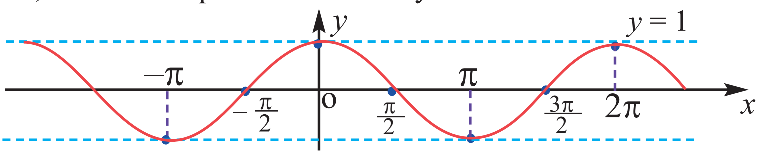
Həlli $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində yaza bilərik.

Nümunə 6. $\cos x = -\frac{1}{2}$ tənliyini həll edin.

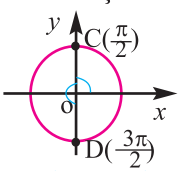
Həlli: $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$ $(n \in Z)$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ olduğundan $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in Z)$

$a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin həllərini daha sadə vermək olar.



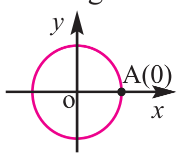
Bunu vahid çevrə üzərindəki təsvirdən də görmək mümkündür.



absisi 0 olan nöqtələr $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\boldsymbol{\cos t = 0}$

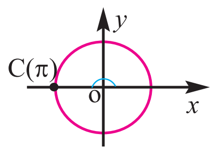
$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ (n \in Z)}$



absisi 1 olan nöqtə $A(0)$

$\boldsymbol{\cos t = 1}$

$\boldsymbol{t = 2\pi n, \ (n \in Z)}$



absisi –1 olan nöqtə $C(\pi)$

$\boldsymbol{\cos t = -1}$

$\boldsymbol{t = \pi + 2\pi n, \ (n \in Z)}$

Nümunə 7. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ tənliyini həll edin.

$x+\frac{\pi}{4}=t$ əvəz edək: $\cos t=-1$ $\quad t=\pi+2\pi k\ (k\in Z)$

Əvəzləməni nəzərə alaq: $x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k\ (k\in Z)$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi k$ $\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\ (k\in Z)$

4. x-in verilən qiymətlərindən hansı verilmiş tənliyin köküdür? Dövriliyə əsasən tənliyin biri müsbət, biri mənfi olmaqla daha iki kökünü yazın və yoxlayın.

a) $\cos x+1=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ $\qquad$ b) $\sqrt{8}\cos x=2$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{6}$

5. Tənliklərin: 1) $[0;\pi]$ parçasındakı kökünü tapın; 2) ümumi həllini yazın; 3) həlli qrafiki olaraq təsvir edin.

a) $\cos x=\frac{1}{2}$ $\quad$ b) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ c) $2\cos x=\sqrt{2}$ $\quad$ d) $2\cos x=\sqrt{3}$

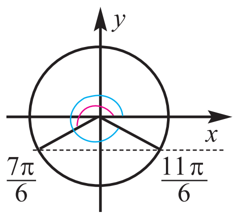
e) $2\cos x-\sqrt{3}=0$ $\quad$ f) $2\cos x+1=0$ $\quad$ g) $\cos x-1=0$ $\quad$ h) $\cos 2x=0$

6. Nümunəni araşdırın, həllini dəftərinizdə yazın. 2-ci tapşırığı yerinə yetirin.

1) Tənliklərin $[0;3\pi]$ parçasındakı həllərini yazın.

a) $\sin x=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

Hər iki tənliyin ümumi şəkli olan $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ tənliyinin həllini nəzərdən keçirək. Vahid çevrə üzərində ordinatı $-\frac{1}{2}$-ə bərabər olan iki nöqtə var. Bu nöqtələr $\frac{7\pi}{6}$ və $\frac{11\pi}{6}$ dönmələrinə uyğundur.



Tənliyin həlli: $\frac{7\pi}{6}+2\pi k$ və $\frac{11\pi}{6}+2\pi k\ (k\in Z)$

a) Bu halda $\theta=x$ və $0\le x\le 3\pi$. Bu intervalda tənliyi x-in yalnız $\frac{7\pi}{6}$ və $\frac{11\pi}{6}$ qiymətləri ödəyir. $\qquad x=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$

b) bu halda $\theta=2x$. Əgər x $\ 0\le x\le 3\pi$ şərtini ödəyirsə, $0\le 2x\le 6\pi$ olur və tənliyin verilən intervaldakı həlləri aşağıdakılardır:

$$\sin 2x=-\frac{1}{2}\qquad 2x=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6},\ \frac{31\pi}{6},\ \frac{35\pi}{6}$$

$$x=\frac{7\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12},\ \frac{19\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12},\ \frac{31\pi}{12},\ \frac{35\pi}{12}$$

2) Tənliklərin $0\le x\le 3\pi$ aralığındakı həllərini yazın.

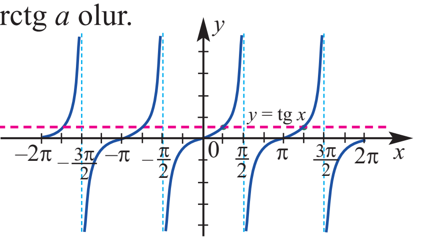
a) $\cos x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\cos 2x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ c) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

tg $x = a$ və ctg $x = a$ tənliklərinin həlli

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ aralığında tg $x = a$ tənliyinin həlli $x =$ arctg a olur.
tg x funksiyasının əsas dövrünün π olduğunu nəzərə alsaq, **tg $x = a$** tənliyinin bütün həllərini

$$x = \text{arctg } a + \pi n, \ (n \in Z)$$

düsturu ilə vermək olar.



$y =$ tg x və $y = a$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələri də həllin düzgün olduğunu göstərir.

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, **ctg $x = a$** tənliyinin bütün həlləri

$$x = \text{arcctg } a + \pi n \ (n \in Z)$$ şəklindədir.

Nümunə 8. tg $(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin.
Həlli: $x - \frac{\pi}{6} = t$ əvəz etsək
tg $t = \sqrt{3}$ tənliyini alarıq. Bu tənliyin həlli $t = \frac{\pi}{3} + \pi n \ (n \in Z)$ olur.
Əvəzləməni nəzərə alaq:

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi n \ (n \in Z)$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in Z)$

Nümunə 9. ctg $3x = -1$ tənliyini həll edin.
Həlli: $3x = t$ əvəz edək: ctg $t = -1$
arcctg$(-1) = \frac{3\pi}{4}$ olduğuna görə $t = \frac{3\pi}{4} + \pi n.$
Əvəzləməyə görə $3x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$. Buradan hər iki tərəfi 3-ə bölməklə alırıq ki,
ctg $3x = -1$ tənliyinin bütün həlləri $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, \ (n \in Z)$ şəklindədir.

Nümunə 10. tg $x = 0{,}75$ tənliyini həll edin.
Bu tip tənlikləri həll edərkən kalkulyatorla hesablamalardan istifadə edin.
Kalkulyatorun $\tan^{-1}$ düyməsi ilə 0,75 ədədini daxil etsək, Degree düyməsinin yanılı olduğu vəziyyətdə 36,87° qiyməti hesablanmış olacaq. Tangens dövri funksiya olduğundan, 36,87° + 180°, 36,87° –180°, 36,87° + 360°, 36,87° – 360°, 36,87° + 540°, 36,87° – 540° qiymətlərində də tangensin qiyməti 0,75-yə bərabərdir. Odur ki, tənliyin həlli dərəcə ilə ümumi şəkildə
$x = 36{,}87° + 180°k$, ($k =$ 0, ±1, ±2,±3, ...) kimi yazılır.
Radian düyməsinin köməyi ilə tənliyin həlli A = 0,6435 + πk, $k \in Z$ kimi olacaq.

$\operatorname{ctg} x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ şəklində olan tənlikləri

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

bərabərliklərindən istifadə etməklə həll etmək olar.

Nümunə 11. $\operatorname{cosec} x + 1 = 0$ tənliyini $x \in [0; 2\pi]$ aralığında həll edin.

Həlli: $\operatorname{cosec} x = -1$

$\dfrac{1}{\sin x} = -1$ $\quad \sin x = -1$ tənliyinin ümumi şəkildə həlli $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ kimi olur. $\sin x = -1$ tənliyinin $[0; 2\pi]$ aralığında həlli $x = \dfrac{3\pi}{2}$ -dir.

7. x-in verilən qiymətlərindən hansı verilmiş tənliyin köküdür? Dövriliyə əsasən tənliyin biri müsbət, biri mənfi olmaqla daha iki kökünü yazın və yoxlayın.

a) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ b) $\sqrt{6} \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$

8. Tənliklərin: 1) $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığındakı kökünü tapın; 2) ümumi həllini yazın.

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ b) $\operatorname{tg} x = -1$ c) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9. Tənliklərin: 1) $(0; \pi)$ aralığındakı kökünü tapın; 2) ümumi həllini yazın.

a) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ b) $\operatorname{ctg} x = -1$ c) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ d) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

10. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin. Həldən istifadə etməklə aşağıdakı tənliklərin ümumi həllini yazın.

a) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ b) $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$ c) $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. Tənliklərin: 1) $[0; 2\pi]$ aralığındakı həllini yazın;
2) həlli ümumi şəkildə yazın;
3) həlli qrafik olaraq təsvir edin.

a) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ b) $2\cos x = 1$ c) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$

d) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ e) $\sin x = 0$ f) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

12. Tənlikləri kalkulyatorun köməyi ilə həll edin və hər birinin üç kökünü göstərin.

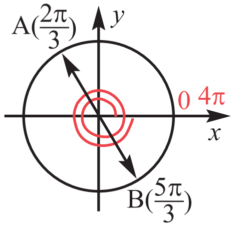
a) $\operatorname{tg} \theta = 3$ b) $\sin \theta = 0{,}85$ c) $\cos \theta = 0{,}47$

Sadə triqonometrik tənliklər

13. Tənliklərin $0 \le x \le 4\pi$ intervalındakı həllərini nümunəyə uyğun tapın.

a) $2\text{tg}\, x = -2$ b) $2\sin x = -1$ c) $2\cos x = -\sqrt{3}$

Nümunə. $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$



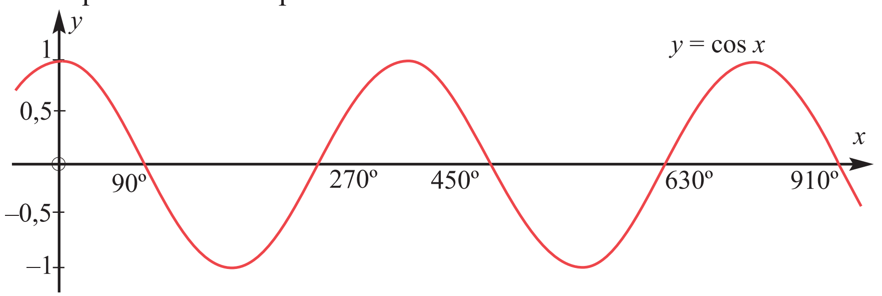
Həlli: Vahid çevrə üzərində tangens funksiyasının $-\sqrt{3}$-ə bərabər olduğu dönmə bucağına uyğun iki nöqtə təsvir edilmişdir: $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Lakin dövrü π olduğundan, tangens $-\sqrt{3}$-ə bərabər olan qiymətlərini bir-birindən π qədər aralı yerləşən nöqtələrdə alır, yəni $\text{tg}(\pi + \theta) = \text{tg}\,\theta$.

Deməli, $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$ tənliyinin $0 \le x \le 4\pi$ intervalındakı həllərini aşağıdakı qayda ilə tapa bilərik:

$$\frac{2\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{8\pi}{3} + \pi = \frac{11\pi}{3}$$

$0 \;\longleftarrow\; 0 \le x \le 4\pi \;\longrightarrow\; 4\pi$

14. $y = \cos x$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə tənliklərin verilmiş aralıqdakı təqribi həllərini tapın.



a) $\cos x = 0{,}4$ $0 \le x \le 450°$ b) $\cos x = -0{,}5$ $0 \le x \le 630°$

c) $\cos x + 1 = 1$ $0 \le x \le 910°$ d) $2\cos x = -2$ $0 \le x \le 630°$

15. Tənlikləri həll edin.

a) $2\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ b) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$ c) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

d) $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e) $\text{tg}(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$ f) $\text{ctg}(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$

16. Tənlikləri həll edin.

a) $\sin 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$

c) $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$ d) $\sin x \cdot \cos x = 0$

Sadə triqonometrik tənliklər

17. Tənliyin verilmiş aralıqda yerləşən köklərini tapın.

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $(0; 3\pi]$
b) $\cos^2(x + 30°) - \sin^2(x + 30°) = -1$, $(180°; 270°)$
c) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$, $[-\pi; 2\pi]$

Nümunə. a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $(0; 3\pi]$

Həlli: Tənliyi $\cos 2x = 1$ şəklində yazaq. $\cos\theta = 1$ tənliyinin ümumi həlli $\theta = 2\pi k$, $(k \in Z)$ olduğundan, alırıq: $2x = 2\pi k$, $x = \pi k$, $(k \in Z)$
Şərtə görə $0 < x \le 3\pi$ olmalıdır. Buradan $0 < \pi k \le 3\pi$ bərabərsizliyinin hər iki tərəfini π-yə bölsək, $0 < k \le 3$, $(k \in Z)$ alırıq.
$k = 1; 2; 3$ qiymətlərini ardıcıl olaraq $x = \pi k$ $(k \in Z)$ həllində yazmaqla tənliyin verilmiş aralıqdakı köklərini tapırıq: π; 2π; 3π.

18. Funksiyaların verilən aralıqda sıfırlarını tapın.

a) $y = \sin 2x$, $0° \le x \le 180°$ b) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$, $0 \le x \le 3\pi$

19. $y = 3\cos(x + \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki ilə $y = 1{,}5$ düz xəttinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapın

20. Tənlikləri həll edin.

a) $\sin(\pi + x) = -1$ b) $\cos(\pi - x) = 1$ c) $\sin \pi x = 0$

d) $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = 0$ e) $\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = 1$ f) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \sqrt{3}$

21. Tənlikləri verilən aralıqda həll edin.

a) $4\,\mathrm{tg}\,3x + 5 = 1$, $0 \le x \le \pi$

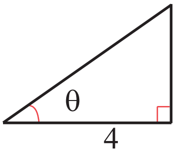
b) $2\cos 2x + 3 = 2$, $0 \le x \le 360°$

c) $2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$, $0 \le x \le 2\pi$

d) $\sqrt{2}\sin 2x + 3 = 2$, $0 \le x \le 360°$

22. $\frac{\sin \pi x}{x - 1} = 0$ tənliyinin $[0;2\pi]$ parçasında neçə kökü var?

23. $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ olduğuna görə üçbucağın perimetrini tapın.



Triqonometrik tənliklərin həll üsulları

Verilmiş triqonometrik tənliyin həlli müəyyən üsullarla sadə triqonometrik tənliyin həllinə gətirilir. Əsas həll üsullarını nümunələr üzərində göstərək.

1) Vuruqlara ayırma üsulu

Nümunə. $\sin 2x - \sin x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$2\sin x\cdot\cos x - \sin x = 0$ *ikiqat bucaq düsturuna görə* $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$ *ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarma*

$\sin x = 0$ və ya $2\cos x - 1 = 0$ *hasilin "0"-a bərabər olması şərti*

$x = \pi n,\ n\in Z$ | $\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in Z$

Cavab: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n\in Z,\ k\in Z$

Müxtəlif həll ailələrində parametrlərin (n, k) müxtəlif hərflərlə işarələnməsinə diqqət edin.

Nümunə. $\sin x\cos^2 x = 4\sin x$ tənliyini həll edin və $[0; 2\pi]$ parçasındakı köklərini tapın.

Həlli:

$\sin x\cos^2 x = 4\sin x$ *verilən tənlik*

$\sin x\cos^2 x - 4\sin x = 0$ *hər iki tərəfdən 4 sin x çıxılır*

$\sin x(\cos^2 x - 4) = 0$ *sin x mötərizə xaricinə çıxarılır*

$\sin x(\cos x - 2)(\cos x + 2) = 0$ *kvadratlar fərqi düsturu ilə vuruqlara ayrılır*

Hər bir vuruğu sıfıra bərabər etməklə x tapılır (əgər mümkünsə).

$\sin x = 0$	$\cos x - 2 = 0$	$\cos x + 2 = 0$
$x = \pi k,\ k\in Z$	$\cos x = 2$	$\cos x = -2$
	həlli yoxdur	həlli yoxdur

Tənliyin ümumi şəkildə həlli: $x = \pi k$ kimi olar $(k\in Z)$

Tənliyin $[0; 2\pi]$ parçasında kökləri: $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$.

2) Yeni dəyişən daxiletmə

Nümunə. $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0$ *$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ eyniliyinə görə*

$-2\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ *sadələşdirmə*

$2a^2 + a - 3 = 0$ *$\cos x = a$ yeni dəyişəni daxil edək*

$(2a + 3)(a - 1) = 0$

$a = -1{,}5$ | $a = 1$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\cos x = -1{,}5$ | $\cos x = 1$ *$\cos x = a$ əvəzləməsinə görə*

kökü yoxdur | $x = 2\pi k,\ k\in Z$

Cavab: $x = 2\pi k,\ (k\in Z)$.

3) Bircins tənliklərin həlli

$\sin x = a$, $\cos x = b$ olduqda tənliyin bütün hədləri a və b-yə görə eynidərəcəli birhədlilər olarsa, belə tənliyə bircins tənlik deyilir.

Nümunələr. $2\sin x - \cos x = 0$

$$\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

Ortaq vuruq yoxdursa, bircins tənlik hər iki tərəfi $\cos x$-in böyük qüvvətinə bölməklə həll edilir.

Nümunə. $\sin x + \cos x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $\cos x = 0$ ola bilməz, çünki $\cos x = 0$ olduqda tənlikdən $\sin x = 0$ alınır ki, bu da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyinə ziddir. Deməli, $\cos x \neq 0$ olmalıdır. Tənliyin hər iki tərəfini $\cos x$-ə bölə bilərik:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Buradan $\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

4) Dərəcəni azaltma düsturlarının tətbiqi

Nümunə. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada dərəcəni azaltma ($\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$) düsturunun tətbiqi əlverişli olur:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$$ *hər iki tərəfi 2-yə vuraq*

$$1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$$ *hər iki tərəfdən 1 çıxaq*

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$ *$2x = t$ əvəz edək*

$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$ $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ *olduğuna görə*

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$ *hər iki tərəfi 2-yə bölək*

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$$

5) Köməkçi bucaq daxiletmə

$a\sin x \pm b\cos x = d$ tipli tənlikləri $ab \neq 0$ olduqda hər iki tərəfi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə bölüb, köməkçi bucaq daxil etməklə həll etmək əlverişlidir.

Nümunə. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ olduğundan hər iki tərəfi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$-yə bölək:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} \qquad \sin\frac{\pi}{6}$$ *köməkçi $\frac{\pi}{6}$ bucağı daxil edilir*

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ *toplama düsturuna görə*

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ *$t = x - \frac{\pi}{6}$ əvəz edək*

$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ və ya $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ | $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ | $x = 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Cavab: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ 2\pi n,\ n \in Z.$

Nümunə. $\cos x = \sin\frac{x}{2}$ tənliyinin $[0;\ 2\pi]$ parçasında neçə kökü var?

Həlli: $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$ *ikiqat bucaq düsturuna görə*

$1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$ *$\sin\frac{x}{2} = a$ əvəz edək*

$2a^2 + a - 1 = 0$

$a = -1$ və $a = \frac{1}{2}$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\sin\frac{x}{2} = -1$ | $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

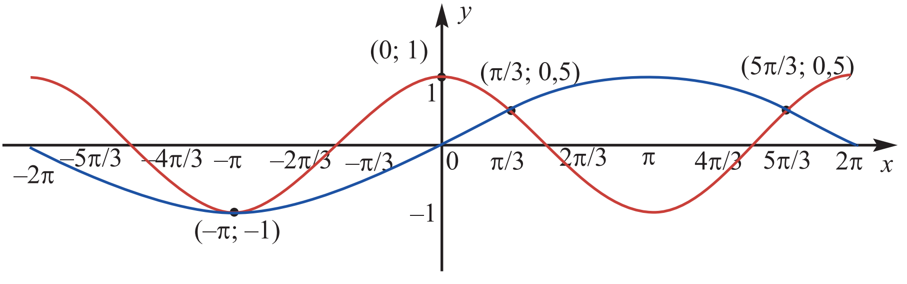
$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ | $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ və $\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = -\pi + 4\pi n,\ n \in Z$ | $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$ və $x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z.$

n parametrinin heç bir qiymətində tapılan köklər verilən parçada yerləşmir.

$k = 0$ olduqda tapılan $\frac{\pi}{3}$ və $\frac{5\pi}{3}$ verilmiş tənliyin $[0;\ 2\pi]$ parçasındakı kökləridir. k parametrinin digər qiymətlərinə uyğun köklər bu parçada yerləşmirlər.
Cavab: iki kökü var.

$y = \cos x$ və $y = \sin\frac{x}{2}$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinə görə də həllin düzgünlüyünü yoxlamaq olar. Bu qrafikləri qrafkalkulyatorla *(https://www.desmos.com/calculator)* qurmaqla həlli yoxlayaq.



Triqonometrik tənliklərin həll üsulları

Öyrənmə tapşırıqları

1. x-in verilən qiymətlərindən hansı tənliyin köküdür?

1) $2\cos x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{3}$ b) $x = \frac{5\pi}{3}$

2) $\operatorname{cosec} x - 2 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{6}$ b) $x = \frac{5\pi}{6}$

3) $3\,\mathrm{tg}^2\, 2x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{12}$ b) $x = \frac{5\pi}{12}$

4) $2\cos^2 4x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{16}$ b) $x = \frac{3\pi}{16}$

5) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{2}$ b) $x = \frac{7\pi}{6}$

6) $\sec^4 x - 4\sec^2 x = 0$

a) $x = \frac{2\pi}{3}$ b) $x = \frac{5\pi}{3}$

2. Tənlikləri vuruqlara ayırma üsulu ilə həll edin.

a) $2\sin^2 x - \sin x = 0$ b) $\sin^2 x + 2\sin x = 0$

c) $\cos^2 x - 3\cos x = 0$ d) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

3. Yeni dəyişən daxil etməklə tənlikləri həll edin.

a) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ b) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

c) $\cos^2 x - 4\cos x - 5 = 0$ d) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

e) $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ f) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

g) $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x + 2 = 0$ h) $\mathrm{ctg}\, x + 3\,\mathrm{tg}\, x = 2\sqrt{3}$

4. Bircins tənlikləri həll edin.

a) $\sin x + \cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ c) $\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x = 0$

5. Dərəcəni azaltma düsturlarını tətbiq etməklə tənlikləri həll edin.

a) $4\sin^2\frac{x}{2} - 3 = 0$ b) $4\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0$

6. Tənliyin verilmiş aralıqda yerləşən köklərini tapın.

a) $3\,\mathrm{tg}^2 x - 1 = 0$, $0 \le x \le 360^\circ$ b) $6\sin^2 x + 5 = 8$, $0 \le x \le 2\pi$

c) $4\cos^2 x - 1 = 2$, $0 \le x \le 2\pi$ d) $2\cos 2x + 3 = 2$ $0 \le x \le 360^\circ$

7. Müxtəlif üsulları tətbiq etməklə tənlikləri həll edin.

a) $\cos 3x - \cos x = 0$ b) $\sin 3x + \sin x = 0$

c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$ d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

e) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0$ f) $\sin 2x = 2\cos^2 x$

g) $(1 + \mathrm{tg}\, x)\cdot\cos x = 0$ h) $(1 - \mathrm{tg}\, x)\cdot\sin 2x = 0$

i) $\sin x + 1{,}5\sin 2x = \sin^3 x$ j) $\cos x + \sin 2x = \cos^3 x$

k) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ l) $\sin 3x = 3\sin x$

m) $\sin 3x - 2\cos 2x = 3$ n) $\cos 4x + \sin x = 2$

8. Kalkulyatordan istifadə etməklə tənliklərin $0 \le x < 2\pi$ intervalında təqribi həllərini tapın.

a) $3\ \mathrm{tg}\, x + 1 = 13$ b) $8 \cos x + 3 = 4$

c) $4 \sin x = -2 \sin x - 5$ d) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

9. Tənlikləri həll edin.

1) $(\mathrm{ctg}\, x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$
2) $2 \sin x - 1 = \mathrm{cosec}\, x$
3) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x = 0$
4) $\mathrm{cosec}^2 x - 2\ \mathrm{ctg}\, x = 0$
5) $2\ \mathrm{tg}^2 x \sin x - \mathrm{tg}^2 x = 0$
6) $\sec^2 x\ \mathrm{tg}\, x = 2\ \mathrm{tg}\, x$
7) $9 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0$
8) $(\mathrm{tg}\, x - 1)(\cos x - 1) = 0$
9) $\mathrm{tg}\, x + 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\, x$
10) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$
11) $\sin^2 x \cos x = \cos x$
12) $\sin^2 x \cos^2 x = 0$
13) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
14) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

10. 1) $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ tənliyinin:

a) ən kiçik müsbət kökünü; b) ən böyük mənfi kökünü;

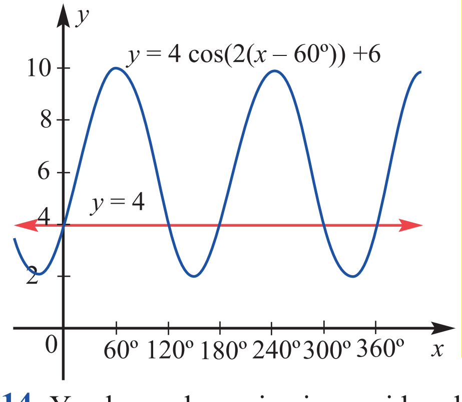
c) $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ aralığında yerləşən köklərini tapın.

2) $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$ tənliyinin $(-\pi; \frac{\pi}{2})$ aralığında yerləşən köklərini tapın.

11. Funksiyaların qrafiklərini qurun. Qrafiklərin $0 \le x < 2\pi$ intervalında x oxu ilə kəsişmə nöqtələrini yazın.

a) $y = 2 \sin x + 1$ b) $y = 2 \cos x - 1$

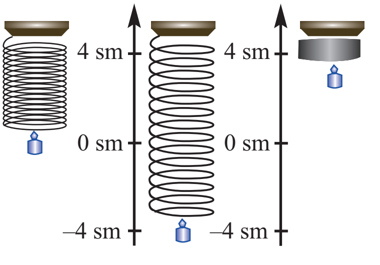
12. Şəkildə verilmiş qrafikə görə $4 \cos(2(x - 60°)) + 6 = 4$ tənliyinin həllini (təqribi) yazın.



13. **Cərəyan şiddəti.** İşıq mənbəyi kimi istifadə edilən generatorun yaratdığı elektrik cərəyanını $\mathrm{I} = 20 \sin 80\pi t$ düsturu ilə ifadə etmək olar. Burada t zamanı saniyə ilə, I cərəyan şiddətini amperlə göstərir. t-nin elə ən kiçik müsbət qiymətini tapın ki:

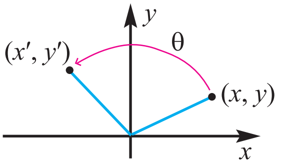
a) $\mathrm{I} = -10\ A$; b) $\mathrm{I} = 20\ A$ olsun.

14. Yaydan asılmış cismin rəqsi hərəkətini $d = 4 \sin \pi t$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Neçənci saniyədə yayın yerdəyişməsi 2 sm olacaq?

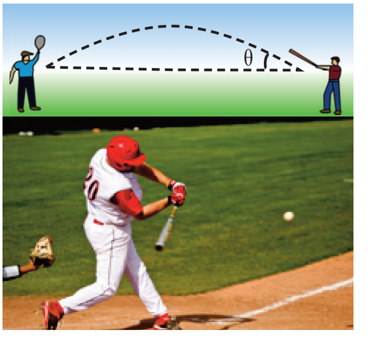


15. a) Koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə $\frac{\pi}{3}$ qədər dönmədə $(\sqrt{3};1)$ nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilər?

b) Koordinatları (2;2) olan nöqtə koordinat başlanğıcı ətrafında neçə dərəcə dönmədə koordinatları $(-\sqrt{2};\ \sqrt{6})$ olan nöqtəyə çevrilər?



16. Beysbol topuna vurulan zərbə ilə topun qət etdiyi yolun v_0 başlanğıc sürətindən və θ meyl bucağından asılılığı $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ kimidir. Burada g sərbəstdüşmə təcilidir. Beysbol topuna vurulan zərbə ilə top v_0 = 30 m/san başlanğıc sürəti ilə hərəkət edərək 70 m aralıda dayanmış rəqib oyunçu tərəfindən tutulmuşdur. θ meyl bucağını tapın.

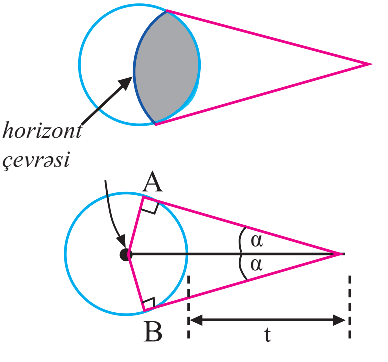


17. Mahir velosipedinin təkərinin balansını yoxlamaq istəyir. O, təkərin bağları üzərində işarə qoyaraq onu fırladır. Təkərin üzərindəki işarənin hərəkətini $h(t) = 42 + 18 \cos 3\pi t$ kimi ifadə etmək olar. Burada h hündürlüyü (sm-lə), t zamanı (saniyə ilə) göstərir.

a) t = 15 san olduqda işarə hansı hündürlükdə olacaq?

b) Neçənci saniyələrdə işarə 60 sm hündürlükdə olar?

18. **Kosmos.** Kommunikasiya məqsədləri üçün nəzərdə tutulmuş Yerin süni peykinin orbiti yer səthindən t mil məsafədədir. Yerin radiusu 3960 mildir. Təsəvvür edin ki, peyk Yer səthinin müəyyən hissəsini görüntüləyir. Şəkildə horizont çevrəsi ilə hüdudlanan bu hissə qara rənglə verilmişdir. Horizont çevrəsinə görə bəzi ölçüləri müəyyən etmək üçün şəkildən istifadə edin.

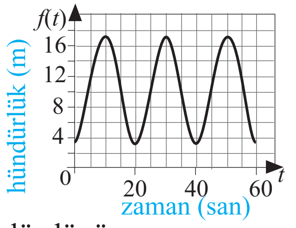


a) t-nin α-dan asılılıq düsturunu yazın.

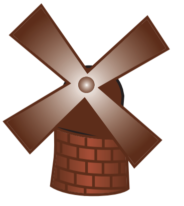
b) α = 10° olarsa, t-ni tapın.

c) t = 30000 mil olarsa, α-nın qiymətini tapın. AB minor qövsünün uzunluğunu hesablayın. Yer kürəsini ekvator xətti boyu tam görüntüləmək üçün ən azı neçə belə peyk lazımdır?

19. Ədəbiyyat. İspan yazıçısı Migel de Servantesin məşhur romanının qəhrəmanı Don Kixot özünü çox güclü hesab edirdi və bir gün yel dəyirmanını dayandırmaq fikrinə düşür. Bunu bacarmayan Don Kixot dəyirmanın pərlərindən birinə ilişir və havada fırlanmağa başlayır.



Triqonometrik funksiyaların köməyilə Don Kixotun düşdüyü vəziyyəti modelləşdirmək olar. Şəkildəki qrafik pərlə birlikdə fırlanan Don Kixotun yerdən hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərir.



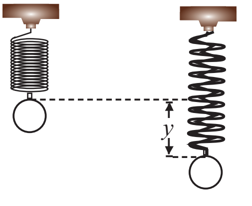
1) Tələb olunan göstəriciləri qrafikə görə tapın və real situasiyaya uyğun izahını yazın: a) Amplitud; b) Period.

2) Funksiyanın düsturunu yazın. Don Kixotun havada fırlanmasının altı tam dövrünə uyğun funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

3) Don Kixot hansı saniyələrdə yerdən 10 m hündürlükdə olacaq?

4) Pərin sürətinin zəifləməsi sinusoidal qrafikin formasına necə təsir göstərər?

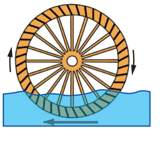
20. Harmonik rəqs. Yaydan asılmış cismin ağırlığı ilə yayın tarazlıq (sükünət) vəziyyətindən yerdəyişməsini $y = \frac{1}{12}(\sin\pi t - 3\cos\pi t)$ düsturu ilə ifadə etmək olar. Burada t zamanı saniyə ilə, y yerdəyişməni metrlə göstərir. Yayın $0 \le t \le 1$ zaman intervalında tarazlıq nöqtəsində olduğu vaxtları tapın.



21. Su çarxlarından suyun hərəkət enerjisini faydalı enerjiyə çevirmək üçün istifadə edilir.

Çarxın balansını yoxlamaq üçün üzərinə mismar çalındı və fırladıldı. Mismar hərəkətin başlanğıcında ən hündür nöqtədə olmaqla su səthindən 3,5 m məsafədə , çarxın hərəkətilə 12 saniyə sonra ən aşağı nöqtədə-su səthindən 0,5 m aşağıda olur.

a) Mismarın su səthindən h hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərən funksiyanın düsturunu yazın.



b) Hərəkətə başladıqdan 15 saniyə sonra mismar hansı hündürlükdə olacaq?

c) Çarx hərəkətə başladıqdan necə saniyə sonra mismar su səthindən 1,5 m hündürlükdə olacaq?

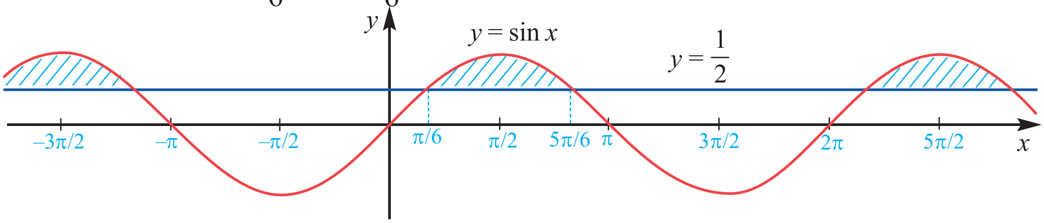
Triqonometrik bərabərsizliklər

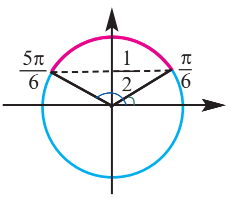
Sadə triqonometrik bərabərsizliklərin həlli vahid çevrənin və ya triqonometrik funksiyaların qrafiklərinin köməyi ilə yerinə yetirilir.

Nümunə 1. $\sin x > \frac{1}{2}$ bərabərsizliyini $0 < x < 2\pi$ intervalında qrafik üsulla həll edin. Bərabərsizliyin ümumi həllini yazın.

Həlli: Verilən bərabərsizliyi həll etmək $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin ordinatı $\frac{1}{2}$-dən böyük olan nöqtələr çoxluğunun absislərini müəyyən etmək deməkdir.

1. $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini quraq.
2. Eyni koordinat müstəvisində $y = \frac{1}{2}$ funksiyasının qrafikini quraq.
3. Qrafiklərin kəsişmə nöqtələrini qeyd edək.
4. Göründüyü kimi, $y = \frac{1}{2}$ düz xətti $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini iki hissəyə bölür. Qrafikin $y = \frac{1}{2}$ düz xəttindən yuxarıda qalan hissəsinə aid nöqtələrin absisləri verilən bərabərsizliyin həllidir. Bu nöqtələr $0 < x < 2\pi$ intervalında absisi $x > \frac{\pi}{6}$ və $x < \frac{5\pi}{6}$ olan nöqtələrdir. Yəni bərabərsizliyin $0 < x < 2\pi$ intervalındakı həlli $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğudur.





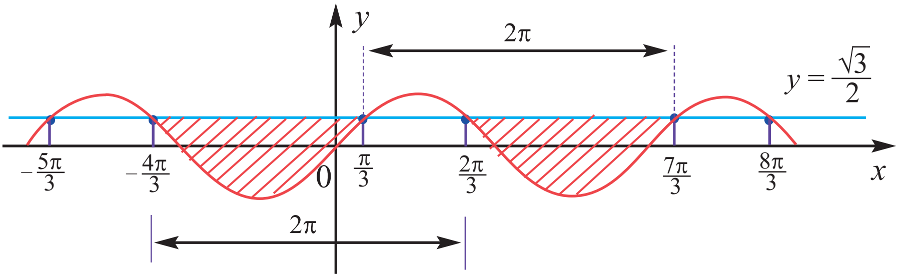
Triqonometrik bərabərsizliyin həllini vahid çevrə üzərində təsvirdən də aydın görmək olar.
Verilən bərabərsizliyi ödəyən bütün qalan intervallar $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ intervalını 2π-nin mislinə bərabər məsafə qədər sağa və sola sürüşdürməklə alınır. Buna görə də $\sin x > \frac{1}{2}$ bərabərsizliyin həlli

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ (n \in Z) \qquad \text{olar.}$$

Nümunə 2. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tənliyinin kökləri $y = \sin x$ və $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisləridir. Tənliyin bir həlli $x_1 = \frac{\pi}{3}$ olduğundan, uzunluğu 2π olan $[0;2\pi]$ aralığında digər həlli $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ olur. Qrafik üzərində absisləri $\frac{\pi}{3}$ və $\frac{2\pi}{3}$ olan kəsişmə nöqtələrini qeyd edək.

Bu nöqtələrdən hər iki tərəfdə daha iki nöqtə göstərək: $\frac{\pi}{3}$ nöqtəsindən 2π qədər sağda $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$ və $\frac{2\pi}{3}$ nöqtəsindən 2π qədər solda $\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\frac{4\pi}{3}$ nöqtələri də qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin absisləridir.



$(-\frac{4\pi}{3};\ \frac{\pi}{3})$ aralığında $y=\sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələrin ordinatı $\frac{\sqrt{3}}{2}$-dən kiçikdir. Dövriliyi nəzərə almaqla $\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərsizliyinin həllini $-\frac{4\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n\in Z)$ şəklində yaza bilərik.

Qrafik təsvirdən göründüyü kimi $(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3})$ aralığında $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərsizliyi ödənilir. $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərsizliyini ödəyən qalan intervallar $(\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3})$ intervalını 2π-nin mislinə bərabər məsafə qədər sağa və sola hərəkət etdirməklə alınır.
Deməli, $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərsizliyinin ümumi həlli

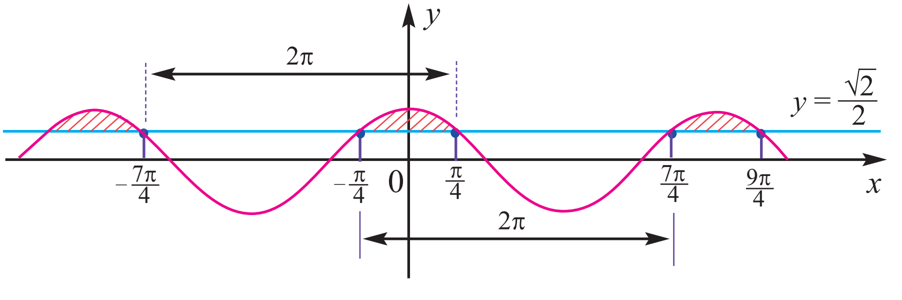
$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n\ (n\in Z)$$ şəklində olur.

Nümunə 3. $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli: $y=\cos x$ və $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyindən tapaq:

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n \quad \text{və} \quad x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n.\ (n\in Z)$$

$n=0$ olduqda kəsişmə nöqtələrinin absisləri $\frac{\pi}{4}$ və $-\frac{\pi}{4}$ olur. Bu nöqtələri qrafik üzərində qeyd edək. Bu nöqtələrdən hər iki tərəfdə daha iki nöqtəni göstərək.



$-\frac{\pi}{4}$ nöqtəsindən 2π qədər sağda $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$ və $\frac{\pi}{4}$ nöqtəsindən 2π qədər solda $\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$ nöqtələrini də qrafik üzərində qeyd edək.

Verilmiş bərabərsizliyi ödəyən intervallardan biri uyğun tənliyin mütləq qiymətcə ən kiçik kökləri, yəni, $-\frac{\pi}{4}$ və $\frac{\pi}{4}$ nöqtələri arasındadır. Dövriliyi nəzərə almaqla $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ bərabərsizliyinin həllini

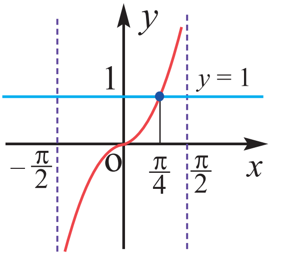
$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n \ (n\in Z)$$ şəklində alırıq.

Qrafik təsvirə görə $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ bərabərsizliyinin həlli

$$\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{4}+2\pi n \ (n\in Z)$$ olur.

Nümunə 4. $\operatorname{tg} x>1$ və $\operatorname{tg} x<1$ bərabərsizliklərini həll edin.

Həlli: Eyni koordinat müstəvisində $y=\operatorname{tg} x$ və $y=1$ funksiyalarının qrafiklərini təsvir edək.



$\operatorname{tg} x=1$ tənliyindən qrafiklərin $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında yerləşən kəsişmə nöqtəsinin absisini tapaq: $x=\frac{\pi}{4}$

$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında $\operatorname{tg} x$ artan funksiyadır.

$x=\frac{\pi}{4}$ olduqda $\operatorname{tg} x=1$ olduğundan

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}$ olduqda $\operatorname{tg} x<1$, $\quad\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ olduqda $\operatorname{tg} x>1$ olar.

$\operatorname{tg} x$ funksiyası π dövrlü funksiya olduğuna görə

$\operatorname{tg} x<1$ bərabərsizliyin həlli

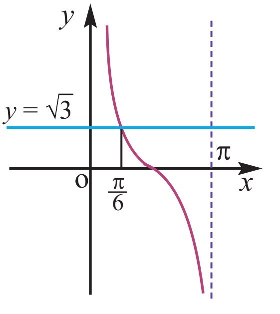
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n \ (n\in Z),$$

$\operatorname{tg} x>1$ bərabərsizliyinin həlli isə

$$\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n \ (n\in Z)$$ olur.

Nümunə 5. $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$ və $\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$ bərabərsizliklərini həll edin.

Həlli: Eyni koordinat müstəvisində $y=\operatorname{ctg} x$ və $y=\sqrt{3}$ funksiyalarının qrafiklərini təsvir edək.



$(0;\pi)$ aralığında qrafiklərin kəsişmə nöqtəsinin absisini $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$ tənliyindən tapırıq: $\quad x=\frac{\pi}{6}$

$(0;\pi)$ aralığında $\operatorname{ctg} x$ azalan funksiyadır.

$x=\frac{\pi}{6}$ olduqda $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$ olduğundan

$0<x<\frac{\pi}{6}$ olduqda $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$,

$\frac{\pi}{6}<x<\pi$ olduqda isə $\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$ olur.

Bu o deməkdir ki, $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$ bərabərsizliyi $0+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n \ (n\in Z)$ şərti ilə, $\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$ bərabərsizliyi isə $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\pi+\pi n \ (n\in Z)$ şərti ilə ödənilir.

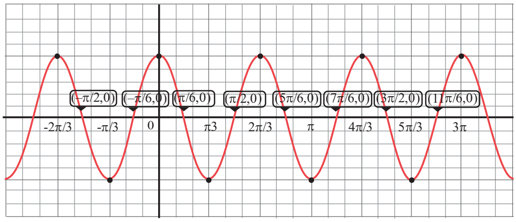
Triqonometrik bərabərsizliklər

Triqonometrik bərabərsizlikləri həll etmək üçün:
1) Bərabərsizliyin sağ və sol tərəfinə daxil olan funksiyaların qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun;
2) Uyğun tənliyi həll edib, qrafiklərin koordinat başlanğıcına yaxın bir neçə yerdə kəsişmə nöqtəsinin absislərini tapın və qeyd edin;
3) Verilmiş bərabərsizliyin ödəndiyi hər hansı aralığı müəyyən edin;
4) Dövriliyi nəzərə almaqla bərabərsizliyin həllini yazın.

Nümunə 6. $\cos 3x \leq 0$ bərabərsizliyini $0 < x < 2\pi$ intervalında həll edin.

Həlli:

1. $y = \cos 3x$ funksiyasının qrafikini quraq.

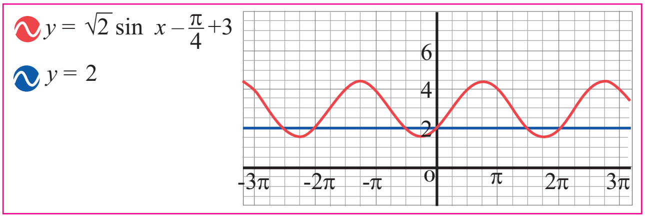


Qrafikdən göründüyü kimi, $\cos 3x$-in 0-dan kiçik və ya 0-a bərabər olan qiymətlərinə qrafikin absis oxu ($y = 0$ düz xətti) üzərində və ondan aşağıda yerləşən nöqtələri uyğundur.

$0 < x < 2\pi$ intervalında bərabərsizliyin həlləri $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ aralıqları olur.

Nümunə 7. $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \geq 2$ bərabərsizliyini $0 < x < 2\pi$ intervalında həll edin.

Həlli: Qrafkalkulyatorla $y = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$ və $y = 2$ funksiyasının qrafiklərini quraq.



Qrafikin $y = 2$ düz xətti üzərində və ondan yuxarıda qalan hissəsinə aid nöqtələrin absisləri bərabərsizliyin həllidir. Bu $0 < x < 2\pi$ intervalında $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ olan nöqtələrdir. Bərabərsizliyin həlli ümumi şəkildə $2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ olar.

Yoxlama: Həll intervalından bir nöqtə, məsələn $x = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsini sınaq nöqtəsi olaraq seçək və həllin doğruluğunu yoxlayaq:

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \geq 2$

$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 3 \geq 2$

$1 + 3 \geq 2$

Triqonometrik bərabərsizliklər

Öyrənmə tapşırıqları

1. Bərabərsizliyin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ parçasında yerləşən həllərini tapın.

a) $\sin x > \frac{1}{2}$ b) $\sin x > -\frac{1}{2}$ c) $\sin x > 0$

2. Bərabərsizliyin $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında yerləşən həllərini tapın.

a) $\sin x < \frac{1}{2}$ b) $\sin x < -\frac{1}{2}$ c) $\sin x < 0$

3. Bərabərsizliyin $[0; 2\pi]$ parçasında yerləşən həllərini tapın.

a) $\cos x < \frac{1}{2}$ b) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ c) $\cos x < 0$

4. Bərabərsizliyin $[-\pi; \pi]$ parçasında yerləşən həllərini tapın.

a) $\cos x > 0$ b) $\cos x > -\frac{1}{2}$ c) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Bərabərsizliyin $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ aralığında yerləşən həllərini tapın.

a) $\operatorname{tg} x > -1$ b) $\operatorname{tg} x < -1$ c) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$

6. Bərabərsizliyin $(0; \pi)$ aralığında yerləşən həllərini tapın.

a) $\operatorname{ctg} x < 1$ b) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$ c) $\operatorname{ctg} x \leq 0$

7. Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x > -\frac{1}{2}$ c) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin x < \frac{1}{2}$

e) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ f) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\cos x \leq \frac{1}{2}$

i) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ j) $\operatorname{tg} x > -1$ k) $\operatorname{tg} x \leq 1$ l) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

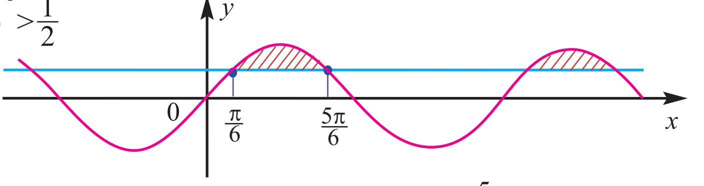
m) $\operatorname{ctg} x > 1$ n) $\operatorname{ctg} x > -1$ p) $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$ q) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$

8. Nümunəni araşdırın. Bərabərsizlikləri həll edin.

Nümunə. $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$

Həlli: $\sin(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2}$

$x + \frac{\pi}{6} = t$ əvəz edək:



$\sin t > \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

a) $2\sin 2x - \sqrt{3} > 0$ b) $2\cos 2x - \sqrt{2} \leq 0$

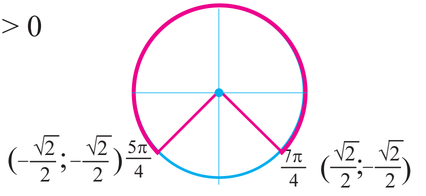
c) $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$ d) $2\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1 < 0$

9. Vahid çevrə üzərində aşağıdakı şərtlərin hansı rübdə ödənildiyini yazın.

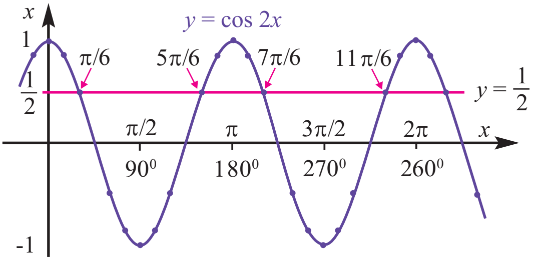
a) $\sin x > 0,\ \cos x < 0$ b) $\cos x < 0,\ \operatorname{tg} x < 0$

c) $\sec x > 0,\ \operatorname{tg} x > 0$ d) $\operatorname{tg} x < 0,\ \sin x > 0$

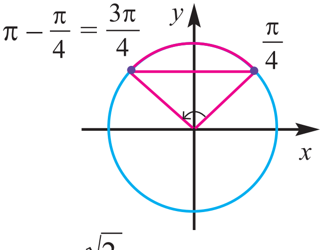
10. **Açıq tipli tapşırıq.** Vahid çevrənin qırmızı rəngli hissəsini ifadə edən triqonometrik bərabərsizlik yazın.

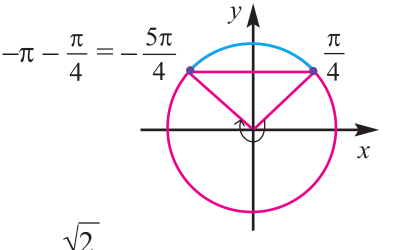


11. Bərabərsizliyin həllinin qrafik təsvirinə görə bərabərsizliyi və həll intervalını yazın.



12. Şəkildə $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ bərabərsizliklərinin həllinin ümumi yazılışı və vahid çevrə üzərində təsviri müxtəlif rənglərlə nümunə olaraq verilmişdir.





$\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

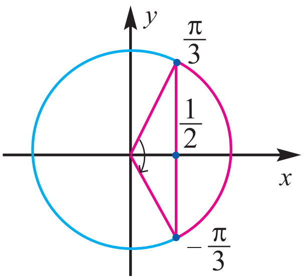
$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

Aşağıdakı bərabərsizliklərin həllini nümunəyə uyğun təqdim edin.

a) $\sin t \geq \frac{1}{2}$ b) $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$

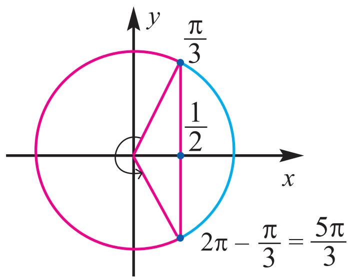
d) $\sin t \leq \frac{1}{2}$ e) $\sin t \geq -\frac{1}{2}$

13. Nümunədə $\cos t \geq \frac{1}{2}$ və $\cos t \leq \frac{1}{2}$ bərabərsizliklərinin ümumi həlli və vahid çevrə üzərində təsviri verilmişdir.



$\cos t \geq \frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n$



$\cos t \leq \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$

Aşağıdakı bərabərsizliklərin həllini nümunəyə oxşar üsulla təqdim edin.

a) $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos t \geq -\frac{1}{2}$

14. Triqonometrik eyniliklərə görə sadələşdirib, bərabərsizliyi həll edin.

a) $\sin 3x \cdot \sin x - \cos 3x \cdot \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sin x \cdot \cos x > -\frac{1}{4}$
c) $\sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x < \frac{1}{2}$

15. Bərabərsizliyin hər iki tərəfini müəyyən ədədə bölün, köməkçi bucaq daxil edərək sadələşdirin və həll edin.

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x > 1$ b) $\sin x - \cos x < 1$

16. Bərabərsizliyi həll edin.

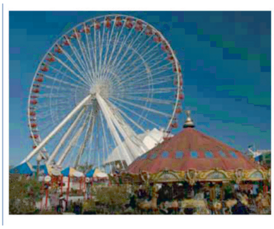
a) $(2\sin x - 1)\cdot(\sin x - 3) < 0$
b) $(2\cos x - \sqrt{3})\cdot(\cos x + 2) > 0$
c) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$

17. Bərabərsizlikləri $(0; 2\pi)$ intervalında həll edin.

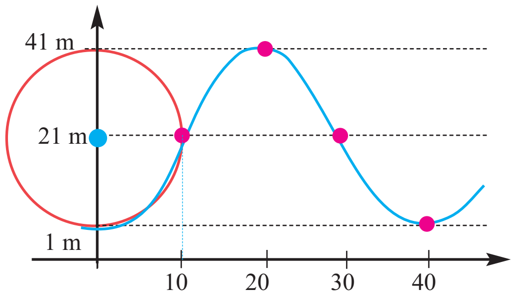
a) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \leq -\frac{1}{2}$
c) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$ d) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 0$
e) $\cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) > -1$
g) $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$ h) $\sin(\frac{\pi}{4} - x) < \frac{1}{2}$

Məsələ həllinə nümunə. Radiusu 20 m olan karusel hər 40 saniyədə bir tam dövr edir. Ən aşağıda yerləşən oturacaq yerdən 1 m hündürlükdədir.

a) Məsələyə uyğun qrafik təsviri çəkin.
b)Hərəkətin başlanğıcında ən aşağıda olan kabinə karuselin bir tam dövrü ərzində hansı saniyələrdə yerdən 21 m və daha yüksək hündürlükdə olacaq?
c) Bu oturacağa əyləşən şəxsin karuseldə fırlanarkən yerdən olan hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərən funksiyanı $h(t) = a\sin b(t - c) + d$ şəklində yazın.



Həlli: a) Məsələdə verilənlərə uyğun sxematik təsvir çəkək. Karuselin çevrə üzrə hərəkətində hər dörddə bir fırlanmaya uyğun nöqtələri qeyd edək. Bu nöqtələri birləşdirsək, karuselin bir dövrə uyğun (360°) qrafikini - sinusoid alarıq.



b) Qrafikdən göründüyü kimi, başlanğıcda ən aşağıda olan kabinə 10-cu saniyədən 30-cu saniyəyə qədər müddət ərzində yerdən 21 m və daha yüksək hündürlükdə olacaq.
c) Məsələdə verilənlərə və qrafikə görə funksiyanın düsturunu yazaq.

Dövrə görə tezliyi, b-ni tapaq: $T = \dfrac{2\pi}{b}$

$T = 40$ san, $\dfrac{360}{b} = 40 \quad b = \dfrac{360}{40} = 9$

Məsələdə verilən maksimum və minimuma görə amplitudu və orta xətti tapaq.

$$a = \frac{\text{maksimum} - \text{minimum}}{2} = \frac{41 - 1}{2} = 20$$

$$d = \frac{\text{maksimum} + \text{minimum}}{2} = \frac{41 + 1}{2} = 21$$

Faza sürüşməsini, c-ni müəyyən edək. Sinus funksiyası maksimumu dövrün dörddə birində alır. Lakin bu funksiyanın maksimumu 10 saniyə gec (20-ci saniyədə) aldığını müşahidə edirik. Faza sürüşməsi $c = 10$. Deməli,
$h(t) = 20 \sin 9(t - 10) + 21$.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Kalkulyatorla hesablayın.

a) $\cos^{-1}(-0{,}8)$ b) $\sin^{-1} 0{,}99$ c) $\mathrm{tg}^{-1}\, 12$ d) $\cos^{-1} 0{,}55$

2. Tənliklərin $[0;\ 2\pi)$ (və ya $[0;\ 360°)$) aralığındakı köklərini tapın.

a) $\sin(x + 60°) = \frac{1}{2}$ b) $\cos(x - 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\mathrm{tg}(x + 45°) = -1$ d) $\sin(x - 20°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ f) $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = 1$

3. Bərabərsizlikləri $0 < x < 2\pi$ intervalında həll edin.

a) $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x - \frac{1}{2} > 0$ c) $\sqrt{2}\sin x - 1 < 0$

d) $\sin x \le 0$ e) $\mathrm{tg}\, x \ge \sqrt{3}$ f) $\sec^2 x \le 4$

g) $\cos^2 x > \frac{1}{2}$ h) $\cos 2x \le 0$ i) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$

j) $\cos^2 x \ge \frac{1}{3}$ k) $2\cos x \ge 1$ l) $\sin 5x \ge 5$

m) $\cos 2x \le 1$ n) $\sec x \le \sqrt{2}$ o) $\mathrm{ctg}\, x \le 4$

4. Tənlikləri həll edin.

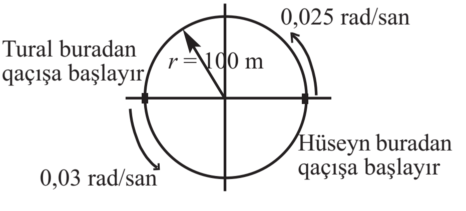
a) $2\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = -1$ e) $\sin x + 2 = 3$

b) $5\sec^2 x = 6\sec x$ f) $2\cos^2 x - \cos x = 1$

c) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ g) $\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 4 = 0$

d) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x = 0$ h) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$

5. Tural və Hüseyn şəkil üzərində qeyd edildiyi kimi radiusu 100 m olan çevrə boyu qaçırlar. Tural şəkil üzərində qeyd edilmiş nöqtədən başlayaraq saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 0,03 radian/saniyə, Hüseyn isə qeyd edilmiş nöqtədən saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 0,025 radian/saniyə sürətlə qaçır.



a) 6-cı saniyədə onların olduqları nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edin.

b) 8 saniyə ərzində onlar nə qədər yol qaçmış olacaqlar?

c) Turalın t saniyədən sonra hərəkətilə cızdığı dönmə bucağını ifadə edin.

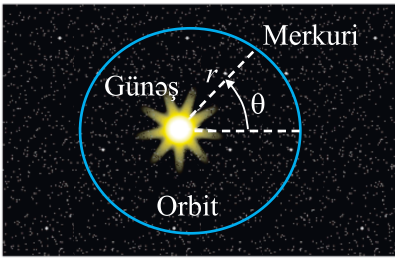
d) Tural ilk dəfə neçənci saniyədə absisi 50 olan nöqtədə olacaq?

e) Hüseyn ilk dəfə neçənci saniyədə absisi 50 olan nöqtədə olacaq?

f) Tural neçənci saniyədə ilk dəfə Hüseyni ötüb keçəcək?

6. **Astronomiya.** Merkuri planeti Günəş ətrafında ellips üzrə hərəkət edir. Onun hərəkətini aşağıdakı düsturla ifadə etmək olar:

$$r = \frac{3{,}44 \times 10^7}{1 - 0{,}206 \cos \theta}$$



θ bucağının hansı ən kiçik müsbət qiymətində Merkuri planeti ilə Günəş arasındakı məsafə 4×10^7 km olacaq?

7. Seçilmiş ərazidə çöl dovşanlarının sayının çoxalmasının (onlarla bəslənən yırtıcıların çoxalmasına görə) zamandan asılığını $D(t) = 400\cos\frac{\pi t}{4} + 800$ kimi modelləşdirmək olar. D dovşanların sayını, t isə 2000-ci ildən başlayaraq zamanı illə göstərir.

a) Dovşanların maksimum və minumum sayı nə qədər olur?
b) Cari il üçün dovşanların sayı nə qədər olmalıdır?
c) Dovşanların sayı hansı ildə təxminən 1000 olmuşdur.
d) Funksiyanın qrafikini 2 illik dövr üçün çəkin.

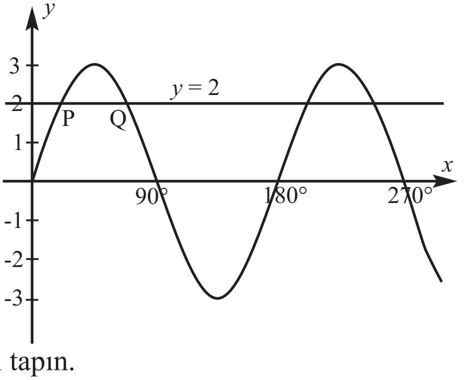
8. Bir il ərzində toplanan məlumatların araşdırılması nəticəsində şəhərdə günün uzunluğunun (saatlarla) aşağıdakı asılılıqla dəyişdiyi müəyyən edilmişdir.

$$D(x) = \frac{38}{3} - \frac{11}{3}\cos\frac{2\pi}{365}x$$

Burada x ilə günlərin ilin əvvəlindən hesablanan nömrəsi işarə olunub.

a) Yanvarın 1-də, martın 22-də, noyabrın 5-də günün uzunluğu neçə saatdır?
b) Hansı tarixlərdə günün uzunluğu 11 saatdan çoxdur?

9. Qrafik $y = a \sin bx$ şəklindəki funksiyanın qrafikidir.
a) Qrafikdən a və b -nin qiymətlərini tapın.
b) $y = 2$ düz xətti ilə kəsişdiyi P və Q nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

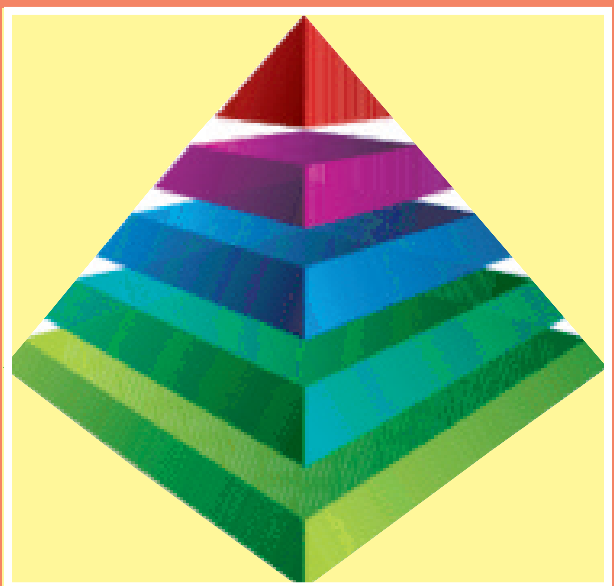


10. Tənliklərin $[0;\ 2\pi)$ aralığındakı köklərini tapın.

a) $2\cos^2 x = \sin x$
b) $\sin^3 x - 5\sin x = 0$
c) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$
d) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$
e) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{3}$
f) $\sin 3x - \cos 2x = 2$

8 Fəza fiqurlarının həcmi

Prizmanın həcmi
Piramidanın həcmi
Fəza fiqurlarının oxşarlığı
Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmləri
Kəsik piramidanın həcmi
Müstəvi kəsiklərinə aid məsələlər
Fəzada simmetriya

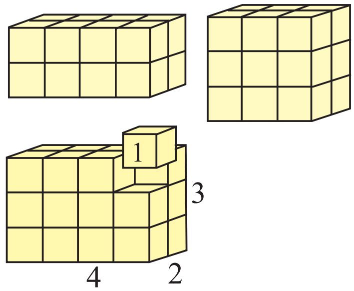


Prizmanın həcmi

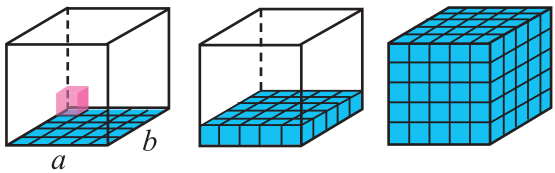
Araşdırma. Kublarla müxtəlif ölçülü prizmalar quraşdırın və ya onların şəklini çəkin. Ən azı dörd prizma quraşdırın.

1. Fərz edin ki, prizmanı təşkil edən hər kubun tərəfinin uzunluğu 1 vahid, hər üzü 1 kvadrat vahid, həcmi 1 kub vahiddir.
2. Prizmalara görə cədvəldəki məlumatları müəyyən edin və onu doldurun.
3. Prizmanın oturacağının sahəsi və hündürlüyü ilə həcmi arasında hansı əlaqəni aşkar etdiniz?
4. Konstruksiyaların küncündən bir kubu çıxarın, alınan kuboidin üstdən, öndən və yandan görünüş şəkillərini çəkin.

Prizma	Oturacağının sahəsi	Hündürlüyü	Həcmi
1.			
2.			
3.			
4.			

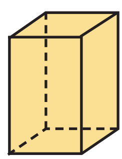


Cismi sonlu sayda üçbucaqlı piramidalara ayırmaq olarsa, ona sadə cisim deyilir. Sadə cisimlər üçün həcm - ədədi qiyməti aşağıdakı xassələri ödəyən müsbət kəmiyyətdir:
1) Konqruyent cisimlərin həcmləri bərabərdir.
2) Tili uzunluq vahidinə bərabər olan kubun həcmi kub vahidə bərabərdir.
3) Cisim sadə cisimlərlə hissələrə ayrılırsa, onda bu cismin həcmi onun hissələrinin həcmləri cəminə bərabərdir.
Həcmləri bərabər olan cisimlərə müadil (eyni böyüklükdə) cisimlər deyilir.



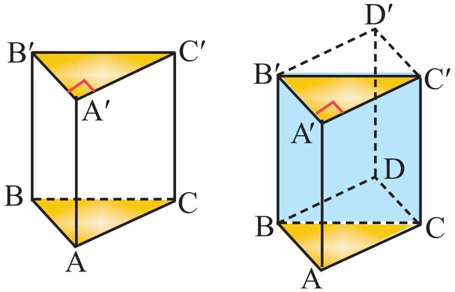
Ölçüləri natural ədədlər olduqda düzbucaqlı paralelepipedin həcmi ədədi qiymətcə onu təşkil edən vahid kubların sayına bərabərdir. Ölçüləri istənilən həqiqi ədəd olduqda da göstərilir ki, düzbucaqlı paralelepipedin həcmi onun üç ölçüsünün hasilinə bərabərdir: $\mathbf{V} = \boldsymbol{a \cdot b \cdot c}$

Həcm düsturunda $a \cdot b$ hasili oturacağın sahəsi, c isə hündürlük olduğundan onu belə də ifadə etmək olar: $\mathbf{V = S_{ot}}\boldsymbol{h}$



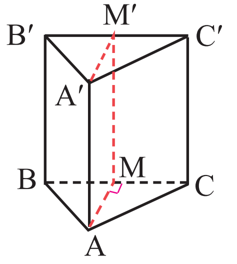
Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.
Tilinin uzunluğu a olan kubun həcmi: $\mathbf{V} = \boldsymbol{a^3}$
İstənilən düz prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. Bu təklifin doğru olduğunu oturacağı düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizma üzərində göstərək.

Prizmanın həcmi

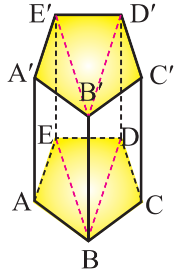


Oturacaqlardakı düzbucaqlı üçbucaqları düzbucaqlıya tamamlamaqla, prizmanı da düzbucaqlı paralelepipedə tamamlayaq. Alınan düz prizmanın həcmi $V = AB \cdot AC \cdot AA'$ olar.
Prizmanın oturacağının diaqonalından keçən $BB'C'C$ müstəvisi prizmanı iki konqruyent üçbucaqlı prizmaya bölür.
Deməli, oturacağı düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizmanın həcmini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

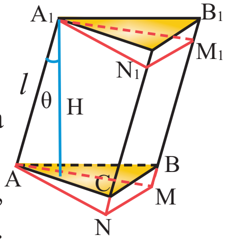
$$V = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot AA' = S_{ot}h$$



Prizmanın oturacağı istənilən ABC üçbucağı olduqda, bu üçbucağın hündürlüklərindən eləsini çəkək ki, qarşı tərəfi onun daxili nöqtəsində kəssin: $AM \perp BC$.
AA' tilindən keçməklə BC tilinə perpendikulyar olan müstəvi bu prizmanı hündürlükləri eyni, oturacaqları düzbucaqlı üçbucaq olan iki prizmaya ayırır. Verilən prizmanın həcmi bu prizmaların həcmləri cəminə bərabərdir.
Deməli, oturacağı istənilən üçbucaq olan düz prizmanın da həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.
Düz prizmanın oturacaqları ixtiyari çoxbucaqlılar olarsa, bu prizmanı oturacağı üçbucaq olan düz prizmalara ayırıb həcmlərini toplamaqla verilən prizmanın həcmini hesablamaq olar.



Şəkildəki $ABCA'B'C'$ mail prizmasını onunla eyni həcmli olan düz prizmaya çevirək. Bunun üçün:



1. Prizmanın yan tilinə perpendikulyar müstəvi kəsiyi keçirək.
2. Müstəvi kəsiyindən yuxarıda qalan hissəsini ayıraq.
3. Ayrılmış hissəni paralel köçürərək prizmanın alt oturacağına yapışdıraq.
4. Alınan düz prizmanın hündürlüyü mail prizmanın yan tilidir, yəni $h = l$, oturacağı isə mail prizmanın perpendikulyar kəsiyidir.
Bu düz prizmanın həcmi elə mail prizmanın həcmidir.

Nəticə: Mail prizmanın həcmi perpendikulyar kəsiyin sahəsi ilə yan tilinin hasilinə bərabərdir: $\boldsymbol{V = S_{\perp} \cdot l}$

Perpendikulyar kəsik müstəvisi ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaq mail prizmanın yan tili ilə hündürlüyü arasındakı θ bucağına bərabər olduğundan

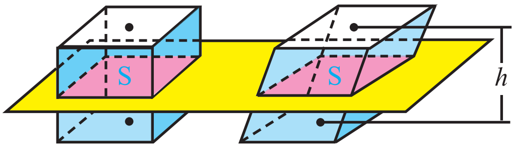
$$V = S_{\perp} \cdot l = S_{ot} \cdot \cos\theta \cdot l = S_{ot} \cdot H$$

Beləliklə, prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. $\boldsymbol{V = S_{ot} \cdot H}$

Prizmanın həcmi

Həcmlər haqqında Kavalyeri prinsipi. Oturacaqları eyni müstəvi üzərində olub, hündürlükləri bərabər olan iki cismin oturacaqlara paralel istənilən müstəvi kəsiklərinin sahələri bərabərdirsə, həcmləri də bərabərdir.

Bu prinsipi italyan riyaziyyatçısı Bonaventura Kavalyeri (1598-1647) aşkar etmişdir.

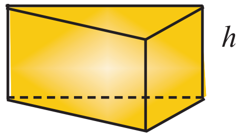


Prizmanın həcmi

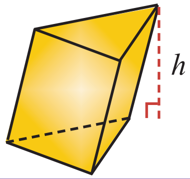
Prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

$$V = S_{ot}h$$

Düz prizma



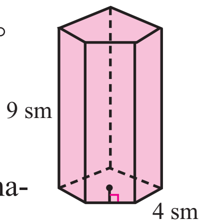
Mail prizma

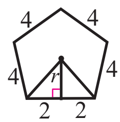


Nümunə. Oturacağının tərəfinin uzunluğu 4 sm, yan tilinin uzuznluğu 9 sm olan düzgün beşbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

Düzgün beşbucaqlının mərkəzi bucağı 360 : 5 = 72° olduğundan apofemi

$$r = \frac{2}{\text{tg}36°}$$





Düzgün çoxbucaqlının sahəsi perimetri ilə apofemi hasilinin yarısına bərabərdir.

$$S_{ot} = \frac{1}{2}P \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{\text{tg}36°} = \frac{20}{\text{tg}36°} \qquad V = S_0 \cdot h = \frac{180}{\text{tg}36°} \approx 248 \text{ (sm}^3\text{)}$$

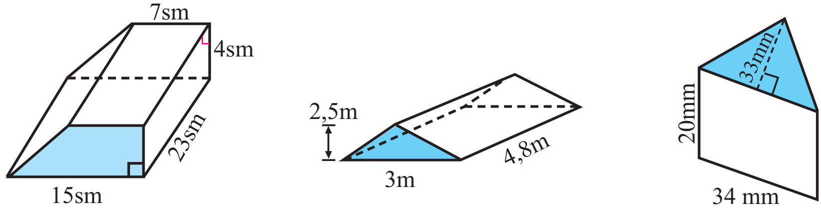
1. Cədvəldə verilənlərə görə sual işarəsinin yerindəki ölçüləri tapın.

Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri	Qiymətləri					
uzunluğu a	6	20	2	3	?	8
eni b	4	30	5	?	8	2
hündürlüyü c	3	15	?	4	2	?
S_{yan}	?	?	?	40	40	60
S_{tam}	?	?	?	?	?	?
V	?	?	60	?	?	?

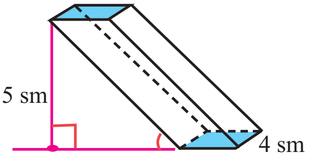
2. 8 sm × 15 sm × 40 sm ölçüdə düzbucaqlı paralelepiped şəkilli metal blok bütünlüklə 1 sm × 1,5sm × 2 sm ölçülü metal lövhələrdən ibarətdir. Metal bloka neçə belə lövhə işlədilmişdir.

Prizmanın həcmi

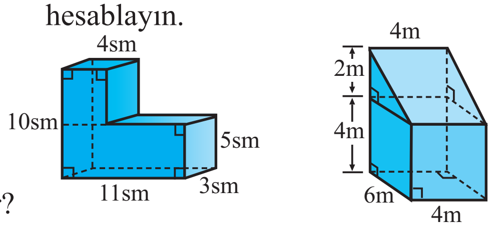
3. Şəkildə verilənlərə görə düz prizmaların həcmini hesablayın.



4. Oturacağı kvadrat olan mail prizmanın həcmini tapın.



5. Mürəkkəb fiqurların həcmlərini hesablayın.

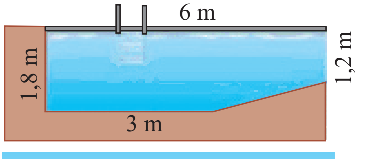


6. Paralelepipedin həcmi necə dəyişər?

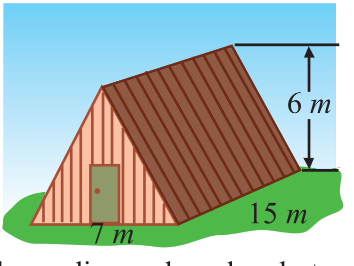
a) Ölçülərindən biri iki dəfə artsa; b) İki ölçüsünün hər biri iki dəfə artsa; c) Hər üç ölçüsü iki dəfə artsa.

7. Süd məhsulları istehsalı ilə məşğul olan şirkət yeni satış kampaniyası üçün qiymətini saxlamaqla süd qutularının tutumunu 25% artırmağı planlaşdırır. Qutunun yalnız hündürlüyünü dəyişdirməklə buna necə nail olmaq olar?

8. Uzunluğu 10 m olan hovuzun en kəsiyinin şəkildə verilmiş ölçülərinə görə tapın:
a) Hovuz neçə ton($1m^3 = 1$ ton) su tutur ?
b) Dolu hovuz iki eyni boru ilə 4 saata boşaldıldı. Hər boru dəqiqədə neçə kub metr su boşaltdı?

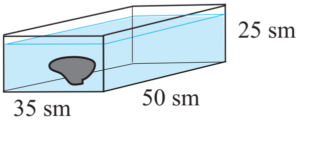


9. Şəkildəki taxıl ambarı hansı fəza fiqurunun formasındadır? Onun neçə üzü, neçə tili var? Verilən ölçülərinə görə ambarın həcmini hesablayın.

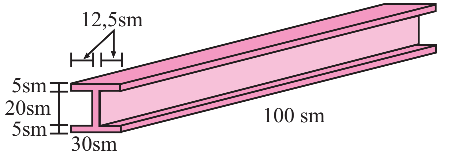


10. a) İsbat edin ki, düzbucaqlı paralelepipedin hər hansı diaqonalının kvadratı onun üç ölçüsünün kvadratları cəminə bərabərdir: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
b) $a = 3$, $b = 4$, $d=13$ olduqda düzbucaqlı parlelepipedin həcmini tapın.

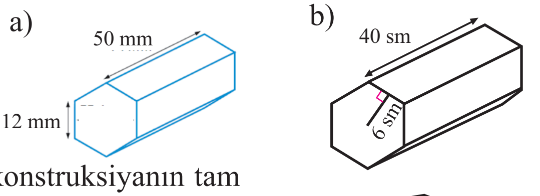
11. Ölçüləri şəkildə göstərildiyi kimi olan qabın içərisinə atılan daşla suyun səviyyəsi 0,5 sm qalxdı. Daşın həcmini tapın.



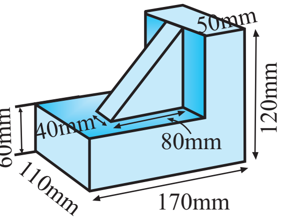
12. Şəkildəki metal blokun sıxlığının 7860 kq/m^3 olduğunu bilərək, onun ümumi kütləsini hesablayın.



13. Düzgün altıbucaqlı prizmanın həcmini tapın.



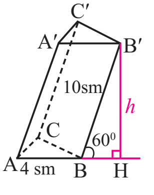
14. a) Şəkildə verilən ölçülərə görə konstruksiyanın tam səthinin sahəsini hesablayın.
b) 1 sm^3-nun qiyməti 2 qəpik olan alüminiumdan hazırlanan bu konstruksiya 1 sm^3-nun qiyməti 10 qəpik olan davamlı metaldan hazırlanan konstruksiyaya görə neçə manat ucuz olar?



15. Düzgün üçbucaqlı prizmanın yan səthinin sahəsi 48 sm^2, hündürlüyü isə 8 sm-dir.
a) Oturacağın tərəfinin uzunluğunu tapın. b) Prizmanın həcmini tapın.

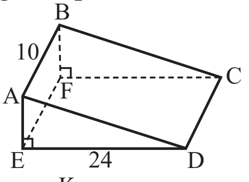
16. Düzgün altıbucaqlı prizmanın oturacağının tərəfi $6\sqrt{3}$ sm, hündürlüyü 4 sm-dir. Prizmanın yan səthini və həcmini tapın.

17. Mail prizmanın oturacağı tərəfi 4 sm olan bərabərtərəfli üçbucaqdır. Prizmanın yan tilinin uzunluğu 10 sm olub,oturacaq müstəvisi ilə 60° bucaq əmələ gətirir. Bu prizmanın həcmini tapın.

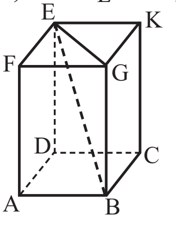


18. a) Düzbucaqlı paralelepipedin üç üzünün sahələri 2 sm^2, 3 sm^2, 6 sm^2-dir. Bu paralelepipedin həcmini tapın.
b) Ölçüləri 3 sm, 4 sm və 5 sm olan düzbucaqlı paralelepipedin hər tilini x sm artırdıqda səthi 54 sm^2 artır. Həcmin nə qədər artdığını tapın.

19. Şəkildəki ABCD düzbucaqlısı formasında olan meylli sahənin torpağı çıxarılaraq CDEF düzbucaqlısı şəklində düz sahəyə çevrilmişdir. AB = 10 m, ED = 24 m-dir. Sahə 10 m^2 azalmışsa, bu ərazidən neçə kub metr torpaq çıxarılmışdır?



20. Şəkildəki düz prizmanın oturacağı kvadratdır. S_{ABCD}=24 sm^2, $\angle BEG = 60°$ olarsa, prizmanın həcmini tapın.



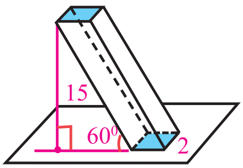
Prizmanın həcmi

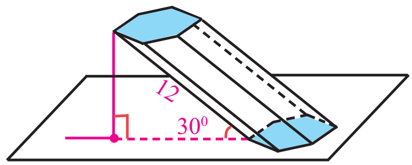
21. Sahəsi 2 dm^2 olan romb düz paralelepipedin oturacağıdır. Diaqonal kəsiklərinin sahələri 9 dm^2 və 16 dm^2-dir. Paralelepipedin həcmini tapın.

22. Yan üzünün diaqonalı 5 m, özünün diaqonalı isə 7 m olan düzgün dördbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

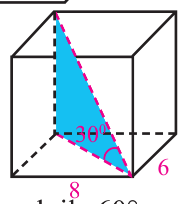
23. a) Tərəfi 2 vahid olan kvadrat mail prizmanın oturacağıdır. 15 vahid uzunluqda olan yan til oturacaq müstəvisi ilə 60°-li bucaq əmələ gətirir. Prizmanın həcmini tapın.

b) Həcmi $36\sqrt{3}$ kub vahid olan düzgün altıbucaqlı mail prizmanın 12 vahid uzunluqdakı yan tili oturacaq müstəvisi ilə 30°-li bucaq əmələ gətirir. Oturacağın tərəfini tapın.





24. a) Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalı oturacağın diaqonalı ilə 30°-li bucaq əmələ gətirir. Şəkildə verilən ölçülərinə görə onun həcmini tapın.



b) Başqa bir düzbucaqlı paralelepipedşəkilli qutunun da ölçüləri 8×6 kimidir. Lakin onun diaqonalı oturacağının diaqonalı ilə 60°-li bucaq yaradır. Bu iki paralelepipedin həcmlərinin nisbətinin $\dfrac{\text{tg}60°}{\text{tg}30°}$ -ə bərabər olduğunu göstərin.

25. Düz prizmanın oturacağı kvadratdır. Onun yan tilinin uzunluğu oturacağın tərəfindən 3 dəfə böyükdür, tam səthinin sahəsi isə 350 m^2-dır. Prizmanın həcmini tapın.

26. Düzgün üçbucaqlı prizmanın bütün tillərinin uzunluqları x-ə bərabərdir. Onun həcminin $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^3$ olduğunu göstərin.

27. Düz üçbucaqlı prizmada oturacağının tərəfləri 4 sm, 5 sm, 7 sm, yan tili isə oturacağın böyük hündürlüyünə bərabərdir. Prizmanın həcmini tapın.

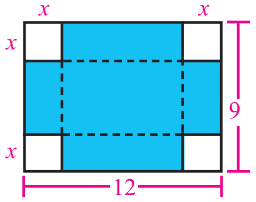
28. Mail üçbucaqlı prizmanın yan tilləri 20 sm, perpendikulyar kəsiyinin tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm-dir. Prizmanın həcmini tapın.

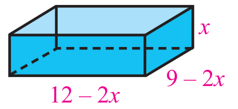
29. Düzgün altıbucaqlı prizmanın hündürlüyü h, oturacağının tərəfi isə a-ya bərabərdir. Onun həcminin $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$ olduğunu göstərin.

30. Düzgün üçbucaqlı prizmanın bütün 9 tili eyni uzunluqdadır. Prizmanın həcmi $16\sqrt{3}$ sm^3 olarsa, bir tilinin uzunluğu neçə santimetrdir?

31. Düzbucaqlı paralelepipedin en və uzunluq ölçüləri 20% kiçildilmişsə, hündürlüyü neçə faiz artırılmalıdır ki, həcmi dəyişməsin?

32. Kiçik layihə işi.





İnformatika. 9 sm × 12 sm ölçülü kartonun künclərindən kvadratlar kəsilib çıxarılır. Qırıq xətlər boyu kartonu qatladıqda karton qutu formasını alır. Qutunun maksimum həcmdə olması üçün o hansı ölçülərdə olmalıdır? Qutunun həcmini x dəyişəni ilə ifadə edək.

$$V = (12 - 2x)(9 - 2x)\,x$$

Verilən kartondan qutu düzəltmək üçün x-in qiymətləri 0 və $\frac{9}{2}$ arasında dəyişə bilər: $0 < x < 4{,}5$. Aşağıdakı kompüter proqramı x-in 10 qiyməti üçün həcmi hesablamışdır.

```
10    PRİNT    "X", "HƏCM"
15    PRİNT
20    FOR  X = 0  TO  4,5 STEP 0,5
30    LET   V = (12 – 2*X) (9 – 2*X) *X
40    PRİNT  X,  V
50    NEXT  X
60    END
```

X	HƏCM
0	0
0,5	44
1	70
1,5	81
2	80
2,5	70
3	54
3,5	35
4	16
4,5	0

Sağ tərəfdə çap edilmiş məlumat x-in 1 ilə 2 arasındakı qiymətlərində həcmin maksimum olduğunu göstərir. Həmçinin həcmin maksimum qiymətinin 81 olduğu da tapılmışdır.

Proqramın icra edilmiş hissəsinə görə aşağıdakıları yerinə yetirin.

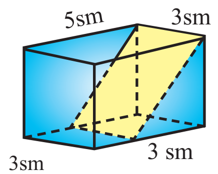
a) Daha dəqiq hesablamalar aparmaq üçün proqramın x -in qiymətlərini dəyişən komandasını elə seçin ki, x-in qiymətləri 1-dən 2-yə qədər 0,1 addımla dəyişsin.

b) 20-ci komandanı elə dəyişin ki, həcmin qiyməti 0,1 sm^3 dəqiqliklə hesablanılsın.

c) Həcmin maksimum qiymətinə uyğun qutunun ölçülərini yazın (en, uzunluq, hündürlük).

d) Kompüter proqramını kartonun ölçüləri 8 sm × 20 sm olan hal üçün yazın və kompüterdə işləməsini təmin edin.

e) Verilən proqramın (proqramlaşdırma dilini dəyişə bilərsiniz) kompüterdə işləməsini təmin etmək üçün lazımı işləri yerinə yetirin.

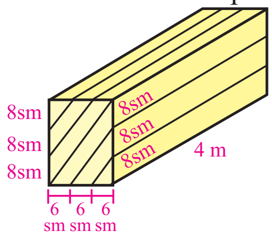


33. Şəkildə qapağı içinə düşmüş qutu təsvir edilmişdir. Qapağın sahəsi 15 sm^2-dır. a) Qutunun 3-cü ölçüsünü tapın. b) Qapağın qutudan ayırdığı kiçik qapalı hissənin həcmini tapın.

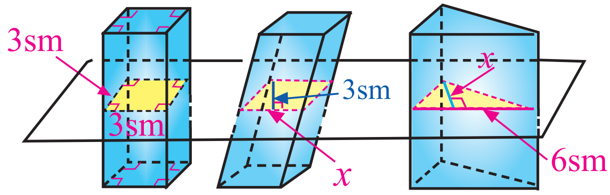
c) Qutunun ağzı açıq böyük hissəsinin həcmini tapın.

Piramidanın həcmi

34. Uzunluğu 4 m, eni 18 sm, qalınlığı 24 sm olan şalban şəkildə göstərilən qaydada 6 hissəyə ayrılmışdır. Hər bir hissənin həcmini tapın.



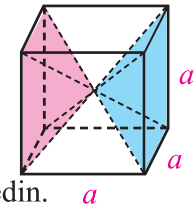
35. Fiqurların həcmləri və hündürlükləri bərabərdir. Prizmaların x ilə işarə edilmiş ölçülərini müəyyən edin.



Araşdırma. 1. Kubun diaqonalları onu altı konqruyent piramidaya ayırır. Hər bir piramidanın oturacağı kubun üzüdür, hündürlüyü isə $\frac{1}{2}$ a-ya bərabərdir.

a) Hər bir piramidanın həcminin $V = \frac{1}{6}a^3$ olduğunu izah edin.

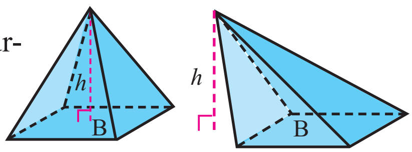
b) Hər bir piramidanın həcminin $V = \frac{1}{3}S_{ot}h$ olduğunu izah edin.



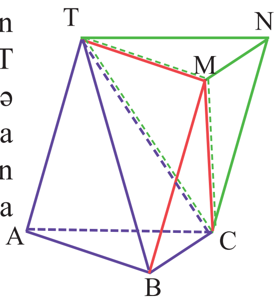
Piramidanın həcmi

Piramidanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.

$$V = \frac{1}{3}S_{ot}h$$



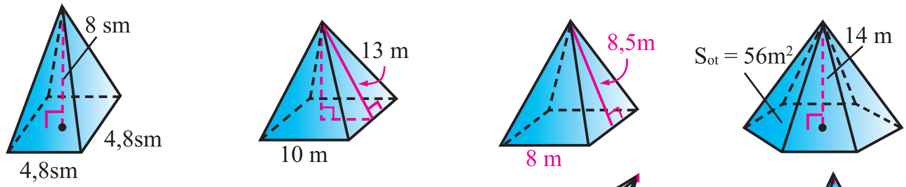
Tutaq ki, TABC- təpəsi T, oturacağı ABC olan üçbucaqlı piramidadır. Bu piramidanı üçbucaqlı prizmaya tamamlayaq. Alınan prizma üç piramidadan: 1) Verilmiş TABC piramidasından, 2) TCNM və 3) TMBC piramidalarından ibarətdir. 2-ci və 3-cü piramidaların oturacaqları konqruyentdir: $\Delta CNM \cong \Delta MBC$ və T təpəsindən çəkilmiş hündürlükləri ortaqdır. Buna görə də onların həcmləri bərabərdir. 1-ci və 3-cü piramidaların da oturacaqları konqruyentdir: $\Delta TAB \cong \Delta BMT$ və C təpəsindən çəkilən hündürlükləri ortaqdır. Buna görə onların da həcmləri bərabərdir. Onda verilmiş piramidanın həcmi $\frac{1}{3}S_{ot}h$-a bərabərdir.



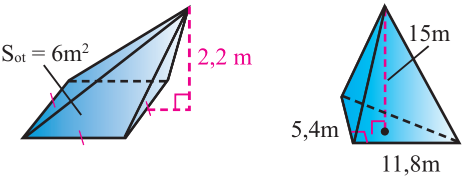
İxtiyari piramidanın oturacağını üçbucaqlara ayırıb, alınmış üçbucaqlı piramidaların həcmlərini tapıb cəmləməklə verilmiş piramidanın həcmini hesablamaq olar. Beləliklə, ixtiyari piramidanın həcmi oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir: $V = \frac{1}{3}S_{ot}h$

Piramidanın həcmi

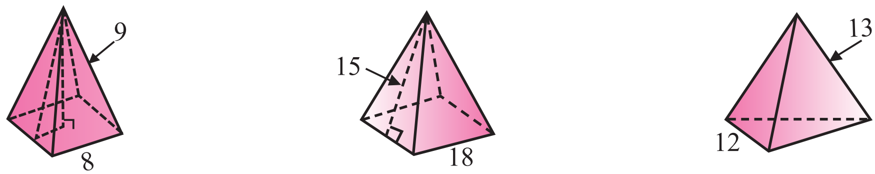
1. a) Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidaların həcmlərini tapın.



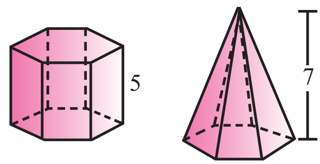
b)Şəkildə verilənlərə görə piramidaların həcmlərini tapın.



2. Verilənlərə görə düzgün piramidaların həcmini tapın.



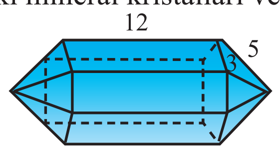
3. Prizma və piramidanın oturacaqları konqruyent fiqurlardır. Prizmanın hündürlüyü 5 vahid, piramidanın hündürlüyü 7 vahiddir. Bu fiqurların həcmləri nisbətini tapın.

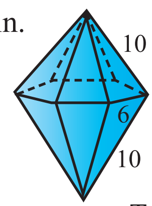


4. Yan tillərinin hər biri 25 mm olan piramidanın oturacağı düzbucaqlıdır. Bu düzbucaqlının tərəfləri 18 mm və 24 mm-dir. Piramidanın həcmini tapın.

5. Yan tillərinin hər biri 13 sm olan piramidanın oturacağı tərəfləri 6 sm, 8 sm və 10 sm olan üçbucaqdır. Piramidanın həcmini tapın.

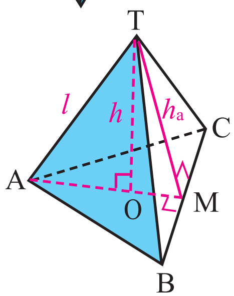
6. Şəkildəki mineral kristalları verilmişdir. Həcmini hesablayın.





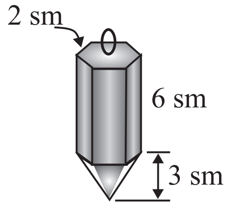
7. TABC düzgün üçbucaqlı piramidadır. Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

a) AM = 9 və TM = 5 olarsa, h və l-i tapın.
b) BC = 6 olarsa, AO və AM-i tapın.
c) $h = 4$, $l = 5$ olarsa, BC, OM və AM-i tapın.
Yan səthinin sahəsini və həcmini tapın.
d) AB = 12, TA = 10 olarsa, apofemi, yan səthinin sahəsini, həcmi tapın.



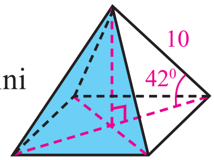
Piramidanın həcmi

8. Şaqul adlanan alətdən inşaat işində şaquli xətlərin düzgünlüyü yoxlamaq üçün istifadə edilir. Şəkildəki şaqul düzgün altıbucaqlı prizmadan və piramidadan ibarətdir. Alətin həcmini tapın.

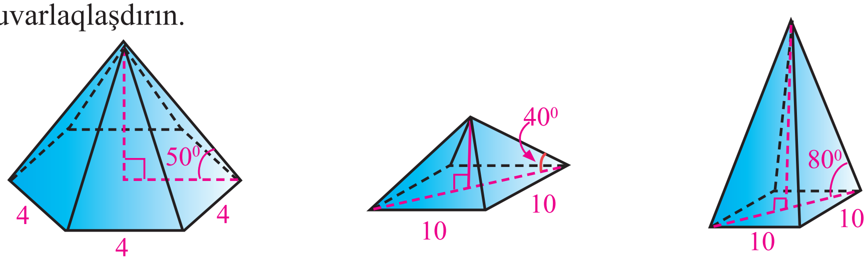


9. Oturacağı bərabərtərəfli üçbucaq olan piramidanın apofemi 10 sm, oturacağının tərəfi 6 sm-dir. Piramidanın həcmini tapın.

10. Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidanın həcmini hesablayın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



11. Düzgün piramidaların həcmini tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

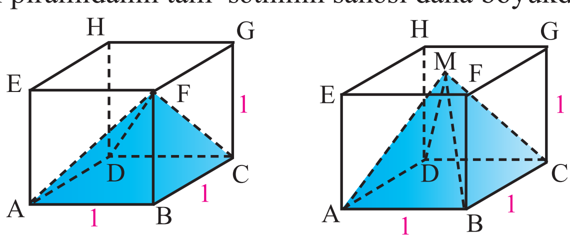


12. Piramidanın oturacağı tərəfi 3 sm olan rombdur. Piramidanın yan üzlərinin hər biri oturacaq müstəvisi ilə 45° bucaq əmələ gətirir. $S_{yan}=12$ sm^2 olarsa, piramidanın həcmini tapın.

13. Üçbucaqlı piramidanın bir tili 6 sm, qalan tillərin hər biri 5 sm-ə bərabərdir. Piramidanın həcmini tapın.

14. Konqruyent kubların daxilinə iki müxtəlif piramida, F-ABCD və M-ABCD çəkilmişdir. M-ABCD piramidasının M təpəsi EFGH kvadratının mərkəzindədir.

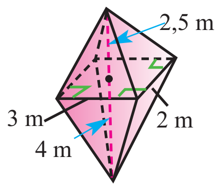
a) Hansı piramidanın həcmi daha böyükdür?
b) Hansı piramidanın tam səthinin sahəsi daha böyükdür?

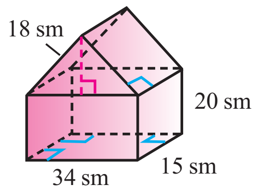


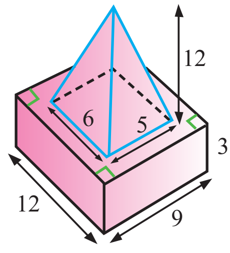
15. Üçbucaqlı piramidanın bir-birinə perpendikulyar olan yan üzlərinin sahələri 24 dm^2, 16 dm^2, 12 dm^2-dir. Piramidanın həcmini tapın.

Piramidanın həcmi

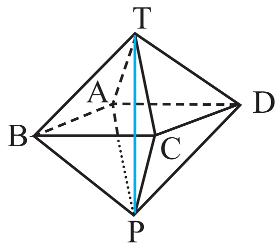
16. Şəkildəki verilənlərə görə fiqurların həcmini hesablayın.



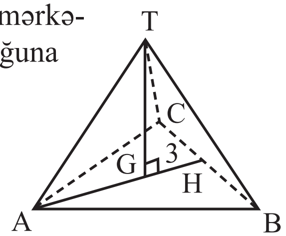




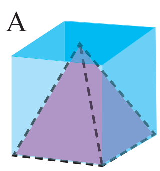
17. Şəkildəki düzgün oktaedrin tillərinin uzunluqları cəmi 18 vahiddir. Oktaedirin: a) hündürlüyünü; b) həcmini tapın.

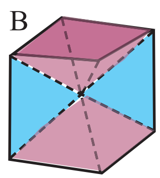


18. G nöqtəsi düzgün tetraederin oturacağının ağırlıq mərkəzidir (medianların kəsişmə nöqtəsi). GH = 3 sm olduğuna görə piramidanın həcmini tapın.



19. İki konqruyent kubun daxilinə çəkilmiş piramidaların oturacaqları kubun üzləridir. B şəklindəki piramidaların həcminin A şəklindəki piramidanın həcminə nisbətini tapın.





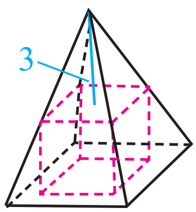
20. Düzgün dördbucaqlı piramidanın daxilinə şəkildə göstərildiyi kimi kub yerləşdirilmişdir. Kubun alt oturacağı piramidanın oturacağı ilə eyni müstəvi üzərində, üst oturacağının təpələri isə piramidanın tilləri üzərindədir. Oturacağı kubun üst üzündə olan kiçik piramidanın həcmi 36 sm^3, hündürlüyü 3 sm-dir.

a) Kubun tilinin uzunluğunu tapın.

b) Böyük piramidanın oturacağının tərəfini tapın.

c) Böyük piramidanın həcmini tapın.

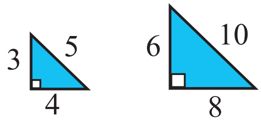
d) Böyük piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.



Fəza fiqurlarının oxşarlığı

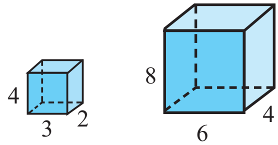
Oxşar fiqurlar formaca eyni olub, uyğun ölçüləri mütənasibdir.

Məsələn, şəkildəki düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır. Çünki, uyğun tərəflərinin nisbətləri bərabərdir.



$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$$

Şəkildəki düzbucaqlı paralelepipedlər də oxşardır. Çünki, uyğun xətti ölçüləri nisbətləri bərabər olmaqla uyğun üzləri oxşar düzbucaqlılardır.

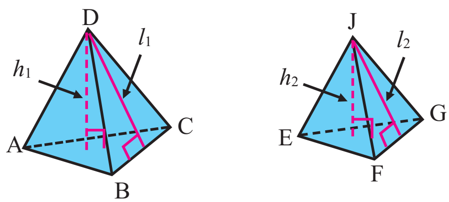


$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$$

Düzgün çoxüzlülər oxşardır. Xüsusi halda, bütün kublar oxşardır, düzgün tetraedrlər oxşardır və s.

Oxşar fiqurlar

Çevrilmədə istənilən iki nöqtə arasındakı məsafə eyni ədəd dəfə dəyişərsə, belə çevrilməyə oxşarlıq çevrilməsi deyilir. Oxşarlıq çevrilməsi ilə biri digərinə çevrilən fiqurlara oxşar fiqurlar deyilir. Oxşarlıq əmsalı ixtiyari iki uyğun nöqtələr cütü arasındakı məsafələrin nisbətinə bərabərdir.

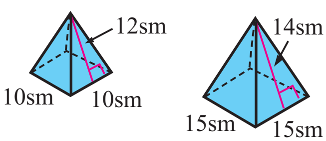


$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CA}{GE}=\frac{AD}{EJ}=\frac{BD}{FJ}=\frac{CD}{GJ}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{l_1}{l_2}=k$$

$\Delta ABC \sim \Delta EFG$, $\Delta ABD \sim \Delta EFJ$,
$\Delta BCD \sim \Delta FGJ$, $\Delta ACD \sim \Delta EGJ$

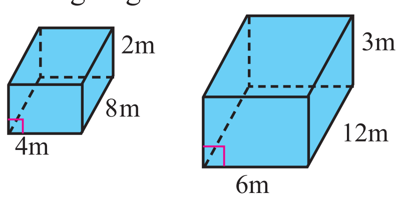
Uyğun xətti ölçülərin nisbətlərini göstərən ədədə oxşarlıq əmsalı deyilir.

Nümunə. Verilən fiqurların oxşar olub-olmadığını göstərin.



$$\frac{10}{15}=\frac{10}{15}\neq\frac{12}{14}$$

Oxşar fiqurlar deyil



$$\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$ Oxşar fiqurlardır

Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmləri

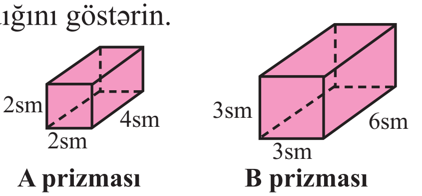
Araşdırma. Verilən fiqurların oxşar olub-olmadığını göstərin.

A və B prizmaları (düzbucaqlı paralelepipedləri) oxşarlıq əmsalı $\frac{2}{3}$ olan oxşar prizmalardır.

Bu prizmaların

a) tam səthlərinin sahələrinin nisbətini;

b) həcmlərinin nisbətini tapın.



a) A prizmasının tam səthi

$S_{tam} = Ph + 2S_{ot} =$

$= 12{\cdot}2 + 2{\cdot}8 = 40$ (sm²)

B prizmasının tam səthi

$S_{tam} = Ph + 2S_{ot} =$

$= 18{\cdot}3 + 2{\cdot}18 = 90$ (sm²)

A prizmasının tam səthinin B prizmasının tam səthinə olan nisbəti:

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

b) A prizmasının həcmi

$V = S_{ot}h = 8 \cdot 2 = 16$ (sm³)

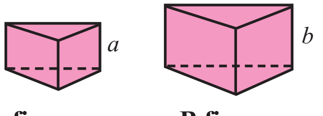
B prizmasının həcmi

$V = S_{ot}h = 18 \cdot 3 = 54$ (sm³)

A prizmasının həcminin B prizmasının həcminə olan nisbəti: $\frac{16}{54} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Oxşar fiqurların səthləri və həcmləri

Əgər iki fəza fiqurunun oxşarlıq əmsalı $\frac{a}{b}$ kimi olarsa, bu fiqurların səthlərinin (yan, tam, oturacaq) nisbəti $\frac{a^2}{b^2}$ kimi, həcmlərinin nisbəti isə $\frac{a^3}{b^3}$ kimi olar.

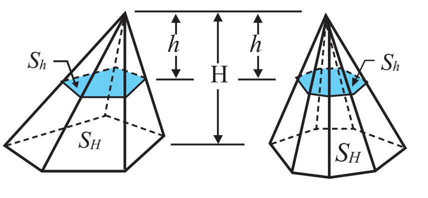


A fiquru **B fiquru**

Oxşarlıq əmsalı: $\frac{a}{b}$

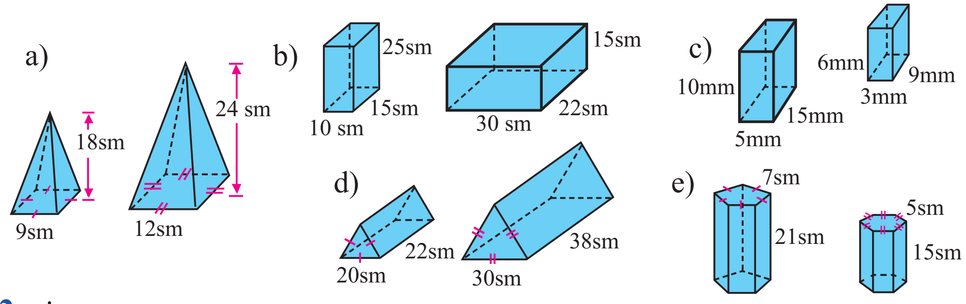
$$\frac{S_{tamA}}{S_{tamB}} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3}{b^3}$$

Piramidanın oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilməsindən alınan kiçik piramida verilən piramidaya oxşardır. Oxşarlıq əmsalını istənilən uyğun xətti ölçülərinin nisbətinə görə tapmaq olar. Məsələn, şəkildəki piramidaların hündürlükləri verilmişdir. Onların səthlərinin, oturacaqlarının və ya tam səthlərinin sahələrinin nisbəti hündürlüklərinin nisbətinin kvadratına bərabərdir. $\frac{S_{kiç}}{S_{böy}} = \frac{h^2}{H^2}$



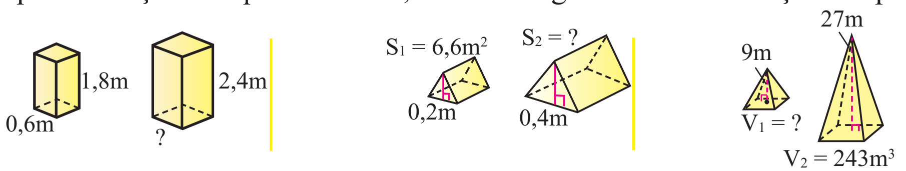
Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmləri

1. Verilən fiqurların oxşar olub-olmadıqlarını müəyyən edin.



2. İki fiqur oxşardır. Verilənlərə görə fiqurların oxşarlıq əmsallarını tapın.

3. Fiqurların oxşar olduqlarını bilərək, verilənlərə görə tələb edilən ölçüləri tapın.



4. İki oxşar prizmanın hündürlükləri nisbəti 5 : 3 kimidir. Bu prizmaların:
a) yan səthlərinin sahələri nisbətini tapın.
b) həcmləri nisbətini tapın.

5. A və B düzgün dördbucaqlı piramidaları oxşardırlar. A piramidasının oturacağının tərəfi 6 sm, həcmi 48 sm^3-dur. B piramidasının oturacağının tərəfi 12 sm-dir.
a) B piramidasının həcmini tapın.
b) Yan səthlərinin nisbətini tapın.
c) Hər bir piramidanın tam səthlərinin sahəsini tapın.

6. İki oxşar fiqurun səthlərinin sahəsi və böyük fiqurun həcmi verilmişdir. Kiçik fiqurun həcmini tapın.

a) $S_1 = 18$ sm^2, $S_2 = 72$ sm^2, $V_2 = 344$ sm^3
b) $S_1 = 192$ m^2, $S_2 = 1728$ m^2, $V_2 = 4860$ m^3
c) $S_1 = 52$ dm^2, $S_2 = 208$ dm^2, $V_2 = 192$ dm^3

7. İki oxşar fiqurun həcmləri və kiçik fiqurun səthinin sahəsi verilmişdir. Böyük fiqurun səthinin sahəsini tapın.

a) $V_1 = 27$ sm^3, $V_2 = 125$ sm^3, $S_1 = 63$ sm^2
b) $V_1 = 5$ m^3, $V_2 = 40$ m^3, $S_1 = 4$ m^2
c) $V_1 = 54$ sm^3, $V_2 = 128$ sm^3, $S_1 = 18$ sm^2

Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmləri

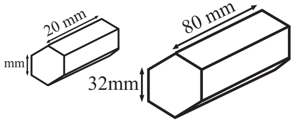
8. Yuyucu toz istehsal edən şirkət eyni növ tozun qablaşdırıldığı qutuları müəyyən miqyasla böyütməklə tozu müxtəlif tutumlu qutulara qablaşdırır. Tutumu 450 qram olan qutunun ölçüləri 1:2 miqyası ilə mütənasib olaraq böyüdülmüşdür. Yeni qutunun tutumunu tapın.

9. İki kubdan birinin diaqonalı $\sqrt{3}$ sm, digərininki $4\sqrt{3}$ sm-dir. Bu kubların həcmləri fərqini tapın.

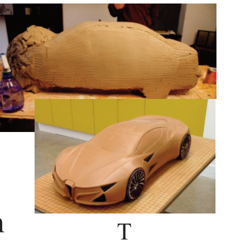
10. İki oxşar piramidanın həcmləri 2 və 54 kub vahiddir. Aşağıdakı nisbətləri tapın.
a) hündürlüklərin
b) apofemlərinin
c) oturacaqlarının sahələrinin
d) tam səthlərinin

11. Təyyarə modeli real təyyarəyə görə 1:200 nisbətində miqyasla hazırlanmışdır. Modelə işlənən boyanın miqdarı ilə real təyyarəyə işlənən boyanın miqdarını müqayisə edin.

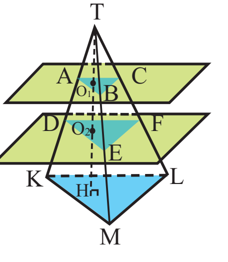
12. Misdən hazırlanmış düzgün altıbucaqlı formasındakı detallar oxşardırlar.
Misin sıxlığı 8,6 q/sm^3, 1 kq misin qiyməti 2,55 qəpikdir. Detalı istehsal edən şirkət hər bir detal (böyüklüyündən asılı olmayaraq) üçün ona sərf olunan materialın qiymətinin 125%-i qədər istehsal məsrəfləri əlavə edərək detalın istehsal dəyərini müəyyənləşdirir. Satış qiyməti isə istehsal dəyərinin üzərinə şirkətin 22% gəliri əlavə edilməklə formalaşdırılır. Hər detalın satış qiymətini tapın.



13. Yeni avtomobil dizayn edilərkən əvvəlcə avtomobilin müəyyən miqyasla gildən modeli hazırlanır. Reallıqda uzunluğu 5 m olan avtomobilin gil modelinin uzunluğu 10 sm-dir. Modelin səthinin sahəsinin real avtomobilin səthinin sahəsinə olan nisbətini tapın.



14. Şəkildəki düzgün üçbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 8 sm, hündürlüyü 12 sm-dir. Piramida T təpəsindən başlayaraq 4 sm və 6 sm məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilir. Kəsikdə alınan çoxbucaqlıların perimetrlərini tapın.



15. Hündürlüyü H olan piramidanın oturacağına paralel və həcmini yarıya bölən kəsiyinin təpədən məsafəsini tapın.

16. Oturacağa paralel müstəvilər piramidanın hündürlüyünü 3 bərabər hissəyə bölmüşdür. Piramidanın həcmi hansı nisbətlərdə bölünmüşdür

17. İki oxşar piramidanın hündürlükləri 1:3 nisbətindədir. Piramidaların yan səthlərinin fərqi 96 m^2 olarsa, kiçik piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

Kəsik piramidanın həcmi

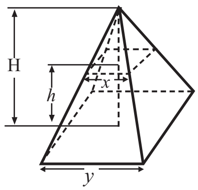
Araşdırma. Qədim misirlilər düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın həcminin $V = \frac{1}{3}h(x^2 + xy + y^2)$ düsturu ilə hesablandığını bilirdilər. Lakin onların bu düsturu necə aldıqları məlum deyil. Bu düsturu aşağıdakı addımlarla alın.

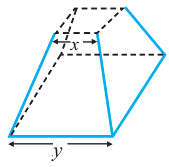
a) Oturacağının tərəfi y vahid olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmini yazın.

b) Oturacağı tərəfi x vahid olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmini yazın.

c) H və h hündürlükləri arasındakı asılılığın $H = \frac{yh}{y - x}$ kimi olduğunu göstərin.

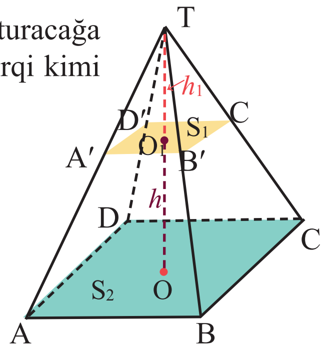
d) Göstərin ki, kəsik piramidanın həcmi $V = \frac{1}{3} h(x^2 + xy + y^2)$ düsturu ilə hesablanır.





Kəsik piramidanın həcmini verilən tam piramida ilə oturacağa paralel kəsiklə ayrılan kiçik piramidanın həcmləri fərqi kimi tapmaq olar.

$$V = \frac{1}{3}S_2(h_1 + h) - \frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$$



Burada V kəsik piramidanın həcmi, S_2 və S_1 böyük və kiçik piramidaların oturacaqlarının sahəsidir. h kəsik piramidanın hündürlüyü, h_1 kiçik piramidanın hündürlüyüdür. Bu piramidalar oxşar olduqlarına görə oturacaqlarının sahələri nisbətləri hündürlükləri nisbətinin kvadratına bərabərdir. Bu bərabərlikdən kiçik piramidanın hündürlüyünü tapaq:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{h_1}{h_1 + h}\right]^2, \qquad \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}, \qquad h_1\sqrt{S_2} = (h_1 + h)\sqrt{S_1}, \qquad h_1 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$$

h_1-in ifadəsini $V = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$ bərabərliyində nəzərə alaq:

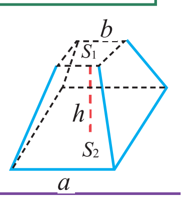
$$V = \frac{1}{3}\left[(S_2 - S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} + S_2h\right] = \frac{1}{3}[(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1})h\sqrt{S_1} + S_2h] =$$

$$= \frac{1}{3}(h \cdot \sqrt{S_1S_2} + h\,S_1 + h\,S_2) = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3}\,h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

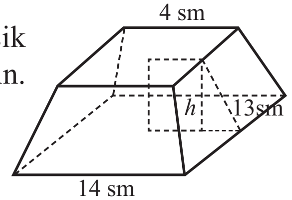
Kəsik piramidanın həcmi

Oturacaqlarının sahəsi S_1 və S_2, hündürlüyü h olan kəsik piramidanın həcmi $\mathbf{V = \frac{1}{3}\,h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)}$ düsturu ilə hesablanır.

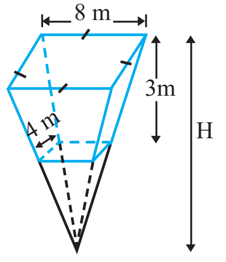


Kəsik piramidanın həcmi

1. Şəkildə verilənlərə görə düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın yan səthini, tam səthini və həcmini tapın.

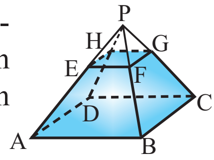


2. Hündürlüyü H olan piramidanın oturacağına paralel müstəvi kəsiyi nəticəsində alınan kəsik piramidanın ölçüləri şəkildə verildiyi kimidir.
a) kəsik piramidanın həcmini tapın.
b) Piramidanın H hündürlüyünü tapın.
c) Şəkildəki ölçüdə su hovuzu tikmək istəniz, qazıb çıxarılan torpağı daşımaq üçün neçə 12 m^3-luq maşın lazımdır?
d) Hovuz neçə litr su tutur?
e) Hovuz tutumunun yarısı qədər su ilə doldurulduqda suyun dərinliyi nə qədər olur?



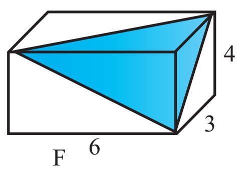
3. a) Düzgün üçbucaqlı piramidanın bütün 6 tilinin uzunluğu bərabərdir və x-lə işarə edilmişdir. Piramidanın həcmini x dəyişəni ilə ifadə edin.
b) Oturacağı düzgün altıbucaqlı olan piramidanın oturacağının tərəfi x, yan tili $2x$-dir. Piramidanın həcminin x dəyişəni ilə ifadə edin.

4. Piramidanın oturacağına paralel keçirilən müstəvi onun hündürlüyünü təpədən başlamaqla 1:2 nisbətində bölür. Alınan kəsik piramidanın həcmi 208 kub vahid olarsa, verilən piramidanın həcmini tapın.

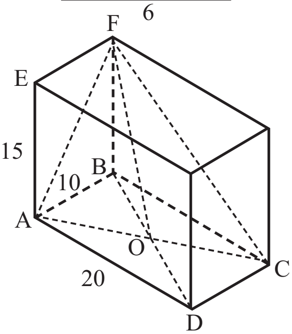


5. a) Yan tili 10 sm, oturacağının tərəfi 6 sm olan düzgün altıbucaqlı piramidanın həcmini tapın.

b) Düzbucaqlı paralelepipeddən müstəvi kəsiyi ilə şəkildə göstərildiyi kimi piramida ayrılmışdır. Piramidanın həcmi ilə paralelepipedin həcmini müqayisə edin.

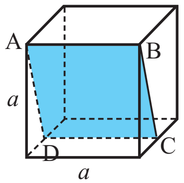


6. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri AD = 20 sm, AB = 10 sm, AE = 15 sm-dir.
a) $\angle AFB$, $\angle BFO$, $\angle AFO$, $\angle BOF$, $\angle AOF$, $\angle OFC$ bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.
b) ΔABO, ΔBOF, ΔAOF üçbucaqlarının sahələrini tapın
c) B nöqtəsindən AOF müstəvisinə qədər ən qısa məsafəni tapın.

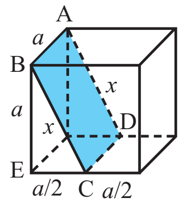


Müstəvi kəsiklərinə aid məsələlər

Nümunə. Şəkildə tili a olan kubun ABCD kəsiyi göstərilmişdir. D və C nöqtələri uyğun tillərin orta nöqtəsi olduğuna görə müstəvi kəsiyinin sahəsini tapın. Həlli:



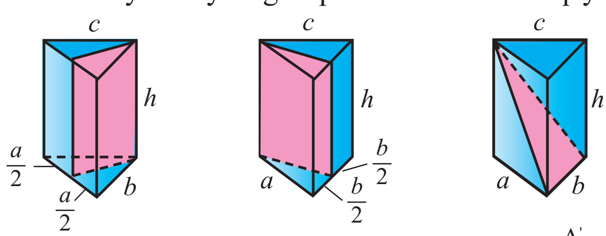
Verilir: kub və onun tilinin a uzunluğu
D və C nöqtələri tilin orta nöqtələridir.
Tapın: S_{ABCD}
Daha əlverişli görüntü üçün kubu fırladaq və məsələdə verilən məlumatları şəkil üzərində qeyd edək. ΔBEC-dən Pifaqor teoreminə görə



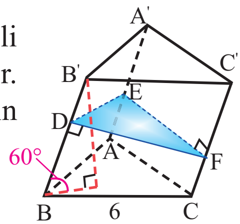
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \qquad x^2 = \frac{5}{4}a^2 \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{5}a$$

$$S_{ABCD} = ax = a\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}a\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5}a^2 \qquad \text{Cavab: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{5}a^2$$

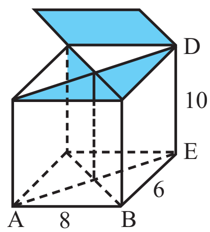
1. Şəkildə verilənlərə görə düz üçbucaqlı prizmada : a) müstəvi kəsiyinin sahəsini tapın; b) müstəvi kəsiyinin ayırdığı fiqurların həcmini müqayisə edin.



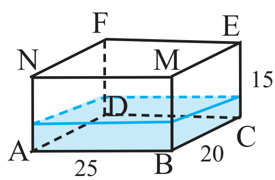
2. Oturacağı düzgün üçbucaq olan mail prizmanın yan tili oturacaq müstəvisi ilə 60° bucaq əmələ gətirir. Oturacağın tərəfinin 6 sm olduğunu bilərək, prizmanın perpendikulyar kəsiyinin sahəsini tapın.



3. Hədiyyə qutusu şəkildə göstərildiyi kimi kartonla 4 hissəyə bölünmüşdür. Verilən ölçülərə görə qutunu hazırlamaq üçün nə qədər karton lazım olduğunu tapın.



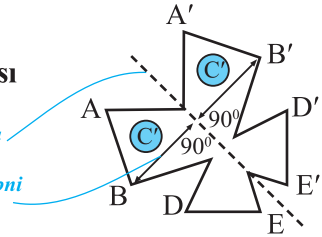
4. Ölçüləri 15×20×25 olan düzbucaqlı paralelepiped şəkilli qabdakı suyun hündürlüyü h_1-dir. Qabı BCEM üzünə çevirdikdə onun hündürlüyü h_2, ABMN üzünə çevirdikdə isə h_3 olur. $h_1 + h_2 + h_3 = 24$ sm olduğuna görə qabda neçə kub metr su olduğunu müəyyən edin.



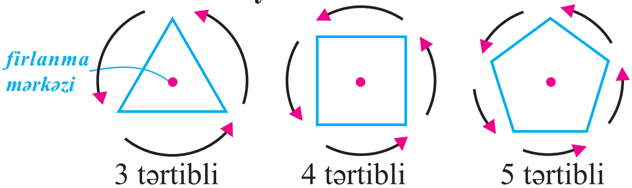
Fəzada simmetriya

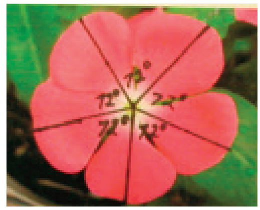
Müstəvidə simmetriya

Əksetmə (ox) simmetriyası

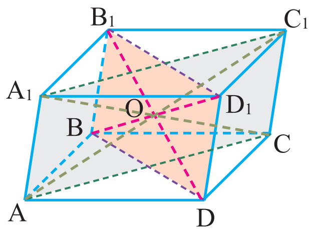


Fırlanma simmetriyası

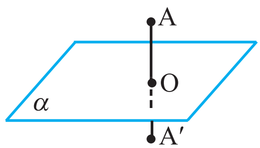


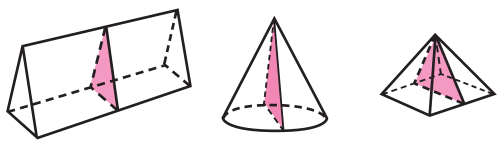


Fəzada simmetriya. Fəza fiqurları üzərində də müxtəlif simmetriyalar müşahidə etmək olar. Paralelepipedin diaqonal kəsikləri paraleloqram olduğundan aydındır ki, BD_1 və DB_1 diaqonalları bir O nöqtəsində kəsişib, yarıya bölünür. Göstərmək olar ki, digər diaqonallar da O nöqtəsində kəsişir və yarıya bölünürlər. Deməli, paralelepipedin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir.

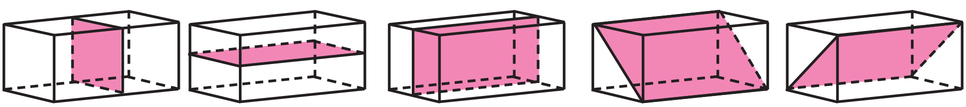


Fəzada nöqtə və düz xəttə nəzərən simmetriyadan başqa müstəviyə nəzərən simmetriyaya da baxılır. α müstəvisi AA' parçasının ortasından keçib, ona perpendikulyardırsa, A və A′ nöqtələrinə α müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtələr deyilir. Fiqurun nöqtələrinə müəyyən müstəviyə görə simmetrik olan nöqtələr də bu fiqura aiddirsə, həmin müstəviyə fiqurun simmetriya müstəvisi, fiqura isə müstəviyə nəzərən simmetrik fiqur deyilir.



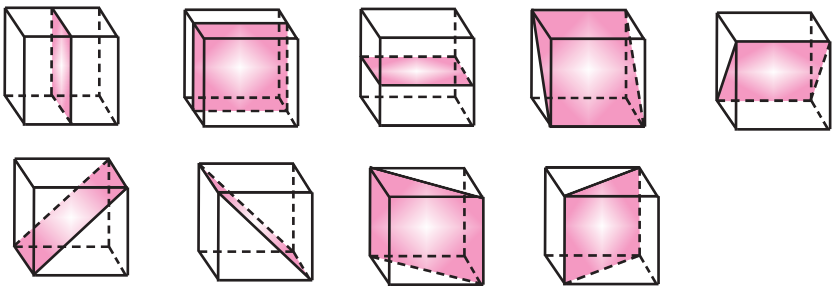


Xətti ölçüləri müxtəlif olan düzbucaqlı paralelepipedin simmetriya mərkəzindən başqa üç simmetriya oxu və üç simmetriya müstəvisi vardır. Qarşı üzlərin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətt onun simmetriya oxudur, tilinin ortasından keçib, ona perpendikulyar olan müstəvi simmetriya müstəvisidir. İki xətti ölçüsü bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedin 5 simmetriya müstəvisi var. Bu təsvirləri dəftərinizdə çəkin.

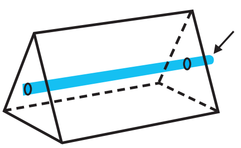


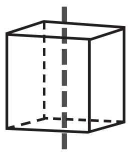
Fəzada simmetriya

Kubun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir. Bir üzə aid olmayan paralel tillərin orta nöqtələrindən keçən düz xətlər (bunların sayı 6-dır) və qarşı üzlərin mərkəzlərindən keçən düz xətlər (bunların sayı 3-dür) kubun simmetriya oxlarıdır.
Kubun 9 simmetriya müstəvisi vardır və bunlar şəkildə təsvir edilmişdir.

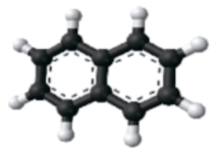


Firlanma simmetriyası. Fəza fiqurlarının fırlanma simmetriyası da müstəvi fiqurlara oxşardır. Lakin fəza fiqurlarında fırlanma simmetriyası oxa görə təyin edilir.

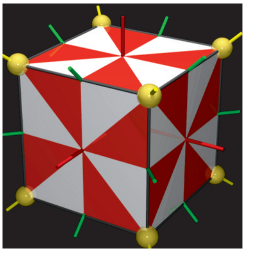




Naftalin: $C_{10}H_8$

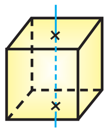


Fırlanma və əksetmə simmetriyası maddələrin molekulyar quruluşunun öyrənilməsində geniş tətbiq edilir.

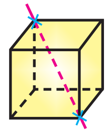


1. Şəkildə kubun fırlanma oxları göstərilmişdir. Bu oxlar həndəsi olaraq sözlə verilmişdir. Kubun şəkli üzərində mümkün təsvirləri çəkib göstərin. Hər hal üçün bir şəkil nümunə olaraq verilmişdir.

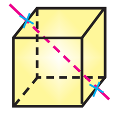
a)Simmetriya (fırlanma) oxu iki qarşı üzün mərkəzini birləşdirir, hər bir halda 4 üst-üstə düşmə müşahidə edilir;



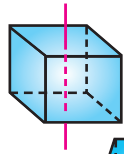
b) Fırlanma oxu kubun diaqonalını üzərində saxlayan düz xətdir, hər bir halda 3 üst-üstə düşmə müşahidə edilir;



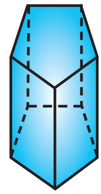
c) Fırlanma oxu iki qarşı tilin ortalarından keçən düz xəttdir, hər bir halda 2 üst-üstə düşmə müşahidə edilir.



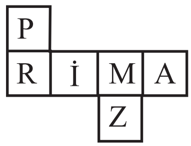
2. Kub iki qarşı üzünün mərkəzindən keçən ox ətrafında neçə dəfə döndükdə öz-özü ilə üst-üstə düşər?

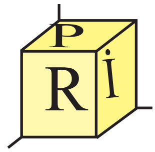


3. Şəkildəki düzgün beşbucaqlı prizma oturacaqların mərkəzindən keçən ox ətrafında neçə dərəcə döndükdə öz-özü ilə üst-üstə düşər?

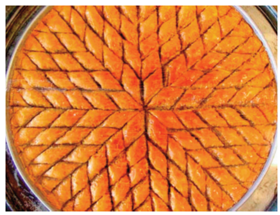


4. Üzərində hərflər yazılmış kubu iki qarşı üzün mərkəzindən keçən ox ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 270º döndərsəniz, hansı tərəfdən (yuxarıdan, öndən, yandan) hansı hərf görünəcək? Bütün hallara baxın.



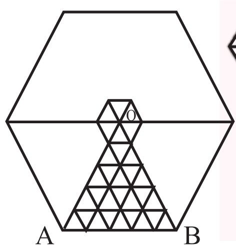


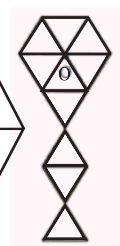
5. Biz müstəvi fiqurlarla sahəni örtmə-parketləməyə aid tapşırıqlar yerinə yetirdik. Analoji olaraq fəza fiqurları ilə həcmi doldurma, müəyyən fiqur alma məşğələləri praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Bu zaman əksetmə, fırlanma simmetriyalarından istifadə edilir.



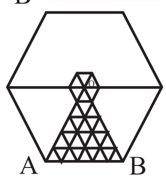
Şəkildə oturacağı bərabərtərəfli üçbucaq olan düz üçbucaqlı prizmadan hazırlanmış detalın üstdən görünüşü təsvir edilmişdir. Bu detallarla oturacağının mərkəzi O nöqtəsində olan düzgün altıbucaqlı prizma quraşdırılmalıdır. Neçə belə detal lazım olar?

1) Prizmanın oturacağı 6 konqruyent üçbucaqdan ibarət düzgün altıbucaqlıdır. Hər bir üçbucaq prizmalarla doldurulmuşdur. Görünüşə görə bir üçbucağa $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ prizma qoyulmuşdur. Altıbucaqlı düzgün prizma üçün isə $6 \cdot 25 = 150$ belə prizma lazımdır.

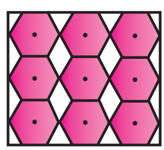




2) Kiçik prizmaların sayı 216 olan hal üçün üstdən görünüşü çəkin. Bu hündürlüyü 10 sm olan qutu olarsa, ən kiçik prizmaların tili 0,5 sm olduqda qutunun həcmini tapın.



6. Şəkildə hündürlüyü 40 sm olan bir qutuya yığılmış düzgün altıbucaqlı prizmaların üstdən görünüşü verilmişdir. Düzgün altıbucaqlının oturacağının tərəfi 4 sm olarsa, qutunun boş qalmış hissəsinin həcmini müəyyən edin.



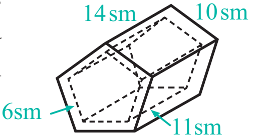
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Şəkildəki qapalı qutu düzgün beşbucaqlı prizma şəklindədir. Qutunun xarici oturacağının tərəfi 10 sm , hündürlüyü isə 14 sm-dir. Daxili oturacağı və hündürlüyü isə uyğun olaraq 6 sm və 11 sm-dir. Tələb edilən ölçüləri tapın.

a) Qutunun xarici səthinin (tam) sahəsini

b) Qutunun daxili səthinin (tam) sahəsini

c) Qutunun həcmini

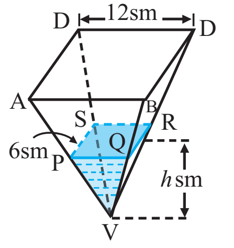


2. Oturacağı kvadrat olan piramidanın içində 60 sm^3 su vardır.

Şəkildə verilən ölçülərə görə tapın:

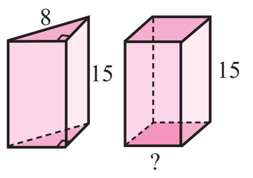
a) suyun h hündürlüyünü;

b) Qabın dolması üçün qaba nə qədər su əlavə edilməlidir?



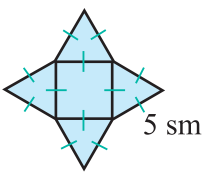
3. İki oxşar piramidanın səthlərinin sahələri nisbəti $\frac{1}{25}$ kimidir. Bu piramidaların həcmləri nisbətini tapın.

4. Hündürlükləri 15 sm olan düz üçbucaqlı prizma və düzgün dördbucaqlı prizmanın həcmləri bərabərdir. Üçbucaqlı prizmanın oturacağı hipotenuzu 8 sm olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır. Dördbucaqlı prizmanın tam səthinin sahəsini tapın.

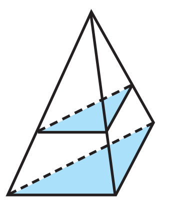


5. **Açıq tipli sual.** Oxşarlıq əmsalı 2:5 olan iki oxşar piramida və iki oxşar paralelepiped çəkin. Ölçülərini üzərində yazın.

6. Verilənlərə görə piramidanın həcmini tapın.

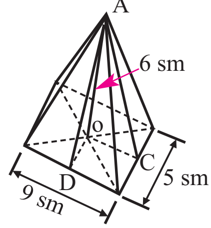


7. Piramida oturacağına paralel müstəvi ilə həcmləri bərabər olan iki hissəyə ayrılmışdır. Piramidanın hündürlüyü 12 sm olarsa, yuxarı hissədəki piramidanın hündürlüyünü tapın.



8. Həcmi 64 sm^3 olan düzbucaqlı paralelepiped formasında qutunun ölçülərinin hansı tam qiymətlərində onu hazırlamaq üçün ən az karton işlədilmiş olar? Variantları araşdırın.

9. Şəkildə oturacağı düzbucaqlı olan piramida və ölçüləri verilmişdir. Piramidanın həcmini və tam səthinin sahəsini tapın.



9 Üstlü və loqarifmik funksiya

Həqiqi üstlü qüvvət
Üstlü funksiya
Üstlü funksiyanın qrafikinin çevrilmələri
Üstlü funksiya. *e* ədədi
Ədədin loqarifmi
Loqarifmik funksiya
Loqarifmik şkala və məsələ həlli
Loqarifmin xassələri
Üstlü tənliklər
Loqarifmik tənliklər
Üstlü bərabərsizliklər
Loqarifmik bərabərsizliklər

Arxeloji qazıntılar zamanı qalıqların yaşını tərkibindəki Karbon 14 maddəsinin miqdarını hesablamaqla müəyyən edirlər. Bunun üçün üstlü tənliklər həll edilir.

Şəmkir şəhərində aparılan qazıntıların üzə çıxardığı qədim şəhər

Həqiqi üstlü qüvvət

Praktik məşğələ

1) $\sqrt{2}$ -nin kalkulyatorla tapılmış qiymətini yazın.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562...$$

2) Hədləri $\sqrt{2}$ -nin əskiyi ilə götürülmüş onluq yaxınlaşmaları olan ardıcıllıq qurun:
$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ ...$

3) Qüvvət üstü bu ardıcıllığın hədləri olmaqla 3-ün uyğun qüvvətləri ardıcıllığını yazın:
$3^1;\ 3^{1{,}4};\ 3^{1{,}41};\ 3^{1{,}414};\ 3^{1{,}4142};\ 3^{1{,}41421};\ 3^{1{,}414213};\ ...$

4) Bu ardıcıllığın rasional üstlü qüvvət şəklində olan hədlərinin qiymətlərini kalkulyatorla hesablayın.

$$3^1 = 3$$
$$3^{1{,}4} \approx 4{,}6555367217$$
$$3^{1{,}41} \approx 4{,}7069650017$$
$$3^{1{,}414} \approx 4{,}7276950353$$
$$3^{1{,}4142} \approx 4{,}7287339302$$
$$3^{1{,}41421} \approx 4{,}7287858809$$
$$3^{1{,}414213} \approx 4{,}728801462$$

5) Qüvvətin üstü $\sqrt{2}$-yə daha yaxın olduqca, uyğun qüvvətlərin hər sonrakı addımda əvvəlkindən daha az fərqləndiyinə və müəyyən bir ədədə yaxınlaşdığına diqqət edin. Bu ədədə 3-ün $\sqrt{2}$ (irrasional) üstlü qüvvəti deyilir. Kalkulyatorla hesablama: $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288043878$ ...

6) Tapşırığı $2^{\sqrt{3}}$ üçün yerinə yetirin.

Oxşar qayda ilə a^{α} irrasional üstlü qüvvətə baxılır. α irrasional ədədinin

$$\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ ...$$

onluq yaxınlaşmaları ardıcıllığına uyğun olaraq

$$a^{\alpha_1};\ a^{\alpha_2};\ a^{\alpha_3};\ ...$$

ardıcıllığı qurulur və bu ardıcıllığın hədlərinin yaxınlaşdığı ədəd a^{α} ilə işarə olunur.

İrrasional üstlü qüvvət də rasional üstlü qüvvət kimi müsbət əsaslar üçün təyin olunub.

Beləliklə, istənilən x həqiqi ədədi üçün a^x (burada $a > 0$) həqiqi üstlü qüvvət anlayışı daxil edilir.

Hesab edilir ki, istənilən x üçün $1^x = 1$ və $x > 0$ olduqda $0^x = 0$.

Rasional üstlü qüvvətin məlum xassələri həqiqi üstlü qüvvət üçün də doğrudur.

İstənilən x, y həqiqi ədədləri və $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ ədədləri üçün aşağıdakılar doğrudur:

Qüvvətin xassələri:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $a > 1,\ x > y$ olduqda $a^x > a^y$, $0 < a < 1,\ x > y$ olduqda $a^x < a^y$

7) $a > b,\ x > 0$ olduqda $a^x > b^x$, $a > b,\ x < 0$ olduqda $a^x < b^x$

8) $a^x = a^y$ isə, onda $x = y$

Öyrənmə tapşırıqları

1. İrrasional üstlü qüvvət daxil olan ifadənin qiymətini təqribi olaraq hesablamaq üçün kalkulyatordan istifadə edilir.
Qrafkalkulyator üzərində $\wedge$ klavişi irrasional üstlü qüvvəti də hesablama imkanı verir.
Hesablayın:
a) $8^{\sqrt{3}}$; b) $5^{-\sqrt{11}}$; c) $(\sqrt{10})^{\sqrt{2}}$; d) 9^{π}; e) $15^{\sqrt{5}}$; f) $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$

2. Hər bir qaydaya uyğun bir nümunə yazın.

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ b) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ c) $(a^x)^y = a^{xy}$

d) $(ab)^x = a^x b^x$ e) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ f) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3. a) 3-ün qüvvəti ilə ifadə edin: $\frac{3^{2n} \cdot 3^{1+n}}{81^{n-1}}$

b) 2-nin qüvvəti ilə ifadə edin: $\frac{32 \cdot 8^x}{16^x}$

c) 5-in qüvvəti ilə ifadə edin: $\frac{25^x \cdot 5^{3x}}{125^{2+x}}$

4. Kalkulyatorun köməyilə verilən ifadələrin təqribi qiymətlərini tapın. Vergüldən sonra 5 rəqəm saxlayın.
$2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$, $2^{1,41421}$, $2^{1,414213}$
Verilən ifadələr rasional üstlü qüvvətlərdir. Bu ifadələrdən $2^{\sqrt{2}}$ irrasional üstlü qüvvəti hesablamaq üçün necə istifadə etmək olar?

5. Sadələşdirin və qiymətini hesablayın.

a) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; b) $((\sqrt{2})^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}$; c) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{3}+2} : 2^{2\sqrt{3}}$;

d) $3^{\sqrt{2}} \cdot 9^{\sqrt{2}+1} : 27^{\sqrt{2}}$; e) $\sqrt[4]{2^{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot 4^{-\sqrt{3}}}$ f) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot 25^{-\sqrt{2}}}$

g) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{7}+1)^2} : 9^{\sqrt{7}}}$ h) $\sqrt[5]{0,2^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot 25^{\sqrt{6}}}$ i) $(2^{(2+\sqrt{2})^2} : 4^3)^{\sqrt{2}}$

6. Müqayisə edin.

a) $10^{\sqrt{5}}$ ilə $10^{\sqrt{3}}$ b) $0{,}1^{\sqrt{3}}$ ilə $0{,}1^{\sqrt{2}}$

c) $(\frac{2}{3})^{-5}$ ilə $(\frac{2}{3})^{-3}$ d) $(\sqrt{3})^{-4}$ ilə $(\sqrt{3})^{-2}$.

7. Hansı münasibət doğrudur?

a) $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$ b) $2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$

c) $1 < 5^{\sqrt{2}} < 5$ d) $4^{\sqrt{2}} < 4^{\sqrt{3}} < 4^{\sqrt{5}}$.

8. Verilmiş ədədləri 1 ilə müqayisə edin.

a) $(\frac{3}{4})^{\frac{10}{3}}$ b) $(\frac{5}{7})^{-\frac{4}{3}}$ c) $(\frac{2}{5})^{0}$ d) $2^{-\sqrt{3}}$

9. Ədədləri artan sıra ilə düzün.

a) 8^{200}; 9^{150}; 125^{100} b) $(0{,}008)^{50}$; $(0{,}09)^{75}$; $(0{,}5)^{150}$

c) $(\frac{9}{4})^{-0{,}1}$; $(\frac{9}{4})^{0{,}2}$; $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{6}}$; d) $(\frac{4}{7})^{-\frac{2}{3}}$; $(\frac{49}{16})^{\frac{4}{3}}$; $(\frac{16}{49})^{\frac{1}{4}}$

10. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $100^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{1}{5})^{-1}$ b) $(\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}} : (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}}$

c) $(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$ d) $(8^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{9})^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}})^{\frac{1}{2}}$

11. Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığını bilərək, rasional üstlü qüvvət şəklində yazın və sadələşdirin.

a) $\sqrt{m^6n^4}$ b) $\sqrt[3]{8x^3y^6}$ c) $\sqrt[5]{a^{10}b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}$ d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

12. Həndəsi silsilədə $b_2 = \sqrt[5]{3}$ və $b_3 = \sqrt[5]{81}$ olduğunu bilərək, silsilə vuruğunu tapın.

13. Artan sıra ilə düzün: $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{-\sqrt{3}}$; $a^{-\sqrt{2}}$; a^0; a^{π}

a) $a > 1$ olduqda b) $0 < a < 1$ olduqda

14. Tənikləri həll edin.

a) $x^{-\frac{3}{2}} = 8$ b) $6x^{\frac{2}{3}} + 12 = 36$ c) $\frac{1}{5}\sqrt{x^3} = 5{,}4$ d) $\sqrt[3]{x^2+2} + 1 = 4$

e) $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 3 = 0$ f) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 2$ g) $x^2 + 2 = 2\sqrt{x^2+5}$ h) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = 2$

Üstlü funksiya

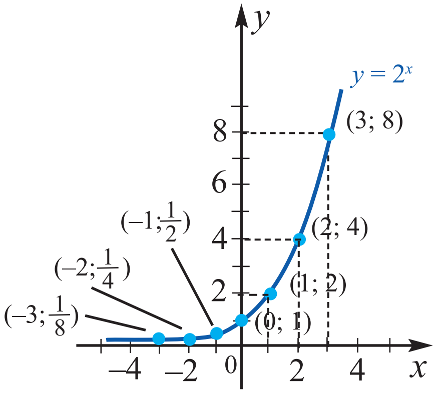
Praktik məşğələ

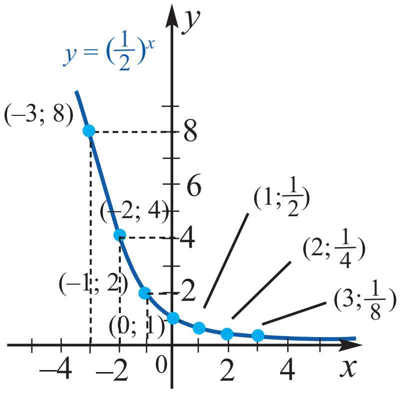
1) $y = 2^x$ və $y = (\frac{1}{2})^x$ funksiyaları üçün qiymətlər cədvəli tərtib edin.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2) Absisi arqumentin, ordinatı funksiyanın cədvəldəki uyğun qiymətinə bərabər olan nöqtələri koordinat müstəvisində qurun və bu nöqtələrdən keçməklə səlis əyri çəkin.



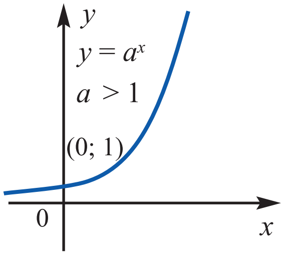


3) İstənilən x üçün 2^x və $(\frac{1}{2})^x$ ifadələrinin qiymətlərini "0" -la müqayisə edin.
4) x-in qiymətləri böyüdükcə, $y = 2^x$ funksiyasının qiymətləri böyüyür, yoxsa kiçilir? x-in qiymətləri böyüdükcə, $y = (\frac{1}{2})^x$ funksiyasının qiymətləri böyüyür, yoxsa kiçilir?
5) Qrafiklər y oxunu hansı nöqtədə kəsir?
6) Qrafikləri müqayisə edin, onların oxşar və fərqli cəhətlərini qeyd edin.
7) Tapşırıqları $y = 3^x$ və $y = (\frac{1}{3})^x$ funksiyaları üçün də yerinə yetirin.

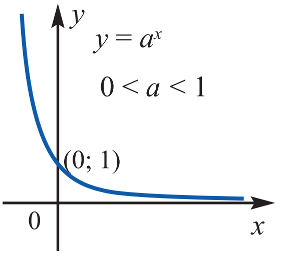
$a > 0$, $a \neq 1$ olduqda, $y = a^x$ funksiyasına üstlü funksiya deyilir.
1) Üstlü funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
$$D(a^x) = (-\infty; +\infty)$$
2) Üstlü funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğudur.
$$E(a^x) = (0; +\infty)$$
3) $x = 0$ olduqda, $a^0 = 1$ olduğundan üstlü funksiyanın qrafiki y oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir.
4) $a > 1$ olduqda, a^x funksiyası artan, $0 < a < 1$ olduqda a^x funksiyası azalandır.
5) Üstlü funksiyanın qrafiki absis oxunu kəsmir və qrafiki x oxundan yuxarı yarımmüstəvidə yerləşir.
$y = a^x$ funksiyasına və onun qrafikinə eksponenta deyilir.
Eksponenta arqumentin dəyişməsilə çox sürətlə artır və ya çox sürətlə azalır.

6) $0 < a < 1$ olduqda x-in sonsuz böyüməsilə y-in uyğun qiymətləri kiçilir və $y = a^x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.
$a > 1$ və $x \to -\infty$ olduqda qrafik üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.
Absis oxu üstlü funksiyanın üfüqi asimptotudur.

Eksponensial artan , eksponensial azalan funksiyalar



eksponensial artan



eksponensial azalan

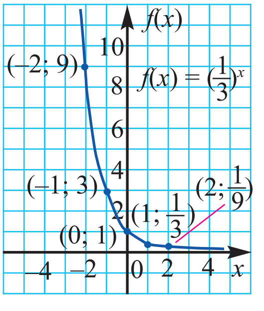
$y = c \cdot a^x$ funksiyasına da eksponenta deyilir.

Məsələn: $y = 8 \cdot 2^x$ funksiyasını $y = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$ şəklində yazmaq mümkündür.

Nümunə: Funksiyanın qrafikinə görə onun düsturunu yazın.

Həlli: Qiymətlər cədvəlini tərtib edək.

x	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$



Qiymətlər cədvəlindən göründüyü kimi, x-in qiymətləri bir vahid artdıqda, y-in qiymətləri $\frac{1}{3}$-in misilləri ilə azalır.

Deməli, $a = \frac{1}{3}$ Funksiyanın düsturu: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Nümunə: Dəyişənin hansı qiymətlərində:

a) $4^x = 64$ bərabərliyi; b) $3^x > 9$; c) $0{,}4^x > 0{,}16$ bərabərsizliyi doğrudur?

Həlli: a) $4^x = 64$ bərabərliyini $4^x = 4^3$ şəklində yazaq. Buradan həqiqi üstlü qüvvətin xassəsinə görə $x = 3$.

b) $3^x > 9$ bərabərsizliyini $3^x > 3^2$ şəklində yazaq. Buradan $x > 2$ olduğu aydındır.

c) $0{,}4^x > 0{,}16$ bərabərsizliyini $0{,}4^x > 0{,}4^2$ (eyni əsasın qüvvətləri şəklində) kimi yazıb, əsas vahiddən kiçik olduğuna görə alırıq: $x < 2$.

Üstlü funksiya

Öyrənmə tapşırıqları

1. Ən azı üç nöqtənin koordinatlarını müəyyən etməklə funksiyaların qrafiklərini qurun.

1) $f(x) = 4^x$ 2) $g(x) = 6^x$ 3) $m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 4) $h(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

a) Funksiyanın artan və ya azalan olduğunu göstərin
b) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.
c) Qrafikin y oxunu kəsdiyi nöqtəni müəyyən edin.

2. Artan, yoxsa azalan funksiyadır?
a) $y = 5^x$; b) $y = 0{,}3^x$; c) $y = 5^{-x}$; d) $y = (\sqrt{2} - 1)^x$; e) $y = (\sqrt{5} - 1)^{-x}$.

3. Funksiyanın tələb olunan qiymətlərini hesablayın.

a) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $f(1), f(2), f(-1), f(-2)$

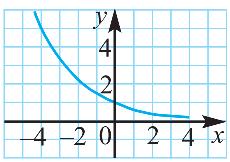
b) $h(x) = (\sqrt{5})^x$ $h(1), h(2), h(-1), h(-2)$

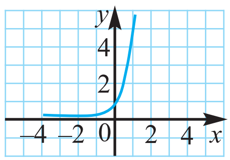
c) $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $g(0), g(2), g(\sqrt{2}), g(-1)$

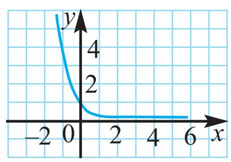
d) $m(x) = 2^{3x-1}$ $m(0), m(2), m(\sqrt{2}), m(-1)$

4. Hansı qrafik hansı funksiyaya aiddir,

1) $y = 5^x$ 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 3) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

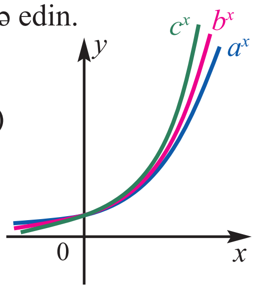
a)


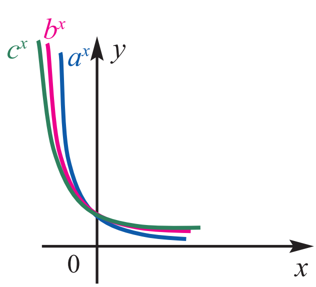
b)


c)


5. $y = 0^x$ və $y = 1^x$ funksiyalarına üstlü funksiya demək olarmı? Bəs $y = (-1)^x$ funksiyasına necə?

6. $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ funksiyalarının qrafiklərinə görə a, b, c ədədlərini müqayisə edin.

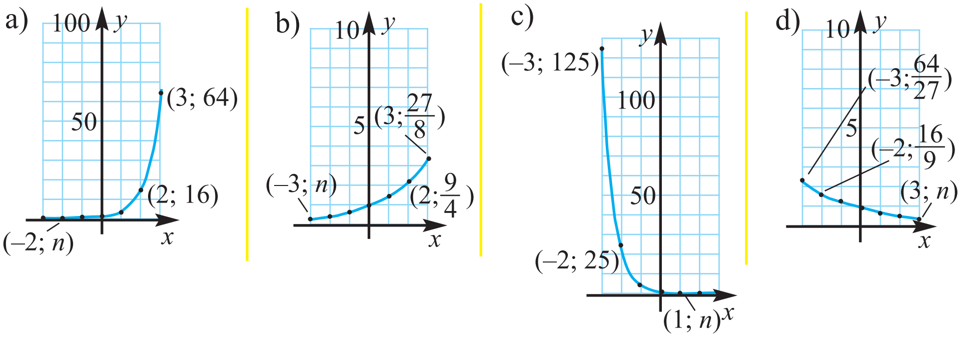
a)


b)


7. Qrafiki verilən nöqtələrdən keçən $y = c \cdot a^x$ üstlü funksiyasının düsturunu yazın.

a) (0; –2) və (–2; –32); b) (0; 3) və (1; 15);
c) (0; 7) və (2; 63); d) (0; –5) və (–3; –135);
e) (0; 0,2) və (4; 51,2); f) (0; –0,3) və (5; –9,6);

8. 1) Verilən qrafiklərə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a^x$ şəklində yazın.
2) Qiymətlər cədvəli tərtib edin və qrafiki dəftərinizdə yenidən qurun.



9. $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$, $h(x) = 3^x$ funksiyalarından hansının qiyməti:
a) $x = 5$ olduqda ən böyükdür? b) $x = -5$ olduqda ən kiçikdir? c) x-in hansı qiymətində onların hər üçünün qiyməti bərabərdir?

10. $f(x) = 3{,}2^x$, $g(x) = 0{,}3^x$ olarsa, müqayisə edin:

a) $f(5)$ ilə $f(6)$; b) $f(0{,}1)$ ilə $f(0{,}5)$; c) $f(-\sqrt{2})$ ilə $f(\sqrt{2})$;
d) $g(5)$ ilə $g(6)$; e) $g(0{,}1)$ ilə $g(0{,}5)$; f) $g(-\sqrt{2})$ ilə $g(\sqrt{2})$.

11. Müqayisə edin:

a) $(\sqrt{2})^3$ və $(\sqrt{2})^6$; b) $0{,}1^3$ və $0{,}1^{\sqrt{8}}$; c) $4^{-\sqrt{2}}$ və $4^{-\sqrt{3}}$.

12. Dəyişənin hansı qiymətində bərabərlik doğrudur?

a) $3^{x+1} = 27$; b) $4^{x-2} = 64$; c) $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$.

13. Dəyişənin hansı qiymətlərində bərabərsizlik doğrudur?

a) $2^x > 32$; b) $3^x < 27$; c) $0{,}2^x > 0{,}04$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$

14. Tənlikləri qrafik üsulla həll edin.

a) $2^x = 3 - x$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 6$

15. Qrafik üsulla tənliyin kökünün işarəsini müəyyən edin.

a) $5^x = 6$; b) $0{,}2^x = 3$; c) $4^x = \frac{1}{3}$; d) $0{,}3^x = 0{,}1$.

16. Tənliyi ödəyən iki ədədi şifahi tapın: $2^x = x^2$
Qrafik üsulla tənliyin köklərinin sayını müəyyən edin.

17. $y = 2^x$ və $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və qrafiklərinin hansı oxa nəzərən simmetrik olduğunu göstərin. Nəticəni ümumiləşdirin.

Üstlü funksiya

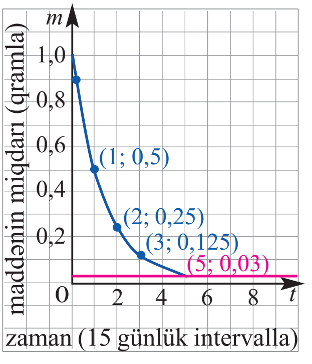
Tətbiq tapşırıqları

Mariya Küri. Radioaktiv parçalanma bir və ya bir neçə hissəciklərin (məsələn: elektronlar, neytrino, alfa-hissəciklər, fotonlar) ayrılması ilə müşaiyət olunur. Atomlarının parçalanaraq digər kimyəvi maddəyə çevrilməsi nəticəsində radioaktiv maddə müəyyən müddətdə ilkin miqdarının yarısını itirir. Bu müddət verilmiş radioaktiv maddə üçün sabitdir və yarımparçalanma dövrü (müddəti) adlanır. 1898-ci ildə Mariya Küri yüksək radioaktivliyə malik radium və polonium maddələrini kəşf etdi və bu kəşflərinə görə Nobel mükafatına layiq görüldü. Radium elementinin izotopu olan Radium-226-nın yarımparçalanma müddəti 1620 ildir. Radium-226 yarımparçalanmada Radon-222 maddəsinə – radioaktiv qaza çevrilir.

Radioaktiv maddənin parçalanma qanunu: $m = m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$

m_0- maddənin ilkin miqdarı,
T- maddənin yarımparçalanma dövrü,
m- maddənin baxılan t anında miqdarı,
burada t zamandır, mənfi olmayan qiymətlər alır.

Nümunə. Radium (Ra-225) maddəsinin yarımparçalanma müddəti 15 gündür. Parçalanma prosesində onun qalan kütləsinin (qramla) zamandan (15 günlük intervallarla) asılılığını üstlü funksiya ilə modelləşdirmək olar. Bu funksiyanın qrafiki şəkildə verilmişdir.



a) Ra-225 maddəsinin başlanğıc kütləsi neçə qramdır? Qrafik üzərində qeyd edilmiş nöqtələrin koordinatlarını situasiyaya uyğun yazılı izah edin.
b) Funksiyanın təyin və qiymətlər oblastını yazın.
c) Maddənin kütləsinin zamandan asılı dəyişməsini üstlü funksiya şəklində yazın.
d) Ra-225 maddəsinin ilkin kütləsinin onun $\frac{1}{30}$ -nə qədər azalmasının hansı zaman müddətində baş verəcəyini təxmin edin.

Həlli: a) Şəkildən göründüyü kimi qrafik, $t = 0$ olduqda y oxunu (0; 1) nöqtəsində kəsir. Yəni radioaktiv maddənin başlanğıc kütləsi $m = 1$ q-dır.

b) Qrafikdən göründüyü kimi, funksiyanın təyin oblastı, yəni t-nin ala bildiyi qiymətlər $t \geq 0$ olan həqiqi ədədlər çoxluğudur. Funksiyanın qiymətlər çoxluğu, yəni m-in ala bildiyi qiymətlər $0 < m \leq 1$ olan həqiqi ədədlər çoxluğudur.
c) Radioaktiv maddənin hər 15 gündən bir yarısı parçalanır. Deməli, üstlü funksiyanın əsası $\frac{1}{2}$, üstü isə 15 günlərin sayını göstərən t dəyişəni olacaq.
$m(t) = (\frac{1}{2})^t$

d) Bu məlumatı qrafikə görə də təxmini söyləmək olar. Qiymətlər cədvəli də tərtib etmək olar. İlkin maddə 1 q olduqda onun $\frac{1}{30}$ hissəsi təxminən 0,033 q-dır. y oxu üzərində bu nöqtəni qeyd edək və bu nöqtədən keçərək qrafiki kəsən üfüqi düz xətt çəkək. Düz xətt qrafiki absisi təxminən 5 olan nöqtədə kəsir. Deməli, $5 \cdot 15 = 75$ gündən sonra ilkin radioaktiv maddənin kütləsinin təxminən $\frac{1}{30}$ hissəsi qalacaq.

1. İlkin kütləsi 1 q olan Radium-226 radioaktiv maddəsinin parçalanma qanunu $m(t) = (\frac{1}{2})^{t/1620}$ düsturu ilə verilir. Burada m radiumun kütləsini (qramla), t isə zamanı (illə) göstərir. Verilən maddə kütləsindən nə qədər qalacaq?
a) 1620 ildən sonra; b) 3240 ildən sonra; c) 4860 ildən sonra.

2. Aşağıdakı situasiyalardan hər biri üstlü funksiya ilə modelləşdirilə bilər. Hansı eksponensial artan ($a > 1$), hansı ekponensial azalan ($0 < a < 1$) situasiyadır?
a) Bakteriyaların yetişdirildiyi Petri boşqabında onların sayı hər saatda 2 dəfə artır.
b) Aktinium-225 izotopunun yarımparçalanma müddəti 10 gündür.
c) Gölə düşən işığın miqdarı hər 1 m dərinlikdə 25% azalır.
d) Böcək dəstəsindəki böcəklərin sayı hər gün 3 dəfə artır.

3. Bank hesabındakı məbləğ illik 2,5% gəlir gətirir. Bu hesabdakı pulun məbləğini n ildə $A = P(1+r)^n$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada P ilkin məbləği, r illik artımı (onluq kəsrlə) göstərir. Hesabdakı pulun məbləği $A = P(1{,}025)^n$ kimi dəyişəcək.
a) Hesabdakı ilkin məbləği bir manat qəbul etməklə uyğun üstlü funksiyanın qrafikini qurun.
b) Qrafikə görə bu məbləğin neçə ildən sonra ilkin məbləğin üçqatı qədər olacağını təxmin edin. Hesabdakı məbləğin üçqat artması müddəti ilkin məbləğin miqdarından asılıdırmı?
c) Maliyyədə illik mürəkkəb faiz artımına görə ilkin məbləğin ikiqat artma müddətini "72 üsulu" ilə hesablayırlar. Məsələn, 100 manat pulun neçə ilə 200 manat olacağını tapmaq üçün illərin sayının artım faizinə hasili 72-yə bərabər olmalıdır, yəni $n \cdot r = 72$ olmalıdır.

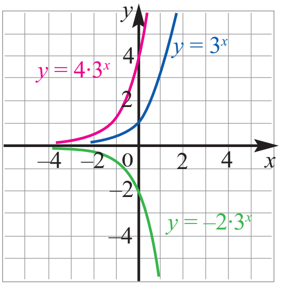
Bu qaydaya və qrafikə görə bir manat pulun 2,5%-lə neçə ildən sonra təxminən 2 manat olacağını tapın və nəticələri müqayisə edin.

4. $y = 3x$, $y = x^3$, və $y = 3^x$ funksiyalarının qrafikini qurun.
Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu, sıfırlarını (əgər varsa) yazın. $x = 1; 2; 3; 4$ qiymətlərində bu funksiyaların qiymətlərini müqayisə edin. Hansı funksiyanın qiymətləri daha sürətlə dəyişir?

Üstlü funksiyanın qrafikinin çevrilmələri

Üstlü funksiyanın ümumi şəkli $f(x) = l{\cdot}a^{x-m} + n$

$f(x) = a^x$ funksiyası üstlü funksiyalar ailəsinin əsas funksiyasıdır. Bu funksiyanın müxtəlif çevrilmələrinə görə $f(x) = l{\cdot}a^x$, $f(x) = l{\cdot}a^{x-n}$, $f(x) = l{\cdot}a^{x-m} + n$ şəkilli üstlü funksiyaların qrafikini qurmaq olar.



- Qrafik $|l|$ dəfə x oxundan şaquli olaraq dartılır.

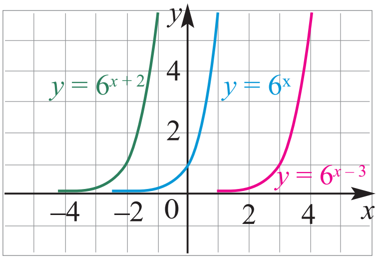
  $(x, y) \to (x, ly)$

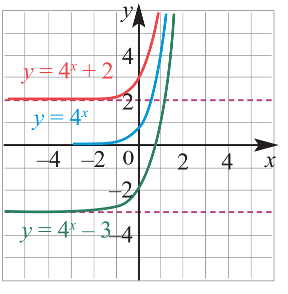
Məsələn, $y = 3^x$ və $y = 4{\cdot}3^x$

- $l < 0$ olduqda x oxuna nəzərən əksetmə baş verir.

Məsələn, $y = 3^x$ və $y = -2{\cdot}3^x$

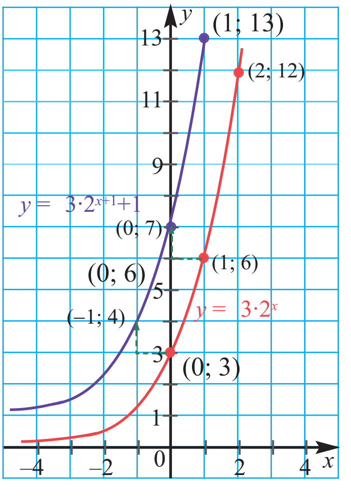
$f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$ funksiyasının qrafikini $y = l \cdot a^x$ funksiyasının qrafikinin paralel köçürülməsi ilə qurmaq olar.





m • sağa və ya sola üfüqi sürüşmə n • yuxarı və ya aşağı şaquli sürüşmə

Nümunə: $y = 3{\cdot}2^x$ funksiyasının qrafikinin paralel köçürülməsi ilə $y = 3{\cdot}2^{x+1} + 1$ funksiyasının qrafikini qurun.



1. $y = 3{\cdot}2^x$ funksiyasına uyğun (0; 3), (1; 6); (2; 12) nöqtələrini koordinat müstəvisi üzərində qeyd edək və bu nöqtələri səlis əyri ilə birləşdirək. Funksiyanın asimptotu $y = 0$ düz xəttidir.
2. $y = 3{\cdot}2^x$ funksiyasının qrafikinin bir vahid sola ($3{\cdot}2^{x+1}$) və bir vahid yuxarı ($3{\cdot}2^{x+1}+1$) paralel köçürülməsinə uyğun olaraq (sürüşmə vektoru $\langle -1;1\rangle$) qeyd olunan nöqtələrin yeni koordinatlarını müəyyən edək və koordinat müstəvisi üzərində yerləşdirək. Bu nöqtələri səlis əyri ilə birləşdirsək, $y = 3{\cdot}2^{x+1} + 1$ funksiyasının qrafiki alınar.

(0; 3) → (–1; 4) (1; 6) → (0; 7) (2; 12) → (1 ; 13)

$y = 1$ düz xətti funksiyanın üfüqi asimptotu olacaq.

Üstlü funksiyanın qrafikinin çevrilmələri

Öyrənmə tapşırıqları

1. a) Cədvələ $y = -2\cdot3^{x-4} - 3$ funksiyasının qiymətləri sütununu əlavə etməklə qrafikini qurun.

b) $y = -2\cdot3^{x-4} - 3$ funksiyasını $y = l\cdot a^{x-m} + n$ funksiyasının parametrləri ilə əlaqələndirməklə hər bir addımdakı dəyişikliyin qrafikin vəziyyətinə təsirini şərh edin.

$y = 3^x$	$y = 2\cdot3^x$	$y = 2\cdot3^{x-4}$
$(-1;\frac{1}{3})$	$(-1;\frac{2}{3})$	$(3;\frac{2}{3})$
(0; 1)	(0; 2)	(4; 2)
(1; 3)	(1; 6)	(5; 6)
(2; 9)	(2; 18)	(6; 18)
(3; 27)	(3; 54)	(7; 54)

c) $y = 3^x$ və $y = -2\cdot3^{x-4} - 3$ funksiyalarının hər birinin təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

2. Ən azı üç nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən etməklə funksiyaların qrafikini qurun.

a) $y = 2\cdot3^x$ b) $y = 5\cdot2^x$ c) $y = 0{,}5\cdot4^x$

d) $y = 4\cdot(\frac{1}{3})^x$ e) $y = -(\frac{1}{5})^x$ f) $y = -2{,}5\cdot5^x$

3. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funksiyasının qrafiki şaquli istiqamətdə elə sürüşdürülmüşdür ki, alınan qrafiki $(2;\frac{1}{12})$ nöqtəsindən keçir. Sürüşdürülmüş qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu yazın. Uyğun paralel köçürməni nümunəyə uyğun yazın.

Nümunə: $f(x) = 3^x$ və $g(x) = 3^{x-4}$

$g(x) = f(x-4)$ olduğundan g(x) funksiyasının qrafiki $f(x)$ funksiyasının qrafikinin 4 vahid sağa sürüşdürülməsi ilə alınmışdır.

a) $f(x) = 4^x$ və $g(x) = 4^x + 1$

b) $f(x) = -2^x$ və $g(x) = 5 - 2^x$

c) $f(x) = 10^x$ və $g(x) = 10^{-x+2}$

4. $y = 4^x$, $y = 4^{x+2}$, $y = 4^{x-3}$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu funksiyaların təyin oblastları və qiymətlər çoxluğu, asimptotları haqqında fikirlərinizi söyləyin.

5. $y = 10^x$ funksiyasını $y = (2\cdot5)^x$ kimi yazmaq olar. Bu funksiyanın və $y = 2\cdot5^x$ funksiyasının qrafikini qurun və onları müqayisə edin.

6. Verilən funksiyaları $y = l\cdot a^x$ şəklində yazın.

a) $y = 4^{x+1}$ b) $y = 5\cdot\sqrt{9^{x-1}}$

c) $y = \sqrt{5\cdot2^{3x}}$ d) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3\cdot5^{2x}}$

7. Verilən funksiyaların qrafiklərini $f(x) = l\cdot a^x$ üstlü funksiyasının qrafikinin paralel köçürülməsi ilə qurun. Hər bir funksiya üçün paralel köçürmə vektorunu yazın.

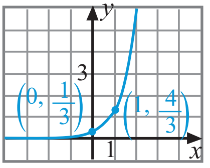
a) $y = 3\cdot(\frac{1}{3})^{x-1}$ b) $y = \frac{1}{3}\cdot3^{x+2}$ c) $y = 2\cdot2^{x-2}$

d) $y = -3\cdot3^{x+2} - 2$ e) $y = 4\cdot2^{x-3} + 1$ f) $y = 4\cdot2^{x-3} - 4$

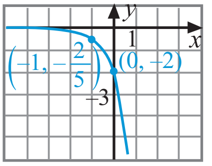
8. Hansı qrafikin hansı funksiyaya aid olduğunu müəyyən edin.

1) $y = 2{\cdot}5^x$
2) $y = 3{\cdot}4^x$
3) $y = -2{\cdot}5^x$
4) $y = \frac{1}{3}\cdot 4^x$
5) $y = 3^{x-2}$
6) $y = 3^x - 2$

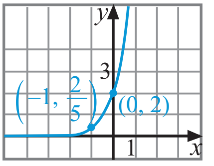
a)



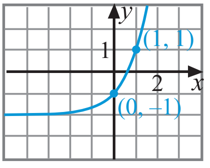
b)



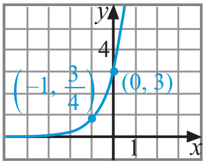
c)



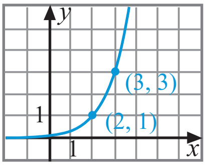
d)



e)



f)



9. Funksiyanın eksponensial artan və ya azalan olduğunu müəyyən edin.

a) $y = 10{\cdot}3{,}5^x$ b) $y = 2{\cdot}4^x$ c) $y = 0{,}4{\cdot}(\frac{1}{3})^x$

d) $y = 3{\cdot}(\frac{5}{2})^x$ e) $y = 30^{-x}$ f) $y = 0{,}2{\cdot}5^{-x}$

10. Real həyati situasiyalarda hər hansı kəmiyyət illik olaraq sabit faizlə artarsa, t ildən sonrakı vəziyyəti kəmiyyətcə qiymətləndirmək üçün $y = a(1 + r)^t$ düsturundan, azalma baş verirsə, $y = a(1 - r)^t$ düsturundan istifadə edilir. Burada a -ilkin miqdarı, r -artım (azalma) faizini onluq kəsrlə, t -illərin sayını göstərir. Bu düstura görə məsələləri həll edin.

Nümunə. 24 000 manata alınmış avtomobilin qiyməti hər il 12% aşağı düşür. Avtomobilin qiymətinin istifadə ilindən (t) asılılığını göstərən üstlü funksiyanın düsturunu yazın.

Həlli: $y = a(1 - r)^t$ düsturunda $a = 24000$, $r = 12\% = 0{,}12$, $1 - r = 0{,}88$ olduğunu nəzərə alsaq, verilən situasiyanı $y = 24000{\cdot}(0{,}88)^t$ üstlü funksiyası ilə modelləşdirmək olar.

a) 1993-cü ildə internet istifadəçilərinin sayı 1 313 000 nəfər olmuş və on il ərzində onların sayı hər il 100% artmışdır. İnternet istifadəçilərinin t ildən sonra sayını göstərən üstlü funksiyanı yazın. 5 ildən sonra istifadəçilərin sayı neçə nəfər olub? 2000-ci ildə istifadəçilərin sayı neçə nəfər olmuşdur?

b) Bank hesabına illik 8% mürəkkəb faiz artımı ilə qoyulmuş 1000 manat pul 6 ildən sonra neçə manat olacaq?

c) Təsəvvür edin ki, siz tərkibində 120 milliqram kofein olan qəhvə içmisiniz. Qəbul edilmiş kofenin miqdarı saatda 12% olmaqla azalır. Orqanizmdə qalan kofenin miqdarını göstərən üstlü funksiyanın düsturunu yazın.

11. Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $y = 3^x + 2$; b) $y = 2^x - 3$; c) $y = 8 \cdot 2^x + 2$;

d) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$; e) $y = 3 \cdot 3^{x-1} + 3$; f) $y = 4 \cdot (\frac{1}{2})^x - 1$.

Araşdırma. e ədədi.

Təsəvvür edin ki, 1 manat pul illik 100% mürəkkəb faiz artımı ilə bir illiyinə banka qoyulmuşdur və il ərzində n dəfə hesablama aparılır. Mürəkkəb faiz artımı düsturunda $S_0 = 1$, $r = 100\% = 1$, $t = 1$ qiymətlərini yerinə yazın.

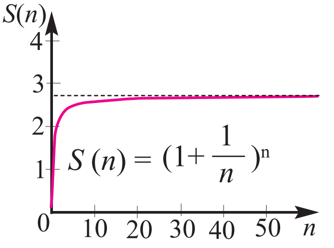
$$S = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot 1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

n-nin müxtəlif qiymətlərində funksiyanın qiymətlərini hesablamaqla $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ qiymətinin hansı ədədə yaxınlaşdığını araşdırın.

Hesablama şərti	n	$S(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	
İllik	1	$S(n) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}$	2
Yarımillik	2	$S(n) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}$	2,25
Kvartallıq	4	$S(n) = \left(1+\frac{1}{4}\right)^{4}$	2,4414
Aylıq	12	$S(n) = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	2,4883
Gündəlik	365	$S(n) = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	2,7048
Saatlıq	8760	$S(n) = \left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	2,7146
			2,7181

Göründüyü kimi, bank verilən faizlə pulu daha tez-tez hesablayarsa, gəlir artar. Lakin bankın faizi gündəlik hesablamasından aylıq hesablamasına nisbətən əldə edilən gəlir cəmi 10 qəpikdir. Təsəvvür edin ki, bank hesabdakı pula verilən faizə görə ara vermədən hər saniyə gəlir hesablayır. Yenə də fərq saatlıq və ya gündəlik hesablamadakından çox fərqlənməyəcək.

$S(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ funksiyasının qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafikindən görünür ki, $n \to \infty$ olduqda $S(n)$ funksiyasının üfüqi asimptotu var.



e ədədi

Araşdırmalar göstərir ki, n-in qiyməti artırdıqca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ifadəsinin qiyməti 2,71 ilə 2,72 arasında dəyişir. Bu ədəd e hərfi ilə işarə edilir və qiyməti

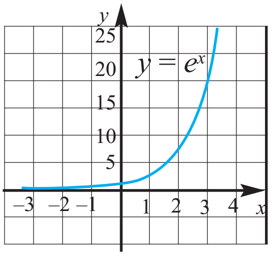
$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ldots$ kimidir. e ədədi də π ədədi kimi irrasional ədəddir. Bu ədədlər **transendent ədədlərdir**. Transendent ədədlər əmsalları tam ədədlər olan heç bir n dərəcəli tənliyin kökləri olmayan ədədlərə deyilir.

Ekponensial artma və ya azalmanı e əsasına görə $N = N_0e^{kt}$ düsturu ilə ifadə etmək olar. N_0 - ilkin miqdarı, t -zamanı göstərir. k -sabit ədəddir.

Üstlü funksiya. *e* ədədi

$y = e^x$ funksiyasının qrafiki.

$y = e^x$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün müxtəlif internet qrafkalkulyatorlardan (http://www.meta-calculator.com/online), həmçinin şəkildə göstərildiyi kimi Geometer's Sketchpad® proqramından istifadə etmək olar.



1. İfadələrin qiymətini vergüldən sonra dörd rəqəm dəqiqliyi ilə hesablayın. e^x düyməsi olan internet kalkulyatorlardan istifadə edin.
https://www.eeweb.com/toolbox/calculator

a) e^{-2} b) $e^{-0,23}$ c) e^0

2. Qrafkalkulyatorun köməyilə $y = e^x$ funksiyasının qrafikini qurun. Aşağıdakı funksiyaların qrafikini $y = e^x$ funksiyasının qrafikinin çevrilmələrinə görə sxematik təsvir edin.

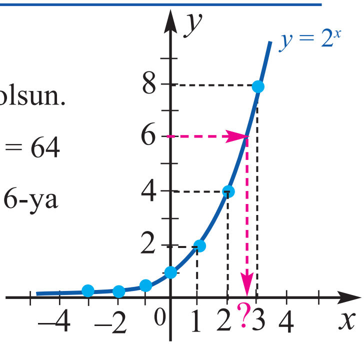
a) $y = 2\cdot e^{2x}$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = 3e^{-x}$

3. DDT ($C_{14}H_9Cl_{15}$) maddəsini ilk dəfə isveçrə alimi Paul Müller kəşf etmiş və bu kəşfinə görə Nobel mükafatına layiq görülmüşdür. Müharibədən sonrakı dövrdə DDT pestisidi ilə ətrafın dərmanlanması nəticəsində tif və malyariya kimi xəstəlikləri yayan həşəratlar məhv edildi. Lakin araşdırmalar bu maddənin insan orqanizminə də ziyanı olduğunu göstərir. Tutaq ki, 1973-cü ildə 1×10^9 kq DDT müəyyən sahənin dezinfeksiyası üçün istifadə edilmişdir. $k = -0,023$ olarsa: a) Verilən ildə bu maddənin qalığını göstərən düsturu $N = N_0e^{kt}$ şəklində yazın. b) 2020-cı ildə bu maddədən nə qədər qalmış olacaq? Kalkulyatorla hesablayın.

4. Təcrübə zamanı t saat müddətdən sonra qabdakı bakteriyaların N sayını $N = 100\ e^{0,69t}$ düsturu ilə müəyyən etməyin mümkün olduğu aşkar edilmişdir.
a) Qabdakı bakteriyaların ilkin sayını tapın.
b) 5 saat sonra qabda neçə bakteriya olacaq?

5. 5000 manat pul 25 illiyinə 12% illik mürəkkəb faiz artımı ilə banka qoyulmuşdur. Gəlirin hesablanması kəsilməz olaraq aparıldıqda əldə olunan gəliri
$S = S_0e^{rt}$ düsturu ilə, ildə iki dəfə ($n = 2$) faiz hesablanmaqla əldə olunan gəliri $S = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ düsturu ilə hesablayın. Hansı halda çox gəlir və nə qədər çox gəlir əldə edilər?

Ədədin loqarifmi



Araşdırma

1) x-in yerinə elə ədədlər yazın ki, bərabərlik doğru olsun.

a) $2^x = 16$ b) $3^x = 9$ c) $4^x = 64$

2) Arqumentin hansı qiymətində $y = 2^x$ funksiyası 6-ya bərabər qiymət alır?
x-in bu qiyməti yeganədirmi?

3) x-in verilmiş bərabərliyi ödəyən qiyməti hansı iki ardıcıl tam ədədin arasındadır?

a) $2^x = 24$ b) $3^x = 18$ c) $4^x = 56$

Loqarifma

b ədədini almaq üçün a ədədinin yüksəldildiyi qüvvət üstünə b ədədinin a əsasdan loqarifmi deyilir və $y = \log_a b$ kimi yazılır. Burada $a \neq 1$ olmaqla a və b müsbət həqiqi ədədlərdir.

$y = \log_a x$ yazılışı $a^y = x$ bərabərliyinin loqarifmik yazılışıdır və ya əksinə $a^y = x$ yazılışı $y = \log_a x$ bərabərliyinin eksponensial yazılışıdır.

üst

$y = \log_a x$ $a^y = x$

əsas

Yəni $a^y = x$ və $y = \log_a x$ yazılışları ekvivalent yazılışlardır.

- $\log_a 1 = 0$, çünki $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, çünki $a^1 = a$.
- $\log_a a^y = y$, çünki $a^y = a^y$
- $a^{\log_a x} = x$, çünki $\log_a x = \log_a x$

$\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$ bərabərliyinə əsas loqarifmik eynilik deyilir.

Nümunə 1. Loqarifmik yazılışları eksponensial yazılışlarla əvəz edin.

a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_{10}\dfrac{1}{1000} = -3$ c) $\log_8 1 = 0$

Həlli:

loqarifmik yazılış:	eksponensial yazılış:
a) $\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
b) $\log_{10}\dfrac{1}{1000} = -3$	$10^{-3} = \dfrac{1}{1000}$
c) $\log_8 1 = 0$	$8^0 = 1$

Nümunə 2. Loqarfmik ifadələrin qiymətini tapın.

a) $\log_3 27$ b) $\log_a a$ c) $\log_5 \sqrt[4]{5}$

Həlli:

$\log_3 27 = x$ *işarə edək*

$3^x = 27$ *eksponensial yazılış*

$3^x = 3^3$, $x = 3$ *qüvvətin xassəsinə görə*

$\log_a a = x$

$a^x = a$

$x = 1$

$\log_5 \sqrt[4]{5} = x$

$5^x = \sqrt[4]{5}$

$x = \dfrac{1}{4}$

Ədədin loqarifmi

Öyrənmə tapşırıqları

1. Bərabərlikləri ekvivalent loqarifmik yazılışla əvəz edin.

a) $3^4 = 81$ b) $8^{1/3} = 2$ c) $0{,}5^{-2} = 4$ d) $b^y = x$
e) $e^x = y$ f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ g) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}$ h) $8^{-2} = \frac{1}{64}$

2. Bərabərlikləri ekvivalent eksponensial yazılışla əvəz edin.

a) $\log_5 625 = 4$ b) $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$ c) $\lg(0{,}0001) = -4$ d) $\log_{25}\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{2}$
e) $\log_b 15 = x$ g) $\log_b 82 = y$ h) $\log_3 5 = x$ i) $\log_2 7 = x$

Əsası 10 və e ədədi olan loqarifmalar uyğun olaraq lg və ln kimi işarələnir. Əsası 10 olan loqarifma onluq loqarifma, əsası e olan isə natural loqarifma adlanır. $\log_{10} 0{,}001 \Rightarrow \lg 0{,}001$ $\log_e c \Rightarrow \ln c$

Loqarifmi hesablamaq üçün kalkulyatorlardan istifadə etmək olar. Məsələn, http://web2.0calc.com kimi virtual kalkulyatorlardan istifadə etmək olar.

3. Hesablayın.

a) $\lg 0{,}001$ b) $\lg(6{,}3 \cdot 10^5)$ c) $\lg(0{,}00025)$ d) $\ln(e^3)$ e) $\ln(8)$

4. Kalkuyatordan istifadə etmədən loqarifmik ifadələrin qiymətlərini tapın.

a) $\log_7 49$ b) $\log_3 27$ c) $\lg 0{,}1$ d) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$
e) $\log_{16} 4$ f) $\log_8 2$ g) $\log_{\frac{7}{2}} 1$ h) $\log_{0{,}5} 2$
i) $\log_3 3^5$ j) $\log_9 9^3$ k) $\lg 10$ l) $\log_7 1$

5. 1) Nümunələr üzərində loqarifmin əsasının 0;1 və ya mənfi ədəd ola bilmədiyini izah edin.
2) İfadənin mənası varmı?
a) $\log_{-3} 9$; b) $\lg(-10)$; c) $\log_1 3$; d) $\ln 7$; e) $\log_3 16$.

6. a və b-nin yerinə elə ardıcıl tam ədədlər yazın ki, bərabərsizlik doğru olsun.

a) $a < \log_2 48 < b$ b) $a < \log_3 100 < b$ c) $a < \log_5 90 < b$

7. Əsas loqarifmik eyniliyin köməyilə ifadələrin qiymətini hesablayın.

a) $2^{\log_2 8}$ b) $10^{\lg 2}$; c) $3^{1+\log_3 2}$; d) $10^{2-\lg 4}$;
e) $2^{3\log_2 5}$; f) $5^{2\log_5 3}$; g) $4^{\log_2 3}$; h) $16^{\log_4 7}$;

8. Hesablayın.

a) $(1 + 3^{\log_3 5})^{\log_6 2}$; b) $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 3}$; c) $(7 - 5^{\log_5 3})^{1+\log_2 3}$.

9. Bərabərlikdən məchulu tapın.

a) $\log_2 x = -1$ b) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ c) $\log_x 25 = 2$ d) $\log_x \frac{1}{4} = -2$

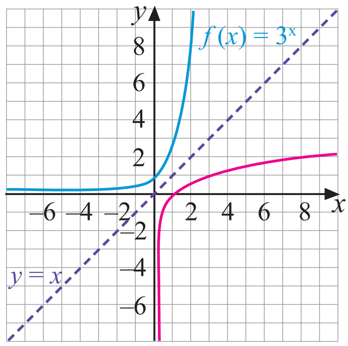
10. Statistik göstəricilərə görə dünya əhalisi 1995-ci ildən başlayaraq ildə 1,27% artır. 2011-ci ildə dünya əhalisinin sayı 7 milyard olmuşdur. Bu artımla 2020-ci ildə əhalinin sayı təxminən neçə nəfər olar?

Loqarifmik funksiya

Araşdırma. $f(x) = 3^x$ və onun tərsi olan $f^{-1}(x)$ funksiyalarının qiymətlər cədvəlini və qrafiklərini dəftərinizdə siz də qurun. Funksiya və tərs funksiya haqqında fikirlərinizi yazın.

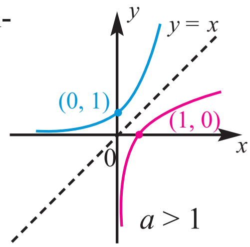
$f(x) = 3^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

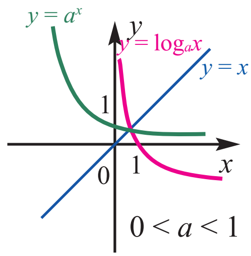
$f^{-1}(x)$	
x	y
$\frac{1}{27}$	-3
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2
27	3



Loqarifmik funksiya

$y = a^x$ funksiyasının qiymətlər oblastından götürülmüş hər bir qiymətə təyin oblastından götürülmüş yalnız bir qiymət uyğun gəlir. Yəni, $y = a^x$ funksiyasının tərsi olan funksiya var və bu funksiya $x = \log_a y$ funksiyasıdır.





Deməli, $y = a^x$ funksiyasının qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirsək, $y = \log_a x$ funksiyasının qrafikini alarıq.

1) Loqarifmik funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət ədədlər çoxluğudur:

$$D(\log_a x) = (0; +\infty)$$

2) Loqarifmik funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur:

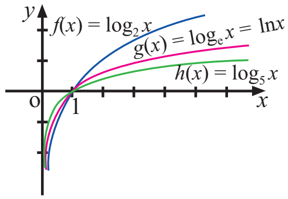
$$E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$$

3) Loqarifmik funksiya $a > 1$ olduqda artan, $0 < a < 1$ olduqda azalandır.

4) $y = \log_a x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu $(1; 0)$ nöqtəsində kəsir.

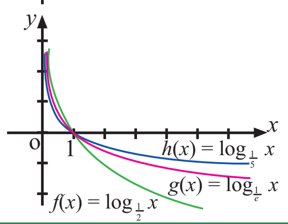
$a > 1$ olduqda nümunə olaraq $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_5 x$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. Qrafikləri dəftərinizdə qurun.

$a > 1$ olduqda $0 < x < 1$ olarsa, loqarifmik funksiya mənfi, $x > 1$ olarsa, müsbət qiymətlər alır.



$0 < a < 1$ olduqda nümunə olaraq $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{e}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir.

$0 < a < 1$ olduqda $0 < x < 1$ olarsa, loqarifmik funksiya müsbət, $x > 1$ olarsa, mənfi qiymətlər alır.



Loqarifmik funksiya

Öyrənmə tapşırıqları

1. a-nın verilən qiymətlərində $y = a^x$ və $y = \log_a x$ funksiyasının qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun.

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{2}$ e) $a = \frac{1}{3}$

2. $y = \log_2 x$ funksiyasının qrafikindən hansı simmetrik çevrilmə ilə $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyasının qrafikini almaq olar? Qrafikləri eyni koordinat sistemində qurun.

3. Verilmiş funksiyanın tərs funksiyasının düsturunu yazın. Verilmiş funksiyanın və tərs funksiyanın qrafiklərini qurun. Tərs funksiya üçün müəyyən edin:

- təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu;
- asimptotunun tənliyini.
- koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini;

a) $y = 5^x$ b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

4. $y = \log_3 (x + 9) + 2$ funksiyasının qrafiki $\log_3 x$ funksiyasının qrafikinin $\langle -9;\ 2\rangle$ vektoru üzrə icra edilən paralel köçürülməsi ilə alınır. Verilən funksiyaların qrafikini hansı funksiyanın qrafikini və necə sürüşdürməklə almaq olar? a) $y = \log_2 x + 3$ b) $y = \log_2 (x + 3)$ c) $y = \log_3 (x - 3) - 4$

5. Artan, yoxsa azalan funksiyadır? a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

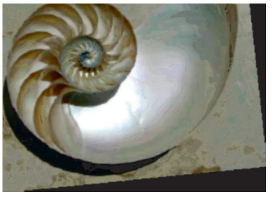
6. Müqayisə edin:

a) $\log_2 5$ və $\log_2 7$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ və $\log_{\frac{1}{2}} 3$ c) $\log_2 3$ və $\log_5 4$

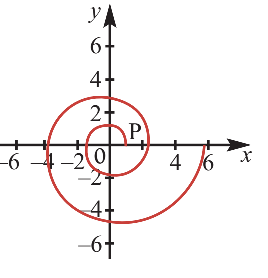
7. $(\frac{1}{8}; -3)$ nöqtəsi $f(x) = \log_a x$ funksiyasının qrafiki, $(4; k)$ nöqtəsi isə bu funksiyanın $f^{-1}(x)$ tərs funksiyasının qrafiki üzərindədir. k-nın qiymətini tapın.

8. Ədədin işarəsini müəyyən edin: a) $\log_5 2$; b) $\log_{0,2}\sqrt{3}$; c) $\log_3 0,2$; d) $\log_{0,4} 0,6$

9. Loqarifmik spiral başlanğıcı P(1; 0) nöqtəsində olmaqla P nöqtəsinin saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətdə φ bucağı qədər(radianla) dönməsi ilə alınır. Bu zaman P nöqtəsinin koordinat başlanğıcından r məsafəsi $r = e^{0,14\varphi}$ düsturu ilə müəyyən edilir.

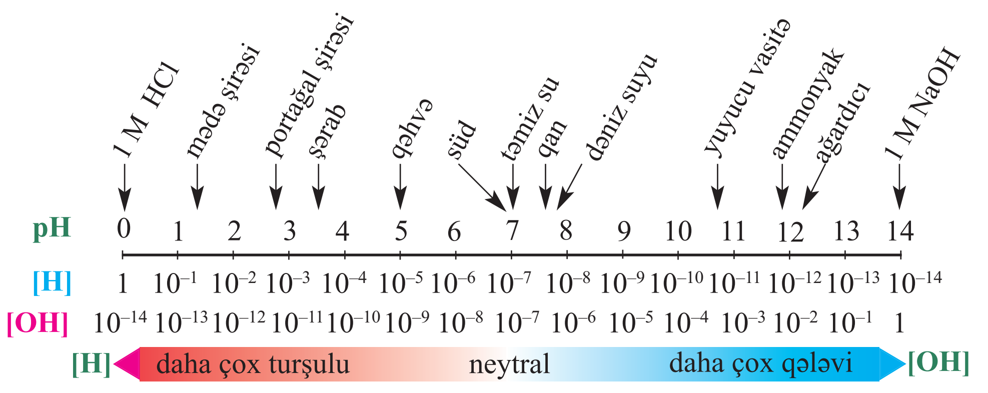


a) 2π dönmədə P nöqtəsinin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın. Cavabınızı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.
b) r və φ arasındakı asılılığı loqarifmik yazılışla ifadə edin.
c) $r = 12$ olduqda φ-nın qiymətini tapın.

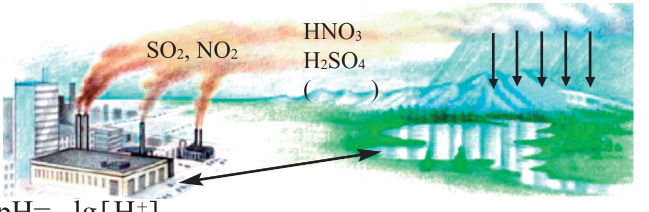


Loqarifmik şkala və məsələ həlli

1. Kimya - Ekologiya. pH (hidrogen ionlarının aktivliyi) məhlullarda hidrogen ionlarının konsentrasiyasını səciyyələndirən kəmiyyətdir. Məhlulun pH-nı hesablamaq üçün $pH = -\lg[H^+]$ düsturundan istifadə edilir. Burada H^+ məhluldakı hidrogen ionlarının konsentrasiyasını *mol/l* ilə göstərir. Bu düstura görə məhlulda pH göstəricisi 1 vahid artırsa, deməli, məhluldakı hidrogen ionlarının konsentrasiyası 10 dəfə artmışdır.
pH şkalasında pH-ın qiyməti 0-dan 14-ə qədər dəyişir. pH-ın 7-yə bərabər olan qiymətində məhlul neytral hesab edilir. 7-dən kiçik qiymətlərdə məhlulun turşuluğu, 7-dən böyük qiymətlərdə qələviliyi çoxdur.



a) Normal yağış suyunda pH 5,6-ya bərabər olur. Lakin ekoloji cəhətdən çirklənmiş bir çox yerlərdə turşuluğu çox olan yağışlar yağır.



$pH = -\lg[H^+]$

Yağış suyunda hidrogen ionlarının konsentrasiyası 0,0002 *mol/l* olarsa, onun pH göstəricisini hesablayın.
b) pH göstəricisi 5,6 olan suyun $[H^+]$ konsentrasiyasını müəyyən edin.

2. Fizika. Səs dalğaları. Səsin gurluğu desibellə ölçülür və $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ düsturu ilə hesablanır. Burada I səsin intensivliyi (vatt/m^2), I_0 insan qulağının eşidə bildiyi ən aşağı səs intensivliyidir (10^{-12}vat/m^2 qəbul edilir). İnsan qulağı çox geniş diapazonda səsləri eşidə bilir. Bu 0 dB-dən (səssizlik) 180 dB arasında dəyişir.
a) Radiodakı musiqi səsinin intensivliyi insan qulağının eşidə biləcəyi minimum səsin intensivliyindən 4000 dəfə çoxdur. Musiqi səsinin gurluğu neçə desibeldir?
b) Tahir deyir ki, intensivliyi $4\cdot10^{-8}$ vatt/m^2 olan səs intensivliyi $2\cdot10^{-8}$ vatt/m^2 olan səsdən 2 dəfə gurdur. Siz necə düşünürsünüz?

3. **Zəlzələ.** 1935-ci ildə Amerika seysmoloqu Çarlz Rixter zəlzələnin gücünü hesablamaq üçün $M = \lg\frac{A}{A_0}$ düsturunu müəyyən etdi və zəlzələnin gücünü göstərən (Rixter şkalası adlanan) loqarifmik şkala yaratdı.
M - zəlzələnin gücünü (balla), A seysmoqrafın baş vermiş zəlzələdə qeyd etdiyi seysmik dalğaların maksimum amplitudunu (mikronla), A_0 isə seysmoqrafın qeyd edə bildiyi ən zəif zəlzələyə uyğun (buna "sıfır zəlzələ" də deyilir) seysmik dalğanın amplitududur (1 mikron (10^{-6} m) qəbul edilir).
$M = \lg\frac{A}{A_0}$ düsturunu $A = A_0 10^M$ kimi də yazmaq olar. Deməli, Rixter şkalası ilə 4 ballıq zəlzələnin seysmik dalğalarının amplitudu 3 ballıq zəlzələdəkindən 10 dəfə böyükdür.
a)Baş vermiş zəlzələnin amplitudunun (A) maksimal qiyməti, A_0 qiymətindən $10^{7,1}$ dəfə böyük olmuşdur. Neçə bal gücündə zəlzələ baş vermişdir?

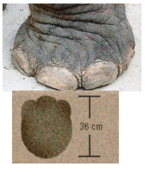
b) 4,7 bal gücündəki zəlzələnin seysmik dalğa amplitudu 4 bal gücündəki zəlzələnin amplitudundan neçə dəfə böyükdür?
c) 1906-cı ildə San-Fransiskoda Rixter şkalası ilə 8,3 bal gücündə zəlzələ baş verdi. Eyni ildə Kolumbiya - Ekvador sərhədində baş verən zəlzələnin amplitudu bu zəlzələnin amplitudundan 4 dəfə böyük olmuşdur. Kolumbiya-Ekvador sərhəddində baş verən zəlzələ Rixter şkalası ilə neçə bal gücündə olmuşdur?

d)1976-cı il iyulun 28-də Çində baş vermiş 8,5 bal gücündə zəlzələ zamanı 240000 nəfər, 1990-cı ildə İranda baş verən 7,4 bal gücündə zəlzələ zamanı isə 50000 nəfər həlak olmuşdur. Bu iki zəlzələnin amplitudlarını müqayisə edin.

4. Otaqda 3 qrup şəxs hər biri $1,4 \times 10^{-7}$ vatt/m^2 intensivliyi ilə olmaqla öz aralarında söhbət edir. Bu qrupların yaratdığı səs neçə desibeldir?

5. Təsəvvür edin ki, bank hesabındakı 1000 manat ilkin məbləğ eksponensial olaraq dəyişir. Bu məbləğ 7 ildə iki dəfə artmışdır. t ildə hesabdakı məbləği $A(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{7}}$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada t illərin sayını, $A(t)$ isə hesabdakı məbləği göstərir.
a) 5 ildən; 10 ildən sonra hesabda neçə manat olacaq?
b) A(0) və A(8) qiymətlərini hesablayın və real situasiyaya uyğun şərh edin.

6. **Biologiya.** Bioloqlar filin ayaq izlərinin ölçüsünə (l) görə onların yaşını (a) təxmin edə bilirlər. Bunun üçün onlar $l = 45 - 25,7e^{-0,09a}$ düsturundan istifadə edirlər.
Ayaq izi 28 sm; 36 sm olan filin yaşını hesablayın.



Loqarifmin xassələri

Araşdırma. 1) $\lg(1000 \cdot 100) \neq (\lg 1000)\cdot(\lg 100)$ olduğunu göstərin.
2) Hesablayın. Nəticələri müqayisə edin.

a) $\log_2 4 + \log_2 8$ və $\log_2 32$
b) $\log_3 3 + \log_3 27$ və $\log_3 81$
c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{2}} 8$ və $\log_{\frac{1}{2}} 2$

Fikirlərinizi $\log_a b + \log_a c$ üçün qayda ifadə etməklə ümumiləşdirin. b və c müsbət həqiqi ədədlərdir.
3) Hesablayın. Nəticələri müqayisə edin.

a) $\log_2 64 - \log_2 2$ və $\log_2 32$
b) $\log_3 27 - \log_3 9$ və $\log_3 3$
c) $\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ və $\log_{\frac{1}{2}} 16$

Fikirlərinizi $\log_a b - \log_a c$ üçün qayda ifadə etməklə ümumiləşdirin. b və c müsbət həqiqi ədədlərdir.

4) Hesablayın. Nəticələri müqayisə edin.

a) $3\cdot\log_2 4$ və $\log_2 64$
b) $2\cdot\log_3 \frac{1}{9}$ və $\log_3 \frac{1}{81}$
c) $2\cdot\lg 100$ və $\lg 10000$

Fikirlərinizi $b \cdot \log_a c$ üçün qayda ifadə etməklə ümumiləşdirin. c və b müsbət həqiqi ədədlərdir.
5) Qüvvətin xassələrini dəftərinizdə sözlə ifadə edin.
Hər birini iki nümunə yazmaqla izah edin.

- qüvvətlərin hasili: $c^x \cdot c^y = c^{x+y}$
- qüvvətlərin nisbəti: $\frac{c^x}{c^y} = c^{x-y}$, $c \neq 0$
- qüvvətin qüvvəti: $(c^x)^y = c^{xy}$

Loqarifmin xassələri

1. Hasilin loqarifmi: $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$
İki müsbət ədədin hasilinin loqarifmi vuruqların loqarifmləri cəminə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x və y müsbət həqiqi ədədlərdir.

2. Nisbətin loqarifmi: $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$
İki müsbət ədədin nisbətinin loqarifmi onların loqarifmləri fərqinə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x və y müsbət həqiqi ədədlərdir.

3. Qüvvətin loqarifmi: $\log_c x^y = y\cdot\log_c x$
Ədədin qüvvətinin loqarifmi qüvvət üstü ilə həmin ədədin loqarifmi hasilinə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x müsbət həqiqi ədəddir.

Loqarifmin xassələri

Xassə 1. $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$

1-ci xassənin isbatı:

$\log_c x = m$ və $\log_c y = n$, kimi işarə edək.

$x = c^m$ və $y = c^n$	*eksponensial yazılışla*
$xy = (c^m)\cdot(c^n)$	*x və y ədədlərinin hasili*
$xy = c^{m+n}$	*qüvvətlərin hasilinin xassəsi*
$\log_c xy = m + n$	*loqarifmik yazılışla*
$\log_c xy = \log_c x + \log_c y$	*m və n-in qiymətləri nəzərə alınmaqla*

Xassə 2. $\log_c \dfrac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$

2-ci xassənin isbatı:

$\log_c x = m$ və $\log_c y = n$ kimi işarə edək.

$x = c^m$ və $y = c^n$	*eksponensial yazılışla*
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{c^m}{c^n}$	*x və y ədədlərinin nisbəti*
$\dfrac{x}{y} = c^{m-n}$	*qüvvətlərin nisbətinin xassəsi*
$\log_c \dfrac{x}{y} = m - n$	*loqarifmik yazılışla*
$\log_c \dfrac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$	*m və n-in qiymətləri nəzərə alınmaqla*

Xassə 3. $\log_c x^y = y \cdot \log_c x$

3-cü xassənin isbatı:

$\log_c x = m$ kimi işarə edək.

$x = c^m$	*eksponensial yazılışla*
$x^y = (c^m)^y$	*bərabərliyin xassəsi*
$x^y = c^{my}$	*qüvvətin qüvvəti*
$\log_c x^y = m\,y$	*loqarifmik yazılışla*
$\log_c x^y = (\log_c x)\cdot y$	*m-in qiyməti nəzərə alınmaqla*
$\log_c x^y = y \cdot \log_c x$	*vurmanın yerdəyişmə qanunu*

Öyrənmə tapşırıqları

1. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadələrin qiymətini hesablayın.

a) $\log_2 (64\cdot 32)$ b) $\log_3 \dfrac{0,(3)}{81}$ c) $\log_5 (125\cdot 625)$

d) $\log_6 3 + \log_6 12$ e) $\lg 2 + \lg 5$ f) $\log_{0,5} 6,4 + \log_{0,5} 10$

g) $\log_2 48 - \log_2 3$ h) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ i) $\lg 0,25 - \lg 25$

j) $\log_2 \sqrt[4]{8}$ k) $\log_3 (9\cdot 27)$ l) $\lg \sqrt{10^3}$ m) $\log_{0,5} \sqrt[4]{8}$

n) $\dfrac{\log_5 8}{\log_5 32}$ o) $\dfrac{\log_3 125}{\log_3 25}$ p) $\dfrac{\log_7 6}{\log_7 2 + \log_7 18}$ r) $\dfrac{\lg 2 + \lg 5}{\lg 13 - \lg 130}$

2. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadəni x, y, z müsbət ədədlərinin loqarifmləri ilə yazın.

Nümunə 1. $\log_4 xy\sqrt{z} = \log_4 x + \log_4 y + \log_4 z^{\frac{1}{2}} = \log_4 x + \log_4 y + \dfrac{1}{2}\log_4 z$

a) $\log_6 \dfrac{x}{y}$ b) $\log_5 \sqrt{xy}$ c) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt{x^2}}$ d) $\log_7 \dfrac{x^5 y}{\sqrt{z}}$

e) $\log_7 xy\sqrt[3]{z}$ f) $\log_5 (xyz)^8$ g) $\log_3 \dfrac{x^2}{y\sqrt[3]{z}}$ h) $\log_3 x\sqrt{\dfrac{y}{z}}$

3. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadələri müəyyən ədədin loqarifmi ($\log_a N$) şəklində yazın.

Nümunə 2.

$\log_5 6 + \log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 \dfrac{6\cdot 10}{2} = \log_5 30$

a) $\log_2 3 + \log_2 5$	b) $\log_3 16 - \log_3 2$	c) $3\cdot\log_5 4$
d) $2\lg 3 - 3\lg 2$	e) $\lg 216 - \lg 36$	f) $\lg 16 + \lg 4$
g) $5\log_3 2 + 2\log_3 5$	h) $\lg 12 - 2\lg 2 + \lg 3$	i) $3\log_2 3 + 2\log_2 5 - \log_2 6$

4. Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığını bilərək, ifadəni loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə müəyyən ifadənin loqarifmi şəklində yazın.

Nümunə 3. $5 + \log_2 x = \log_2 2^5 + \log_2 x = \log_2 32 + \log_2 x = \log_2 32x$

a) $\log_x x + \log_x 10$ b) $\log_2 a + \log_2 b$

c) $\log_2 x - 5\log_2 y$ d) $\dfrac{1}{2}\log_3 x + 3\log_3 y$

e) $\dfrac{1}{2}\lg x + 3\lg y$ f) $\dfrac{2}{3}\log_5 x + 4\log_5 y - 3\log_5 z$

g) $3\log_3 x^3 - (\log_3 x^2 + 5\log_3 x)$ h) $\log_7 x^2 + \log_7 x - 5\log_7 x$

i) $\ln x + 2\ln y - 2\ln z$ j) $\dfrac{1}{2}\log_3 x^{10} - \dfrac{2}{5}\log_3 x^5$

5. Dəyişənlərin mümkün qiymətlərində sadələşdirin.

a) $\log_2(x^2 - 9) - \log_2(2x - 6)$ b) $\log_5(x - 1) - \log_5(x^2 + 2x - 3)$

6. $\log_5 2 = a$ və $\log_5 3 = b$ olduğunu bilərək a və b ilə ifadə edin:

a) $\log_5 6$; b) $\log_5 12$; c) $\log_5 15$; d) $\log_5 30$.

7. $\lg a = 3$, $\lg b = 12$, $\lg c = 8$ isə $\lg \dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{b}}{c}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

8. 1) Tapın:

a) $k = \log_2 40 - \log_2 5$ olduqda 3^k ifadəsinin qiymətini;
b) $n = 3\log_8 4$ olduqda 7^n ifadəsinin qiymətini.

2) Sadələşdirin: a) $e^{\ln 10x^3 - \ln 2x}$ b) $3^{2\log_3 x - \log_3 2x}$

9. $\lg 5 \approx 0{,}699$ və $\lg 15 \approx 1{,}176$ olduğunu nəzərə alaraq ifadələrin qiymətini hesablayın.
a) $\lg 3$ b) $\lg 75$ c) $\lg 12$ d) $\lg 45$

Bir əsasdan başqa əsasa keçmə

Əsas loqarifmik eyniliyə və qüvvətin loqarifminin xassəsinə görə

$$\log_c b = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a$$

Buradan: $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ Xüsusi halda, $c = b$ olarsa, $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Bir çox kalkulyatorlarda yalnız onluq (lg) və natural loqarifmləri (ln) hesablamaq üçün klaviş mövcuddur. Bu səbəbdən də loqarifmləri daha çox onluq və natural loqarifma şəklində yazmaq zərurəti yaranır.

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} \qquad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Nümunə 1. a) onluq loqarifma; b) natural loqarifma ilə yazın və hesablayın.

$$\log_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3} \approx \frac{0{,}845}{0{,}477} \approx 1{,}771 \qquad \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{1{,}946}{1{,}099} \approx 1{,}771$$

10. Onluq və ya natural loqarifmə gətirməklə hesablayın.

$\log_5 7$ $\log_7 12$ $\log_3 16$ $\log_9 25$ $\log_6 24$
$\log_2 5$ $\log_5 9$ $\log_3 17$ $\log_5 32$ $\log_4 19$

11. 1) Bir əsasdan başqa əsasa keçmə düsturunun köməyi ilə göstərin ki:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$$

2) Hesablayın.

a) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4}$ b) $\log_{\sqrt{3}} 9^{-1}$ c) $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$ d) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$

e) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4$ f) $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8$

g) $\dfrac{1}{\log_{12} 6} + \dfrac{1}{\log_3 6}$ h) $\dfrac{1}{\log_{36} 3} - \dfrac{2}{\log_{54} 3}$

Üstlü tənliklər

Üstlü tənliklər

Üstlü funksiyaların xassəsi. $a \neq 1$, $a > 0$ şərti ilə $a^x = a^y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.
Bu xassəyə görə alırıq:
1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ üstlü tənliyi $f(x) = g(x)$ tənliyi ilə eynigüclüdür.
2) $a^x = c$ tənliyini $c > 0$ olduqda $a^x = a^{\log_a c}$ şəklində yazsaq, $x = \log_a c$ alarıq.
Verilmiş üstlü tənliklər müəyyən üsullarla sadə üstlü tənliklərə gətirilib, həll edilir.

1. Qüvvətin xassələrinin tətbiqi

Nümunə 1. $4^{2x} = 8^{2x-1}$ *verilən tənlik*

$(2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1}$ *eyni əsaslara gətirilir*

$2^{4x} = 2^{6x-3}$ *qüvvətin qüvvəti xassəsi*

$4x = 6x - 3$ *eynigüclü tənliyə gətirilir*

$2x = 3;\quad x = 1{,}5$ *tənliyin həlli*

Yoxlama: $4^{2\cdot 1,5} = 8^{2\cdot 1,5-1}$ $\quad 4^3 = 8^2;\ 64 = 64$

Nümunə 2. $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$ *verilən tənlik*

$2\cdot 3^x\cdot 3 - 3^x = 45$ *qüvvətin xassəsi*

$3^x(6-1) = 45$ *ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması*

$3^x = 9$ *sadələşdirmə*

$x = 2$ *tənliyin həlli*

2. Əsaslar müxtəlif olduqda tənliyin hər iki tərəfi qüvvətlərdən birinə bölməklə və ya tənliyin hər iki tərəfini eyni əsasa görə loqarifmləməklə həll etmək olar.

Nümunə 3.

$3^{2x} = 5^x$

tənliyi

$(3^2)^x = 5^x$,

$9^x = 5^x$

şəklində yazıb,

hər iki tərəfini 5^x-ə bölək

$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 1$

Buradan

$x = 0$

Nümunə 4.

$2^{x-1} = 3^x$ *verilən tənlik*

$\lg 2^{x-1} = \lg 3^x$ *hər iki tərəfi on əsasdan loqarifmlənir*

$(x-1)\cdot\lg 2 = x\lg 3$ *loqarifmin xassəsi*

$x\cdot\lg 2 - \lg 2 = x\lg 3$ *vurmanın paylama xassəsi*

$x\cdot\lg 2 - x\cdot\lg 3 = \lg 2$ *oxşar hədlər qruplaşdırılır*

$x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 2$ *ortaq vuruq mötərizə xaricinə çıxarılır*

$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$ *tənliyin həlli*

$x \approx -1{,}7095$ *tənliyin təqribi kökü*

3. Yeni dəyişən daxil etməklə

Nümunə 5. $9^x - 2\cdot3^{x+1} - 27 = 0$ *verilən tənlik*

$3^{2x} - 2\cdot3^x\cdot3 - 27 = 0$

$(3^x)^2 - 6\cdot3^x - 27 = 0$ *qüvvətin xassəsi*

$3^x = y$ *yeni məchul daxil edilir*

$y^2 - 6y - 27 = 0$ *kvadrat tənliyə gətirilir*

$(y - 9)(y + 3) = 0$ *kvadrat tənliyin həlli*

$y = 9;\ y = -3$

$3^x = 9 \qquad 3^x = -3$ *əvəzləmə nəzərə alınır*

$x = 2 \qquad \varnothing$

Yoxlama:

$9^2 - 2\cdot3^{2+1} - 27 = 0$

$81 - 54 - 27 = 0$

$0 = 0$

Cavab: $x = 2$

Tənliyə daxil olan qüvvətlərin üstləri eyni olub, əsaslar həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri olduqda hər iki tərəfi kənar hədlərdən birinə bölüb yeni dəyişən daxil edilir.

Nümunə 6. $3\cdot4^x + 2\cdot9^x - 5\cdot6^x = 0$ *hər iki tərəfi 4^x-ə bölək*

$3 + 2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$

$3 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ *əvəz edilir*

$2y^2 - 5y + 3 = 0$ *kvadrat tənliyə gətirilir*

$y = 1 \qquad y = \frac{3}{2}$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ *əvəzləmə nəzərə alınır.*

$x = 0 \qquad x = 1$ *tənliyin həlli*

Öyrənmə tapşırıqları

1. Qüvvətin xassələrini tətbiq etməklə həll edin.

a) $25^x = 125$ b) $9^{x+1} = 27$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8$

d) $5^{x^2-2x-1} = 25$ e) $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{x-4} = 8^{-2}$ f) $3^{2x}\cdot 2^x = 324$

g) $2\cdot3^{x+1} - 3^x = 45$ h) $4^{x+2} + 4^{x+1} = 320$ i) $3^{x+1} - 4\cdot3^{x-2} = 69$

2. Tənlikləri həll edin.

1) $4^{3x} = 8^{x-3}$ 2) $27^x = 9^{x-2}$ 3) $125^{2x-1} = 25^{x+4}$

4) $16^{2x-3} = 32^{x+3}$ 5) $2^{4x} = 4^{x+3}$ 6) $3^{x+1} = 9^{x-1}$

7) $25^{x-1} = 5^{3x}$ 8) $36^{3x-1} = 6^{2x+5}$ 9) $3^{x-2} = 27$

10) $2^{3x+5} = 128$ 11) $5^{x-3} = \frac{1}{25}$ 12) $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

13) $36^{2x} = 216^{x-1}$ 14) $3^{5x}\cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 15) $49^x = 7^{x^2-15}$

16) $81\cdot 9^{-2x-2}\cdot 9^x = 27$ 17) $9^{-3x}\cdot 9^x = 27$ 18) $16^x\cdot 64^{3-3x} = 64$

3. Yeni dəyişən daxil etməklə həll edin.

a) $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$ b) $9^x - 6\cdot 3^x - 27 = 0$ c) $4^x - 14\cdot 2^x - 32 = 0$

d) $4^x - 4^{2-x} = 15$ e) $3^x + 3^{3-x} = 12$ f) $4^x - 7\cdot 2^x + 12 = 0$

4. Tənlikləri həll edin.

a) $7^{x-3} = 4^{3-x}$ b) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3\cdot 5^x$ c) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 4^{x-0,5}$

5. Hər iki tərəfi qüvvətlərdən birinə bölməklə həll edin.

a) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$ b) $4\cdot 9^x + 12^x - 3\cdot 16^x = 0$ c) $2\cdot 27^x = 3\cdot 12^x + 18^x$

6. Tənlikləri həll edin.

a) $125^x = 5\cdot 5^3\cdot 5^5\cdot\ldots\cdot 5^{17}$ b) $2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\cdot\ldots\cdot 2^{2x} = 0,25^{-10}$

7. Tənlikləri həll edin.

a) $2^{x+3} = 4^{3x-5}$ b) $9^{4x-1} = 27^{3x+5}$ c) $4^{3x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$

d) $2^x = 7$ e) $10^{x-4} + 4 = 11$ f) $10^x + 10^{x+1} = 11$

8. Tənlikləri həll edin.

1) $10^{x-3} = 100^{4x-5}$ 2) $25^{x-1} = 125^{4x}$ 3) $3^{x-7} = 27^{2x}$

4) $36^{x-9} = 6^{2x}$ 5) $8^{5x} = 16^{3x+4}$ 6) $e^{-x} = 6$

7) $2^x = 15$ 8) $1,2e^{-5x} + 2,6 = 3$ 9) $4^x - 5 = 3$

10) $5e^{-x} + 9 = 6$ 11) $10^{2x} + 3 = 8$ 12) $0,25^x - 0,5 = 2$

13) $\frac{1}{4}\cdot 4^{2x} + 1 = 5$ 14) $\frac{2}{3}\cdot e^{4x} + \frac{1}{3} = 4$ 15) $10^{-12x} + 6 = 100$

9. Maddənin soyuması zamanı temperaturun zamandan asılılığının Nyuton düsturu $T = (T_0 - T_r)e^{-rt} + T_r$ kimidir. Burada T maddənin baxılan andakı, T_0 başlanğıc andakı temperaturunu, T_r isə ətraf mühitin temperaturunu (otaq temperaturunu), r soyuma sürətini (vahid zamanda temperaturun dəyişməsini), t zamanı göstərir.

Temperaturu 80° C olan çayın temperaturu 22° C olan otaqda 10 dəqiqədən sonra 60° C oldu.

a) Maddənin soyumasının Nyuton düsturuna görə r əmsalını tapın.

b) Neçə dəqiqədən sonra çayın temperaturu 35° C olar?

10. Tənlikləri həll edin:

a) $9^{\sin^2 x} - 27^{\cos x} = 0$ b) $2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} + 1 = 0$

c) $|x-4|^{\frac{x^2 - 11x + 28}{x-3}} = 1$ d) $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62$

Loqarifmik tənliklər

Loqarifmik funksiyanın xassəsi

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ olduqda, $\log_a x = \log_a y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.
1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tənliyi $f(x) > 0$ və $g(x) > 0$ olmaq şərti ilə $f(x) = g(x)$ tənliyinə eynigüclüdür. $f(x) = g(x)$ tənliyini həll edib, tapılmış köklərin $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ şərtlərini ödəyib-ödəmədiyi yoxlanılır.
2) $\log_a f(x) = c$ tənliyini ekvivalent eksponensial yazılışla əvəz etsək, $f(x) = a^c$ alarıq.

Loqarifmik tənliklər müəyyən üsullarla sadə loqarifmik tənliyə gətirilib həll edilir.

1) Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə sadə loqarifmik tənliyə gətirilən tənliklər

Nümunə. $\log_3 x = 2 - \log_3 2$ — *verilən tənlik*

$\log_3 x + \log_3 2 = 2$ — *hər iki tərəfə $\log_3 2$ əlavə edilir*

$\log_3 (2x) = 2$ — *loqarifmin xassəsinə görə*

$2x = 3^2$ — *ekvivalent eksponensial yazılış*

$x = 4{,}5$ — *tənliyin həlli*

2) Yeni dəyişən daxiletməklə həll olunan tənliklər

Nümunə. $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$ — *verilən tənlik*

$\log_5 x = a$ — *əvəzləmə edilir*

$a^2 - a - 2 = 0$ — *kvadrat tənliyə gətirilir*

$(a - 2)(a + 1) = 0$ — *kvadrat tənliyin həlli*

$a = 2 \qquad a = -1$ — *əvəzləmə nəzərə alınır*

$a = 2$	$a = -1$
$\log_5 x = 2$	$\log_5 x = -1$
$x = 5^2$	$x = 5^{-1}$
$x = 25$	$x = \frac{1}{5}$

3) Eyni əsasa gətirməklə həll olunan tənliklər

Nümunə. $\log_4 x + \log_2 x = 6$ — *verilən tənlik*

$\log_{2^2} x + \log_2 x = 6$ — *loqarifmlər eyni əsasa gətirilir*

$\frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 6$

$\frac{3}{2}\log_2 x = 6$ — *oxşar hədlərin islahı*

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4$ — *eksponensial yazılış*

$x = 16$ — *tənliyin həlli*

Loqarifmik tənliklər

Loqarifmin xassələrinin tətbiqi ilə həll olunan daha bir misala baxaq.

Nümunə. $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$ *verilən tənlik*

$\lg(x+4)\cdot(2x+3)=\lg(1-2x)$ *loqarifmin xassəsi*

$(x+4)\cdot(2x+3)=(1-2x)$ *cəbri tənliyə gətirilir*

$x_1=-1;\ x_2=-5{,}5$

Yoxlama.

Loqarifmaltı ifadələrdə müsbətlik şərti ödənməlidir, yəni

$x+4>0,\qquad 2x+3>0,\qquad 1-2x>0$ olmalıdır.

$-5{,}5$ qiyməti bu şərtləri ödəmədiyi üçün kənar kökdür. -1 isə bu şərtləri ödəyir, deməli, tənliyin köküdür.

Cavab: -1

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tənlikləri həll edin.

a) $\log_2 2^3+\log_2 2^2=\log_2 x$ b) $\log_2 16+\log_2 2=\log_2 x$

c) $\log_3 x-\log_3 9=\log_3 3$ d) $\log_5 x+\log_5 x=\log_5 625$

e) $\log_x 64-\log_x 16=\log_4 16$ f) $\log_2 8+\log_3 9=\log_x 32$

2. Tənlikləri həll edin.

a) $\log_2(3-x)=3$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-1$ c) $\log_{\sqrt{3}}(2x-5)=2$

d) $\log_2(x^2+4x+3)=3$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1)=-2$

f) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5x-3)=2$ g) $\log_4(\log_3(\log_2(x-1)))=0$

h) $\log_3(1+\log_3(2^x-7))=1$ i) $\log_7(4x-6)=\log_7(2x-4)$

j) $\ln(x^2-2x-4)=\ln 11$ k) $\log_2(2x^2-2)=\log_2(5x-4)$

3. Loqarifmin xassələrini tətbiq etməklə həll edin.

a) $\log_3 x+\log_3(x-2)=\log_3 8$ b) $\log_6(2x^2-7x+6)-\log_6(x-2)=\log_6 x$

4. Yeni dəyişən daxil etməklə tənlikləri həll edin.

a) $\log_3^2 x=4+3\log_3 x$ b) $\log_5^2 x-\log_5 x=2$ c) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x)=3$

5. Hər iki tərəfi eyni əsasdan loqarifmləməklə tənlikləri həll edin.

a) $x^{\log_2 x-2}=8$ b) $x^{\log_5 x}=125x^2$ c) $x^{\lg x}=100x$

6. Tənlikləri qrafik üsulla həll edin.

a) $\log_3(x+2)=2-x$ b) $\log_{\frac{1}{2}}x=x-3$

7. Tənlikləri həll edin.

a) $\log_2 x + \log_2 3 = 1$
b) $\log_3 x - \log_3 2 = 2$
c) $\log_3 x + \log_3 2 = 2$
d) $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$
e) $\log_6 x + \log_6(x-1) = 1$
f) $\log_4(x-2) - \log_4(x+1) = 1$
g) $\log_2 x = \log_x 16$
h) $\log_3 x - \log_x 9 = 1$
i) $\log_2 x + \log_x 8 = 4$

8. Tənlikləri həll edin.

1) $\log_5(x-18) - \log_5 x = \log_5 7$
2) $\log_2(x-6) + \log_2(x-8) = 3$
3) $\log_3(2x-1) = 2 - \log_3(x+1)$
4) $7^{2x} = 2^{x+3}$
5) $1{,}6^{x-4} = 5^{3x}$
6) $9^{2x-1} = 71^{x+2}$

9. a -nın hansı qiymətində $1 - \log_2 a + \log_2 5 = \log_2 (a+3)$ bərabərliyi doğrudur?

10. Əvvəlcə tənliyə daxil olan loqarifmik ifadənin dəyişənin hansı qiymətlərində mənalı olduğunu araşdırın, sonra tənliyi həll edin.

a) $\log_2 x^2 = 6$ b) $2\log_2 x = 6$

11. Tərkibində hidrogen ionlarının verilən konsentrasiyasına görə məhlulun pH-nı tapın.

$[H+] = 7{,}9\cdot 10^{-3}$ $[H+] = 8{,}1\cdot 10^{-5}$ $[H+] = 2{,}3\cdot 10^{-4}$

12. Verilən pH-a malik məhluldakı hidrogen ionlarının konsentrasiyasını tapın.

pH = 3,1 pH = 6,8 pH = 1,8

13. $\log_3 81 = x - y$ və $\log_2 32 = x + y$ olarsa, x və y-in qiymətlərini tapın.

14. **Fizika.** Altimetr adlı cihaz atmosfer təzyiqini ölçməklə dəniz səviyyəsindən olan yüksəkliyi müəyyən etməyə imkan verir. Yüksəklik (metrlə) və havanın təzyiqi (paskalla) arasındakı əlaqə $h = -8005\ln\frac{P}{101300}$ kimidir. Dəniz səviyyəsindən 3500 m yüksəklikdə havanın təzyiqi neçə paskaldır?

15. **Zəlzələ.** Zəlzələnin amplitudu $A = A_0 \times 10^M$ düsturu ilə hesablanır. A_0 mümkün ən zəif zəlzələnin amplitudu, M isə zəlzələnin Rixter şkalası ilə gücüdür. 5,3 bal gücündə baş verən zəlzələnin amplitudu onun ardından baş verən zəlzələdən (ardıcıl təkandan) 125 dəfə çox idi. Ardıcıl təkanın gücünü müəyyən edin.

16. **Kimya.** Sirkə turşusunun pH-ı 2,9-dur. Qarışqa turşusunda isə hidrogen ionlarının konsentrasiyası sirkə turşusundan 1,8 dəfə çoxdur. Qarışqa turşusundakı hidrogen ionlarının konsentrasiyasını tapın.

17. **Maliyyə.** 1₼ pul 6% artımla banka qoyularsa, t ildən sonra bankdakı pulun məbləğini $S = 1{,}06^t$ düsturu ilə hesablamaq olar. Bu düsturdakı t dəyişənini S dəyişəni ilə ifadə edin. İllik 6% artım ilə banka qoyulmuş 1000₼ pul neçə ildən sonra 1500₼ olar?

Karbon-14 izotopunun radioaktiv parçalanmasından istifadə edərək alimlər müxtəlif bitki, heyvan qalıqlarının yaşını müəyyən edirlər. Yer planetində daha çox rast gəlinən Karbon-12 izotopu radioaktiv deyil və parçalanmır. Lakin Karbon 14 izotopu radioaktivdir və parçalanır. Karbon-14 izotopu atmosferə düşən günəş şüaları ilə yaranır, fotosintez vasitəsilə bitkilərə daxil olur. Karbon-14 maddəsi bitkilərlə birlikdə onlarla qidalanan heyvanların orqanizminə daxil olur və s. Bitki və heyvanlarda karbon-14-ün miqdarı karbon atomunun 10^{-10} faizi qədərdir. Heyvan və ya bitki öldüyü zaman yeni karbon-14 izotopunu alma imkanları da yox olur. Bədənindəki isə parçalanmağa başlayır. Bu izotopun yarımparçalanma müddəti təxminən 5730 ildir. Bitki və ya heyvan qalığındakı karbon-14-ün miqdarının karbon atomuna nəzərən neçə faiz təşkil etdiyini hesablamaqla onların ölüm tarixini müəyyən etmək mümkün olur.

18. $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ **düsturuna görə məsələləri həll edin. (burada m_0 maddənin ilkin kütləsini, T yarımparçalanma müddətini, t zamanı göstərir)**

a) Fil sümüyü qalıqlarında karbon-14-ün 36%-i yox olmuşdur. Bu fil neçə il əvvəl yaşamışdır?

b) Radioaktiv maddənin yarımparçalanma müddəti 3 ildir. Bu maddənin ilkin kütləsi 67 q olarsa, neçə ildən sonra bu maddədən 7 q qalar?

c) Müəyyən miqdar uran maddəsinin üçdə iki hissəsinin parçalanma müddəti 0,26 milyard ildir. Uran elementinin yarımparçalanma müddətini tapın.

19. Banka qoyulmuş 2000 manat pul 8% mürəkkəb faiz artımı ilə neçə ilə 10000 manat olar?

20. Şəhərdəki əhalinin hər il 3% azaldığı müşahidə edilir. t ildən sonra bu şəhərdəki əhalinin sayı $N = N_0 \cdot 0{,}97^t$ düsturu ilə hesablanır. Burada N_0 əhalinin mövcud sayıdır. t kəmiyyətini N ilə ifadə edin.

21. Bir ölkədə əhalinin sayı 1990-cı ildən 2000-ci ilə qədər 151 milyondan 173 milyona çatmışdır.
a) Əhalinin sayının $N = N_0 \cdot (1+r)^t$ qanunu ilə dəyişdiyini bilərək, illik artım faizini müəyyən edin.
b) Əhalinin say artımı bu sürətlə davam edərsə, neçə ildən sonra bu ölkədə əhali 220 milyon olacaq?

22. Sərinləşdirici kola tipli içkinin pH-ı 2,6 , südün pH-ı isə 6,6-dır. Kolanın tərkibində hidrogen ionlarının konsentrasiyası süddən neçə dəfə çoxdur?

Üstlü bərabərsizliklər

Üstlü bərabərsizliklərin həlli adətən $a^x > a^b$ və ya $a^x < a^b$ bərabərsizliklərinin həllinə gətirilir. Burada $a > 0$, $a \neq 1$.
Bu bərabərsizliklərin həlli isə $y = a^x$ üstlü funksiyasının artan və ya azalan olması xassəsinin köməyilə həll edilir:
$a > 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə,
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə eynigüclüdür.
$0 < a < 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə,
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə eynigüclüdür.

Nümunə.
$2^{x+1} > 8$ *verilən bərabərsizlik*
$2^{x+1} > 2^3$ *qüvvətin xassəsi*
$x + 1 > 3$ *eynigüclü bərabərsizlik*
$x > 2$ *bərabərsizliyin həlli*

Nümunə.
$0{,}2^{x-1} > 0{,}04$ *verilən bərabərsizlik*
$0{,}2^{x-1} > 0{,}2^2$ *qüvvətin xassəsi*
$x - 1 < 2$ *eynigüclü bərabərsizlik*
$x < 3$ *bərabərsizliyin həlli*

$c = a^{\log_a c}$ eyniliyinə görə $a^x > c$ (və ya $a^x < c$) bərabərsizliyi
$a^x > a^{\log_a c}$ (və ya $a^x < a^{\log_a c}$) bərabərsizliyinin həllinə gətirilir

Üstlü bərabərsizlikləri müəyyən üsullarla sadə üstlü bərabərsizliyə gətirib həll edirlər.

1) Qüvvətin xassələrinin tətbiqi

Nümunə. a) $8 \cdot 4^{x-1} > 2^x$
$2^3 \cdot (2^2)^{x-1} > 2^x$
$2^{2x+1} > 2^x$
$2x + 1 > x$
$x > -1$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 30$ *verilən bərabərsizlik*
$3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} < 30$ *qüvvətin xassəsi*
$3^x(3 + \frac{1}{3}) < 30$ *qruplaşdırma*
$3^x < 30 \cdot \frac{3}{10}$ *sadələşdirmə*
$3^x < 9$
$3^x < 3^2$
$x < 2$

Qüvvət üstləri eyni olduqda qüvvətlərdən birinə bölmək əlverişli olur.

Nümunə. $2^x > 3^{2x}$ *verilən bərabərsizlik*
$2^x > 9^x \quad : 2^x$ *hər iki tərəfi 2^x-ə bölək*
$1 > (\frac{9}{2})^x$
$(\frac{9}{2})^x < (\frac{9}{2})^0$ *$a^0 = 1$ olduğuna görə*
$x < 0$

2) Yeni dəyişən daxiletmə

Nümunə. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 < 0$ *verilən bərabərsizlik*
$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \qquad 2^x = a$ *əvəzləmə*
$a^2 - 6a + 8 < 0$ *kvadrat bərabərsizlik*
$(a - 2)(a - 4) < 0$
$2 < a < 4$ *əvəzləmə nəzərə alınır*
$2 < 2^x < 2^2 \qquad 1 < x < 2$

Üstlü bərabərsizliklər

Öyrənmə tapşırıqları

1. Üstlü bərabərsizlikləri həll edin.

a) $3^x \geq \frac{1}{9}$ b) $0{,}2^x \leq \frac{1}{25}$ c) $1{,}5^x \leq 2{,}25$ d) $0{,}3^x \leq 0{,}09$

e) $2^x > 1$ f) $3^x < 1$ g) $4^{-x} < -1$ h) $5^x > -5$

i) $0{,}4^{x+1} > 0{,}16$ j) $3^{2-x} < 27$ k) $3^{x^2} < 9^8$ l) $4^{0{,}5x^2-3} > 8$

m) $4^x > 2^{x^2}$ n) $9^x < 36^x$ o) $5^x > 2^{3x}$ p) $2^{|x-1|} < 8$

2. Qüvvətin xassələrini tətbiq edərək bərabərsizlikləri həll edin.

a) $3^{x+3} < 27$ b) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} < 448$ c) $4^x + 4^{x-1} < 20$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$ e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \leq 26$

3. Yeni dəyişən daxil etməklə bərabərsizlikləri həll edin.

a) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$ b) $4^x + 2^x > 20$ c) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

d) $3^{x-1} + 3^{2-x} < 4$ e) $5^x + 5^{1-x} > 6$

4. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $y = \sqrt{7\frac{1}{9} - \left(\frac{3}{8}\right)^{2x}}$ b) $y = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} - \left(\frac{9}{25}\right)^x}$

5. Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $x^2 \cdot 3^x - 3^{2+x} < 0$ b) $x^2 \cdot 3^x + 9 > x^2 + 9 \cdot 3^x$

c) $0{,}4^{\frac{x^2-4}{x+1}} \leq 1$ d) $2{,}6^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} > 1$

6. Üstlü bərabərsizlikləri həll edin.

$625 \geq 5^{a+8}$

$10^{5b+2} > 1000$

$\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

$\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \leq 81^{d+4}$

$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

$\left(\frac{1}{36}\right)^{v+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4v}$

7. Əsas loqarifmik eyniliyin köməyi ilə bərabərsizlikləri həll edin.

1) $8^x > 21$ 2) $6^y < 39$ 3) $e^x < 8{,}1254$ 4) $e^x > 0{,}3151$

5) $10^x > 0{,}0138$ 6) $10^y < 16{,}8125$ 7) $e^{0{,}01x} > 15$ 8) $e^{0{,}03y} \leq 4$

8. Üstlü bərabərsizlikləri həll edin.

1) $2^{x^2-3x-6} - 16 \geq 0$ 2) $\frac{e^x}{e^x - 4} \leq 3$ 3) $xe^{2x} < 4x$

Loqarifmik bərabərsizliklər

Praktik məşğələ. 1) Rəngli xanalara uyğun müqayisə işarəsini yazın.

a) $\log_2 3 \,\square\, \log_2 7$ b) $\log_{0,5} 5 \,\square\, \log_{0,5} 7$

2) Rəngli xanalara elə ədədlər yazın ki, bərabərsizlik doğru olsun.

a) $\log_2 \square < \log_2 5$ c) $\log_{0,5} \square < \log_{0,5} 4$

b) $\log_2 \square > \log_2 5$ d) $\log_{0,5} \square > \log_{0,5} 4$

3) $\log_2 x \le \log_2 5$ bərabərsizliyini x-in 5-dən böyük hər hansı qiyməti ödəyirmi? x-in bu bərabərsizliyi ödəyən qiymətləri haqqında fikir yürüdün.

4) x-in $\log_{0,5} x \le \log_{0,5} 4$ bərabərsizliyini ödəyən qiymətləri haqqında müzakirələr aparın.

Loqarifmik bərabərsizliklər

Loqarifmik bərabərsizliklər dəyişənin mümkün qiymətləri, loqarifmik funksiyanın artan (və ya azalan) olması xassəsi nəzərə alınmaqla həll edilir.

Nümunə. $\log_2(x+1) > \log_2 7$
Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x + 1 > 0$, $\log_2 x$ funksiyası artan olduğundan $x + 1 > 7$ olmalıdır. Deməli, $x + 1 > 0$ və $x + 1 > 7$ bərabərsizliyini ödəyən x-ləri tapmalıyıq.
Buradan $x > 6$. Cavab: $(6; +\infty)$

Nümunə. $\log_{0,2}(x-1) > \log_{0,2} 3$
Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x - 1 > 0$, $\log_{0,2} x$ funksiyası azalan olduğundan $x - 1 < 3$ olmalıdır. Deməli, $0 < x - 1 < 3$ ikiqat bərabərsizliyini həll etməliyik.
Buradan $1 < x < 4$. Cavab: $(1; 4)$

$a > 1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	*eynigüclü bərabərsizlik*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$

$0 < a < 1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	*eynigüclü bərabərsizlik*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$

Nümunə. $\log_5(3x-4) < \log_5(2x-2)$
bərabəsizliyi $0 < 3x - 4 < 2x - 2$ ikiqat bərabərsiliyi ilə

və ya $\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 3x - 4 < 2x - 2 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

Buradan $x > \frac{4}{3}$ və $x < 2$ alınır. Bərabərsizliyin həllər çoxluğu: $\frac{4}{3} < x < 2$

Loqarifmik bərabərsizliklər

Nümunə. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$ bərabərsizliyini həll edək.
Loqarifmaltı ifadənin müsbətlik şərtinə görə $x > 0$ olmalıdır.
$\log_2 x = t$ əvəz etsək, $t^2 - t - 2 < 0$ bərabərsizliyini alarıq.
Bu bərabərsizliyin həlli $-1 < t < 2$ olduğundan əvəzləməyə görə $-1 < \log_2 x < 2$ alınır. Buradan $\frac{1}{2} < x < 4$. Cavab: $(\frac{1}{2}; 4)$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Loqarifmik bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\log_2(x+1) < \log_2 3$ b) $\log_3(x-1) > \log_3 5$ c) $\log_{0,1}(x-2) > \log_{0,1} 4$
d) $\log_4(x-3) > 2$ e) $\log_5(3x-1) < 2$ f) $\log_{0,2}(5-2x) > -1$
g) $\log_7(2x-1) > \log_7(x+2)$ h) $\log_5(3x-4) \le \log_5(x+2)$
i) $\log_{0,5}(4x-11) < \log_{0,5}(x-11)$ j) $\log_{0,2}(2x-8) > \log_{0,2}(x-1)$

2. Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\log_5(x-9) > 3$ 2) $\log_7(4x-3) > 0$ 3) $\log_7(2x-1) < 2$
4) $\log_2(x+20) \ge 5$ 5) $\log_4(x+\frac{1}{2}) \ge -1$ 6) $\lg(5x+150) \le 1$
7) $\log_7(2x-5) \ge 2$ 8) $\log_8(x+5) \le 1$ 9) $\log_2(x-\frac{2}{3}) \le -2$

3. Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\log_5(3-2x) \ge \log_5(4x+1)$
2) $\log_{0,3}(10x+3) < \log_{0,3}(7x-21)$
3) $\lg x + \lg(x+1) > \lg 2x$
4) $\lg x + \lg(2-x) < 1$
5) $\lg x - \lg(2-x) > 0$
6) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 0$
7) $\lg(x^2-x+8) \le 1$
8) $\log_3(x^2-2x) < 1$
9) $\log_2(x^2-x-6) + \log_{0,5}(x-3) < 2\log_2 3$
10) $\log_{\sqrt{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 64$
11) $\log_2(x^2-3x-10) - \log_2(x+2) \le 2$
12) $|3 - \log_2 x| < 2$

4. İctimai təşkilatın üzvlərinin hər il 7% azaldığı müşahidə edilir. N mövcud üzvlərin sayı olarsa, t ildən sonra birliyin üzvlərinin sayını $P = N(1-0,07)^t$ düsturu ilə hesablamaq olar. Əgər 2010-cu ildə bu birliyin 5000 nəfər üzvü var idisə, neçə ildən sonra onların sayı 2500 nəfərdən az olar?

5. Tapılan qalıqda karbon-14 –ün t ildən sonra qalan miqdarını (qramla) $C = 20\,e^{-0,0001216t}$ düsturu ilə hesablamaq olar.
a) Qalıqdakı karbon-14 –ün ilkin miqdarını tapın.
b) 10 000 ildən sonra qalıq karbon-14 –ün miqdarı neçə qram olacaq?
c) Təxminən neçə ildən sonra bu obyektdəki karbon-14 –ün miqdarı 10 qramdan az olacaq?

6. Loqarifmik tənlikləri və bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\log_2 (3x + 2) = \log_2 (12x + 3)$
b) $\log_6 (7x + 1) = \log_6 (4x - 4)$
c) $\log_3 3x = \log_3 (2x + 2)$
d) $\log_5 (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$
e) $\log_4 (9x + 1) > \log_4 (18x - 1)$
f) $\log_3 (3x - 5) \ge \log_3 (x + 7)$
g) $\log_5 (2x + 1) < \log_5 (3x - 2)$
h) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$

7. Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\log_\pi(x) + \log_\pi(x + 1) < \log_\pi 2$
b) $\log_{0,6}(4 - x) \ge \log_{0,6}2 - \log_{0,6}(x - 1)$
c) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6$
d) $\log^2_{0,1} x + 3 \log_{0,1} x < 4$
e) $\lg^2 x + 2 \lg x > 3$
f) $\log^2_{0,1} x - 1 \ge 0$
g) $\log_3(\log_{0,5}(2x - 1)) > 0$
h) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}}(x - 9)) > -1$
i) $|1 - 2 \log_3 x| < 3$
j) $|1 - \log_3 x^2| < 3$

8. İllik 8% mürəkkəb faiz artımı ilə bank hesabındakı 1000 manat pul neçə ildən sonra ən azı 1500 manat olar? (Hesabdakı pul $S = S_0e^{rt}$ qanunu ilə dəyişir.)

Həlli: Hesabdakı pul Ən azı 1500₼

S $\ge$ 1500

$1000e^{0,08t} \ge 1500$ *verilənlərə görə*

$e^{0,08t} \ge 1,5$ *bərabərsizliyin hər iki tərəfi 1000-ə bölünür*

$\ln e^{0,08t} \ge \ln 1,5$ *bərabərsizliyin hər iki tərəfi loqarifmlənir*

$0,08t \ge \ln 1,5$ *loqarifmin xassəsi*

$t \ge \dfrac{\ln 1,5}{0,08}$ *bərabərsizliyin hər iki tərəfi 0,08-ə bölünür*

$t \ge \dfrac{0,4054}{0,08}$ $t \ge 5,068$ $t \ge 5,1$ *hesablamalar*

Cavab: təxminən 5,1 ildən sonra hesabdakı pul 1500 manatdan çox olacaq.

9. Əhalinin sayının zamandan asılı dəyişməsini $P = P_0e^{kt}$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada P_0 mövcud əhalinin sayını, k artım sürətini, t illərin sayını, P isə t ildəki əhalinin sayını göstərir. 2000-ci ildə A şəhərindəki 8,5 min nəfər əhali sayı artaraq 2010-cu ildə 9,4 min nəfər oldu.
a) Əhalinin artım sürətini (k əmsalını) tapın.
b) Bu şəhərdə neçənci ildə əhalinin sayı 10 min nəfər olacaq?
c) Əgər 2000-ci ildə B şəhərindəki əhalinin (minlərlə) sayını $y = 9,5e^{0,00278t}$ düsturu ilə modelləşdirmək mümkündürsə, neçə ildən sonra A şəhərindəki əhalinin sayı B şəhərindəkindən çox olacaq?

10. Yer kürəsinin əhalisinin sayı 1980-ci ildə təxminən 4,8 milyard, 1994-cü ildə isə 5,5 milyard olmuşdur. Bu artımla neçənci ilə qədər Yer kürəsindəki əhalinin sayı 6 milyarddan çox olmayıb?

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Verilən düsturlara görə n-i tapın.

a) $M = 3e^{-2n} + 5$ b) $a^{2n} = b^2$ c) $y = ae^{4n}$

2. Mehman dayı satdığı evin 90 000 manat pulunu bir illiyinə bankda saxlamağı düşünür. Bank iki depozit növü təklif edir: bunlardan biri illik 9 % mürəkkəb faiz artımı ilə yarımillik hesablamalarla, digəri isə gündəlik hesablamalarla. Bu iki təklif arasında gəlirdə fərq olacaqmı?

3. Təsəvvür edin ki , siz 500 milliqram aspirin qəbul etmisiniz. Aspirinin t saatdan sonra qandakı miqdarını $y = 500\,(0{,}8)^t$ kimi modelləşdirmək olar. Neçə saatdan sonra qanda 50 milliqramdan az aspirin qalmış olacaq?

4. Hidrogen ionunun konsentrasiyasına görə pH-ı müəyyən edin.

a) limon suyu: $[H+] = 7{,}9 \times 10^{-3}$ mol/l b) ammoniak: $[H+] = 10^{-11}$ mol/l

c) sirkə: $[H+] = 6{,}5 \times 10^{-3}$ mol/l d) portağal suyu: $[H+] = 3{,}2 \times 10^{-4}$ mol/l

5. Tənlik və bərabərsizlikləri həll edin.

1) $6^x \geq 42$ 2) $5^x = 52$ 3) $8^{2a} < 124$ 4) $4^{3p} = 10$

5) $20^{x^2} = 70$ 6) $2^{x^2-3} = 15$ 7) $8^{2n} > 52^{4n+3}$ 8) $2^{2x+3} = 3^{3x}$

9) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+1}) = 2$ 10) $(x-2)\cdot\log_5(x+1) = 0$ 11) $(x^2-4)\cdot\log_3 x = 0$

12) $\log_x 3 > 0$ 13) $\log_{\sqrt{2}}(2x-4) < 4$ 14) $(x+1)\cdot\log_2(x+1) > 0$

6. Cəmil hazırladığı təqdimatda şəhərdəki əhalinin 11450 nəfərdən 95600 nəfərə çatdığı və artım sürətinin 4,32% olduğu haqqında cədvəl çəkmişdir. Lakin bu artımın neçə ildə baş verdiyini qeyd etməyi unutmuşdur. İllərin sayını siz tapın.

7. Sadələşdirin.

a) $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ b) $\log_3 \dfrac{x^3}{27}$ c) $5 \ln x + \ln y + \dfrac{1}{3}\ln z$

8. $\log_b x = 0{,}2$ olarsa, $\log_b x\sqrt[3]{x}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

9. $y = \log_2 8x^3$ funksiyasının qrafikini $y = \log_2 x$ funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə almaq olar?

10. $\log_t M = 1{,}28$ və $\log_t N^2 = 1{,}74$ olduğunu bilərək hesablayın.

a) $\log_t N$ b) $\log_t (MN)$ c) $\log_t \dfrac{N^2}{\sqrt{M}}$

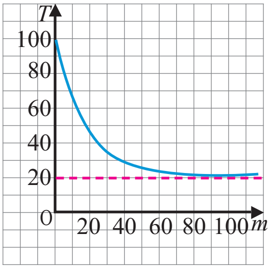
11. Qrafiki (1;1) $(3;\frac{1}{9})$ nöqtələrindən keçən $y = ab^x$ eksponensial funksiyasının düsturunu yazın.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

12. **Sağlamlıq və fizika. Mütəxəssislər 85 db-dən yuxarı olan səslərdə qulaqlara xüsusi səsqoruyucu geyməyi məsləhət görürlər.**
a) Odundoğrayan aparatın səsinin şiddəti 80 db, səs gücləndiricininki (player) isə 110 db-dir. Səsgücləndiricinin səsinin intensivliyi odundoğrayanın səs intensivliyindən neçə dəfə çoxdur?
b) Pıçıtının intensivliyindən 100 000 dəfə güclü səs insan səhhəti üçün heç bir təhlükə yaratmır. Pıçıltının şiddəti 20 db olarsa, təhlükəsiz hesab edilən səsin şiddətini hesablayın.

13. Sosioloqlara görə, yeni xəbər adamlar arasında eksponensial sürətlə yayılır. $y = 2000\,(1 - e^{-0,03t})$ funksiyası yeni ticarət mərkəzinin açıldığı xəbərinin t saatda 2000 nəfər arasında yayılmasını ifadə edir.
a) Yeni ticarət mərkəzinin açılışını 24 saat sonra neçə nəfər biləcək?
b) Bu funksiyanın qrafikini qrafkalkuyatorla qurun və neçə saatdan sonra bu adamların 90%-nin bu xəbəri eşitdiyini təxmin edin.

14. Bir fincan su 100°C-yə qədər qızdırılmış və otaq temperaturunda 20°C-yə qədər soyumuşdur. Suyun temperaturu hər dəqiqədən bir ölçülmüş və koordinat müstəvisi üzərində temperaturun zamandan asılılığını göstərən nöqtələr qeyd edilmişdir. Bu nöqtələr birləşdirilmiş və şəkildəki qrafik alınmışdır. Məlum olmuşdur ki, suyun temperaturu hər 5 dəqiqədə 25% olmaqla eksponensial qaydada azalır. Suyun temperaturunun zamandan asılı dəyişməsini ifadə edən funksiyanın düsturunu $f(x) = a \cdot b^{x-h} + k$ şəklində yazmaq olar. Qrafikə görə a, b, h, k dəyişənlərinə uyğun ədədi məlumatları tapın və funksiyanın düsturunu yazın.



15. Seymur 15000 manata yeni avtomobil aldı. Avtomobilin qiyməti hər il 15% aşağı düşür. Neçə ildən sonra Seymur avtomobili 3000 manatdan ucuz olacaq?

16. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadələri sadələşdirin və qiymətini tapın.

a) $9\log_9 3 - \log_9 75 + 2\log_9 5$ b) $\log_2 98 - 2\log_2 7 - 2$

c) $2\log_3 6 - 3\log_3 2 + \log_3 18$ d) $\frac{1}{2}\log_2 36 + \log_2 12 - 2\log_2 3$

17. $y = \lg x^2$ və $y = 2\lg x$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu funksiyaların fərqli və oxşar cəhətlərini yazın. $\lg x^2 = 2\lg x$ bərabərliyi dəyişənin hansı qiymətlərində doğrudur?

10 Kompleks ədədlər

Kompleks ədədlər
Kompleks ədədlər üzərində əməllər
Kompleks ədədin həndəsi təsviri
Kompleks ədədin modulu və arqumenti
Kompleks ədədin triqonometrik şəkli
Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər
Kompleks ədədin n-ci dərəcədən kökləri

Bu maraqlıdır!

Fransız alimi Abraham DeMovire (Muavr) (1667-1754) ehtimal nəzəriyyəsinə aid işləri və Muavr düsturu ilə tanınır. Onun "The Doctrine of Chances: A method of calculating the probabilities of events in play". (Şanslar doktrinası: oyunda hadisələri hesablama metodu) əsəri böyük rezonansa səbəb olmuş, dəfələrlə nəşr edilmişdir.

Kompleks ədədlərin yaranma xronikası

Təxmini tarix	Şəxs	Hadisə
50	Heron, İsgəndəriyyə	Mənfi ədədin kvadrat kökü haqqında ilk məlumata rast gəlinir
850	Mahavira, Hindistan	Mənfi ədədin kvadrat kökü yoxdur, çünki kvadrat mənfi ola bilməz
1545	Kardano, Italiya	Mənfi ədədin kvadrat kökü kub tənliklərin köklərinə daxildir
1637	Dekart, Franca	Həqiqi və xəyali hissələri ayırır
1748	Eyler, İsveçrə	$\sqrt{-1}$ ədədini i ilə ifadə edir
1832	Qauss, Almaniya	Kompleks ədəd anlayışını istifadə edir

Kompleks ədədlər

Araşdırma

1) Nümunələr göstərməklə aşağıdakı təkliflərin doğruluğunu araşdırın. Təklif yanlışdırsa, elə dəyişin ki, doğru təklif alınsın.

a) a və b natural ədədlər olduqda, $x + a = b$ tənliyinin kökü natural ədəddir.

b) a və b tam ədədlər olduqda, $ax = b$ tənliyinin kökü tam ədəddir.

c) a mənfi olmayan rasional ədəddirsə, $x^2 = a$ tənliyinin kökü rasional ədəddir.

d) a mənfi olmayan həqiqi ədəddirsə, $x^2 = a$ tənliyinin kökü həqiqi ədəddir.

2) Kvadratı –1-ə bərabər olan həqiqi ədəd varmı?

3) a) $a < 0$ olduqda, $x^2 = a$ tənliyinin həqiqi kökü varmı?

b) Həqiqi ədədləri müəyyən çoxluğa qədər genişləndirməklə bu məsələni həll etmək mümkündürmü?

4) Həqiqi ədədlər çoxluğu ilə ədəd oxunun nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Bəs koordinat müstəvisinin nöqtələrinə hansı ədədlər qarşı qoyula bilər?

Həqiqi ədədlər çoxluğunda $x^2 = -1$ tənliyinin həlli yoxdur. Deməli, həqiqi ədədlər çoxluğunu elə genişləndirməliyik ki, yeni çoxluqda bu tənliyin kökü olsun. Bu məqsədlə yeni i ədədi daxil edilərək, qəbul olunmuşdur ki, o, $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin köküdür, yəni $i^2 + 1 = 0$. Buradan isə $i^2 = -1$. Belə qəbuletmədən sonra $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökləri $x_{1,2} = \pm i$ olacaqdır. i ədədi xəyali vahid adlanır.

Həqiqi ədədlər çoxluğunu elə genişləndirək ki, bütün həqiqi ədədlər və i ədədi bu çoxluğa daxil olsun, həm də bu çoxluqda toplama, vurma əməllərinin xassələri saxlanılsın. a və b istənilən həqiqi ədədlər olduqda yeni çoxluğa bi "hasilini" və $a + bi$ "cəmini" daxil edərək, $a + bi$ ifadəsinə şərti olaraq kompleks ədəd deyək. $a + bi$ şəklində ifadəyə kompleks ədəd deyilir. Burada a və b həqiqi ədədlərdir, i isə xəyali vahiddir.

Kompleks ədədləri z, w, ω və s. kimi işarə edəcəyik. Məsələn, $z = a + bi$.

$a + bi$ yazılışına kompleks ədədin cəbri şəkli deyilir. $z = a + bi$ kompleks ədədində a-ya z-in həqiqi hissəsi, b-yə isə xəyali hissəsi deyilir və belə yazılır: $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{İm} z$. $a = 0$ olduqda bi şəklində ədədlər alınır. Belə ədədlərə sırf xəyali ədədlər deyilir. $a = 0$, $b = 0$ olduqda kompleks ədəd sıfra bərabər hesab olunur və tərsinə $a + bi = 0$ olarsa, $a = 0$ və $b = 0$ olur.

Nəticə: $a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədləri üçün

$a + bi = c + di$ bərabərliyi yalnız və yalnız $a = c$, $b = d$ olduqda doğrudur.

Nümunə. $x + 3i = 5 + (x + y)i$ bərabərliyindən x və y-i tapın.

Həlli: Həqiqi və xəyali hissələrin bərabərliyindən alırıq:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 3 = x + y \end{cases}, \text{ yəni } x = 5,\ y = -2.$$

$a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin cəmi $(a + c) + (b + d)i$ kompleks ədədinə deyilir, yəni $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Kompleks ədədlər üzərində əməllər

$a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin hasili $ac - bd + (ad + bc)i$ kompleks ədədinə deyilir, yəni

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Deməli, iki kompleks ədədi vurmaq üçün onları ikihədlilərin vurulması kimi vurub, $i^2 = -1$ olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

Nümunə. $(3 + 2i)\cdot(2 - i) = 3\cdot2 - 3i + 4i - 2i^2 = 6 + i - 2\cdot(-1) = 8 + i$

Xüsusi halda xəyali vahidin qüvvətlərinə baxaq:

$i^3 = i^2\cdot i = -i$ $\quad$ $i^4 = i^2\cdot i^2 = 1$ $\quad$ $i^5 = i^4\cdot i = i$

$i^6 = i^4\cdot i^2 = -1$ $\quad$ $i^7 = i^4\cdot i^3 = -i$ $\quad$ $i^8 = i^4\cdot i^4 = 1$

Göründüyü kimi, i-nin natural qüvvətləri yalnız i, -1, $-i$ və 1 ola bilir və bunlar hər dörd addımdan bir təkrarlanır, yəni $i^{4m+k} = (i^4)^m\cdot i^k = i^k$ bərabərliyi doğrudur.

Nümunə. Hesablayın: a) i^{58} $\quad$ b) i^{63}

Həlli: a) $i^{58} = i^{4\cdot14+2} = i^2 = -1$ $\quad$ b) $i^{63} = i^{4\cdot15+3} = i^3 = -i$

$a - bi$ ədədinə $a + bi$ ədədinin qoşması deyilir və $\overline{z} = a - bi$ kimi işarə edilir. Aydındır ki, $a - bi$ ədədi $a + bi$ ədədinin qoşmasıdırsa, $a + bi$ ədədi də $a - bi$ ədədinin qoşmasıdır. Ona görə də $z = a + bi$ və $\overline{z} = a - bi$ ədədlərinə qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlər deyilir. Qarşılıqlı qoşma ədədlərin həqiqi hissələri bərabərdir, xəyali hissələri isə əksdir.

Qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlərin hasili həqiqi ədəddir:

$$\overline{z}\cdot z = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Xüsusi halda həqiqi ədədin qoşması özünə, xəyali ədədin qoşması isə onun (-1) ilə hasilinə bərabərdir.

Hər bir $z = a + bi$ kompleks ədədinin əksi olan $-z$ kompleks ədədi var və $-z = -a - bi$. Hər bir sıfırdan fərqli $z = a + bi$ kompleks ədədinin tərsi var.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \underbrace{\frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)}}_{\substack{\text{surət və məxrəci} \\ (a - bi)\text{-yə vurulur}}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i$$

Kompleks ədədlərin çıxılması və bölünməsi aşağıdakı bərabərliklərlə təyin ounur:

$$z - w = z + (-w)$$

$$\frac{z}{w} = z\cdot\frac{1}{w} \quad (w \neq 0)$$

Kompleks ədədlərin nisbətini tapmaq üçün surət və məxrəci məxrəcin qoşmasına vurmaq əlverişlidir.

Nümunə. $z_1 = 3 + 2i$ və $z_2 = 2 - i$ ədədlərinin fərqini və nisbətini tapın.

Həlli: $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (2 - i) = 1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{2 - i} = \frac{(3 + 2i)\cdot(2 + i)}{(2 - i)\cdot(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{6 + 7i - 2}{5} = \frac{4 + 7i}{5} =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\,i = 0{,}8 + 1{,}4i$$

Kompleks ədədlər üzərində əməllər

Həqiqi ədədlər üzərində aparılan hesab əməllərinin əsas xassələri kompleks ədədlər üçün də doğrudur. Nəticə olaraq alırıq ki, istənilən cəbri eynilik kompleks ədədlər çoxluğunda da doğrudur. Məsələn, z və w kompleks ədədlər olduqda da

$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$

$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$ və s. eynilikləri doğrudur.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tapın.

a) i^{12} b) i^{15} c) i^{21} d) i^{82} e) i^{101}

2. Verilmiş ədədlərin cəmini, fərqini, hasilini və nisbətini tapın.

a) $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 1 + i$ b) $z_1 = 5 + 2i,\ z_2 = 3 + i$

3. x və y-in hansı həqiqi qiymətlərində bərabərlik doğrudur?

a) $(x + y) + 2i = 3 - (x - y)i$ b) $4 + xyi = x + y + 3i$

4. x və y-in hansı həqiqi qiymətlərində verilmiş ədədlər qarşılıqlı qoşma ədədlər olur?

a) $z_1 = 5 + xi,\ z_2 = y + 4i$ b) $z_1 = (x + y) + i,\ z_2 = 5 - (x - y)i$

5. Əməlləri yerinə yetirin.

a) $(3 + 4i) + (4 - 3i)$ b) $(5 + 4i) - (3 + 2i)$
c) $(2 + 3i)\cdot(3 + 2i)$ d) $(4 - i)\cdot(4 + i)$
e) $(i + 1)^2$ f) $(2 + i)^2$
g) $(1 + i)^2\cdot(3 - i)$ h) $(2 + i)^2\cdot(2 - i)^2$
i) $(i + 1)^8$ j) $(i^8 + i^5)\cdot(i + 1)$

6. Vuruqlara ayırın.

a) $m^2 + 4$ b) $y^2 + 9$ c) $4x^2 + 1$

Nümunə. a) $m^2 + 4 = m^2 - 4\cdot i^2 = m^2 - (2i)^2 = (m - 2i)\cdot(m + 2i)$

7. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{2 + i}{2 - i} + \dfrac{2 - i}{2 + i}$ b) $\dfrac{1 + i}{1 - i} - \dfrac{1 - i}{1 + i}$

8. Tənliyi həll edin.

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 + 3 = 0$ c) $x^2 + 16 = 0$

9. Verilmiş ədədin qoşmasını tapın.

a) $z = 3 + 4i$ b) $z = \dfrac{2}{1 - i}$ c) $z = (2 + i)^2$

Kompleks ədədin kvadrat kökləri

Kvadratı z-ə bərabər olan ədədə z kompleks ədədinin kvadrat kökü deyilir və $\sqrt{z}$ kimi işarə olunur.

Nümunə. $3 - 4i$ kompleks ədədinin kvadrat kökünü tapın.

Həlli: $\sqrt{3 - 4i} = x + yi$ olsun.

Bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək:

$$3 - 4i = (x + yi)^2$$

$$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Həqiqi və xəyali hissələrin bərabərliyindən alırıq:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Buradan $(2; -1)$ və $(-2; 1)$ həllərini alırıq. Deməli, $\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$

Qeyd: Həqiqi ədədlərdən fərqli olaraq, kompleks ədədin kvadrat kökü dedikdə işarəsi ilə fərqlənən hər iki qiyməti başa düşülür.

Kompleks ədədlər çoxluğunda $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ kvadrat tənliyinin kökləri həqiqi ədədlərdə olduğu kimi eyni düsturla hesablanır:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nümunə. $x^2 + 4x + 5 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$x_1 = -2 + i$ $\qquad$ $x_2 = -2 - i$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, Viyet düsturları qüvvəsində qalır və əmsalları həqiqi ədədlər olan kvadrat tənliyin kompleks kökləri qarşılıqlı qoşma ədədlər olur.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tapın.

a) $\sqrt{-25}$ $\qquad$ b) $\sqrt{3 + 4i}$ $\qquad$ c) $\sqrt{8 + 6i}$ $\qquad$ d) $\sqrt{4 - 3i}$

2. Tənlikləri həll edin.

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$ $\qquad$ b) $x^2 - 6x + 13 = 0$

c) $x^2 + 8x + 41 = 0$ $\qquad$ d) $x^2 - 2x + 3 = 0$

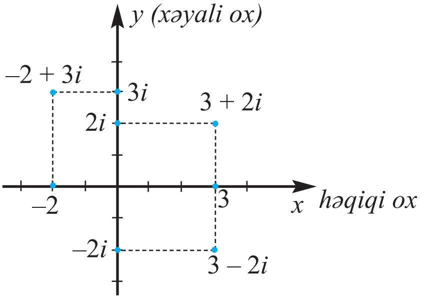
3. Qoşmasının kvadratına bərabər olan kompleks ədədi tapın ($z \notin R$).

4. Hansı ədədin kvadratı i-yə bərabərdir?

Kompleks ədədin həndəsi təsviri

$z = a + bi$ kompleks ədədi $(a;\ b)$ həqiqi ədədlər cütünün vasitəsilə verilir və bu ədədlər cütü koordinat müstəvisində müəyyən nöqtəyə uyğundur.
$z = a + bi$ ədədinə $A(a;\ b)$ nöqtəsini qarşı qoyaq və $A(z)$ kimi işarə edək. Koordinat müstəvisinin hər bir nöqtəsi bir kompleks ədədi təsvir edir və tərsinə, hər bir kompleks ədəd koordinat müstəvisində bir nöqtəyə uyğundur.
Həqiqi ədədlərə uyğun olan nöqtələr absis oxu üzərində, sırf xəyali ədədlərə uyğun nöqtələr ordinat oxu üzərində yerləşir. Ona görə absis oxuna həqiqi ox, ordinat oxuna xəyali ox, koordinat müstəvisinə kompleks müstəvi deyilir.

Nümunə.



Qoşma kompleks ədədlərə uyğun olan nöqtələr absis oxuna nəzərən simmetrik yerləşirlər.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Kompleks müstəvidə verilmiş ədədə uyğun nöqtəni qurun.
a) $3 + 2i$ b) $-2 + i$ c) $3i$ d) -3 e) $2 - i$

2. $z = a + bi$ kompleks ədədini həndəsi göstərən $M(a;\ b)$ nöqtəsinə başlanğıcı koordinat başlanğıcında yerləşən $\overrightarrow{OM} = \langle a;\ b \rangle$ vektorunun sonu kimi də baxmaq olar.

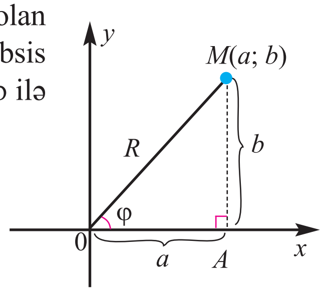
Kompleks müstəvidə $z_1 = 1 + 2i$ ədədinə uyğun A nöqtəsini və $z_2 = 3 + i$ ədədinə uyğun B nöqtəsini qeyd edin. $z_1 + z_2$ cəmini və $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektorunu tapın. Nəticələri müqayisə edin.

3. Kompleks müstəvidə verilən şərti ödəyən nöqtələr çoxluğunu təsvir edin.
a) $\text{İm}\, z = 2$ b) $\text{Re}\, z = 3$ c) $\text{İm}\, z \geq 0$

4. Kompleks müstəvidə $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_4 = 1 + 3i$ ədədlərinə uyğun A, B, D nöqtələrini qeyd edin. ABCD paraleloqramının C təpəsinə uyğun olan z_3 ədədini tapın.

Kompleks ədədin modulu və arqumenti. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli

Müstəvi üzərində $z = a + bi$ kompleks ədədinə uyğun olan nöqtə M(a; b) olsun. OM məsafəsini R, OM şüasının absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı φ ilə işarə edək .



ΔOMA-dan Pifaqor teoreminə görə alırıq:

$$R^2 = a^2 + b^2$$

Buradan $\quad R = \sqrt{a^2 + b^2}$

Kompleks ədədə uyğun nöqtədən koordinat başlanğıcına qədər məsafəyə kompleks ədədin modulu deyilir və $|z|$ kimi işarə olunur:

$$|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Son tərəfi OM şüası olan φ dönmə bucağına $z = a + bi$ kompleks ədədinin arqumenti deyilir.

ΔOMA-dan: $\quad \cos\varphi = \dfrac{a}{R} \qquad \sin\varphi = \dfrac{b}{R} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$

Verilmiş $z = a + bi$ ədədinin modulu birqiymətli təyin olunur, φ arqumenti isə 2π dəqiqliyi ilə tapılır. Yəni, arqumentin qiymətlərindən biri φ-dirsə, digər qiymətləri $\varphi + 2\pi k$ $(k \in Z)$ şəklindədir.

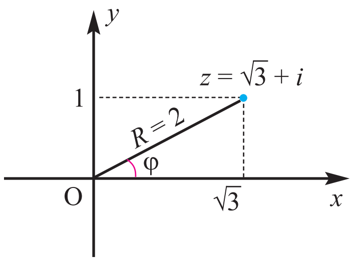
Kompleks ədədin arqumenti olaraq, adətən $[0; 2\pi)$ aralığına düşən bucağı götürəcəyik.

Nümunə 1. $z = \sqrt{3} + i$ kompleks ədədinin modulunu və arqumentini tapın.

Həlli: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ olduğundan

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olduğunu və φ bucağının I rübdə yerləşdiyini nəzərə almaqla $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ tapılır.



$\cos\varphi = \dfrac{a}{R}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{R}$ düsturlarından alırıq:

$$a = R\cos\varphi, \; b = R\sin\varphi$$

Onda $\quad z = a + bi = R\cos\varphi + i\cdot R\sin\varphi = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z = a + bi$ kompleks ədədinin $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ yazılışına onun triqonometrik şəkli deyilir.

Xüsusi hallarda, $z = a + bi$ ədədinin modulu və arqumenti üçün alırıq:

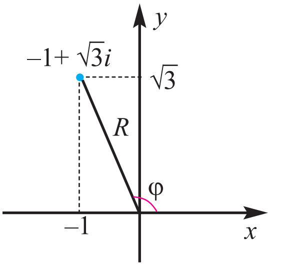
$b = 0$, $a > 0$ olduqda $R = a$, $\varphi = 0$ $\qquad$ $b = 0$, $a < 0$ olduqda $R = |a|$, $\varphi = \pi$

$a = 0$, $b > 0$ olduqda $R = b$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $a = 0$, $b < 0$ olduqda $R = |b|$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

Kompleks ədədin modulu və arqumenti. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli

Nümunə 2. $z = -1 + \sqrt{3}i$ kompleks ədədini triqonometrik şəkildə yazın.

Həlli:



$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

φ bucağı II rübün bucağı olduğundan:

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən ədədləri kompleks müstəvidə təsvir edin. Modulunu və arqumentini tapın.

a) $6i$ b) $-2i$ c) $-4i + 4$ d) $3 + 6i$

2. Verilmiş kompleks ədədin modulunu və arqumentini göstərin.

a) i b) $2i$ c) $-3i$ d) $-2i$

e) 1 f) -2 g) 5 h) -3

i) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ j) $-\sqrt{3} - i$

3. Verilmiş kompleks ədədi triqonometrik şəkildə yazın.

a) $\sqrt{3} + i$ b) $1 + i$ c) $1 - \sqrt{3}i$ d) $-\sqrt{3} - i$

4. Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədi cəbri şəkildə yazın.

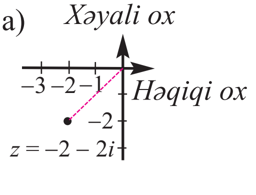
a) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5. Verilmiş ədədi triqonometrik şəkildə yazın.

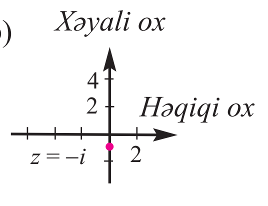
a) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$ b) $\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$ c) $4\left(\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right)$

6. Həndəsi təsvirlərə görə ədədləri triqonometrik şəkildə yazın.

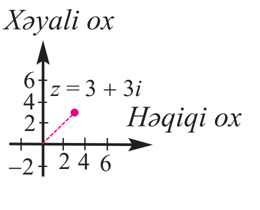
a)



b)



c)



Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər

Triqonometrik şəkildə verilmiş $z_1 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ və $z_2 = R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleks ədədlərinin hasilini tapaq.

$z_1 \cdot z_2 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = R_1\cdot R_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 +$
$+ i\cdot(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)) = R_1\cdot R_2\cdot(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Triqonometrik şəkildə verilmiş iki kompleks ədədin hasilini taparkən, bu ədədlərin modulları vurulur, arqumentləri toplanır.

Nümunə. $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ olarsa,

$z_1\cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})) = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 6\cdot(0 + i\cdot 1) = 6i$

İndi isə $\frac{z_1}{z_2}$ nisbətini tapaq.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\cdot(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 - (i\cdot\sin\varphi_2)^2} =$$

$$= \frac{R_1}{R_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Nisbətin modulu bölünən və bölənin modulları nisbətinə, arqumenti isə bölünən və bölənin arqumentləri fərqinə bərabərdir.

Nümunə. $z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ olarsa,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}(\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) =$$

$= \sqrt{3} + i$

$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ədədinin n-ci dərəcədən natural qüvvəti hər biri z-ə bərabər olan n sayda vuruğun hasili olduğu üçün

$$z^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Kompleks ədədin *n*-ci dərəcədən natural üstlü qüvvətinin modulu əsasın modulunun *n*-ci qüvvətinə, bu qüvvətin arqumenti isə əsasın arqumentinin *n* mislinə bərabərdir.

Nümunə. $z = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ olduqda

$$z^4 = 2^4\cdot(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}) = 16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 16\cdot(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i) = 8 + 8\sqrt{3}i$$

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər

Öyrənmə tapşırıqları

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ və $z_2 = 1 + i$ ədədlərini triqonometrik şəkildə göstərib,
a) $z_1 \cdot z_2$ hasilini b) $\frac{z_1}{z_2}$ nisbətini tapın.

2. Hesablayın.
a) $(1 + \sqrt{3}i)^{12}$ b) $(1 - i)^{38}$

3. $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ olduqda $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6$ -nı tapın.

4. $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ olduqda $(z_1 \cdot z_2)^{12}$ -ni tapın.

5. Hesablayın.
a) $\dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$ b) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^9}{(1-i)^8}$

6. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ düsturuna Muavr düsturu deyilir. Bu düsturun köməyi ilə n-qat bucağın sinus və kosinusunu təkqat bucağın sinus və kosinusu ilə ifadə etmək olar.
Məsələn, $n = 2$ olduqda alırıq:
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$
Buradan
$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$
İki kompleks ədədin bərabərlik şərtinə görə alırıq:
$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
Oxşar qayda ilə $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ üçün düsturları yazın.

7. Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədləri cəbri şəkildə yazın.
a) $2(\cos 120° + i\sin 120°)$ b) $5(\cos 135° + i\sin 135°)$
c) $3(\cos 330° + i\sin 330°)$

8. Əməlləri yerinə yetirin. Nəticəni triqonometrik şəkildə saxlayın.

a) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$ c) $\dfrac{\cos 50° + i\sin 50°}{\cos 20° + i\sin 20°}$

b) $\left[\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$ d) $\dfrac{5(\cos 4{,}3 + i\sin 4{,}3)}{4(\cos 2{,}1 + i\sin 2{,}1)}$

Kompleks ədədin n-ci dərəcədən kökləri

$\sqrt[n]{1}$ ifadəsinin qiymətlərini tapaq.

$1 = \cos 0 + i \sin 0$ şəklində yazaq və n-ci dərəcədən kökünü $\sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\theta + i \sin\theta$ şəklində axtaraq.

Hər iki tərəfi n-ci dərəcədən qüvvətə yüksəldək:

$\cos 0 + i \sin 0 = (\cos\theta + i \sin\theta)^n \qquad \cos 0 + i \sin 0 = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Buradan $\qquad \cos n\theta = \cos 0 \qquad \sin n\theta = \sin 0$

Triqonometrik şəkildə verilmiş iki ədəd bərabərdirsə, onların modulları bərabər olub, arqumentləri $2\pi k$ ilə fərqlənir.

Odur ki, $\qquad n\theta = 0 + 2\pi k \qquad \theta = \dfrac{2\pi k}{n}$

Beləliklə, $\qquad \sqrt[n]{1} = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i \sin\dfrac{2\pi k}{n}$

Burada $k \geq n$ olduqda alınan ifadələr k-nın ilk n qiymətində alınan ifadələrlə eyni olur. Vahidin n dərəcədən köklərini $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$ ilə işarə etsək, alarıq:

$k = 0 \qquad \varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$k = 1 \qquad \varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \sin\dfrac{2\pi}{n}$

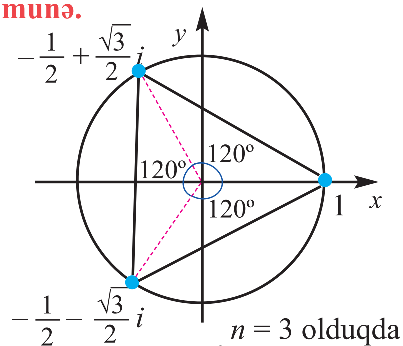
$k = 2 \qquad \varepsilon_2 = \cos\dfrac{4\pi}{n} + i \sin\dfrac{4\pi}{n}$

....

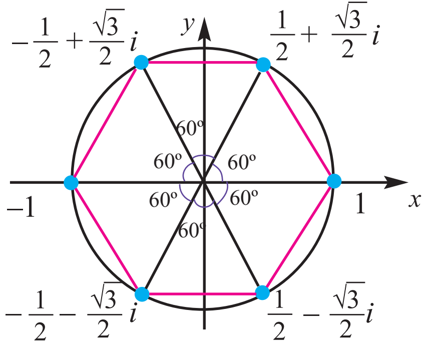
$k = n-1 \qquad \varepsilon_{n-1} = \cos\dfrac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin\dfrac{2\pi(n-1)}{n}$

Göründüyü kimi, vahidin n-ci dərəcədən köklərinin modulları 1-ə bərabər olub, arqumentləri bir-birindən $\dfrac{2\pi}{n}$-in misilləri qədər fərqlənir. Yəni, bu ədədlər mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən vahid radiuslu çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlının təpə nöqtələrinə uyğun kompleks ədədlərdir.

Nümunə.



$n = 3$ olduqda $\sqrt[3]{1}$-in qiymətləri



$n = 6$ olduqda $\sqrt[6]{1}$-in qiymətləri

Kompleks ədədin n-ci dərəcədən kökləri

z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən kökü elə w ədədinə deyilir ki, $w^n = z$.
Əgər $z \neq 0$ olarsa, n-ci dərəcədən kökün n sayda müxtəlif qiymətləri olur.

$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ şəklində yazaq.

$w^n = z$ olduğuna görə alırıq:

$$z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

İki kompleks ədədin bərabərliyinə görə alırıq:

$$r^n = R, \quad r = \sqrt[n]{R}$$

$$n\theta = \varphi + 2\pi k \qquad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad (k \in Z)$$

$k > n$ olduqda alınan qiymətlər ilk n sayda alınan qiymətlərdən 2π ilə fərqlənir.

Ona görə $\theta_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ olmalıdır.

Kompleks ədədin n-ci dərəcədən kökü düsturu

Əgər $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ olarsa,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \text{ burada } (k = 0, 1, ..., (n-1))$$

Nümunə. $\sqrt[3]{-8}$ -in bütün qiymətlərini tapın.

Həlli: $\sqrt[3]{-8} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ olsun. $\qquad -8 = R^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

$$8(\cos\pi + i\sin\pi) = R^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

Buradan $R^3 = 8$, $R = 2$

$$3\theta = \pi + 2\pi k \qquad \theta = \frac{\pi + 2\pi k}{3} \ (k = 0, 1, 2)$$

$k = 0$ olduqda $w_0 = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$

$k = 1$ olduqda $w_1 = 2\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + 0\cdot i) = -2$

$k = 2$ olduqda $w_2 = 2\cdot(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 - \sqrt{3}i$

Öyrənmə tapşırıqları

1. İfadənin bütün qiymətlərini tapın. a) $\sqrt[4]{1}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[4]{81}$

2. Vahidin n-ci dərəcədən köklərinə görə aşağıdakı ifadənin bütün qiymətlərini yazın.
a) $\sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

3. İfadənin bütün qiymətlərini tapın.
a) $\sqrt[3]{-1}$ b) $\sqrt[6]{-64}$ c) $\sqrt[6]{-8i}$ d) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

4. Tənlikləri həll edin.
a) $z^4 - 16 = 0$ b) $z^3 = 8$ c) $z^4 + 1 = 0$

5. Tənlikləri həll edin.
a) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ b) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Sadələşdirin. Nəticəni $a + bi$ şəklində yazın.

$(5 - 6i) + (3 + 2i)$ 　 $(2 + 5i)\cdot(4 - i)$

$(4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{2}i)$ 　 $(1 - 2i)\cdot(8 - 3i)$

$\frac{1 + 4i}{3 + 2i}$ 　 $\frac{3 + 2i}{1 - 4i}$

2. Kompleks ədədlərin kvadrat köklərini tapın.

$2i$ 　 $5i$

$-3i$ 　 $-6i$

$2 - 2i$ 　 $2 + 2i$

$1 + \sqrt{3}i$ 　 $1 - \sqrt{3}i$

3. Tələb olunan dərəcədən köklərini yazın.

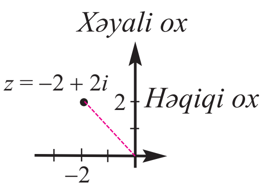
1) Kub köklərini:

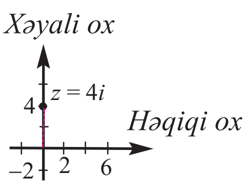
a) $-4\sqrt{2}(1 - i)$ 　 b) $64\,i$ 　 c) -27 　 d) 1000

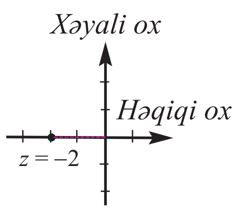
2) 4-cü dərəcədən köklərini:

a) 1 　 b) i 　 c) $128(-1 + \mathrm{i})\,i$

4. Kompleks ədədləri triqonometrik şəkildə yazın.







5. Kompleks ədədləri qrafik olaraq təsvir edin və cəbri şəkildə yazın.

$3(\cos 120° + i \sin 120°)$

$5(\cos 135° + i \sin 135°)$

$\frac{3}{2}(\cos 300° + i \sin 300°)$

$8(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$

$7(\cos 0 + i \sin 0)$

$\frac{1}{4}(\cos 225° + i \sin 225°)$

6. Əməlləri yerinə yetirin.

$[2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})][6(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})]$

$[\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})][4(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})]$

$\frac{\cos 40° + i\sin 40°}{\cos 10° + i\sin 10°}$

$\frac{2(\cos 120° + i\sin 120°)}{4(\cos 40° + i\sin 40°)}$

7. $E = I\cdot Z$ düsturu elektrik-mühəndis qurğularınım işində istifadə edilir. Burada E gərginliyi, I cərəyanı, Z kompleks müqaviməti ifadə edir. Hər bir dəyişənin qiyməti kompleks ədəddir. Verilənlərə görə məchulu tapın.

$I = 10 + 2i$, $Z = 4 + 3i$

$I = 2 + 4i$, $E = 5 + 5i$

$E = 15 + 12i$, $Z = 25 + 24i$

$E = 12 + 24i$, $Z = 12 + 20i$

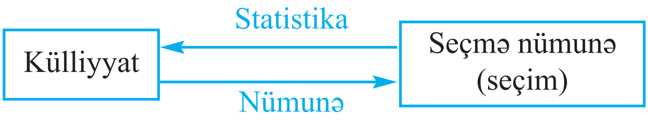
11 Məlumatlar, proqnozlar

Külliyyat və seçim
Təsadüfi seçim və növləri
Məlumatın təqdimi
Binomial açılışlar
Bernulli sınaqları

Bu maraqlıdır. "The Literary Digest" jurnalı Amerikada prezident seçkilərinin nəticələrini əvvəlcədən proqnozlaşdırmaqla böyük nüfuz qazanmışdı. Jurnal son 5 prezident seçkisinin nəticələrini az xəta ilə seçkidən əvvəl proqnozlaşdırmışdı. Lakin 1936-cı ildə resbublikaçıların namizədi Alf Landonun demokratların namizədi Franklin Ruzveltə böyük fərqlə qalib gələcəyi ilə bağlı proqnozunda böyük səhvə yol vermişdi. Səbəbi isə jurnalın sorğuda iştirak edən respondentləri düzgün seçməməsi idi. Belə ki, sorğu jurnalın oxucuları arasında aparılmışdı. Sonradan isə məlum olmuşdu ki, oxucular arasında Respublikaçılar Partiyasından olanlar üstünlük təşkil edir.

Külliyyat və seçim. Təsadüfi seçim və növləri

Statistika və ehtimala aid əsas anlayışlar müasir dünyada prosesləri daha düzgün qiymətləndirməyə kömək edir. Hər iki sahədə araşdırma aparılarkən obyekti əhatə edən külliyyat və külliyatdan seçilmiş nümunələrə və ya qısaca olaraq seçim adlanan kiçik qruplar əsas götürülür. Statistikada seçilmiş nümunə əsasında aparılmış tədqiqata görə külliyyat haqqında fikir yürüdülür. Ehtimalda külliyyata görə seçilmiş nümunə haqqında fikir yürüdülür.



Statistik sorğular apararkən nümunələr adətən təsadüfi seçimlərlə formalaşdırılır. Bu halda külliyyata daxil olan hər bir nümunənin seçim şansı eyni olur. Təsadüfi seçim texnikaları da müxtəlif olur.

- Sadə təsadüfi seçim
- Sistematik təsadüfi seçim
- Klaster təsadüfi seçim
- Təbəqəli təsadüfi seçim

Sadə təsadüfi seçim. Tutaq ki, sinifdə üç nəfərlik qrup yaratmaq lazımdır. Bunun üçün bütün şagirdlərin adları yazılmış kartlar qutuya yığılır və təsadüfi olaraq üç nəfərin adı çıxarılır. Bu halda bütün üçlük qrupların seçilmə şansları eyni olur.

Sadə təsadüfi seçimdə n elementli seçimin hər bir elementinin seçilmə şansı eynidir.

Sistematik seçim. Tutaq ki, böyük ticarət mərkəzinin rəhbərliyi alıcıların mərkəzdə təxminən nə qədər vaxt keçirdiyi haqqında məlumat toplamaq fikrindədir. Gün ərzində mərkəzə gələnlərin sayının təxminən 2000 nəfər olduğu araşdırılmış və onların 5%-nin (yəni 100 nəfərin) nümunə olaraq seçilməsi qərara alınmışdır. Bu şəxslər necə seçilsə, daha düzgün olardı? Bu şəxslərin seçimi gün ərzində mərkəzə gələnlərin hər 20 nəfərindən birinin fikrinin soruşulması ilə aparıla bilər. Məsələn, ilk 20 nəfərdən 16-cı şəxsin fikri soruşulmuşsa, daha sonra, 36-cı, 56-cı və s. şəxslərin fikri soruşulacaq. Bu cür seçim sistematık seçim adlanır.

Sistematik seçimdə əgər k% seçim nəzərdə tutulmuşdursa, külliyyatın hər $[\frac{100}{k}]$-cı elementindən istifadə edilir.

Klaster seçim. Hər birində 15 detal olan 1000 qutu detalın keyfiyyəti haqqında məlumat vermək tələb olunur. Bunun üçün 300 detalın keyfiyyətinin yoxlanılması qərara alınmışdır (5%-nin). Bütün detalları qutulardan çıxarmaq, onları qarışdırmaq və təsadüfi seçmə ilə 300-nü ayırmaq çox vaxt və xərc tələb edir. 1000 qutudan təsadüfi seçmə ilə 20-sini seçib, bu qutulardakı detalları yoxlamaqla bütün detallar haqqında fikir yürütmək olar. Burada hər qutu bir klasterdir. Bu cür seçimlər **klaster seçim** adlanır. Düzgün statistik məlumat əldə etmək üçün hər seçilmiş klasterə daxil olan bütün elementlər yoxlanılmalıdır.

Klaster ilə seçimdə kulliyyat klasterlərdən ibarət olur. Klasterlərdən təsadüfi seçim aparılır və seçilən klasterin bütün elementləri araşdırılır.

Təbəqəli seçim. Tutaq ki, məktəbdə "Dərsdən sonra məktəb kitabxanasında oturub bədii ədəbiyyat oxumaq istərdinizmi?" sualı ilə şagirdlər arasında araşdırma aparmaq planlaşdırılır. Bu sorğunun məktəbin həyatindəki təsadüfi seçilmiş şagirdlərlə aparılması məqsədəuyğun deyil. Çünki fikri soruşulan şagirdlər eyni sinifdən ola bilər və s. Sorğu hər yaş qrupundan olmaqla təsadüfi seçilmiş şagirdlər arasında aparılmalıdır. Bu cür təsadüfi seçim **təbəqəli (laylı, qruplu) seçim** adlanır. Əgər məktəbdə bu siniflərdə 1265 şagird varsa, onlardan 385 nəfəri 8-ci, 350 nəfəri 9-cu, 280 nəfəri 10-cu, 250 nəfəri 11-ci sinif şagirdi olarsa və 10 % təsadüfi seçilmiş şagirdin fikri öyrəniləcəksə, hər sinifdən təsadüfi seçmə ilə şagirdlərin 10%-nin fikri öyrənilməlidir. Bunların 39-nun 8-ci, 35-nin 9-cu, 28-nin 10-cu, 25-nin 11-ci sinifdən təsadüfi seçilmiş şagirdlər olması məqsədəuyğundur.

Təbəqəli seçimdə əvvəlcə külliyyat təbəqələrə ayrılır, sonra hər təbəqədən təsadüfi seçimlər aparılır.

Bəzən araşdırma üçün təsadüfi seçimlər aparmaq mümkün olmur. Məsələn, dietoloqlar hər hansı diet menyusunu təsadüfi seçimlə deyil, könüllü olaraq iştirak etmək istəyənlər arasından seçməli olurlar.

Doğru seçim, səhv seçim

Sorğu aparan təşkilatlar mövzuya aidiyyatı olan hər bir şəxsin fikrini öyrənmək üçün maddi və texniki imkanlara malik olmurlar. Bu səbəbdən də kiçik qrupların fikrini öyrənməklə kifayətlənməli olurlar. Sorğuda iştirak edənlərin düzgün müəyyən edilməsinin əhəmiyyəti böyükdür. Məsələn, idman mərkəzinə gələn şəxslərə görə bütün şəhər əhalisinin həftədə neçə dəfə idmanla məşğul olduqları haqqında doğru fikir yürütmək mümkün deyil. Yaxud da hər hansı şəxsin parlamentin üzvü seçiləcəyi haqqında onun işlədiyi kollektivdə və ya yaşadığı ərazidə araşdırma aparmaqla fikir yürütmək səhv proqnozla nəticələnər.

Külliyyat və seçim. Təsadüfi seçim və növləri

1. Verilən məlumatlarda külliyyat və seçimi müəyyən edin.

a) Şəhər meri vəzifəsinə seçkilərdə 3 nəfər namizəddən hansının seçiləcəyi haqqında seçicilərdən 2000 nəfərin fikri öyrənilmişdir.

b) 300 kq ağ un və 50 kq qara un qarışdırılaraq çörək bişirilir. 1 kq undan 3 çörək bişirilir. 70 çörəkdən nümunə götürülür.

c) Fermer 4 hovuzda yetişdirdiyi xanı balığının kütlə artımını yoxlamaq üçün hər hovuzdan 30 balığın kütləsini yoxladı.

d) Satıcı mağazaya daxil olan hər 10 nəfərdən birinə olmaqla 40 nəfərə yeni pendirdən dadmasını təklif edir.

e) Həkim-dietoloq qəsəbədə yaşayan və yaşı 70-dən yuxarı olan 12 qadından könüllü olaraq iki həftə ərzində hər səhər klinikaya gəlib liflərlə zəngin buterburod yeməyi xahiş edir.

2. Aşağıdakılardan hansı doğru seçimdir?

a) Sinifdə növbətçi seçmək üçün şagirdlərin adları kağıza yazılaraq, qutuya yığılmış və beş ad qutudan çıxarılmışdır.

b) 10^a sinfindəki şagirdlərin valideynləri arasında aparılan sorğuya görə məktəbli formasının rəngi və modeli seçilir.

c) Şəhər telefon nömrəsi kitabındakı hər on beş nəfərdən birinə zəng edərək, hansı namizədə səs verəcəyi öyrənilmişdir.

3. Doğru seçim olan və olmayan situasiyalara aid bir nümunə yazın.

4. Hər bir situasiyada hansı təsadüfi seçim texnikasından istifadə edildiyini müəyyən edin.

a) Hava yolları şirkəti təyyarəyə daxil olan hər beş sərnişindən birinə hədiyyə təqdim etdi.

b) Məktəbin təsadüfi seçilmiş 5 müxtəlif sinifindən təsadüfi seçilmiş 20 şagird arasında həmin məktəbdə riyaziyyatın tədrisinin səviyyəsini yoxlamaq üçün sorğu keçirildi.

c) Aviaşirkət xidmətin səviyyıəsini yoxlamaq üçün təsadüfi seçilmiş 5 reysdəki bütün sərnişinlərin fikrini öyrəndi.

d) Araşdırma zamanı təsadüfi seçilmiş 5 kişinin və 5 qadının rəyi soruşuldu.

e) Dietoloqlar 30-40, 40-50, 50-60 yaş qrupunun hər birindən ən azı 15 nəfər arasında müşahidələr apardıqdan sonra aşağı qlükoz tərkibli yeni dietlər haqqında fikir söyləməyin mümkün olacağını bildirdilər.

5. Ev satışı üzrə menecer bir küçədəki 10 ev üçün yeni endirim kampaniyası haqqında telefonla məlumat verməyi planlaşdırır. Küçədə 100 ev var. Menecer əvvəlcə 1və 10 nömrəli evləri qeyd etdi və onlardan birinə zəng etdi, məsələn 8-ci evə. Daha sonra isə hər sonrakı 10-cu evə, yəni 18-ci, 28-ci və s zəng etdi.
a) Menecerin bu cür seçimi hansı təsadüfi seçim texnikasına aiddir.
b) Bütün evlərin seçilmə şansları eynidirmi?
c) Bu texnika sadə seçim texnikasından nə ilə fərqlənir?

6. Məktəb rəhbərliyi şagirdlərin riyaziyyat və təbiət fənləri üzrə qiymətləri arasında əlaqənin olub olmadığını araşdırmağı planlaşdırır. Məktəbdə təhsil alan 800 şagirddən 350 nəfəri həm riyaziyyat,həm də təbiət fənləri üzrə keçirilən qiymətləndirmədə iştirak etmişdir. Onlardan təsadüfi seçmə ilə 70 nəfərinin xüsusi qiymətləndirməyə cəlb edilməsi nəzərdə tutulur.

Siniflər	Şagirdlərin sayı
8-ci sinif	90
9-cu sinif	100
10-cu sinif	75
11-ci sinif	85

a) Cədvəldə verilmiş məlumata görə təsadüfi seçimlə hansı sinifdən neçə nəfərin seçilməsinin məqsədəuyğun olduğunu müəyyənləşdirin.
b) Burada hansı seçim texnikasından istifadə edilir?
Göstəriş. Hər sinifdən seçimin sayı ümumi saya mütənasib olmalıdır.
8-ci sinifi təmsil edənlərin sayı: $\frac{x}{70} = \frac{90}{350}$

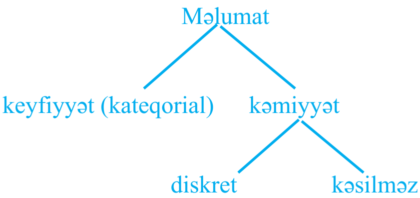
7. Qruplar yaratmaq üçün 1-dən 5-ə qədər rəqəmlərin yazıldığı kartlar bir nəfər tərəfindən idmançılara paylandı. Eyni rəqəmləri alan idmançılar bir qrupda birləşdirildi. Bu seçim təsadüfi seçimdirmi? Seçimin ədalətli olduğuna əmin olmaq mümkündürmü? Daha ədalətli olması üçün siz seçimi necə təşkil edərdiniz?

8. “Micro Tik” şirkəti hər ay 14 500 kompüter prosessoru istehsal edir. Bu ay istehsal edilən prosessorların təsadüfi seçilmiş 2000 ədədindən 8-nin defektli olduğu aşkar edildi. a) Bu situasiyada külliyyatın, seçimin ölçüsünü müəyyən edin. b) Verilən məlumata görə bu ay istehsal edilmiş prosessorlardan neçəsinin defektli olacağını söyləmək olar?

9. “Son xəbərləri haradan əldə edirsiniz?” sorğusunu aparmaq üçün, təsadüfi seçmə ilə Respublikamızın 5 rayonu, hər rayondan 5 kənd və hər kənddən 20 ev müəyyən edildi. Küliyyat və seçimi müəyyən edin. Bu hansı seçim texnikasına aiddir?

Məlumatın təqdimi

Statistik məlumatlar kəmiyyət və keyfiyyət xarakterli olmaqla iki qrupa bölünür. **Kəmiyyət tipli məlumatlar** ədədi qiymətlərlə ifadə edilir.



Məsələn, "Neçə saat idmanla məşğul olur", "Boyları nə qədərdir" və s.

Keyfiyyət tipli məlumatlar isə kateqoriyalara ayrılır. Bu məlumatlara **kateqorial məlumatlar** da deyilir. Məsələn, "partiyaların adı", "gözünün rəngi", "avtomobilin markası" və s.

Kəmiyyət tipli məlumatlar - ədədi məlumatlar özləri də iki növə ayrılır: a) diskret, kəsilən ədədi məlumatlar; b) kəsilməz ədədi məlumatlar.

Diskret ədədi məlumatlara sayma ilə müəyyən edilən məlumatlar aid edilir. Məsələn, avtobusdakı sərnişinlərin sayı: 1,2,3 və s. qiymətlərini alır.

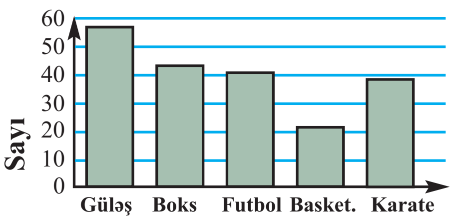
Kəsilməz ədədi məlumatlar müəyyən diapazonda dəyişən qiymətlər alırlar, adətən ölçmənin nəticəsi olaraq yaranır.
Məsələn, yeni doğulmuş körpələrin boyu, kütləsi və s.

Məlumatları təqdim edərkən uyğun qrafik formanın seçilməsi mühümdür. Ona görə də kateqorial və ədədi məlumatları təqdim edərkən düzgün qrafik forma seçilməlidir.

Kateqorial məlumat üçün məqsədəuygun təqdimat formaları

Nümunə 1. 200 şagird arasında hansı idman növünün daha çox sevildiyi haqqında araşdırma aparılmışdır. Burada araşdırma idman növünə aid olduğu üçün məlumat kateqorialdır. Məktəbdə adları məlum olan idman bölmələri mövcuddur. Kateqorial məlumatı təqdim etmək üçün əlverişli forma tezlik cədvəli, barqraf, dairəvi qrafik ola bilər.

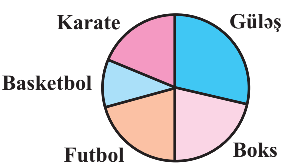
Barqraf



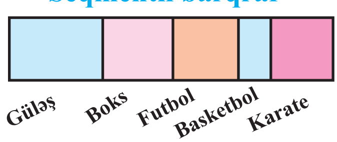
Tezlik cədvəli

İdman növü	Tezlik
Güləş	57
Boks	43
Futbol	41
Basketbol	21
Karate	38
Cəmi	200

Dairəvi diaqram



Seqmentli barqraf



Hər kateqoriyanın ümuminin (vahid qəbul edilmiş) hansı hissəsini təşkil etdiyi müəyyənləşdirilir. Vahid bu hissələrə - seqmentlərə bölünür

Məlumatın təqdimi

1. 1) Kateqorial hesab etdiyiniz məlumata uyğun üç kateqoriya adı yazın.
2) Ədədi məlumatların hansı intervalda ola biləcəyini təxmin edin və yazın.
a) satılan avtomobillər rənginə görə sayı
b) gün ərzində günəşli saatların sayı
c) xəstəliyə görə buraxılan dərs günlərinin sayı
d) ev tapşırığını yerinə yetirmək üçün sərf olunan vaxt(saatla)
e) bir adamın gün ərzində qəbul etdiyi mayenin miqdarı

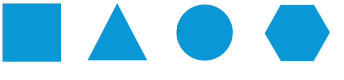
2. Hansı məlumat diskret, hansı kəsilməz ədədi məlumatdır?
a) İyul ayında temperatur dəyişməsi
b) Kibrit qutusundakı kibrit çöplərinin sayı
c) Sərnişinlərin özləri ilə təyyarənin salonuna götürdükləri yükün kütləsi
d) Qatarın vaqonlarındakı sərnişinlərin sayı
e) Küçədəki binaların mərtəbələrin sayları
f) Komputer qarşısında keçirilən vaxt

3. 24 nəfər arasında “Hansı rəngi daha çox xoşlayırsınız?” sualı ilə sorğu keçirildi. 6 nəfər qırmızı, 8 nəfər qara, 4 nəfər ağ, qalanları isə başqa rəngləri xoşladıqlarını söylədilər. Verilən məlumat ədədi məlumatdır, yoxsa kateqorial? Məlumatı tezlik cədvəli (nisbi tezliyi göstərməklə), dairəvi diaqram və barqrafla təqdim edin.

4. Fövqəladə Hallar Nazirliyi il ərzində baş vermiş yanğın hadisələrinin səbəbləri haqqında məlumat verdi. Məlumatlar sağdakı cədvəldə yer alır. Cədvələ görə dairəvi diaqram və seqmentli barqraf qurun.

Səbəbi	Sayı
Nəzarətsiz azyaşlı uşaqlar	6
Siqaret	4
Qaz sobası	10
Elektrik	12
Bilinməyən səbəbdən	8

5. Təssəvvür edin ki, siz məktəbinizdə şagirdlər arasında “Siz şirkətinizin logosu üçün verilən formalardan hansını seçərdiniz?” sualı ilə sorğu keçirirsiniz.



a) Sorğunu hansı üsulla keçirərdiniz? Yazın.
b) Külliyyat olaraq hansı sinifləri seçərdiniz?
c) Külliyyatdan seçimi hansı texnika ilə seçərsiniz?
d) Əvvəlcədən hansı formanın logo olaraq seçiləcəyini təxmin edin. Sorğunun nəticələri ilə sizin təxminləriniz üst-üstə düşdümü?
e) Məlumatı hansı qrafik forma ilə təqdim etmək əlverişlidir? Şərti məlumatlarla çəkib göstərin.

Məlumatın təqdimi

Ədədi məlumatları təqdim etmək üçün məqsədəuygun formalar

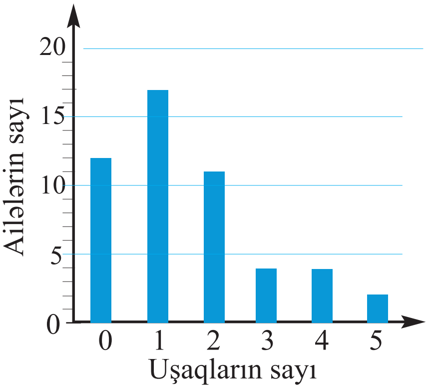
Diskret ədədi məlumatlar. Məhdud sayda diskret ədədi məlumatları təqdim etmək üçün **tezlik cədvəli, barqraf, histoqram və gövdə-budaq** kimi təqdimat formalarından istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Nümunə 2. 50 gənc ailə arasında uşaqlarının sayı barədə sorğu keçirilmişdir. Cavablar aşağıdakı kimi olmuşdur.

0 1 2 1 0	3 1 4 2 0	1 2 1 0 5	1 2 1 0 0	1 2 1 2 1
0 1 4 1 0	1 2 5 0 4	1 2 3 0 0	1 2 1 3 4	2 3 2 1 0

Yuxarıdakı ədədlər hər bir ailədəki uşaqların sayını göstərir. Sorğunun nəticələri aşağıdakı kimi tezlik cədvəli və ya barqraf ilə təqdim edilə bilər.

Uşaqların sayı	Ailələrin sayı (tellə)	Tezlik (ailələrin sayı)	Nisbi tezlik
0	卌 卌 ||	12	12 : 50 = 0,24
1	卌 卌 卌 ||	17	17 : 50 = 0,34
2	卌 卌 |	11	11 : 50 = 0,22
3	||||	4	4 : 50 = 0,08
4	||||	4	4 : 50 = 0,08
5	||	2	2 : 50 = 0,04



Qruplaşdırılmış diskret ədədi məlumatlar. Histoqram

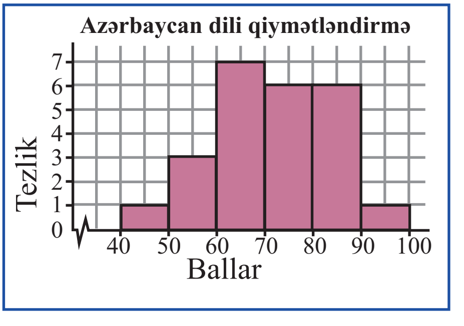
Nümunə 3. Aşağıda Azərbaycan dili fənni üzrə qiymətləndirmədən şagirdlərin topladıqları ballar (100 ballıq sistem üzrə) verilmişdir.

52 66 75 80 52 48 95 85 84 68 86 82 63 78 75 64 79 81 66 53 76 75 69 65

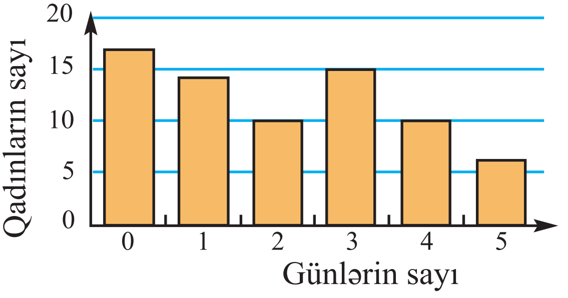
Ədədi məlumatın dəyişmə diapazonu 48-95 kimidir. Məlumatı hər sinfin ölçüsü 10 olmaqla 6 sinifdə qruplaşdırmaq olar: 40-50, 50-60, 60-70, 70-80, 80-90, 90-100. Məlumata uyğun tezlik cədvəli və histoqram aşağıdakı kimi olacaq.

Azərbaycan dili qiymətləndirmə

Siniflər	Tel	Tezlik
[40, 50)	|	1
[50, 60)	|||	3
[60, 70)	卌 ||	7
[70, 80)	卌 |	6
[80, 90)	卌 |	6
[90, 100)	|	1



6. Şəhərdə qadınlar arasında “Həftədə neçə dəfə idman salonuna gedirsiniz?” sualı ilə sorğu aparılmışdır. Nəticələr barqrafda verildiyi kimi olmuşdur.
a) Bu məlumat kəsilməz ədədi məlumatdır, yoxsa diskret?
b) Bu situasiyada külliyyat və seçimi müəyyən edin. Seçimin ölçüsünü barqrafa görə tapın.
c) Sorğuda 92 nəfər iştirak etmişsə, onların neçə faizinin həftədə ən azı iki dəfə idman zalına getdiklərini demək olar?
d) Qadınlar arasından bir nəfər seçilsə, onun idman zalına həftədə bir dəfədən çox gedənlərdən olması ehtimalı nə qədərdir?



7. Mağazanın meneceri qablaşdırma və daşıma zamanı yumurta qutularından neçəsinin zədələndiyini araşdırmaq üçün beş gün mağazaya məhsul qəbulu zamanı hər 1000 qutudan 50-cini yoxladı.
a) Məlumata görə külliyyat və seçimi müəyyən edin.
b) Menecerin seçim texnikası hansı növə aiddir?
c) Əgər yoxlamalarla ən azı 5, ən çoxu 20 qutunun zədəli olduğu aşkar olunmuşsa, ümumilikdə təxminən neçə qutu yumurtanın zədəli olacağını düşünmək düzgün olardı?
d) Bu məlumat üçün iki qrafik forma seçin və təqdim edin.

8. Kompüter oyununda Yusifin topladığı ballar aşağıdakı kimi olmuşdur. Məlumatı siniflərdə qruplaşdırın və histoqramla təqdim edin.

580, 490, 520, 650, 540, 600, 630, 590, 390, 410, 670, 480, 400, 440, 560, 540, 430, 670, 490, 720, 580, 680, 590, 370, 470, 540, 490, 660, 500, 600, 390, 540, 300, 350, 600, 540, 510, 410, 480, 560, 330, 490, 540, 540, 580, 540, 270, 450

9. Cədvəldə işçilərin işə gəlmədiyi günlər haqqında məlumat verilmişdir. Bu məlumata uyğun histoqram qurun.

1-dən çox 3-dən az (1 - < 3)	24
3-dən çox 6-dan az (3 - < 6)	16
6-dan çox 9-dan az (6 - < 9)	12
9-dan çox 12-dən az (9 - < 12)	6
12-dən çox 15-dən az (12 - < 15)	2
Cəmi	**60**

Məlumatın təqdimi

Gövdə-budaq sxemi. Bu formadan məlumat az sayda olduqda istifadə etmək əlverişlidir. Ədədi məlumatın gövdə-budaq sxemi ilə təqdimi az vaxt alır və məlumatın paylanma formasını aydın görməyə imkan verir. Paylanma forması bir sıra statistik göstəriciləri (moda, median, ədədi orta, ən böyük fərq və s) asanlıqla müəyyən etməyə imkan verir.

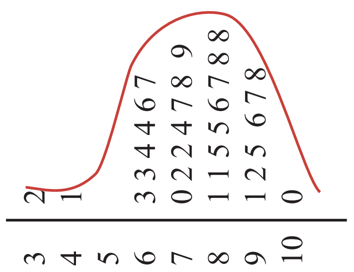
Nümunə 4. Aşağıdakı məlumat şagirdlərin qiymətləndirmə nəticələrini əks etdirir.

32, 67, 81, 92, 87, 72, 63, 88, 96, 91, 72, 63, 85, 79, 70,
85, 64, 86, 98, 100, 77, 88, 81, 64, 41, 78, 95, 74, 97, 66

Məlumata uyğun gövdə-budaq sxemi aşağıdakı addımlarla qurulur.

1. Gövdə və budaq bir-birindən şaquli və ya üfüqi düz xətlə ayrılır.
2. Ədədi məlumatın aparıcı hissəsi - böyük mərtəbədəki (və ya mərtəbələrdəki) rəqəmlərin ifadə etdiyi məlumat gövdə kimi qəbul edilir. Bu nümunədə gövdə onluqların sayını göstərən ədədlərdir. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 və 10 gövdəni təşkil edir və gövdə üçün ayrılmış hissədə yazılır
3. Növbəti rəqəm budaqları təşkil edir. Bu ədədin təklik mərtəbəsindəki rəqəmlərdir. Hər bir "gövdənin" qarşısında onun "budaqları" ardıcıl yazılır.

Gövdə	Budaq 3|2 = 32
3	2
4	1
5	
6	3 3 4 4 6 7
7	0 2 2 4 7 8 9
8	1 1 5 5 6 7 8 8
9	1 2 5 6 7 8
10	0



10. Televiziya müsabiqəsinin şərtlərinə görə səsləndirilən suala ilk bir dəqiqə ərzində ən tez cavab verən iştirakçı aparıcı ilə yarışır. İştirakçıların sualı cavablandırmağa sərf etdikləri vaxt (saniyələrlə) sağdakı kimi olmuşdur. Məlumatı gövdə-budaq sxemi ilə təqdim edin.

37, 33, 33, 32, 29, 28,
28, 23, 22, 22, 22, 21,
21, 21, 20, 20, 19, 19,
18, 18, 18, 18, 16, 15,
14, 14, 14, 12, 12, 9, 6

11. Gövdə-budaq sxemi şirkətdəki işçilərin yaşını göstərir.
a) Məlumata görə ədədi ortanı, moda və medianı tapın.
b) Məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

Gövdə	Budaq
2	1 3 5 8 8
3	1 2 2 3 3 5 9
4	3 5 7
5	0 2 2
6	1

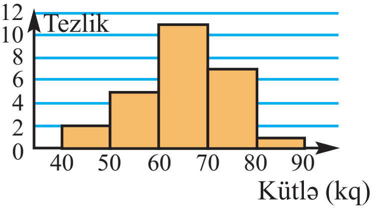
2|1 = 21 yaş

Kəsilməz ədədi məlumatların təqdimatı

Kəsilməz ədədi məlumatların təqdimat formaları qruplaşdırılmış diskret məlumatların təqdimat forması ilə oxşardır. Bəzən kəsilməz ədədi məlumatlar diskret ədədi məlumat (və tərsinə) kimi də qəbul edilir. Yəni bunlar arasında dəqiq sərhədi müəyyən etmək çətin olur.

Nümunə 5. Aparılan araşdırmanın nəticəsində məlum oldu ki, idman klubunda məşğul olan gənclərin kütləsi 40 kq-la 90 kq arasında dəyişir. Ətraflı məlumat cədvəllə və histoqramla verilmişdir.

Kütlə intervalı	Tezlik
40 – < 50	2
50 – < 60	5
60 – < 70	11
70 – < 80	7
80 – < 90	1



12. Şirkətdə işçilərə telefonla ən çoxu 3 dəqiqə danışmağa icazə verilir. Bir gün ərzində qeydə alınan danışıqlar aşağıdakı kimi olmuşdur.

2,4; 0,2; 3,0; 2,8; 1,5; 1,9; 0,7; 1,0; 2,5; 1,3;
0,8; 2,1; 3,0; 0,4; 1,2; 3,0; 1,1; 0,3; 0,7; 1,8;
0,3; 1,0; 21; 3,0; 2,9; 0,5; 1,4; 3,0; 2,8; 1,2;
0,5; 1,0; 1,5; 0,9; 1,8; 0,6; 0,6; 0,7; 0,8; 0,8

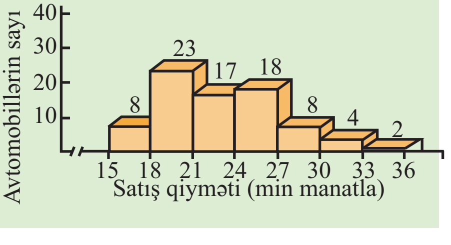
a) məlumatı gövdə-budaq sxemi ilə təqdim edin.
b) məlumatı 4 sinifdə qruplaşdırmaqla tezlik cədvəli və histoqramla təqdim edin.
c) bir dəqiqədən az davam edən danışıqların sayı bütün zənglərin sayının hansı hissəsini təşkil edir?

13. Tezlik cədvəli avtomobillərin dayanacaqda qalma müddətlərini göstərir. Cədvələ görə histoqram qurun.

Dayanma müddəti (dəqiqə)	6-25	26-45	46-65	66-85	86-105	106-125	126-145
Tezlik	60	70	90	120	80	50	40

14. Histoqram satılan avtomobillərin sayı və qiymətləri haqqında məlumatı əks etdirir. Məlumata görə tezlik cədvəli qurun. Sinifləri 15 - < 18 kimi qeyd edin.

Qiyməti 18 min manatdan çox, 27 mindən manatdan az olan avtomobillər bütün satılan avtomobillərin neçə faizini təşkil edir?



15. Kiçik layihə işi

Bakıda Formula-1 Qran Pri Avropa yarışı ilk dəfə 2016-cı il iyun ayında keçirilmişdir. Uzunluğu təxminən 6 km olan Bakı treki (bir dövrənin uzunluğu) şəhərin həm qədim, həm də müasir hissəsindən keçir.

Cədvəldə Bakıda keçirilən ilk Formula-1 Qran Pri Avropa yarışlarında birinci 3 yeri tutanların nəticələri verilmişdir.

Mövqe	№	Pilot	Komanda	Dövrələr	Vaxt	Xal
1	6	Niko Rosberq	Mercedes	51	1:32:52.366	25
2	5	Sebastyan Fettel	Ferrari	51	+16,696 san.	18
3	11	Serxio PeresForce	India	51	+25,241 san.	15

a) Hər pilot neçə kilometr yol qət etmişdir?

b) Cədvəldə yarışın qalibinin ümumi yola sərf etdiyi vaxt, eləcə də 2-ci və 3-cü yerləri tutan pilotların çempiondan neçə saniyə çox vaxt sərf etdikləri göstərilmişdir. Hər bir pilotun yarış yoluna sərf etdiyi ümumi vaxtı hesablamaqla cədvəli yenidən dəftərinizdə çəkin.

c) Hesablamaları kalkulyatorla aparmaqla hər bir pilotun orta sürətini tapın.

d) Bakıda Formula-1 yarışları ikinci dəfə 2017-ci ildə keçirilmişdir. Birinci üç yeri tutan pilotların nəticələrini əks etdirən cədvəl qurun.

e) 2016 və 2017-ci ilin nəticələrinə uyğun pilotların topladığı ballara görə barqraf qurun.

f) Bakıda keçirilən Qran Pri Formula-1 yarışları haqqında məlumatları əks etdirən təqdimat hazırlayın. Komandalar, yarış avtomobilləri, pilotlar haqqında daha geniş məlumat toplamağa çalışın.

Binomial açılışlar

Binom ikihədli deməkdir.Binomun müxtəlf qüvvətlərinə baxaq. İki ədəd cəminin kvadratı və kubunun açılışlarında müəyyən qanunauyğunluq var.

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Belə ki, birinci həddin qüvvət üstü binomun dərəcəsinə bərabərdir, hər sonrakı həddə a-nin üstü bir vahid azalır, ikinci həddin (b-nin) üstü bir vahid artır. Birinci və sonuncu həddin əmsalı 1-dir.

a və b cəminin qüvvətləri ardıcıllığını binomial açılışların ardıcıllığı kimi davam etdirmək olar. Bu açılışların hansı qayda ilə yarandığını nəzərdən keçirək.

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ kimi yazmaq olar.

Bu hasil hər biri a və ya b olan dörd vuruğun bütün mümkün hasillərinin cəminə bərabərdir. Bu variantları ardıcıl olaraq nəzərdən keçirək.

- b həddini 0 vuruq, a həddini 4 vuruq götürsək, a^4 həddi alınır və bu cür ${}_4C_0$ və ya 1 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 1-dir.
- b həddini 1 vuruq, a həddini 3 vuruq götürsək, a^3b həddi alınır və bu cür ${}_4C_1$ və ya 4 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 4-dür.
- b həddini 2 vuruq, a həddini 2 vuruq götürsək, a^2b^2 həddi alınır və bu cür ${}_4C_2$ və ya 6 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 6-dır.
- b həddini 3 vuruq, a həddini 1 vuruq götürsək, ab^3 həddi alınır və bu cür ${}_4C_3$ və ya 4 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 4-dür.
- b həddini 4 vuruq, a həddini 0 vuruq götürsək, b^4 həddi alınır və bu cür ${}_4C_4$ və ya 1 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 1-dir.

Binomun qüvvətlərini, binomial açılışları və hədlərin əmsallarını cədvəldə yerləşdirək.

Binom	Binomial ifadələrin açılışı	Paskal üçbucağı
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2$	$1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1

Göründüyü kimi, əmsalların düzülüşü maraqlı riyazi xassələrə malik “üçbucaq” yaradır. Buna Paskal üçbucağı deyilir.

Binomial açılışlar

Paskal üçbucağı. Paskal üçbucağı onun yaradıcısı olan və XVI əsrdə yaşamış böyük fransız riyaziyyatçısı, fiziki və filosofu Blez Paskalın şərəfinə adlandırılmışdır. Paskal üçbucağının təpə nöqtələrində 1 dayanır. Üçbucağı təşkil edən bütün sətirlər vahidlə başlanır və vahidlə də qurtarır. Hər sonrakı sətirdəki hər bir ədəd əvvəlki sətirdəki iki qonşu ədədin cəminə bərabərdir. Hər sonrakı sətirdəki ədədlərin sayı özündən əvvəlkindən bir ədəd çoxdur.

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Paskal üçbucağı	Paskal üçbucağı kombinizonla
1	${}_0C_0$
1 1	${}_1C_0 \quad {}_1C_1$
1 2 1	${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$
1 3 3 1	${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$
1 4 6 4 1	${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$
1 5 10 10 5 1	${}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5$

${}_5C_2$-nin həqiqətən Paskal üçbucağının 5-ci sətrinin uyğun elementi olduğunu yoxlayaq.

$${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2} = 10$$

Binomun qüvvəti	Açılışı	Paskal üçbucağı
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	${}_1C_0a + {}_1C_1b$	1 1
$(a+b)^2$	${}_2C_0a^2 + {}_2C_1ab + {}_2C_2b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	${}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2\mathrm{y} + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	${}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	${}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$	1 5 10 10 5 1

Binomun açılışında hədlərin əmsalları ardıcıl olaraq Paskal üçbucağının uyğun sətrindəki ədədlərdir. Soldan sağa 1-ci həddə a-nın qüvvəti binomun qüvvətinə bərabərdir, hər sonrakı həddə bir vahid azalır, b-nin qüvvəti isə artır.

Binomial açılışlar

Paskal üçbucağının növbəti 6-cı sətri aşağıdakı kimi yaranır.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ {}_6C_0 & & {}_6C_1 & & {}_6C_2 & & {}_6C_3 & & {}_6C_4 & & {}_6C_5 & & {}_6C_6 \end{array}$$

Binomial açılış üçün ümumiləşmiş düstur yaza bilərik.

Binomial açılış

İstənilən a, b ədədləri və $n \geq 0$ ədədi üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + {}_nC_{n-1}\, a^1b^{n-1} + {}_nC_na^0b^n$$

"Σ" ***siqma*** işarəsindən istifadə etməklə bu düsturu qısa şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_ka^{n-k}b^k$$

$(a+b)^n$ binomunun açılışında $n+1$ sayda hədd var. Binomun istənilən $(k+1)$-ci həddi $T_{k+1} = {}_nC_ka^{n-k}b^k$ şəklindədir, $(k = 0, 1, 2, ..., n)$

- n dərəcəli binomun açılışında $n+1$ sayda element var
- binomun istənilən həddini $T_{k+1} = {}_nC_ka^{n-k}b^k$ düsturu ilə tapmaq olar
- binomun istənilən həddinin qüvvət üstlərinin cəmi n-ə bərabərdir
- binomial əmsalların cəmi 2^n-ə bərabərdir:

$$ {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$$

Binomun düsturunda $a = b = 1$ götürməklə sonuncu bərabərliyi yoxlayın.

Binomun qüvvətinin açılışında toplananın əmsalı ilə binomial əmsal bir-birindən fərqlidir.

Nümunə. $(x+2)^5 = {}_5C_0{\cdot}x^5 + {}_5C_1{\cdot}x^4{\cdot}2 + {}_5C_2{\cdot}x^3{\cdot}2^2 + {}_5C_3{\cdot}x^2{\cdot}2^3 + {}_5C_4{\cdot}x{\cdot}2^4 + {}_5C_5{\cdot}2^5 =$
$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

Bu ayrılışda məsələn, üçüncü toplananın əmsalı 40, onun binomial əmsalı isə ${}_5C_2 = 10$ olur.

Nümunə. $(2p-1)^6$ binomunun açılışında 4-cü həddini yazın.

Həlli: Burada $a = 2p$, $b = -1$, $n = 6$

$T_4 = T_{3+1} = {}_6C_3{\cdot}a^{6-3}{\cdot}b^3 = 20{\cdot}(2p)^3{\cdot}(-1)^3 = -160p^3$

Binomial açılışlar

Öyrənmə tapşırıqları

1. Binomun qüvvətinin açılışında neçə hədd var?

a) $(x-3y)^5$ b) $(2z+3z^2)^7$ c) $(c+6)^q$ d) $(c+6)^{k-2}$

2. Açılışları yazın.

a) $(x-3)^4$ b) $(x+2)^5$ c) $(1+2c)^6$ d) $(1-i)^5$

3. Binomun tələb olunan həddini tapın.

a) 5-ci həddini: $(x+y)^8$
b) 4-cü həddini: $(a-2b)^6$
c) 7-ci həddini: $(1-2z)^{12}$
d) ortadakı həddini: $(2x+y)^5$
e) sondan ikinci həddini: $(u^2+1)^8$
f) sondan 3 həddini: $(x-y)^{10}$

4. $(x+y)^{10}$ binomunu açmadan tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Binomun açlışındakı hədlərinin sayını yazın.
b) Binomun açılışında 6-cı həddi yazın
c) ${}_{10}C_r$ binomial əmsalının ən böyük qiyməti binomun hansı həddinə aiddir?

5. Binomial açılışları $(a+b)^n$, $n \in$ N şəklində yazın.

a) ${}_4C_0z^4 + {}_4C_1z^3t + {}_4C_2z^2t^2 + {}_4C_3zt^3 + {}_4C_4t^4$
b) ${}_5C_0m^5 + {}_5C_1m^4y + {}_5C_2m^3y^2 + {}_5C_3m^2y^3 + {}_5C_4my^4 + {}_5C_5y^5$

6. a) $(x+y)^3$ və $(x-y)^3$ binomial açılışılarının oxşar və fərqli cəhətlərini yazın. Fikirlərinizi $(x-y)^n$ binomial açılışı üçün ümumiləşdirin.

7. Paskal üçbucağının verilən sətirlərini kombinezonla ifadə edin.

a) 1 5 10 10 5 1
b) 1 7 21 35 35 21 7 1
c) 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

8. İlqar deyir ki, Paskal üçbucağının hər bir sətrini 11^n kimi ifadə etmək olar. Bu fikri yoxlayın.

9. Paskal üçbucağına görə yerinə yetirin.

a) Paskal üçbucağının verilən hər bir sətrindəki hədlərin cəmini tapın.
b) Paskal üçbucağının 9-cu sətrindəki hədlərin cəmini tapın.
c) Paskal üçbucağının n-ci sətrindəki hədlərin cəmini tapın.
d) Bu xassəni binomial açılışda əmsallara tətbiq edin.

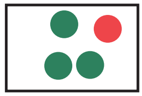
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

10. a) $(x+2)^n$ binomunun açılışında binomial əmsalların cəmi 16 olarsa, ikinci həddin əmsalını tapın.

b) $(x+\frac{1}{x})^8$-in ayrılışında x-dən asılı olmayan həddi tapın.

Bernulli sınaqları

Bernulli sxemini aydınlaşdırmaq üçün aşağıdakı məsələyə baxaq.



Oyunda qalib gəlmə ehtimalı $\frac{3}{4}$ isə (yaşıl kürənin çıxması), məğlub olmaq (qırmızı kürənin çıxması) ehtimalı $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ olacaq.

4 oyunda qələbə və məğlubiyyət saylarına görə ehtimalları hesablayaq.

1) P(4 oyunun hamısında qalib gəlmə ehtimalı) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$

2) P(4 oyunun hamısında məğlub olma ehtimalı) $=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$

3) 4 oyundan 3-də qalib gəlmə variantları və hər birinin ehtimalı:

(Q,Q,Q,M) P(4-cüdən başqa hamısında qalib) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$

(Q,Q,M,Q,) P(3-cüdən başqa hamısında qalib) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(Q,M,Q,Q) P(2-cüdən başqa hamısında qalib) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(M,Q,Q,Q) P(1-cidən başqa hamısında qalib) $=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

Oyunçunun 4 oyundan 3-də qalıb gəlməsinin mümkün variantlarının sayını kombinizonla da hesablamaq olar. ${}_4C_3=\frac{4!}{3!}=4$ olacaq. Variantların ehtimalı eyni olmaqla $\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1$-ə bərabərdir. Bu hadisənin ehtimalını aşağıdakı kimi hesablamaq olar.

$$P(\text{4 oyunun 3-də qalib})={}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=4\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{108}{256}$$

Analoji qayda ilə digər sityuasiyaları araşdıraq.

4) 4 oyundan 2-də qalib gəlmə ehtimalı

$$P(Q,Q,M,M)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{256}$$

4 oyundan 2-sində qalib gəlməyin mümkün variantlarının sayı: ${}_4C_2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

Yəni 6 halın hər birində qalib gəlmək ehtimalı $\frac{9}{256}$ -dur.

$$P(\text{4 oyundan 2-də qalib})={}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{54}{256}$$

5) 4 oyundan 1-də qalib gəlmə ehtimalı.

$$P(Q,M,M,M)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{256}$$

$$P(\text{4 oyundan 1-i qalib})={}_4C_1\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{64}=\frac{12}{256}$$

Biz komandanın 4,3,2,1,0 oyunda qalib gəlmək ehtimallarını tapdıq. Əgər bu ehtimallar düzgün hesablanmışsa, onların cəmi vahidə bərabər olmalıdır.

P(4 uduş) + P(3 uduş) + P(2 uduş)+ P(1 uduş)+ P(0 uduş) = 1

Yoxlayaq: $\frac{81}{256}+\frac{108}{256}+\frac{54}{256}+\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=1$

Bernulli sınaqları

Yuxarıda təsvir olunan məsələ binomial sınaqlar adlanır. Çünki bu cür məsələlərdə situasiyaları uyğun binomial açılışın hədləri ilə ifadə etmək mümkündür. Məsələn, nəzərdən keçirdiyimiz məsələ

$(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$ binomial açılışa uyğundur, Binomial sınaqlara Bernulli sınağı da deyilir.

Bu açılışı məsələdəki situasiyaya uyğun p (qalib) və q (məğlub) dəyişənləri ilə ifadə etsək, binomial açılışda hər bir həddin real situasiyaya uyğun gəldiyini görmək olar. $(p+q)^4 = {}_4C_0p^4 + {}_4C_1p^3q + {}_4C_2p^2q^2 + {}_4C_3pq^3 + {}_4C_4q^4$

Burada p uğurlu hadisənin (yaşıl çıxma) ehtimalıdır və $p = \frac{3}{4}$, q uğursuz (qırmızı çıxma) hadisənin ehtimalıdır və $q = \frac{1}{4}$.

Bernulli sınağı və ehtimal

n sayda asılı olmayan sınaqda uğurlu hadisənin ehtimalı p olarsa, onda m uğurlu, $n-m$ uğursuz hadisənin ehtimalı

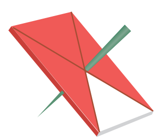
$$P(n \text{ sınaqda, } m \text{ uğurlu}) = {}_nC_m p^m q^{n-m} \text{ kimi olacaq.}$$

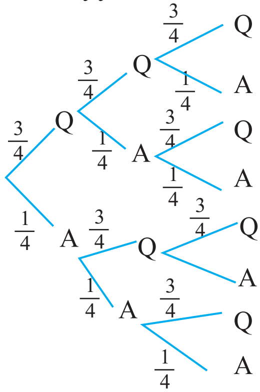
Binomial sınaq və ya Bernulli sınağı yalnız aşağıdakı şərtlər ödənildikdə doğrudur.

- Hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi var.
- Sınaqların sayı məlumdur.
- Sınaqlar asılı deyil
- Hər sınaq bərabər ehtimallıdır

Bernulli sınağını sxematik olaraq aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraq.

Nümunə 1. Çarx 4 bərabər hissədən ibarətdir. 3 hissəsi qırmızı, bir hissəsi ağ rəngdədir. Çarx fırlandıqdan sonra ya qırmızı hissədə dayanır, ya da ağ. Üç dəfə fırlandıqda mümkün vəziyyətlər sxemlə verilmişdir.





QQQ	3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$
QQA	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
QAQ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
QAA	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
AQQ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
AQA	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
AAQ	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
AAA	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$P(3 \text{ qırımızı}) = 1\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$P(2 \text{ qırımızı}) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$

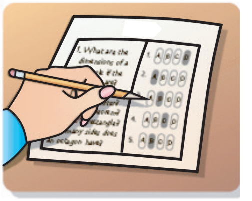
$P(1 \text{ qırımızı}) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$P(0 \text{ qırımızı}) = 1\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Göründüyü kimi, əmsallar Paskal üçbucağının 3-cü sətirindəki ədədlərlə eynidir: 1 3 3 1

Həmçinin binomal açılışla da əlaqəni görmək mümkündür.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Burada $a = \frac{1}{4}$ və b $= \frac{3}{4}$ Bu hadisə üçün Bernulli düsturu $P(m \text{ qırmızı}) = {}_3C_m \left(\frac{3}{4}\right)^m\left(\frac{1}{4}\right)^{3-m}$ $m = 0,1,2,3$. m-in qiymətlərini yerinə yazmaqla düsturu yoxlayın.



Nümunə 2. 5 sualın hər birinin 4 cavab variantı verilmişdir. Nərgizin 5 sualdan 4-nə düzgün cavab verməsi ehtimalını hesablayın. Binomun açılışı ilə ehtimalın tapılması arasında əlaqəni araşdırın.

Həlli: Nərgizin 5 suala düzgün və ya səhv cavab verməsinin neçə mümkün variantı olduğunu tapaq.

$(d+s)^5 = {}_5C_0d^5 + {}_5C_1d^4s + {}_5C_2d^3s^2 + {}_5C_3d^2s^3 + {}_5C_4ds^4 + {}_5C_5s^5$

Nərgizin 5 sualdan 4-nə düzgün cavab verməsinin müxtəlif 5 variantı olduğu sxemdən görünür. Deməli, bu hadisənin ehtimalı ${}_5C_1d^4s$ kimi olacaq. Analoji olaraq digər situasiyaların da binomun hədləri arasındakı əlaqəsini görmək olar. Bu əlaqəni cədvəldə ümumiləşdirək.

s	d	d	d	d
d	s	d	d	d
d	d	s	d	d
d	d	d	s	d
d	d	d	d	s

Əmsal	Hədd	Situasiyada mənası
${}_5C_0 = 1$	d^5	5 düzgün cavabın 1 variantı var
${}_5C_1 = 5$	d^4s	4 düzgün 1 səhv cavabın 5 variantı var
${}_5C_2 = 10$	d^3s^2	3 düzgün 2 səhv cavabın 10 variantı var
${}_5C_3 = 10$	d^2s^3	2 düzgün 3 səhv cavabın 10 variantı var
${}_5C_4 = 5$	ds^4	1 düzgün 4 səhv cavabın 5 variantı var
${}_5C_5 = 1$	s^5	5 səhv cavabın 1 variantı var

Təsüdüfi seçmə ilə 4 suala düzgün, 1 suala səhv cavab vermək ehtimalını tapaq. Hər düzgün cavabın ehtimalı $\frac{1}{4}$ -dir. Səhv cavabın ehtimalı $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$P(4d,\ 1s) = 5d^4s = 5\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{1024} \quad \text{və ya} \approx 1{,}5\%$$

Bu qayda ilə mümkün situasiyaların ehtimalını hesablayın, onları toplayın cəmin vahidə (və ya 100%-ə) bərabər olduğunu yoxlayın.

Nümunə 3. Dörd uşaqlı ailədəki uşaqlardan 3-nün oğlan, 1-nin qız olması ehtimalını tapın.

Hər uşaq üçün iki mümkün hal var: ya oğlandır, ya da qız. Hər ikisinin ehtimalı $\frac{1}{2}$-dir. P(n sınaqda, m uğurlu) $= {}_nC_mp^mq^{n-m}$

$n=4, m=3, p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$; P(4 uşaqdan,3-ü oğlan) $= {}_4C_3p^3q^{4-3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Deməli, 4 uşaqdan 3-nün oğlan olması ehtimalı $\frac{1}{4}$ və ya 25%-dir.

Uyğun binomial açılışda situasiyanı ifadə edən hədd qırmızı rənglə göstərilmişdir.

$(o+q)^4 = o^4 + 4o^3q + 6o^2q^2 + 4oq^3 + q^4$ P(4 uşaqdan, 3-ü oğlan)

Nümunə 4. Şirkət satış kampaniyasında uşaq yeməyi qutusunda kuponlar yerləşdirir. Hər 20 qutudan 3-nə uduşlu kupon qoyulur. 5 qutu uşaq yeməyi alan müştəri üçün 2 qutuda uduşlu kupon çıxması ehtimalı nə qədərdir? Kalkulyatordan istifadə edin.

Həlli: Uğurlu hadisə qutudan uduşlu kuponun çıxması: P (uduşlu kupon) $= \frac{3}{20}$
Uğursuz hadisə qutuda uduşlu kuponun olmaması:

$$P\ (\text{uduşlu kupon yoxdur}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$P\ (\text{5 qutudan 2-də uduş}) = {}_5C_2 p^2 q^3 = 10\left(\frac{3}{20}\right)^2\left(\frac{17}{20}\right)^3 \approx 0{,}138$$

Nümunə 5. Qəpik pul 10 dəfə atılmışdır. Ən azı 8 dəfə pulun xəritə üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalı nə qədərdir?
Həlli: Ən azı 8 dəfə xəritə üzünün düşməsi hadisəsi uğurlu hadisədirsə, deməli, 9 dəfə,10 dəfə xəritə üzünün düşməsi hadisəsi də uğurlu hadisələrdir. Bu hadisələrin ehtimalları ayrı-ayrı tapılıb toplanmalıdır. Qəpik bir dəfə atıldıqda xəritə üzünün düşmə ehtimalı $\frac{1}{2}$-dir.

$$P\ (\text{ən azı 8 xəritə}) = P\ (\text{8 xəritə}) + P\ (\text{9 xəritə}) + P\ (\text{10 xəritə})$$

$$P\ (\text{ən azı 8 xəritə}) = {}_{10}C_8 p^8 q^2 + {}_{10}C_9 p^9 q^1 + {}_{10}C_{10} p^{10} q^0 =$$

$$= 45\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{56}{1024} \approx 0{,}55$$

1. Hadisələrdən hansına binomial sınaq demək olar?

a) Kamal kimya fənni üzrə 20 test sualının hər birinə verilmiş 4 cavabdan birini təsadüfi seçir.
b) Plastik stəkan 50 dəfə atılır, stəkanın neçə dəfə oturacağı və ya ağzı üstə düşməsi sayılır.
c) Oyun zəri 100 dəfə atılır. Hər üzün düşməsinin bərabər ehtimallı olub olmadığlı yoxlanılır.
d) Oyun zəri 100 dəfə atılır. 4 xallı üzünün neçə dəfə düşməsi yoxlanılır.

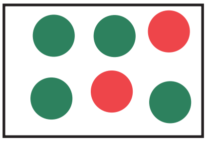
2. Qəpik pul 5 dəfə atılmışdır. Xəritə üzünün düşmə ehtimalı nə qədərdir?
a) P (bir dəfə); b) P(3 dəfə); c) P(4 dəfə); d) P(0 dəfə); e) P (2 dəfə)

3. Basketbol komandasının oyunda qalib gəlmək ehtimalı $\frac{2}{3}$ -dir. Bu komandanın növbəti 5 oyundan 3-də qalib gəlmək ehtimalı nə qədərdir?

4. Son araşdırmalar göstərir ki, yeni avtomobillərin hər 3-ündən biri kreditlə satılır. Təsadüfi seçilmiş 4 yeni avtomobildən 3-nün kreditlə alınmış olması ehtimalını hesablayın.

5. İstehsal konveyerindən bir dövrədə keçən detalların 2%-nin yararsız olduğu aşkar edildi. Təsadüfi götürülmüş 5 detaldan verilən sayda detalın yararsız olma ehtimalını tapın.
a) P (yalnız 2-si yararsız) b) P (ən çoxu biri yararsız)
c) P (ən çoxu 2-si yararsız)

6. Qutuda 6 şar var, 6 dəfə şar çıxarılmasına uyğun situasiyaların ehtimalını binomial açılış yazmaqla göstərin. Uğurlu hadisə yaşıl şarın çıxmasıdır. Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın. Bütün hadisələrin ehtimalları cəminin 1-ə bərabər olduğunu göstərməklə həllinizi yoxlayın.

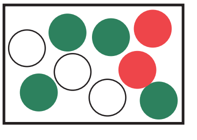


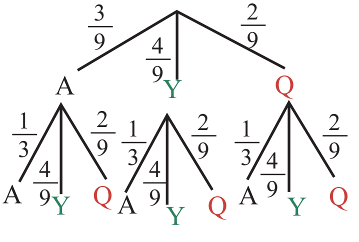
Situasiya	Binomial hədd
6 yaşıl	${}_6C_0p^6$
5 yaşıl 1 qırmızı	${}_6C_1p^5q^1$
4 yaşıl 2 qırmızı	${}_6C_2p^4q^2$
. . .	. . .
Binomial açılış: $(p + q)^x = ...$	

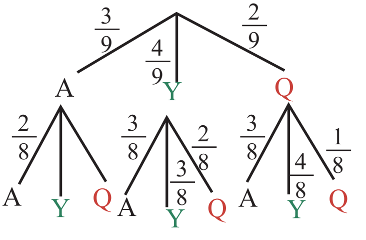
7. Yoxlama zamanı 1000 CD diskdən 50-nin yararsız olduğu aşkar olundu.
a) Təsadüfi seçilmiş bir diskin yararsız olması ehtimalı nə qədərdir?
b) Keyfiyyət nəzarətçisi təsadüfi olaraq 6 disk götürsə, situasiyalara görə ehtimalları hesablayın.

- cəmi 2 diskin yararsız olması
- ən çoxu 2 diskin yararsız olması
- ən azı 3 diskin yararsız olması

8. Qutuda 3 ağ, 4 yaşıl, 2 qırmızı şar var. Təsadüfi olaraq iki şar çıxarılsa, hər ikisinin ağ olma ehtimalını hər iki sxemə görə hesablayın. Sxemlər hansı hadisələri əks etdirir? Bu hadisələrin fərqli və oxşar cəhətlərini uyğun hadisələrdən nümunə gətirməklə yazılı izah edin.







Ümumiləşdirici tapşırıqlar

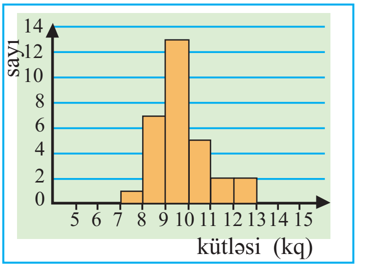
1. Qutuda 2 qırmızı, 3 ağ kürə var. Qutudan 1 kürə təsadüfən götürülür və yenidən qutuya qaytarılır. Bu sınaq 3 dəfə təkrar aparılır.
a) 1-ci və 2-ci dəfə çıxarılan kürənin ağ, 3-cü dəfə çıxarılan kürənin qırmızı olması hadisəsinin ehtimalını tapın.
b) çıxarılan 3 kürədən 2-sinin ağ olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

2. Qəpik pul 4 dəfə atılmışdır. Hər bir hadisənin ehtimalını tapın.
a) P(4 dəfə şəkil üzü) b) P(ən azı 3 dəfə xəritə üzü)
c) P (ən çoxu 2 dəfə şəkil üzü) d) P(0 xəritə üzü)

3. Qəpik atma hadisəsini əks etdirən $(x + ş)^5$ binomunun açılışını yazın. Binomun hər bir həddinin situasiyaya uyğun mənasını izah edin. Uyğun hadisələrin ehtimalını hesablayın.

4. ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ olduğunu isbat edin. $n = 7$, $k = 5$ qiymətləri üçün eyniliyi yoxlayın.

5. Histoqram fermadakı hind toyuqlarının kütləsini göstərir. Histoqrama görə tezlik cədvəli qurun. Təsadüfü olaraq iki hind toyugu seçilsə, onların hər ikisinin kütləsinin 10-kq-dan çox olma ehtimalı nə qədərdir?



6. Qutuda 4 ağ, 2 yaşıl kürə var. Onlardan 3-ü təsadüfən çıxarılır.
a) Rənginə görə hansı tərkibli kürələrin çıxması daha ehtimallıdır?
b) Çıxarılan 3 kürədən ən azı 2-sinin ağ olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

7. Verilmiş sözün hərflərini oxunuşu müxtəlif olan neçə variantda düzmək olar?
a) MUĞAN b) QƏBƏLƏ

8. Atıcının bir atəşlə hədəfi vurma ehtimalı 0,8-dir. Dörd atəşdən iksində hədəfi vurma ehtimalını tapın.

9. Dostuna zəng etmək istəyən Mustafa nömrənin son 2 rəqəmini unutmuşdur. Bu rəqəmlərin müxtəlif olduğunu bilərək, onun ilk dəfə təsadüfi yığdığı nömrənin düzgün olması ehtimalını tapın.

10. Beş nəfər (A, B, C, D və E) neçə müxtəlif üsulla sıraya düzülə bilər?
a) E ortada olmaq şərtilə;
b) A və B-nin yanaşı olması şərtilə;
c) A və B-nin yanaşı olmaması şərtilə.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Avtomobilin qiyməti alındığı birinci ildə 20%, hər sonrakı ildə isə 8% aşağı düşür. 2015-ci ildə 25 min manata alınmış avtomobilin qiyməti 2022-ci ildə neçə manat ola bilər?

2. Sinifdə 19 şagird var. Onların 10 nəfəri şahmat, 7 nəfəri futbol, 3 nəfəri isə hər iki dərnəkdə məşğul olur. Şagirdlərin neçəsi bu dərnəklərin heç birində iştirak etmir?

3. Tərkibində uyğun olaraq, 5% və 2 % nikel olan iki növ polad vardır. Tərkibində 2,5 % nikel olan 360 kq polad almaq üçün bu iki növ poladın hər birindən neçə kiloqram götürüb, birlikdə əritmək lazımdır?

4. c-nin hansı qiymətlərində verilən bərabərsizlik x-in bütün qiymətlərində doğrudur?

a) $x^2 + cx + 4 > 0$ b) $x^2 + 3x + c > 0$

5. Ardıcıllıq $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$ rekurrent münasibətlə verilmişdir. n-ci həddin düsturunu yazın.

6. Fermer yeni texnologiya tətbiq edərək, məhsul istehsalını hər il eyni faiz miqdarında artırmaqla, 2 il ərzində 150 tondan 216 tona çatdırdı. Məhsul istehsalı hər il neçə faiz artmışdır?

7. a) Hesablayın: $\sqrt[3]{(2\sin 60^\circ - 1)^3} - \sqrt{(1 - \operatorname{tg} 60^\circ)^2}$

b) $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ olduqda $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$ ifadəsini sadələşdirin.

8. a) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$, $\sin\beta = -\dfrac{9}{41}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ olarsa, $\alpha - \beta$ bucağını tapın.

b) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ olarsa, $\alpha + \beta$ bucağını tapın.

c) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ olarsa $(1 + \operatorname{tg}\alpha)\cdot(1 + \operatorname{tg}\beta)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

9. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\cos 24^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ + \sin 42^\circ$

b) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$

10. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sin x$ verilmişdir. Tapın:

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

11. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ funksiyası verilmişdir.

a) təyin oblastını tapın.

b) $f(x + 1) \geq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

12. Tənlikləri həll edin.

a) $4\cos^2 x - 3\sin x = 3$ b) $2\,\text{tg}\,x - 3\,\text{ctg}\,x - 1 = 0$

c) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ d) $\cos 3x - \cos 4x = 1 - \cos x$

13. Tənliyin verilmiş aralıqdakı köklərini tapın.

a) $\sin x = -1,\ x \in [0;\ 4\pi]$ b) $\cos x = 1,\ x \in [-\pi;\ 3\pi]$

14. Bərabərsizliyi həll edin.

a) $\cos^2 x + \frac{1}{2} > \sin^2 x$ b) $\text{tg}\,2x < \sqrt{3}$

15. a) $y = 3 + \sqrt{x-4}$ funksiyasının tərs funksiyasını tapın.

b) $y = \sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.

c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(5 + 3\cos x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

16. x-in hansı qiymətlərində $\ln(x-9)$, $\ln(x-7)$, $\ln(x-3)$ ədədləri ədədi silsilənin ardıcıl hədləridir?

17. Verilmiş funksiyanın tərs funksiyasını tapın. Verilmiş funksiyanın və tərs funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $y = 2^{x-1} + 3$ b) $y = 1 + \log_2(x+3)$

18. Tənlikləri həll edin.

a) $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$ b) $0{,}2^{x-1} - 0{,}2^{x+1} = 4{,}8$

c) $5^{x-1} + 5\cdot 0{,}2^{x-2} = 26$ d) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

e) $\log_{x-1}2 = -0{,}5$ f) $\log_5(2 + \log_3(3+x)) = 0$

g) $\log_2(2^{2x} + 16^x) = 2\log_4 12$ h) $\log_5 3 = -\frac{\log_2(1+x)}{\log_2 5}$

i) $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$ j) $\log_{3x}\frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$

19. Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x} < 5\frac{4}{9}$ b) $0{,}9^x \geq 1\frac{19}{81}$

c) $(x^2 - 2x - 3)\cdot(2^x - 8) \leq 0$ d) $2^{\text{tg}\,x} > \sin\frac{5\pi}{6}$

e) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{9}}27$ f) $\frac{\log_3(6-2x)}{\log_{0,3}5} > 0$

g) $\log_3(2x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0$ h) $\log_{\frac{1}{2}}|3-x| > -1$

20. Hesablayın.

a) $\left(\cos\frac{\pi}{15} - i\cdot\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10}$ b) $\left(\sin\frac{4\pi}{9} - i\cdot\cos\frac{5\pi}{9}\right)^{27}$

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

21. $x^4 + 4x^2 - 5$ çoxhədlisini xətti vuruqlara ayırın.

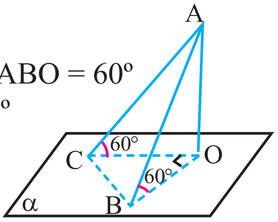
22. Çevrə üzərində 10 nöqtə qeyd edilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə yerləşən neçə üçbucaq qurmaq olar?

23. Qutuda 30 qara, x sayda ağ kürə var. Təsadüfən götürülən bir kürənin ağ olması ehtimalı $\frac{2}{5}$ olarsa, x-i tapın.

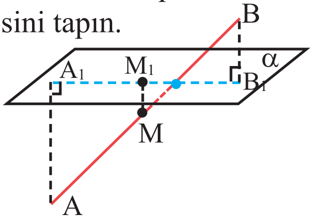
24. $2^0 \cdot {}_6C_0 + 2^1 \cdot {}_6C_1 + 2^2 \cdot {}_6C_2 + 2^3 \cdot {}_6C_3 + 2^4 \cdot {}_6C_4 + 2^5 \cdot {}_6C_5 + 2^6 \cdot {}_6C_6$ cəmini hesablayın.

25. Düzbucaqlı paralelepipedin tilləri 3 sm, 4 sm və 7 sm-dir. Bir təpədən çıxan üç tilin uclarından keçirilmiş kəsiyin sahəsini tapın.

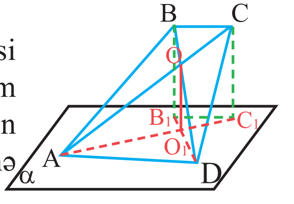
26. a) Verilir:
$AO \perp \alpha$
$\angle ACO = \angle ABO = 60^\circ$
$\angle COB = 90^\circ$
$AO = 3$
Tapın: BC



b) Müstəvini kəsən AB parçasının ucları müstəvidən 16 sm və 4 sm məsafədədir. Parçanın M orta nöqtəsinin müstəvidən məsafəsini tapın.

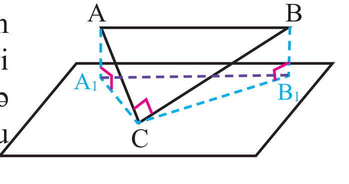


27. a) ABCD trapesiyasının AD oturacağı α müstəvisi üzərində, BC oturacağı isə müstəvidən 5 sm məsafədədir. AD:BC = 7:3 olduğuna görə trapesiyanın diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsindən α müstəvisinə qədər məsafəni tapın.



b) Düzgün dördbucaqlı prizmanın diaqonalı 9 sm, tam səthi 144 sm^2-dır. Oturacağın tərəfini və yan tili tapın.

28. Düzbucaqlı ABC üçbucağının düz bucaq təpəsindən hipotenuza paralel və ondan 1 sm məsafədə müstəvi keçirilmişdir. Katetlərin bu müstəvi üzərində proyeksiyaları 3 sm və 5 sm-dir. Hipotenuzun bu müstəvi üzərində proyeksiyasını tapın.



29. Düz üçbucaqlı prizmada oturacağın sahəsi 4 sm^2, yan üzlərinin sahələri 9 sm^2, 10 sm^2, 17 sm^2-dır. Prizmanın həcmini tapın.

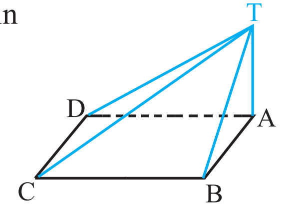
30. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $y = \dfrac{x+5}{x^2 - 3x + 4}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}x - 4}$

31. Üçbucağın tərəfləri 4 sm, 5 sm, 6 sm-dir. Bu üçbucağın kiçik bucağının kosinusunu tapın.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

32. ABCD düzbucaqlısının A təpəsindən düzbucaqlının müstəvisinə AT perpendikulyarı qaldırılmışdır. TB = 6 sm, TD = 7 sm, TC = 9 sm olarsa, AT-nin uzunluğunu tapın.



33. m parametrinin hansı qiymətində $x^2 + (2 + m)x + m - 3 = 0$ tənliyinin köklərinin kvadratları cəmi ən kiçik olar?

34. A məntəqəsindən B məntəqəsinə qədər yolun 12 km-i yoxuş, 24 km-i isə enişdir. Atlı A-dan B-yə 7 saata getdi, geriyə isə 8 saata qayıtdı. Atlının enişdə və yoxuşda sürətini tapın.

35. Qrafikləri təsvir edərək,

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

tənliklər sisteminin

a) a-nın hansı müsbət qiymətlərində iki həlli;

b) a-nın hansı qiymətində üç həlli olduğunu araşdırın.

c) a-nın elə qiyməti varmı ki, sistemin dörd həlli olsun?

36. Üç anbarda 920 t buğda var və birinci anbardakı buğda ikincidəkindən 30 t azdır, ikinci və üçüncü anbarlardakı buğdanın kütlələri nisbəti isə 8 : 9 kimidir. Hər anbarda neçə ton buğda var?

37. Üçbucağın tərəfləri 10 sm və 12 sm, onlar arasındakı bucağın sinusu 0,6-ya bərabərdir. Bu üçbucağın perimetrini tapın. Məsələnin neçə həlli var?

38. Tərəfləri 5 dm, 6 dm və 7 dm olan üçbucağın tənbölənlərini tapın.

39. Tərəfləri 5 sm, 6 sm və 7 sm olan üçbucağın medianlarını tapın.

40. $y = -2\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$ düsturu ilə verilmiş harmonik rəqsin amplitudunu, tezliyini, əsas dövrünü tapın.

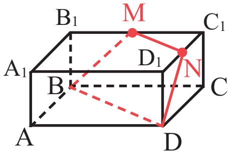
41. Verilir: Düzgün dördbucaqlı prizma

$B_1M = MC_1$

$C_1N = ND_1$

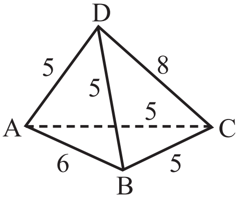
$AB = BC = 8$

$AA_1 = 4$



Tapın: BMND dördbucaqlısının sahəsini.

42. Ölçüləri verilmiş tetraedrin tam səthinin sahəsini tapın.



43. Yan tili 5 sm, tam səthi 84 sm^2 olan düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfini tapın.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

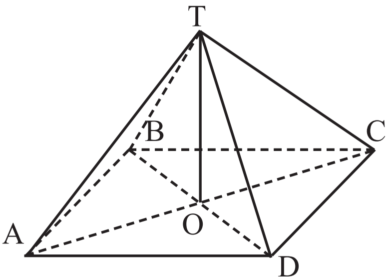
44. Yan səthi 32 sm^2, diaqonalı 6 sm olan düzgün dördbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

45. $x^2 + y^2 = 25$ tənliyi ilə verilmiş çevrə üzərində ordinatı absisindən 1 vahid böyük olan nöqtənin koordinatlarını tapın. Neçə belə nöqtə var?

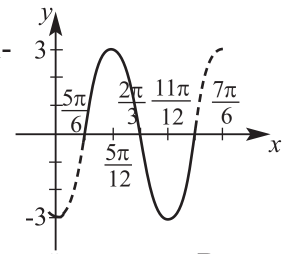
46. Ədədi silsilədə $a_1 + a_2 + a_3 = 30$, $a_1^2 + a_2^2 = 16$ olduğu məlumdur. a_5 həddi 13-ə tam bölünürsə, a_1-i tapın.

47. Soldan sağa və sağdan sola oxunuşları eyni olan (məsələn, 67876 kimi) neçə beşrəqəmli ədəd var?

48. TABCD piramidasında TO-hündürlükdür, ABCD-düzbucaqlıdır, AB = 12, AD = 16, TO = $5\sqrt{2}$ olarsa, $\angle$ TAO-nu tapın.



49. Şəkildə verilmiş qrafikinə görə həm sinus, həm də kosinus funksiyası üçün düstur yazın.



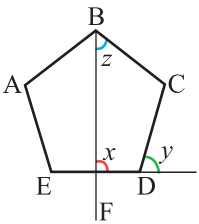
50. $y = 2\sin 3x + 3$ funksiyasının qrafikini 5 nöqtəsinə görə qurun. Bu funksiyanın qrafikinə görə $y = 2\sin 3(x - \frac{\pi}{3}) + 3$ funksiyasının qrafikini qurun.

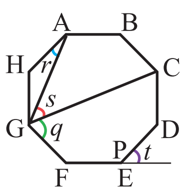
51. Düzgün çoxbucaqlıların dəyişənlərlə işarə edilmiş bucaqlarını tapın.

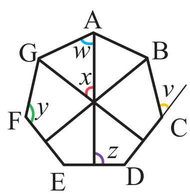
a) Düzgün beşbucaqlıda BF simmetriya oxudur.

b) Düzgün səkkizbucaqlıda GC simmetriya oxudur.

c) Düzgün yeddibucaqlıda üç simmetriya oxu göstərilmişdir.







52. Avtomobilin təkərinin çevrəsinin uzunluğu 50 sm-dir. Avtomobiin təkəri: a) 5 dəfə; b) 500 dəfə tam dövr etdikdə qət erdiyi məsafəni tapın.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

53. Bir fincan qaynadılmış suyun (100º) otaq temperaturuna qədər (20º) soyuması gözlənilir. Müşahidələr göstərir ki, temperatur zamandan eksponensial asılı olaraq hər beş dəqiqədə 25% aşağı düşür. a) Temperaturun zamandan asılı dəyişməsini $y = ab^x + c$ şəklində modelləşdirin. b) Neçə dəqiqədən sonra suyun temperaturu otaq temperaturu ilə eyni olacaq?

54. Vulkan püskürməsi zamanı yanmış ağacın kömüründə qalan karbon -14 maddəsinin 45%-i qalmışdır. Vulkan püskürməsi neçə il əvvəl baş vermişdir?

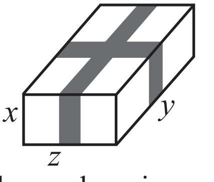
55. Yeni koordinatları müəyyən edin.

a) (5;3) nöqtəsi koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətdə 90° döndükdə.

b) (4;2) nöqtəsi koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 180° döndükdə.

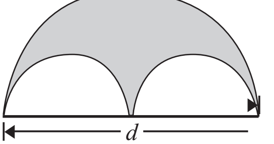
c) (3;2) nöqtəsi y oxuna nəzərən əksetmədən sonra koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində tam (360º) dönmənin $\frac{3}{4}$ -ü qədər döndükdə.

d) (2;3) nöqtəsi 3 vahid sağa sürüşdürülüb, koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətində 90° döndükdə.



56. Qutunun verilən $x = 3$ sm, $y = 8$ sm, $z = 5$ sm ölçülərinə görə onun üzərindki yapışqanlı lentin uzunluğunu tapın.

57. Həsən nənəsindən neçə yaşı olduğunu soruşur. Nənəsi ona belə cavab verir: mən beş yaşımda məktəbə getmişəm, ömrümün dörddə bir hissəsini təhsilimlə məşğul olmuşam, sonra işə başladım və burada ömrümün yarısı keçdi. İndi də 15 ildir ki, nəvələrimə baxıram. Sən hesabla mənim neçə yaşım var? Həsənin nənəsinin yaşını siz də hesablayın.



58. Şəkildə üç yarımdairə təsvir edilmişdir. d = 18 sm olduğuna görə rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.

59. Aşağıdakı məlumat bir ay müddətində düşən yağıntının miqdarını (0,1mm dəqiqliklə) göstərir. Məlumatı gövdə-budaq-diaqramı ilə təqdim edin.

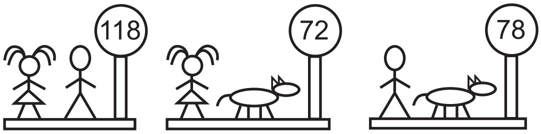
1,3; 2,0; 2,3; 3,2; 3,4; 1,8; 3,1; 2,3; 1,9; 2,6;
1,6; 0,0; 2,4; 3,1; 0,6; 0,7; 0,3; 0,0; 2,2; 1,5;
3,6; 2,3; 1,8; 2,7; 3,0; 2,9; 1,2; 2,2; 1,4; 3,3

60. Çevirmələri yerinə yetirin.

1) $2cm^3 \rightarrow mm^3$	2) $0{,}003cm^3 \rightarrow mm^3$
3) $3{,}4m^3 \rightarrow sm^3$	4) $0{,}015m^3 \rightarrow sm^3$
5) $550000\ mm^3 \rightarrow sm^3$	6) $1200000\ sm^3 \rightarrow m^3$
7) $0{,}5m^3 \rightarrow$ litr	8) 53000 ml $\rightarrow$ litr

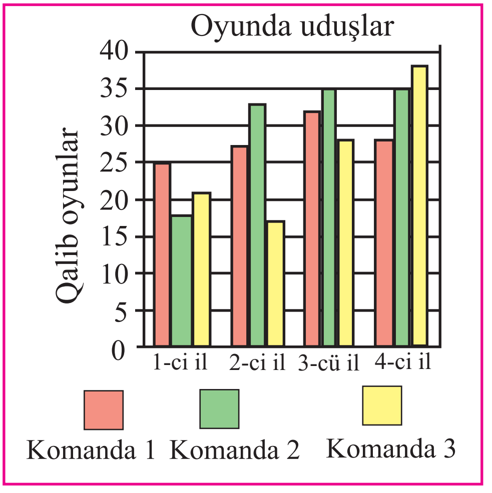
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

61. Tərəzilər oğlan, qız və qoyunun kütlələrindən ikisini göstərir. Şəkildə verilənlərə görə hər birinin kütləsinin neçə kiloqram olduğunu tapın.



62. Barqarf son 5 il ərzində 3 komandanın qalib gəldiyi oyunlar haqqında məlumatı əks etdirir. Bu məlumatlara görə aşağıdakı fikirlərdən hansı doğrudur?

a) Komanda -3 həmişə ikincidir.
b) Komanda -1-in nəticələri bütün komandalardan üstündür.
c) Komanda -1 həmişə Komanda- 3-ə nisbətən daha çox oyunda qalib gəlmişdir.
d) Komanda -2 hər il əvvəlki ilə görə daha çox oyunda qalib gəlmişdir.



63. Rəşad atıcılıq klubunun üzvüdür. Onun nəticələri atışlarının 80%-də hədəfi vurduğunu göstərir.

a) Rəşadın növbəti atışında hədəfi vurmamaq ehtimalını tapın.
b) Rəşadın 3 dəfə dalbadal hədəfi vurmaq ehtimalını tapın.
c) Rəşadın hədəfi birinci atışda vurmaq, sonrakı iki atışda vurmamaq ehtimalını tapın.

64. Dayanacaqdakı avtomobillərdən 600 avtomobilin istismar illəri və mühərrikinin həcmi (kub sm) haqqında məlumat aşağıdakı tezlik cədvəlində verilmişdir.

		Mühərrikin həcmi			
		0 – 1000	1001 – 1500	1501 – 2000	2001 +
İstismar ili	3 ildən az	50	80	160	20
	3 ildən çox	60	100	120	10

a) Təsadüfi seçilmiş bir avtomobilin istismar müddətinin 3 ildən az olması ehtimalı nə qədərdir?
b) Bu nəticələr 5400 avtomobil üşün təqdim olunarsa, onlardan neçəsinin mühərrikinin həcmi 2000-dən böyük olması və 3 ildən çox işləndiyi barədə proqnoz vermək düzgün olardı?

65. Düzbucaqlı paralelepiped formalı çənin oturacağının ölçüləri 50 sm və 80 sm-dir. Çənin tutumu 400 l-dir. Çənin hündürlüyünü tapın.

Funksiyalar

s. 9-11 №9 0 №10 a) 1; b) –1 №11 0 №12 b) 0; –0,75; –2 №13 d) $D(f) = (-3; 2]$, $E(f) = (-5; 5]$ №14 $b = -3$ №15 $c = 2$ №16 4 №17 a) A(2;0), B(0;–1) №19 a) $E(f) = [2; 7]$ №20 $f(-2) = 3$; $f(6) = -1$ № 21a) $f(-1) = 5$, $f(0) = 4$, $f(1)=3$

s. 13 №2 b) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$; c) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; e) $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$
№3 c) $D(f) = (-\infty; 3]$; e) $D(f) = [0; 2) \cup (2; +\infty)$; g) $D(f) = [-1; 1]$; h) $D(f) = [1; 3) \cup (3; +\infty)$; i) $D(f) = [-4; 4) \cup (4; +\infty)$

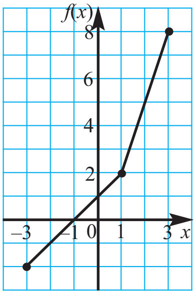
№4 b) $D(g) = (-\infty; +\infty)$, $E(g) = (-\infty; 6]$;d) $D(\varphi) = (-\infty; +\infty)$, $E(\varphi) = [3; +\infty)$; e) $D(u) = [-3; 3]$, $E(u) = [0; 3]$; f) $D(v) = [-1; 3]$, $E(v) = [0; 2]$
№5 a) $D(f) = [0; 1) \cup (1; 2]$; b) $D(f) = (-\infty; 0] \cup (1; 2]$; c) $D(f) = (1; 2]$
№6 ƏKQ = 2, $E(f) = [2; +\infty)$ №7 b) $y = 6 - x$, $0 \le x \le 5$, $1 \le y \le 6$

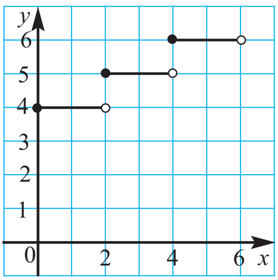
s. 16-17 №1 b) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; c) $x = 4$; d) $x = 2$ №5 2) a) $[-2; 3]$; b) –2 və 2; c) $(-2; 2)$; d) $(2; 3]$; e) $[-2; 0]\uparrow$, $[0; 3]\downarrow$; f) $x_{max} = 0$, $y_{max} = 4$; g) $[-5; 4]$
№6 a) $f(2) < f(0) < f(-4)$; c) $f(\sqrt{2}) < f(-\sqrt{3}) < f(-2)$ №11 a) ƏKQ = 2

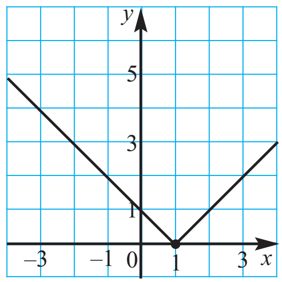
s. 19 №1 a) *tək*; c) *cüt* d) *nə tək, nə cüt* №4 c) 6; d) 4 №7 b) $f(5) < f(7)$ №8 $(-4; 4)$

s. 21 №1 a) 0; b) 5; c) –7; d) 41 №2 a) 4; c) 0; e) 2

№3 a) b) c)





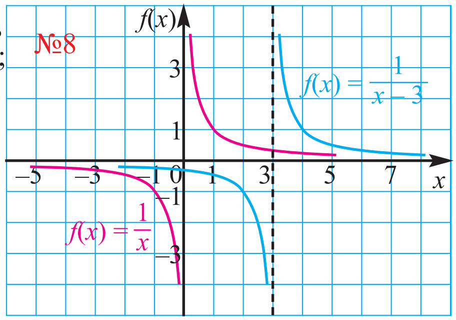


s. 22 №2 a) *hə*; b) *yox* №4 a) $f(0,1) > g(0,1)$; b) $f(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$; c) $f(2) < g(2)$

s. 24 №2 c) $y = x^3$ №4 $y = \frac{4}{x}$ №5 a) $h = \sqrt{9 - d^2}$; b) D = [0; 3], E = [0; 3]

s. 25-31 №1 a) $m = 0$, $n = 4$ d) $m = 7$; $n = -3$
№2 b) $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, *$y = x^2$ parabolası 2 vahid sağa, 1 vahid aşağı sürüşdürülür.* №5 1) b) $g(x) = (x + 3)^2 - 3$;2) b) $g(x) = f(x - 4) - 8$

№7a) $y = |x + 4| - 2$, $m = -4$, $n = -2$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-2; +\infty)$; b) $y = (x - 6)^2 + 4$, $m = 6$, $n = 4$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [4; +\infty)$

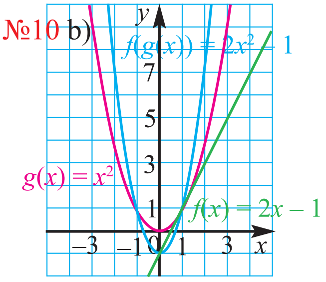


№10 a) iki vahid sağa sürüşdürülür
№13 b) $y = \sqrt{x}$ -in qrafiki x oxuna nəzərən əks edilir və bir vahid yuxarı sürüşdürülür.
№26 a) $y = 2\sqrt{x}$; b) $y = 2\sqrt{x}$

s. 33 №1 $(f+g)(1)=1$, $(f-g)(2)=3$, $(f\cdot g)(6)=-20$ №2 b) $(f+g)(x)=(x+1)^2$, $D=(-\infty;+\infty)$, $E=[0;+\infty)$; $(f-g)(x)=x^2-1$, $D=(-\infty;+\infty)$, $E=[-1;+\infty)$
$(f\cdot g)(x)=x\cdot(x+1)^2$, $D=(-\infty;+\infty)$, $E=[-\infty;+\infty)$
$(\frac{f}{g})(x)=x$, $D=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$, $E=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

s. 35-36 №3 a) 1; c) 2; d) 0 №4 a) 4; b) 50; f) –48
№7 a) $(-2;2)$; b) $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$;
№12 b) $f(x)=x^2-1$; d) x^2+x+1
№13 b) $f(-1)=-1$, $f(2)=5$, $f(3)=7$, $f(0)=1$,
$f(x)=2x+1$ №15 b) $[-2;6]$; c) $[-3;1]$

№10 b)



s. 39-40 №5 a) $f^{-1}(9)=-3$, $f^{-1}(7)=1$, $f^{-1}(2)=6$
№6 a) $y=\frac{1}{4}x$; c) $y=\frac{x+14}{3}$; i) $y=\frac{4x-24}{3}$
№12 a) $f^{-1}(x)=-\frac{\sqrt[4]{x}}{2}$; d) $f^{-1}(x)=-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ №14 ≈ 45 sm

s. 41-42 №3 a) $y=\sqrt[3]{x+1}$ №6 1) a) *cüt*; b) *tək* №7 $f(2)=10$ №10 b) –1 və 7
№11 a) 3; c) 11; f) 3; g) 7 №13 a) $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; b) (2; 5)

Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

s. 45-47 №5 b) 1; 4 vəya sonsuz sayda №10 a) 8 sm; b) $\frac{a+b}{2}$ №11 6 sm №12 6 sm
s. 48 №3 a) 6 sm ; b) 4,5 sm ; c) $\frac{bc}{a+c}$
s. 51 №3 $x=6$ №4 a) $8\sqrt{3}$; b) 4 №5 6 sm №7 $d=5\sqrt{2}$, $\varphi=45°$ №9 $a\sqrt{6}$ №10 45°
s. 53 №2 5 sm №3 12 sm №4 $\frac{\sqrt{15}}{2}$ sm №5 3 sm
s. 55-58 №2 a) hə; b) yox №3 $a\sqrt{2}$ №4 2,4 sm №5 90° №6 8 sm №8 $\sqrt{a^2+b^2}$
№16 17 sm №18 a) 17 sm; b) 9 sm ; c) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
s. 61-62 №7 6 sm №8 15 sm, 6 sm, 8 sm №9 12 sm №10 2 m №12 18 sm və ya 22 sm
s. 64 №2 $9\sqrt{3}$ sm² №3 $4\sqrt{2}$ sm №4 $48\sqrt{3}$ sm² №5 a) $\frac{3}{8}a^2$; b) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$
s. 65 №2 7,2 m №4 $2\sqrt{3}$ sm №5 13 sm və ya 15 sm №6 b) $\frac{a}{2}$; c) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Bucağın triqonometrik funksiyaları

s. 68-71 №1 c) III rüb №5 a) 4 radian №7 b) $\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}09$ radian №8 c) –67,5° №12 2) $\frac{5\pi}{4}$
s. 72-73 №3 1,2 rad №6 a) 250 radian №8 a) 192 π m²; b) 16 π = 2880°
№9 a) 3π rad/dəq; b) 45 π m/dəq №10 ≈153 m №14 0,5 radian ≈ 28,5°
№16 ≈ 245 dövr №18 0,75 dövr №20 ≈ 86°
s. 82 №5 a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\sqrt{3}$ №6 a) 0,42; b) –0,91 №7 a) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,
$\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$ №8 a) 0; b) 1; c) 1 №9 B(–1,53; 1,29)
s. 85 №5 a) 1,5; b) 1; d) 0,5 №6 b) 2 №7 a) $2\sqrt{3}$ №9 b) ƏBQ = 2, ƏKQ = 0
№10 b) ƏBQ = 2, ƏKQ = 1 №13 2 nöqtə; $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$ №15 $\frac{\pi}{3}$ və $\frac{2\pi}{3}$

s. 88-89 №3 b) – sin α; f) – cos α №6 b) $-\frac{1}{2}$; d) $-\sqrt{3}$ №9 a) – sinα №10 b) $\cos^2\alpha$
№11 a) – sin 10° №14 b) 1; d) 0 №15 a) 2·cos α; b) 0

s. 91-92 №1 f) $\operatorname{cosec}^2\alpha$; h) 1 №2 cos α = –0,8; tg α = –0,75 №5 a) $\operatorname{tg}^2\alpha$; b) 2
d) $\frac{2}{\sin\alpha}$; e) $\frac{1}{2}$ №6 a) 5; b) $\frac{1}{9}$ №7 a) 2 cos α; b) –2 cos α №10 1 $\frac{9}{16}$
№11 a) 20; b) –16 №12 –0,32 №15 a) $\cos^2\alpha$ №17 a) ƏBQ = 3, ƏKQ = –4

s. 95-96 №2 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №4 b) $\frac{1}{2}$ №5 b) 1 №6 a) 1 №7 a) $\frac{1}{2}$; b) –1 №8 a) 0 №11 a) $\sqrt{3}$; b) 1
№12 5 №13 a) 1 №14 a) $2-\sqrt{3}$ №15 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №16 a) 1 №17 a) 1 №18 a) –3; b) 3
№19 $\sin\varphi = \frac{16}{65}$, φ ≈ 14,3° №20 a) tg θ = 0,75 θ ≈ 37°

s. 97-101 №2 a) 0 №4 a) tg 5α; b) –tg4α №7 a) $\frac{1}{4}$ №10 a) $\frac{1}{2}$ №11 b) 0
№12 a) – sin $4x$·cos $10x$; b) –sin$3x$·sin$x$ №13 a) 2 ctg α; c) 2 №14 b) 0,28
№16 a) 2 №17 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ №23 a) $-\frac{240}{289}$ №29 ≈ 0,46 kv.vahid

s. 102-103 №1 1) – cos $2x$; 3) 1 №3 5) $\frac{1+\sin\alpha}{2}$ №5 b) $\frac{\sqrt{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ №6 b) 1
№8 c) ƏBQ = $\sqrt{2}$, ƏKQ = $-\sqrt{2}$ №9 $\frac{2}{\cos\alpha}$ №10 a) –1; b) 1 №11 $\frac{1}{4}$

s. 104-105 №5 a) a b) $-a$ №6 a) 1 №11 1 №14 3 №17 a) 1 №20 a) 3 b) 0,5

Sinuslar və kosinuslar teoremi

s. 109-113 №1 a) b=12; b) a ≈ 8,92; c) ∠B = 45°; d) ∠A ≈ 44° №3 a) θ = 30°; b) θ = 60°
№4 a) ∠A ≈ 36°, a ≈ 14,72, c ≈ 23,5 №5 2) *bir həlli var*; 6) *həlli yoxdur*;
9) *iki həlli var* №7 c) ≈ 34,71 №8 a) ≈ 41,6° və ya ≈138,4° №11 a) 20,26°
№12 1) ≈ 16,06 m² №14 a) $30\sqrt{3}$ №16 a) 25<BC<50 №17 ≈ 4139 m
№18 θ≈38,5° və ya θ≈21,5° №19 ≈ 47,9 m №21 φ≈92° №22 ≈ 41,5°

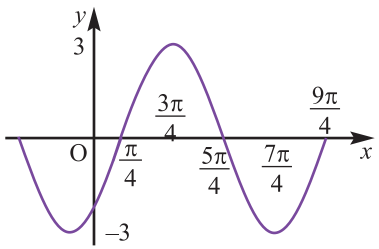
s. 116-118 №2 BC = 7; ∠B ≈ 81,6°; ∠C ≈ 38,4° №4 1) ≈ 17,4 №5 a) $\frac{12}{5}\sqrt{6}$ m;
b) 11,2 sm; c) $4\sqrt{7}$; $\sqrt{73}$; $\sqrt{145}$ №7 a) $d_1=2\sqrt{13}$, $d_2=2\sqrt{37}$ №8 c) ≈ 68°
№11 b) ≈ 42,5 km №13 ≈ 111m

s. 119-120 №2 a) ≈ 3 km; b) ≈ 8,3 km və ≈ 8,9 km №3 ≈ 12,2m №6 ≈ 191 m
№7 ≈ 15,5 km və ≈ 42,4 km №9 ≈ 85,5° №11 b) ≈ 1,5 dəqiqə

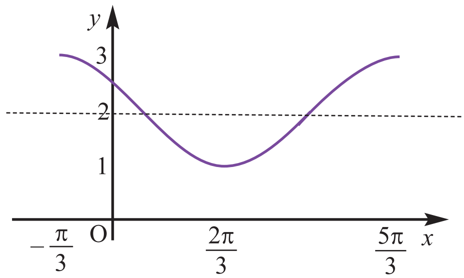
Triqonometrik funksiyalar

s. 129-135 №1 a) y =4 sin x; b) $y=\frac{1}{3}\sin x$; c) $y=\sin\frac{1}{2}x$ №6 a) A =4, T = 6π;
d) A = $\frac{1}{2}$, T = 2 №7 1) a) $y=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}$; b) $y = 4\cdot\sin 2x$; c) y = 2 sin$x$
№8 a) $y=12\sin\frac{1}{4}x$; c) $y=-0{,}8\sin\pi x$ №9 a) $y=9\cos\frac{1}{4}x$ №10 a) T = 12 π;
c) T = 30π №11 A = 0,5; T = $\frac{2}{5}$ №14 b) 75 №17 a) $y_{max} = 8$, $y_{min} = 2$,
E(y)= [2; 8] №19 a) $y = 4\sin 2(x-\frac{\pi}{4}) - 6$; b) $y = 0{,}5\sin\frac{2}{3}(x+\frac{\pi}{3}) + 2$

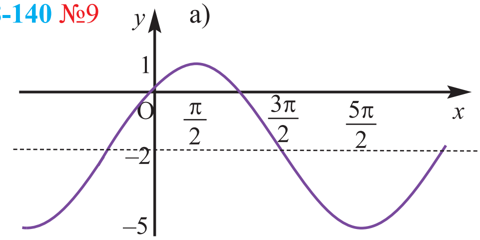
№20 a)



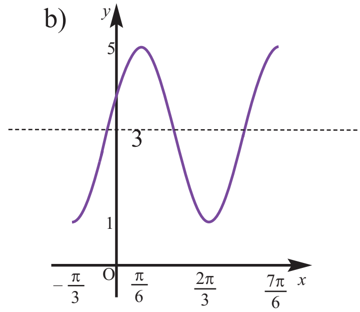
b)



s. 138-140 №9 a)



b)



№10 a) $y=3\sin 2x$; c) $y = 5\sin\frac{1}{2}x$; d) $y = -4\cos x$ №12 $y = 2\cos(x - \frac{2\pi}{3})$

s. 142-143 №1 $y = 1{,}2 - 16\cos\frac{\pi}{6}(t-1)$ №2 a) T=0,8 san b) 75 №3 a) $y = 10 - 8\cos\frac{\pi t}{30}$; b) 18 m №5 b) $H = 36 - 18\cos\frac{10\pi t}{3}$; c) 72 sm; d) 170 m/dəq

s. 145-149 №1 a) –1 b) 1 №4 b) $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$, $\theta = 120°$ c) $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$, $\theta = 300°$ №15 a) $h = 3\cdot\operatorname{tg}\alpha$ №16 a) $d = 5\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi t}{30}$ c) $d \approx 8{,}7$ m

s. 152-154 №1 b) $-\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{3\pi}{4}$ №7 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ f) –1 №10 a) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{24}{25}$ e) $\frac{63}{65}$ №11 a) $x = 4\operatorname{cosec}\theta$; b) $\approx 9°$ №12 $\theta \approx 41°$ №15 a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{3}$

s. 155-156 №1 a) $B(\frac{\pi}{6}; 2)$, $C(\frac{\pi}{3}; 2)$, $D(\frac{\pi}{2}; 2)$, $E(\frac{2\pi}{3}; 2)$, $F(\frac{5\pi}{6}; 2)$ №3 1) A=6, T=3π №5 c) $y = 5 + 2\cos 2x$ №7 $y = 12 - 10\cos\frac{\pi t}{50}$ №8 $y = 6{,}1 - 5{,}8\sin\frac{\pi}{6}(t-1)$

Çoxüzlülər

s. 161-162 №5 C üzü №6 AC = 5, AC' = 13 №7 9 sm

s. 163-165 №12 a) 26; b) 29 №13 $d_1 = 13$ sm, $d_2 = 9$ sm №14 $d_1 = a\sqrt{2}$, $d_2 = 2a$

s. 168-170 №2 b) 160 m² №5 188 sm² №7 224 sm², $18\sqrt{3}+180 \approx 211{,}2$ sm² №11 a) $S_0 = 22$ m²; b) $S_{yan} = 90$ m²; c) $S_{tam} = 134$ m² №12 d) $S_{yan} = 480$, $S_{tam} = 536$

s. 172-173 №5 200 sm² №6 a) $S_{yan} = 6$ sm² №7 140 sm² №8 36 sm² №10 5 sm

s. 176-179 №1 12 sm №2 9 sm №3 1680 sm², 96 sm², 728 sm² №7 a) 13sm və 15 sm №9 52 sm² №10 180 sm² №11 ≈ 182,6 m² №15 c) 288 sm² №16 36 sm² №17 a) 4 №19 $72\sqrt{3}$ sm² №21 $h_a = 6$ sm, $h = 3\sqrt{3}$ sm

s. 180-182 №4 a) 14 sm^2 №6 $S_1 = 25\ m^2$, $S_2 = 100\ m^2$, $S_3 = 225\ m^2$ №7 11 sm
№11 360 sm^2 №12 330 sm^2 №13 12544 sm^2 №14 a)3740 sm^2; b) ≈407 sm

s. 183 №1 88; 85; $360 + 64\sqrt{3}$; 22 №2 d) a=8sm, h=3sm, h_a= 5sm

Triqonometrik tənliklər

s. 186-192 №2 a)2) $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in Z)$ №3 a) $2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; b) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$
№5 b) 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k\ (k\in Z)$ №6 2) a) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$
№8 d)1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in Z)$ №9 b) 1) $\frac{3\pi}{4}$ 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi k\ (k\in Z)$
№10 a) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ №13 c) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$
№15 f) $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}\ (k\in Z)$ №16 b) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in Z)$; d) $\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ №17 b) 240°
№18 a) 0°; 90°; 180° №21 b) 60°; 120°; 240°; 300° №22 *altı kökü var*

s. 196-199 №2 b) $\pi k\ (k\in Z)$ c) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ №3 c) $\pi+2\pi k\ (k\in Z)$ №4 a) $-\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in Z)$
№5 a) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\in Z)$; №6 b) $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ №7 b) $\frac{\pi k}{2}\ (k\in Z)$
c) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k, (k\in Z)$; l) $\pi k, (k\in Z)$ №9 14) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$
№10 1) a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$ №15 b) 75° №16 $\theta\approx 26°$ №20 $t\approx 0,4$san
№21 a) $h(t)=1,5+2\cos\frac{\pi t}{12}$ b) ≈0,1m c) t=6 san

s. 204-206 №1 a) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ c) $(0;\pi)$ №2 a) $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ №3 a) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$
№4 b) $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ №5 c) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ №6 b) $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ №8 c) $2\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
№12 b) $\frac{\pi}{3}+2\pi k\le t\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k; (k\in Z)$; №13 b) $\frac{\pi}{4}+2\pi k\le t\le\frac{7\pi}{4}+2\pi k; (k\in Z)$;
№14 a) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\le x\le\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}; (k\in Z)$; №15 b) $-\pi+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

s. 208-209 №4 d) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, (k\in Z)$ №5 b) 20m, 24m d) ≈44 san №8 b) $60<x<300$ *olduqda*

Fəza fiqurlarının həcmi

s. 213-218 №5 225 sm^3; 120 m^3 №8 a)99ton; №10 b) V= 144 №11 875 sm^3 №12 314,4kq
№15 a) 2 sm; b) $8\sqrt{3}\ sm^3$ №17 60sm^3 №18 a) V = 6 sm^3 b) 60 sm^3 artıb
№19 840m^3 №20 288 sm^3 №21 a) V = 12 dm^3 №22 24m^3 №24 a) $160\sqrt{3}$
№25 375m^3 №27 48 sm^3 №28 1680 sm^3 №33 b)18 sm^3

s. 219-221 №1 b) 4,4 m^3; 159,3 m^3 №3 15:7 №4 2880 mm^3 №5 96 sm^3 №15 32 dm^3

s. 224-225 №2 a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{6}{7}$ №4 a) 25:9 b) 125:27 №6 a) V_1=43 sm^3
№7 a) S_2 = 175 sm^2 №9 63 sm^3 №17 12 m^2

s. 227 №1 S_{yan}=468 sm^2; S_{tam}=680 sm^2; V=1072 sm^3 №4 216 kub vahid
№5 b) $V_{piramida}$=12 ; $V_{paralelepiped}$ = 72 ; $V_1 : V_2$ = 1 : 6

s. 232 №2 a) 5 sm b) 420 sm^3 №3 1: 125 №4 272 sm^2 №9 90 sm^3, 141 sm^2

Üstlü və loqarifmik funksiyalar

s. 235-236 №5 e) 2; f) 5; i) 256 №10 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5}$; c) 2 №11 d) $a^{0,75}$ №14 b) 8; h) 8

s. 239-240 №7 a) $y=-2\left(\frac{1}{4}\right)^x$ b) $y=3\cdot 5^x$ №12 c) 3 №13 b) 3-dən kiçik qiymətlərində.

Cavablar

s. 244-245 №6 b) $y=\frac{5}{3}\cdot 3^x$ №10 b) ≈ 1587 manat
№11 a) $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=(2;+\infty)$; f) $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=(-1;+\infty)$

s. 249 №7 c) 6; d) 25; f) 9 №8 a) 2; b) $\frac{49}{3}$ c) 36 №9 a) $\frac{1}{2}$; b) 16 №10 ≈7,84 milyard

s. 251 №5 a) artan; b) azalan №6 b) $\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}3$ c) $\log_2 3>\log_5 4$ №7 $k=16$

s. 252-253 №2 a) ≈ 36 dB b) *doğru deyil* №3 a) 7,1 b) 5 dəfə №6 4,6 il, 11,7 il

s. 255-257 №3 a) $\log_2 15$ b) $\log_3 8$ g) $\log_3 800$ №5 a) $\log_2\frac{x+3}{2}$; $(x>3)$
№6 a) $a+b$; d) $a+b+1$ №8 1) a) 27; b) 49 2) a) $5x^2$ №11 2) c) 4; d) 4 h) –4

s. 259-260 №1 d) –1; 3 h) 2 №2 14) 10; 15) –3;5 №3 a) 0; 2 e) 1;2 №4 b) 1; c) 1,5;
№6 a) 27 №7 e) 4+lg7; №8 3) –1,4; 9) 1,5 №9 a) $r\approx 0{,}042$ b) ≈ 35,4 dəq
№10 b) πk, $(k\in Z)$, c) 5;7 d) –2;2

s. 262-264 №1 b) 32 e) 2 №2 b) 6; g) 9 ; *i*) $=\varnothing$ h) 4 №3 a) 4; b) 3 №4 a) 81 ; $\frac{1}{3}$
№5 a) $\frac{1}{2}$; 8 №7 d) 3; f) $\varnothing$; h) $\frac{1}{3}$; 9 №8 2) 10 №9 2 №15 3,2 bal №18 b) 9,8 il

s. 266 №1 *l*) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; p) $(-2;4)$ №2 b) $x<9$; c) $x<2$ №3 b) $x>2$
№4 a) $x\geq -1$ №5 a) $(-3;3)$ c) $[-2;-1)\cup[2;+\infty)$ d) $(2;3)\cup(7;+\infty)$
№7 1) $x>\log_8 21$ №8 1) $(-\infty;-2]\cup[5;+\infty)$ 3) $(0;\ln 2)$

s. 268-269 №1 a) $(-1;2)$ b) $(6;+\infty)$ g) $(3;+\infty)$ №2 5) $[-\frac{1}{4};+\infty)$; 8) $(-5;3]$
№3 4) $(0;2)$ 8) $(-1;0)\cup(2;3)$ 12) $(2;32)$ №5 b) ≈5,9 q №6 c) 2; h) 1
№7 c) $[\frac{1}{4};8]$ i) $(\frac{1}{3};9)$ j) $(-9;-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};9)$ №9 c) ≈15,4 il sonra

s. 270-271 №3 ≈10,3 saat №6 ≈50 il №8 $\frac{4}{15}$ №11 $y=3^{1-x}$ №12 a) 100 dəfə №16 d) 3

Kompleks ədədlər

s. 275 №1 a) 1 c) i №3 a) $x=0{,}5$; $y=2{,}5$ №5 g) $2+6i$ h) 25
№6 b) $(y+3i)(y-3i)$; c) $(2x+i)(2x-i)$ №7 a) $\frac{6}{5}$ №8 a) $\pm 2i$ c) $\pm 4i$ №9 b) $1-i$

s. 279 №3 a) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; c) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ №4 b) $1+i$
№5 a) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; b) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

s. 281 №2 a) 2^{12}; b) $2^{19}\cdot i$ №5 a) $\frac{i}{2}$; b) –32 №8 a) $12i$

s. 283 №1 b) ±2; $\pm 2i$ №4 b) 2; $-1+\sqrt{3}\,i$; $-1-\sqrt{3}\,i$;

Məlumatlar, proqnozlar

s. 300 №1 a) 6 b) 8 d) $k-1$ №7 a) ${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$ №10 a) 8; b) 5 ci hədd; 70

s. 304 №2 a) $\frac{5}{32}$; b) $\frac{5}{16}$; c) $\frac{5}{32}$; d) $\frac{1}{32}$; e) $\frac{5}{16}$ №3 $\frac{80}{243}$ №8 $\frac{8}{81}$

s. 307-313 №5 $b_n=3^n+1$ №9 b) 4 №11 a) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ b) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$
№15 c) $[-3;-1]$ №22 20 №24 $(2+1)^6=3^6=729$ №28 6 №29 12sm²
№30 a) $(-\infty;+\infty)$ b) $[6;+\infty)$ №31 $\frac{3}{4}$ №33 $m=-1$ №42 48

Ədəbiyyat

1. Cəbr. Dərslik. 9-cu sinif. Mərdanov M., Yaqubov M. və b. Çaşıoğlu, 2014.
2. Cəbr və analizin başlanğıcı. Dərslik. 10-cu sinif. Mərdanov M., Yaqubov M. və b. . Çaşıoğlu, 2011.
3. Həndəsə. Dərslik. 9-cu sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b Çaşıoğlu, 2011.
4. Həndəsə. Dərslik. 10-cu sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b. Çaşıoğlu, 2011.
5. Həndəsə. Dərslik. 11-ci sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b. Çaşıoğlu, 2011.
6. A problem solving approach to Mathematics. Rick Billstein,... Pearson, 2013.
7. Algebra 1. Edward B. Burger,... Harcourt Publishing Company, 2010.
8. Algebra 2. James E.Schulltz,... Harcourt Education Company, 2004.
9. Pre-Algebra, McDougal Littell. Houghton Mifflin Company, 2005.
10. Discovering Advanced Algebra An Investigative Approach. Grades 10–12. Jerald Murdock,... Key Curriculum Press. 2010.
11. College and Apprenticeship mathematics. Pearson Education Canada Inc., 2003.
12. Геометрия. Учебник для 7-11 классов. А.В.Погорелов, Просвещение, 1999.

http://www.classzone.com

http://www.nctm.org

https://www.engageny.org/content/precalculus-and-advanced-topics

https://www.edonline.sk.ca/webapps/moe-curriculum-BBLEARN/index.jsp

http://math.kendallhunt.com/x5273.html

https://www.khanacademy.org/math

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 10

Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə
Dərslik

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	**Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
	Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
	İlham Heydər oğlu Hüseynov
Elmi məsləhətçi	**Çingiz Qacar**
Elmi redaktor	**İbrahim Məhərov**
Dil-üslub redaktoru	**Asəf Həsənov**
Korrektor	**Tərlan Qəhrəmanova**
Bədii tərtibat	**Leyla Bəşirova**
Kompüter tərtibatı	**Mustafa Qəhrəmanov**
	Rəşad Musayev

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2017-088

Kağız formatı: 70×100 1\16, Fiziki ç.v. 20.

Ofset kağızı. Times New Roman şrifti

Səhifə sayı 320. Tiraj 15000.

Pulsuz. Bakı 2018

Radius nəşriyyatı

Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ

Əziz məktəbli !

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sənin kimi rahat istifadə edə bilsin. Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!