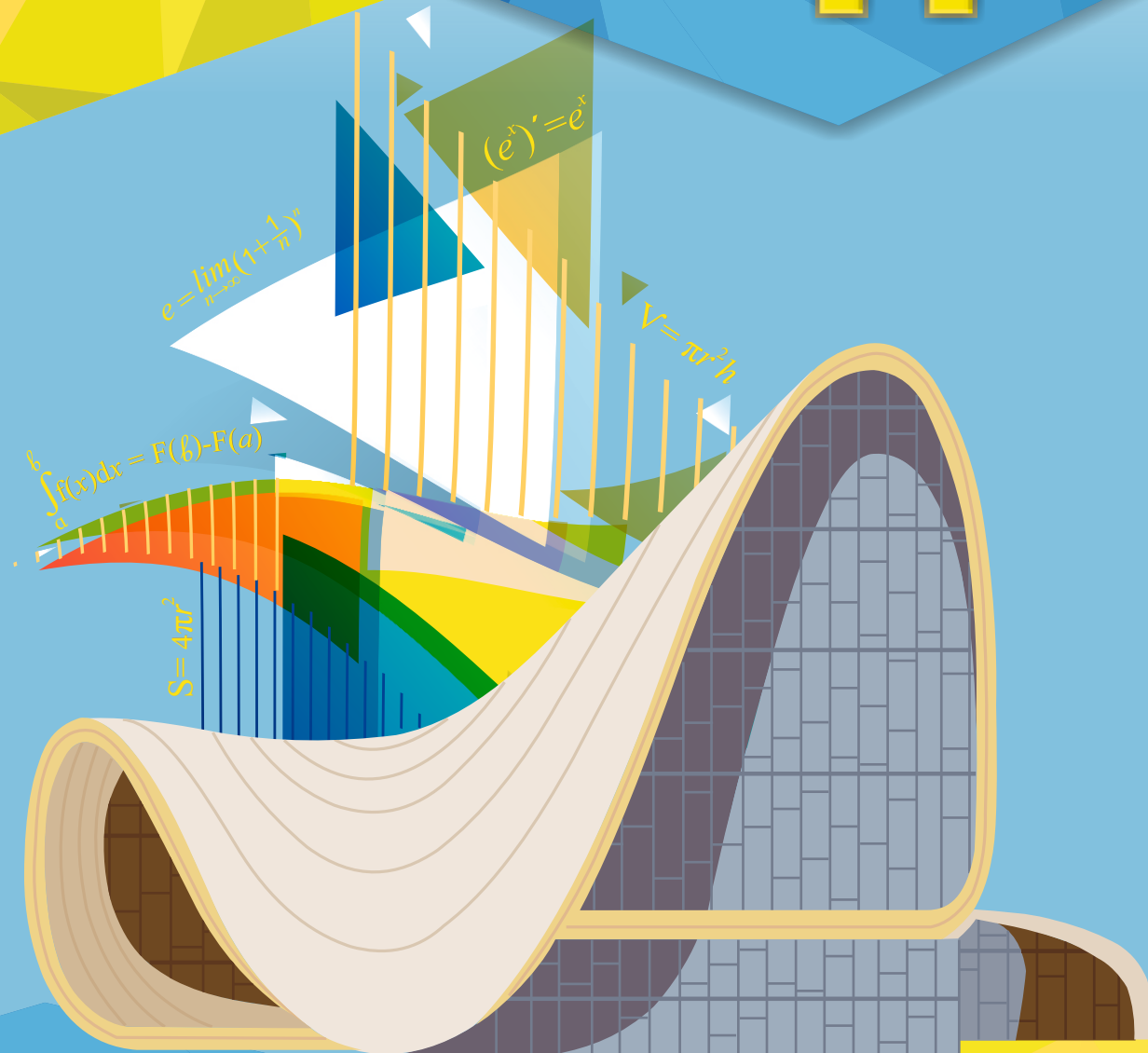


მათემატიკა

სახელმძვანელო 11





Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

**Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadırız!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ჰეიდარ ალიევი

აზერბაიჯანელი ხალხის საერთო ეროვნული ლიდერი

ნაიმა კეჰრემახოვა
მეჰემედ ქერიმოვი
აბდურეჰიმ კულიევი

მათემატიკა 11

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების მე-11
კლასისათვის მათემატიკის საგნის
სახელმძღვანელო

გთხოვთ ამ გამოცემასთან დაკავშირებული თქვენი შენიშვნები და
წინადადებები გამოაგზავნოთ radius_n@hotmail.com და
derslik@edu.gov.az ელექტრონულ მისამართებზე.
წინასწარ მადლობას მოგახსენებთ ჩვენთან თანამშრომლობისათვის!



Radius
Bakı - 2018

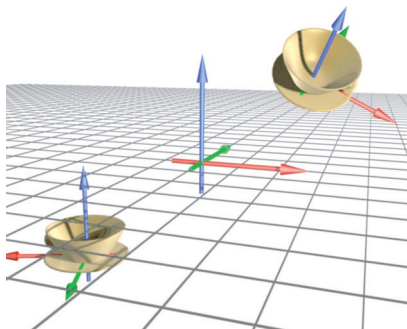
სარჩევი

1. მრავალწევრები

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა...	7
თეორემა ნაშთის შესახებ	11
თეორემა მრავალწევრის მამრავლების შესახებ	13
რაციონალური ფესვების პოვნა	15
ალგებრის ძირითადი თეორემა	18
მრავალწევრა ფუნქცია.....	22
რაციონალური ფუნქცია	26
განმაზოგადებელი დავალებები	29

2. ვექტორები სივრცეში

მართკუთხა კოორდინატა სისტემა სივრცეში	31
ვექტორები სივრცეში	39
ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი	46
წრფის საერთო განტოლება	51
სიბრტყის განტოლება	53
სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობა	58
სფეროს განტოლება.....	59
გარდაქმნები სივრცეში და სიბრტყეზე.....	61
განმაზოგადებელი დავალებები	64



3. ზღვარი

ფუნქციის ზღვარი წერტილში	67
ზღვრის თვისებები	74
ფუნქციის უწყვეტობა.....	80
ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემცველი სპეციალური ზღვრები	86
უსასრულო ზღვრები და ზღვარი უსასრულობაში. ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები	88
რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი	93
განმაზოგადებელი დავალებები	99



4. ბრუნვის ფიგურები. ცილინდრი, კონუსი და ბირთვი

ბრუნვის ფიგურები	101
ცილინდრი	102
ცილინდრის ზედაპირის ფართობი	104
კონუსი	108
კონუსის ზედაპირის ფართობი.....	110
ცილინდრისა და კონუსის სიბრტყითი კვეთები	115
წაკვეთილი კონუსი და ზედაპირის ფართობი	117
ბირთვი და მისი ნაწილების ზედაპირის ფართობი	120
კომპლექსური ფიგურების ზედაპირის ფართობი	126
მსგავსი ფიგურების ზედაპირის ფართობი ..	128
განმაზოგადებელი დავალებები	129

5. ფუნქციის წარმოებული

ცვლილების საშუალო სიჩქარე.	
ცვლილების მყისი სიჩქარე	132
ფუნქციის წარმოებული.....	137
გაწარმოების წესები.....	143
ნამრავლის წარმოებული	148
განაყოფის წარმოებული	150
რთული ფუნქციის წარმოებული	152
ამოცანების ამოხსნა წარმოებულის	
გამოყენებით	156
მეორე რიგის წარმოებული	158
მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული ...	161
ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული ...	164
ტრიგონომეტრიული ფუნქციების	
წარმოებული.....	167
განმაზოგადებელი დავალებები	171

6. ბრუნვის ფიგურების მოცულობა

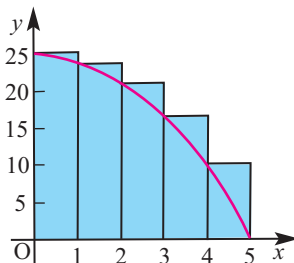
ცილინდრის მოცულობა	173
კონუსის მოცულობა	177
წაკვეთილი კონუსის მოცულობა	180
ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა...	181
მსგავსი ფიგურების მოცულობა.....	186
განმაზოგადებელი დავალებები	189

7. ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის მეშვეობით

ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის	
შუალედების პოვნა	192
ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და	
ექსტრემუმი	197
ფუნქციის გრაფიკის აგება წარმოებულის	
გამოყენებით	205
ამოცანების ამოხსნა ექსტრემუმის პოვნის	
შესახებ. ოპტიმიზაცია	209
განმაზოგადებელი დავალებები	216

8. ინტეგრალი

პირველადი ფუნქცია.	
განუსაზღვრელი ინტეგრალი.....	219
მრუდით მოცული ფართობი.....	229
განსაზღვრული ინტეგრალი და ფართობი ..	231
განსაზღვრული ინტეგრალი.	
ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა	236
განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები....	242
მრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურის	
ფართობი	247
განსაზღვრული ინტეგრალი და ბრუნვით	
მიღებული ფიგურების მოცულობა	252
განმაზოგადებელი დავალებები	258



9. სტატისტიკა და ალბათობა

სტატისტიკური მაჩვენებლები	261
ინფორმაციის განაწილების ფორმები	266
ნორმალური განაწილება	267
ყუთი-სახელურის დიაგრამა	270
შემთხვევითი ხდომილობები და ალბათობა..	274
განმაზოგადებელი დავალებები	280

10. განტოლებები, უტოლობები და განტოლებათა სისტემები

ირაციონალური განტოლებები და	
უტოლობები	283
მაჩვენებლიან განტოლებათა სისტემა....	285
ლოგარითმულ განტოლებათა სისტემა..	286
ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა	
სისტემა.....	287
განმაზოგადებელი დავალებები	289

- მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა
- თეორემა ნაშთის შესახებ
- თეორემა მრავალწევრის მამრავლების შესახებ
- რაციონალური ფესვების პოვნა
- ალგებრის ძირითადი თეორემა
- მრავალწევრა ფუნქცია
- რაციონალური ფუნქცია

მათემატიკური ლექსიკონი

- ◆ n -ური ხარისხის მრავალწევრი
- ◆ თეორემა ნაშთის შესახებ
- ◆ გასაყოფი, გამყოფი, ნაშთი
- ◆ მრავალწევრის მამრავლები
- ◆ განტოტვითი გაყოფა
- ◆ რაციონალური ფესვები
- ◆ სინთეტიკური გაყოფა
- ◆ მრავალწევრის ფესვები

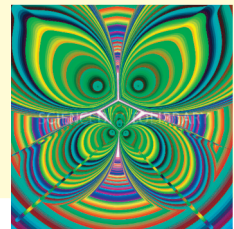
ეს საინტერესოა!

ომარ ხაიამი, რომელიც ცხოვრობდა 1050-1122 წლებში, მსოფლიოში ცნობილია, როგორც რუბაიების ოსტატი. თუმცა ომარ ხაიამის სახელი ამასთან ერთად მოიხსენიება გენიალური მათემატიკოსების სახელებთან ერთად. ომარ ხაიამმა პირველმა მოგვცა $p > 0$, $q > 0$ შემთხვევისათვის $f(x) = x^3 - px - q$, კუბური მრავალწევრის ფესვების გამოთვლის ზოგადი სახე.



მრავალწევრის ორწევრზე სქემატურად გაყოფის წესი პირველად მოცემული იქნა იტალიელი მათემატიკოსის პაოლო რუფინის მიერ.

პოლინომოგრაფია მხატვრობის, მათემატიკისა და კომპიუტერული მეცნიერების სინთეზით წარმოქმნილი ხელოვნების სახეა. პოლინომოგრაფიის საფუძველს მრავალწევრის ფესვების კომპიუტერული პროგრამით ვიზუალიზაცია წარმოადგენს.



მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა

ამოცანა. საჩუქრის ყუთების სიმაღლე 6 სმ-სა და 16 სმ-ს შორისაა. გამოთვლები უჩვენებს, რომ თითოეული ყუთის მოცულობის (კუბური სანტიმეტრებით) $V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება, სადაც x დადებითი მთელი რიცხვია და $5 \leq x \leq 15$. ყუთის სიმაღლე $h(x) = x + 1$ წრფივი



ფუნქციით შეიძლება განისაზღვროს. როგორ შეიძლება გამოისახოს მრავალწევრის სახით ყუთის სხვა ზომები? თქვენ ამ ამოცანის ამოხსნას მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფის წესის შესწავლით შეძლებთ.

გამოკვლევა. ჩვენთვის ცნობილია მრავალწევრის რიცხვების გაყოფის წესი. გამოვიკვლიოთ ამ წესის მრავალწევრებზე გამოყენება.

$$\begin{array}{r} 552 \\ -51 \\ \hline 42 \\ -34 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 11 \\ -x^2 + 3x \\ \hline 3x + 11 \\ -3x + 9 \\ \hline 2 \end{array}$$

- ორივე შემთხვევისათვის წარმოადგინეთ გასაყოფის, გამყოფის, განაყოფისა და ნაშთის ცნებების შესაბამისი რიცხვები და მრავალწევრები.
- როგორ განისაზღვრა მრავალწევრის გაყოფისას განაყოფში ჩაწერილი პირველი წევრი? რა საერთო და განმასხვავებელი თვისებები ახასიათებს მრავალწევრის რიცხვების გაყოფასთან?
- როგორ შეამოწმებდით ორივე გაყოფის მოქმედების შესრულების სისწორეს?

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ გამოსახულებას n -ური ხარისხის ერთცვლადიანი მრავალწევრი ეწოდება, სადაც x ცვლადია, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ მოცემული რიცხვებია და $a_n \neq 0$. $a_n x^n$ -ს მთავარი წევრი, a_n -ს მთავარი კოეფიციენტი, a_0 -ს თავისუფალი წევრი ეწოდება.

მთელი რიცხვების გაყოფისას გამოყენებული განტოლვითი გაყოფის წესის მსგავსი წესით მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა შეიძლება.

მრავალწევრის მთელი რიცხვების გაყოფის მოქმედებას

$$\text{გასაყოფი} = \text{განაყოფი} \times \text{გამყოფზე} + \text{ნაშთი}$$

ტოლობით ვამოწმებთ. მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფის მოქმედებაშიც მართებულია იგივე წესი. თუ გასაყოფი მრავალწევრია $P(x)$, გამოფი $B(x)$, განაყოფი $Q(x)$,

$$\text{ნაშთი } R(x), \text{ მაშინ მართებულია ტოლობა: } \frac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

აქედან $P(x) = Q(x) B(x) + R(x)$, (x) მრავალწევრის ხარისხი $B(x)$ -ის ხარისხზე ნაკლებია.

როდესაც გამყოფი $x - m$ სახის ორწევრია, ნაშთში შეიძლება გარკვეული (r) რიცხვი დარჩეს

$$\text{ამ შემთხვევაში მივიღებთ: } \frac{P(x)}{x - m} = Q(x) + \frac{r}{x - m}; \quad P(x) = (x - m) Q(x) + r$$

ნიმუში 1. ა) $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ მრავალწევრი განტოლვითი გაყოფის წესით გაყავით $x - 3$ ორწევრზე. შედეგი დაწერეთ $\frac{P(x)}{x - m} = Q(x) + \frac{r}{x - m}$ სახით.

ბ) განსაზღვრეთ ცვლადის დაუშვებელი მნიშვნელობა.

გ) შეამოწმეთ ამოხსნის სისწორე.

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა

ამოხსნა: ა) $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 \mid x - 3$ გაყოფის თითოეულ ნაბიჯზე მარცხნიდან დაწყებული გასაყოფის პირველი წევრი გამყოფის მთავარ წევრზე (ამ შემთხვევაში x -ზე) იყოფა.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 5 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline x^2 - 4x & \\ -x^2 + 3x & \\ \hline -x + 5 & \\ -(-x + 3) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

მაშასადამე, $\frac{x^3}{x^2} = x$, $\frac{x^2}{x^2} = 1$, $\frac{-x}{x} = -1$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 5}{x - 3} = x^2 + x - 1 + \frac{2}{x - 3}$$

განაყოფი

ბ) $x - 3 \neq 0$ ანუ $x \neq 3$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება ნულზე გაყოფა).

გ) **შემოწმება:** $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = (x - 3)(x^2 + x - 1) + 2$ იგივეობას უნდა აკმაყოფილებდეს.

$$\begin{aligned} &= x^3 + x^2 - x - 3x^2 - 3x + 3 + 2 \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

ნიმუში 2. $5x + 3x^3 + 2x^4 - 1$ მრავალწევრი გაყავით $x^2 - 2x + 2$ მრავალწევრზე.

ამოხსნა: გასაყოფი ჩავწეროთ ცვლადის ხარისხის კლების რიგით. მრავალწევრში 0 კოეფიციენტით პირობით შემოვიყვანოთ წევრები, რომლებიც არ მონაწილეობენ.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 5x - 1 & x^2 - 2x + 2 \\ \hline 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 & \\ \hline 7x^3 - 4x^2 + 5x & \\ -7x^3 + 14x^2 + 14x & \\ \hline 10x^2 - 9x - 1 & \\ -10x^2 + 20x + 20 & \\ \hline 11x - 21 & \end{array}$$

2x^2 + 7x + 10

გაყოფის თითოეულ ნაბიჯზე მარცხნიდან დაწყებული გასაყოფის პირველი წევრი გამყოფის მთავარ წევრზე (ამ შემთხვევაში x^2 -ზე) იყოფა.

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2, \quad \frac{7x^3}{x^2} = 7x, \quad \frac{10x^2}{x^2} = 10$$

2x^2 + 7x + 10

სასწავლო დაფალებები

1. შეასრულეთ გაყოფის მოქმედება განტოტვითი გაყოფის გზით.

ა) $(2x^2 - 3x + 6) : (x - 2)$ ბ) $(2y^3 - y^2 + 3y - 1) : (y - 4)$ გ) $(4x + 2x^2 - x^3 + 5) : (x + 2)$	დ) $(-3y^3 + 4y - 5) : (y - 1)$ ე) $(-z^3 + 2z^2 - 3z + 2) : (z - 2)$ ვ) $(2x^3 - 12x - 7x^2 - 3) : (2x + 3)$
--	---
2. მრავალწევრის $x - 3$ ორწევრზე გაყოფისას არასრულ განაყოფში $2x^2 + 3x - 11$ მრავალწევრი, ნაშთში კი -4 მიიღება. იპოვეთ გასაყოფი მრავალწევრი.
3. გაყოფის მოქმედებაში $2x^2 - 7x + 9$ მრავალწევრი გასაყოფია, $2x - 3$ ორწევრი არასრული განაყოფია, 3 ნაშთია, იპოვეთ გამყოფი მრავალწევრი.
4. შეასრულეთ გაყოფის მოქმედება.

ა) $(x^4 - x^3 - x - 3) : (x^2 - 1)$	ბ) $(x^4 + 2x^2 + 4) : (x^2 - 2)$
--------------------------------------	-----------------------------------
5. გამოთვალეთ $Q(2)$, თუ $x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot Q(x)$

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა

პრაქტიკული მეცადინეობა. 1) $2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ მრავალწევრის $x - 2$ ორწევრზე განტოტვითი გაყოფა რვეულში გადაიწერეთ.

2) გაყოფის ყოველ ნაბიჯზე გასაყოფის პირველი წევრი გამყოფის მთავარ წევრზე, x -ზე იყოფა და შედეგი განაყოფში იწერება. მეორიდან დაწყებული, გაყოფის ყოველ ნაბიჯზე გამოიკვლიეთ და წარმოადგინეთ, როგორ მიიღეთ გასაყოფის პირველი წევრი.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 7x^2 - 5x \\
 \underline{7x^2 - 14x} \\
 9x + 7 \\
 \underline{9x - 18} \\
 25
 \end{array}$$

$3x^2 - (-4x^2) = x^2 \cdot (3 + 2 \cdot 2)$
 $-5x - (-14x) = x \cdot (-5 + 2 \cdot 7)$
 $7 - (-18) = 7 + 2 \cdot 9$

მრავალწევრის $x - m$ ორწევრზე გაყოფის სინთეტიკური წესი (ჰორნერის სქემა)

მრავალწევრის $x - m$ სახის ორწევრზე გასაყოფად განტოტვითი გაყოფის ალტერნატიული სინთეტიკური გაყოფის წესიც გამოიყენება. სინთეტიკური გაყოფის დროს, მხოლოდ კოეფიციენტების გამოყენების გამო, უფრო ნაკლები გამოთვლების წარმოება ხდება საჭირო.

ნიმუში. გაყავით $2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$ მრავალწევრი $x + 3$ ორწევრზე სინთეტიკური წესით.

ამოხსნა: გასაყოფი მრავალწევრის კოეფიციენტები იწერება წევრების ხარისხის კლების რიგით და არ არსებული ხარისხები ნული კოეფიციენტით შემოიყვანება.

როცა ორწევრი $x + m$ სახისაა სახისაა $x - (-m)$ სახით წარმოადგენენ.

გამყოფი ორწევრი ჩავწეროთ $x + 3 = x - (-3)$ სახით. მაშასადამე, $m = -3$

m -ის მნიშვნელობა $\rightarrow -3$

	$2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$	
	2 3 -4 11	მრავალწევრის კოეფიციენტები
$\times$	-3	

1. მთავარი კოეფიციენტი (2) ისევ ჩაწერით ქვედა სტრიქონში.

-3	2	3	-4	11
$\times$	-3	-6		
	2	-3		

2. მთავარი კოეფიციენტის (2-ის) -3 -ზე ნამრავლი (-6) -ისა და გასაყოფი მრავალწევრის მე-2 წევრის კოეფიციენტის (3-ის) ჯამი განაყოფის მე-2 წევრის კოეფიციენტს (-3) -ს გვაძლევს.

-3	2	3	-4	11
$\times$	-3	-6	9	-15
	2	-3	5	-4

3. განაყოფის მე-2 კოეფიციენტის (-3) -ისა და $m = -3$ -ის ნამრავლის (9) -ისა და მე-3 კოეფიციენტის ჯამი განაყოფის მე-3 კოეფიციენტს (5) -ს გვაძლევს. სხვა კოეფიციენტების განსაზღვრა შესაძლებელია წესით გრძელდება.

$2x^2 - 3x + 5$

ნაშთი

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა

ამრიგად, როცა გასაყოფია $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$, გამყოფია $B(x) = x + 3$, მაშინ არასრული განაყოფი $Q(x) = 2x^2 - 3x + 5$ და ნაშთი $r = -4$ იქნება.

$$\text{მაშასადამე, } \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 11}{x + 3} = 2x^2 - 3x + 5 - \frac{4}{x + 3}$$

ზოგადად n -ური ხარისხის მრავალწევრის $x - m$ ორწევრზე სინთეტიკური გაყოფის წესი ქვემოთ მოცემულ ცხრილშია ასახული.

	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
m	$\downarrow$	$\begin{matrix} + \\ \downarrow \end{matrix}$		$\begin{matrix} + \\ \downarrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \downarrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \downarrow \end{matrix}$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + m \cdot b_{n-1}$	...	$b_1 = a_2 + m \cdot b_2$	$b_0 = a_1 + m \cdot b_1$	$r = a_0 + m \cdot b_0$

სასწავლო დაგეგმვები

6. 1) შესრულებულ გაყოფის მოქმედება სინთეტიკური გაყოფის გამოყენებით.
- ა) $(x^2 + 3x + 15) : (x - 5)$ დ) $(x^3 - 14x + 8) : (x + 4)$
- ბ) $(x^2 + 7x - 2) : (x - 2)$ ე) $(x^4 - 9x^2 + x + 3) : (x + 3)$
- გ) $(x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$ ვ) $(10x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9) : (x + 1)$
- 2) შეამოწმეთ ამონახსენი $P(x) = (x - m) Q(x) + r$ ტოლობის მიხედვით.
7. შესრულებულ გაყოფის მოქმედება თქვენთვის სასურველი ხერხით.
- ა) $(x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (x - 1)$ გ) $(y^3 + 3y + 10) : (y + 2)$
- ბ) $\frac{t^3 + 2t^2 - 7t - 2}{t - 2}$ დ) $\frac{m^4 + 6m^3 + 2m^2 - m + 8}{m + 1}$
8. ა) $12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ მრავალწევრი ჯერ $2x + 1$, $3x + 1$ და $4x + 1$ მრავალწევრებზე გაყავით განტოლებით გაყოფის გამოყენებით, შემდეგ კი იგივე მრავალწევრი სინთეტიკური გაყოფის გამოყენებით გაყავით $x + \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{3}$ და $x + \frac{1}{4}$ და ორწევრებზე. რა მოსაზრების გამოთქმა შეიძლება ამ ორი გაყოფით მიღებული ნაშთისა და განაყოფის კოეფიციენტების შესახებ?
- ბ) მართალია, რომ სინთეტიკური გაყოფა სრულდება მაშინ, როცა გამყოფი $x - m$ სახისაა. როგორ შეძლებთ ამ სქემის გამოყენებას მაშინ, თუ გამყოფი $2x - 4$ იქნება?
9. მოცემული სინთეტიკური გაყოფის წესის მიხედვით დაწერეთ გასაყოფი, გამყოფი, განაყოფი და ნაშთი.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -5 & 3 & 12 \\ & & 3 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 3 \end{array}$$

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა

თეორემა ნაშთის შესახებ (ზეზის თეორემა)

$P(x)$ მრავალწევრის $x - m$ ორწევრზე გაყოფით მიღებული ნაშთი $P(x)$ მრავალწევრის $x = m$ წერტილში მიღებული მნიშვნელობის ტოლია.

$$P(x) = (x - m)Q(x) + P(m), \quad r = P(m)$$

დამტკიცება: თუ $P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$ ტოლობაში $x = m$ ჩავწერთ,
 $P(m) = (m - m) \cdot Q(m) + r$, აქედან $r = P(m)$ მიიღება.

ნამუშაუ. $P(x) = x^3 - 11x + 9$ მრავალწევრის $x + 4$ ორწევრზე გაყოფიდან მიღებული ნაშთი იპოვეთ ნაშთის შესახებ თეორემის მიხედვით.

ამოხსნა: $x + 4 = x - (-4)$ სახით ჩავწეროთ.
 $m = -4$ მიიღება. ნაშთის შესახებ თეორემის თანახმად ნაშთი $r = P(-4) = (-4)^3 - 11 \cdot (-4) + 9 = -64 + 44 + 9 = -11$ მიიღება.

ამონახსენი არა აქვს.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 11x + 9 \\
 \begin{array}{r}
 -4 \quad | \quad 1 \quad 0 \quad -11 \quad 9 \\
 \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad -4 \quad 16 \quad -20 \\
 \hline
 \times \quad | \quad 1 \quad -4 \quad 5 \quad \textcircled{-11} \\
 \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad x^2 - 4x + 5 \quad \text{ნაშთი}
 \end{array}
 \end{array}$$

$P(-4) = -11$

სასწავლო დავალებები

- 10.** გაყავით მოცემული $P(x)$ მრავალწევრი $x - m$ ორწევრზე სინთეტიკური წესით, მიღებული ნაშთი შეადარეთ ამ მრავალწევრის $P(m)$ მნიშვნელობასთან.

ა) $P(x) = 2x^2 + 4x + 3$; $m = 2$ ბ) $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9$; $m = -4$
 გ) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$; $m = -2$ დ) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x + 3$; $m = 1$

- 11.** მოცემული მრავალწევრების: 1) $x - 4$; 2) $x + 2$ ორწევრებზე გაყოფით მიღებული ნაშთი განსაზღვრეთ „ნაშთის შესახებ თეორემის“ მიხედვით.

ა) $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ბ) $2x^3 + 5x - 2x^4$ გ) $3x^3 + 7x^2 - 2x - 3$
 დ) $3x^3 + 4x^2 - 19$ ე) $8x^2 - 8x - 5x^3 + 3$ ვ) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

- 12.** შეასრულეთ გაყოფის მოქმედება ჰორნერის სქემის გამოყენებით. ამონახსენი შეამოწმეთ ნაშთის შესახებ თეორემის მიხედვით.

ა) $(x^3 + 2x^2 - 3x + 9) : (x + 3)$ ბ) $(2x^3 + 2x^2 - 5x + 4) : (x - 2)$
 გ) $(2y^2 + 3y - y^3 + 5) : (y - 4)$ დ) $(2t^4 + 3t^3 - t^2 + 4t) : (2 + t)$

- 13.** თითოეული გასაყოფისათვის იპოვეთ c კოეფიციენტის ისეთი მნიშვნელობა, რომ ნაშთი 2 იყოს.

ა) $(x^3 + 3x^2 - x + c) : (x - 1)$ ბ) $(x^3 + cx^2 + x - 3) : (x - 2)$
 გ) $(x^3 + x^2 + cx - 15) : (x + 2)$ დ) $(cx^3 + 3x + 1) : (x + 3)$

- 14.** ა) c -ს რა მნიშვნელობისათვის იყოფა $x^3 - 5x^2 - 5x + c$ მრავალწევრი $x + 3$ ორწევრზე უნაშთოდ?
 ბ) c -ს რა მნიშვნელობისათვის იყოფა $x^4 + 2x^3 - x + c$ მრავალწევრი $x + 2$ ორწევრზე უნაშთოდ?

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა

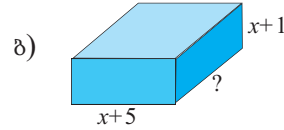
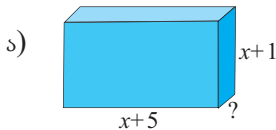
- 15.** k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $3x^2 + 6x - 10$ მრავალწევრის $x + k$ ორწევრზე გაყოფისას ნაშთი 14-ის ტოლი?
- 16.** ა) c -ს რა მნიშვნელობისათვის $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ მრავალწევრის როგორც $x - 2$, ისე $x + 1$ ორწევრზე გაყოფისას მიიღება ერთი და იგივე ნაშთი?
 ბ) იპოვეთ a ნამდვილი რიცხვი, თუ $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax - 7$ მრავალწევრის $(x + 1)$ -ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი 4-ის ტოლია.
- 17.** გულნარი ამბობს, რომ $(x^4 + 1) : (x + 1)$ გაყოფის მოქმედების რომელიმე მეთოდის გამოყენების გარეშე შესრულება შეუძლია და პასუხი $(x^3 + 1)$ -ია, სწორედ ფიქრობს გულნარი თუ ეშლება? დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება.
- 18.** $P(x)$ მრავალწევრი $(x - 1)$ -ზე უნაშთოდ იყოფა, $(x + 2)$ -ზე გაყოფისას კი ნაშთი 3-ის ტოლია. იპოვეთ ამ მრავალწევრის $(x^2 + x - 2)$ -ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი.

გამოყენებითი დავალებები

- 19.** მოცემული მრავალწევრი გამოსახავს მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობას, იპოვეთ პარალელებიპედის ის წიბო, რომელიც არ არის მოცემული.

$$V = 3x^3 + 8x^2 - 45x - 50$$

$$V = 2x^3 + 17x^2 + 40x + 25$$



- 20. კინო - თეატრში წლიურად დახარჯული თანხა.** 2000 წლიდან 2007 წლამდე ქალაქის მოსახლეობის კინოსა და თეატრზე დახარჯული თანხის (ათას მანათობით) $M = 0,3x^3 + 64x^2 + 824x + 4800$ სახით, ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობისა კი (ათას კაცობით) ამ წლებისათვის $P = 0,2x + 40$ სახით მოდელირება შეიძლება. (x უჩვენებს წლების რაოდენობას 2000 წლიდან დაწყებული). რას უდრის ამ ქალაქის მოსახლეობის კინო-თეატრზე გაწეული საშუალო წლიური დანახარჯები 2000 წლიდან 2007 წლამდე?

- 21. მაყურებელთა საშუალო რაოდენობა.** ფრენბურთელ ქალთა სუპერ ლიგის შეჯიბრებებში 2008 წლიდან დაწყებული ჩატარებული თამაშების რაოდენობისა (T) და ამ თამაშებზე მაყურებელთა რაოდენობის (A) კვებით მოცემული მრავალწევრებით მოდელირება შეიძლება:

$$T = 2x + 6,$$

$$A = 6x^3 + 418x^2 + 7200x + 18000,$$

x აქ წლების რაოდენობას უჩვენებს და $0 \leq x \leq 10$.

დაწერეთ მრავალწევრი, რომელიც ახდენს ამ წლების განმავლობაში თითოეულ თამაშზე მოსული მაყურებლების საშუალორაოდენობის მოდელირებას.



თეორემა მრავალწევრის მამრავლების შესახებ

თეორემა მრავალწევრის მამრავლების შესახებ

x ცვლადის $P(x)$ მრავალწევრის ნულად გადაქცევა მნიშვნელობას (ანუ $P(x) = 0$ განტოლების ფესვებს) მრავალწევრის ფესვი (ან ნული) ეწოდება.

თეორემა. თუ m რიცხვი $P(x)$ მრავალწევრის ფესვია, მაშინ $x - m$ ორწევრი $P(x)$ -ის მამრავლია.

მართლაც, თუ $P(m) = 0$, მაშინ $P(x) = (x - m)Q(x) + P(m)$ ტოლობიდან $P(x) = (x - m)Q(x)$ მიიღება.

მართებულია შებრუნებული მტკიცებულებაც, ანუ თუ $x - m$ ორწევრი $P(x)$ მრავალწევრის მამრავლია, მაშინ $P(m) = 0$

მაგალიტი 1. მამრავლების შესახებ თეორემის მიხედვით განსაზღვრეთ, ორწევრები $x - 1$ და $x + 2$ არიან თუ არა $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ მრავალწევრის მამრავლები.

ამოხსნა: გამოვთვალოთ $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ მრავალწევრის მნიშვნელობა, როცა $x = 1$ და $x = -2$:

$$\begin{array}{ll} x = 1 & x = -2 \\ P(1) = 1^3 - 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = -3 & P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 0 \end{array}$$

მაშასადამე, $(x - 1)$ მოცემული მრავალწევრის მამრავლი არაა, $(x + 2)$ კი მამრავლია.

მაგალიტი 2. ცნობილია, რომ $f(-2) = 0$ დაშალეთ $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ მრავალწევრი მამრავლებად.

ამოხსნა: რადგან $f(-2) = 0$, ამიტომ, $x - (-2) = x + 2$ ორწევრი $f(x)$ მრავალწევრის ერთ-ერთი მამრავლია. ვიპოვოთ მეორე მამრავლი სინთეტიკური გაყოფის დახმარებით.

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & -5x^2 & -2x & +24 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -2 & 1 & -5 & -2 & 24 \\ & & -2 & 14 & -24 \\ \hline \times & 1 & -7 & 12 & 0 \end{array} \quad x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x^2 - 7x + 12)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, მაშინ

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4).$$

აქედან ცხადია, რომ მოცემული მრავალწევრის ნულებია: $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

შენიშვნა: თუ $P(x) = (x - m)^k \cdot Q(x)$ სახითაა (სადაც $Q(m) \neq 0$) მოცემული, მაშინ m რიცხვი $P(x)$ მრავალწევრის k -ჯერ განმეორებადი ფესვია.

მაგალითად, თუ მრავალწევრის მამრავლებად დანაშალი $P(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 1)$ სახისაა, მაშინ $x = 2$ რიცხვი ამ მრავალწევრის 3-ჯერ განმეორებადი ფესვია.

თეორემა მრავალწევრის მამრავლების შესახებ

სასწავლო დაგალებები

1. განსაზღვრეთ $x - 1$ ორწევრი მოცემული მრავალწევრებიდან რომლის მამრავლია.

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$2x^3 - x^2 - 3x - 2$$

$$3x^3 - x - 3$$

$$2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

2. k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება მოცემული ორწევრი მრავალწევრის მამრავლი?

ა) $x^2 - x + k, \quad x - 2$

გ) $x^3 - x + k, \quad x - 2$

ბ) $x^2 + kx - 16, \quad x - 2$

დ) $x^3 + 4x^2 + x + k, \quad x + 2$

3. მრავალწევრები დაშალეთ მამრავლებად, თუ ცნობილია რომ $f(a) = 0$.

1) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 12x + 80; a = 10$

4) $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45; a = -5$

2) $f(x) = x^3 - 18x^2 + 95x - 126; a = 9$

5) $f(x) = x^3 - 11x^2 + 14x + 80; a = 8$

3) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9; a = 1$

6) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 33x - 18; a = -6$

4. განტოლების ფესვებიდან ერთი მოცემულია. იპოვეთ დანარჩენი ფესვები.

ა) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0; \quad x = 2$

გ) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0; \quad x = -\frac{2}{3}$

ბ) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0; \quad x = -\frac{1}{3}$

დ) $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0; \quad x = -\frac{3}{2}$

5. 1) მესამე ხარისხის მრავალწევრის ფესვებისა x_1, x_2, x_3 და

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_3 \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ დანაშალის თანახმად უჩვენეთ,

რომ

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

2) $x^3 - 7x + 6 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1, x_2 და x_3 . იპოვეთ:

ა) $x_1 + x_2 + x_3$ ჯამი; ბ) $x_1 x_2 x_3$ ნამრავლი.

6. ა) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ განტოლების ფესვები იპოვეთ $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ მრავალწევრის $x + 1$ ორწევრზე გაყოფით.

ბ) სინთეტიკური გაყოფის გამოყენებით უჩვენეთ, რომ $12x^3 - 11x^2 - 82x + 21 = 0$ განტოლების ფესვებიდან ერთი 3-ის ტოლია და ამოხსენით განტოლება.

7. მამრავლების შესახებ თეორემის გამოყენებით უჩვენეთ, რომ $x + 1$ ორწევრი $P(x) = x^{25} + 1$ მრავალწევრის მამრავლია. ხოლო $Q(x) = x^{25} - 1$ მრავალწევრის მამრავლი კი არ არის.

8. ა) დაწერეთ მეშვიდე გვერდზე მოცემული ამოცანის ყუთის სხვა ზომების შესაბამისი მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები.

ბ) მართკუთხა პარალელებიპედის სახის აკვარიუმის ტევადობის $V(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$ ფორმულით მოდელირება შეიძლება. თუ $x + 6$ მრავალწევრი გამოსახავს აკვარიუმის სიღრმეს, დაწერეთ აკვარიუმის სხვა გვერდების ზომების შესაბამისი მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები.



რაციონალური ფესვების პოვნა

პრაქტიკული მეცადინეობა.

1. $15x^3 - 52x^2 + 19x + 6 = 0$ განტოლება ჩაწერეთ $x \cdot (15x^2 - 52x + 19) = -6$ სახით. ამ განტოლების მთელი ფესვი (თუ არსებობს), რომელი რიცხვის გამყოფი უნდა იყოს აუცილებლად?

2. სინთეტიკური გაყოფით შეამოწმეთ, რომ რიცხვი $x = 3$ არის მოცემული განტოლების ფესვი. უჩვენეთ, რომ განტოლების დანარჩენი ფესვები $\frac{2}{3}$ და $-\frac{1}{5}$ -ია.

3. დაწერეთ განტოლების ფესვები $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{5}$ სახით. რომელი კოეფიციენტების გამო-
ფეხია ამ წილადების მრიცხველები და მნიშვნელები მოცემულ განტოლებაში?

თეორემა რაციონალური ფესვების შესახებ

თუ მთელკოეფიციენტებიანი $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ მრავალწევრის რაციონალური ფესვი აქვს, ეს ფესვი

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{თავისუფალი წევრის } (a_0\text{-ის) გამყოფი}}{\text{მთავარი კოეფიციენტის } (a_n\text{-ის) გამყოფი}} \text{ სახისაა.}$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\frac{p}{q}$ უკვე წილადი მთელკოეფიციენტიანი $P(x)$ მრავალწევრის ფესვია:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ q^n -ზე:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

ამ ტოლობაში $a_0 \cdot q^n$ წევრის გარდა, რადგან დანარჩენ წევრებში არის p მამრავლი, a_0 კოეფიციენტი p -ზე, $a_n \cdot p^n$ წევრის გარდა დანარჩენ წევრებში q მამრავლის არსებობის გამო a_n კოეფიციენტი q -ზე უნდა გაიყოს.

ნიმუში. იპოვეთ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ მრავალწევრის რაციონალური ფესვები.

ამოხსნა: თავისუფალი წევრია 6, მთავარი კოეფიციენტი 2-ია. $p \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$, $q \in \{\pm 1; \pm 2\}$ პირობით $\frac{p}{q}$ სახით დაწეროთ შესაძლო რიცხვები: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}$.

$f(1) =$ რადგან $2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$, ამიტომ მრავალწევრის ერთ-ერთი მამრავლი $x - 1$ ორწევრია. სხვა მამრავლი სინთეტიკური გაყოფის დახმარებით,

$(2x^3 - 3x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$ გაყოფის მოქმედების შესრულებით ვიპოვოთ.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2x^3 & -3x^2 & -5x & +6 \\ 1 & 2 & -3 & -5 & 6 \\ & & 2 & -1 & -6 \\ \times & 2 & -1 & -6 & 0 \\ \hline & 2x^2 & -x & -6 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 &= (x - 1) \cdot (2x^2 - x - 6) = \\ &= (x - 1)(2x + 3)(x - 2) \text{ ამიტომაც} \\ &\text{მოცემული მრავალწევრის ფესვები} \\ x_1 &= 1, x_2 = -\frac{3}{2}, x_3 = 2 \text{ იქნება.} \end{aligned}$$

დასკვნა 1. იმ შემთხვევაში, როცა მთავარი წევრის კოეფიციენტი ± 1 -ია, მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის რაციონალური ფესვი მხოლოდ მთელი რიცხვები შეიძლება იყოს.

დასკვნა 2. მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის მთელი ფესვი (თუ აქვს) თავისუფალი წევრის გამყოფია.

რაციონალური ფესვების პოვნა

ნიმუში 2. იპოვეთ $P(x) = x^3 + x^2 - 19x + 5$ მრავალწევრის ფესვები.

ამოხსნა: მრავალწევრისა რაციონალური ფესვების შესახებ არსებული თეორიებიდან მიღებული დასკვნის თანახმად, მოცემული მრავალწევრის მთელი ფესვი (თუ არსებობს) 5-ის გამყოფებს შორის უნდა იყოს. ესენი ± 5 ; ± 1 რიცხვებია.

სინთეტიკური გაყოფის მოკლე სახით ჩაწერით შევამოწმოთ 5 და -5 არის თუ არა მრავალწევრის ფესვი.

m	1	1	-19	5
1	1	2	-17	-12
-1	1	0	-19	24
5	1	6	11	60
-5	1	-4	1	0

ვინაიდან $x^3 + x^2 - 19x + 5 = (x + 5)(x^2 - 4x + 1)$ ამიტომ $x^2 - 4x + 1 = 0$ კვადრატულ განტოლებას თუ ამოვხსნით, ვიპოვით დანარჩენ ფესვებს: $2 \pm \sqrt{3}$ მაშასადამე მოცემული მესამე ხარისხის მრავალწევრს 3 ფესვი აქვს: -5 ; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$.

ყურადღება! თუ მრავალწევრის კოეფიციენტები რაციონალური რიცხვები იქნება $P(x) = 0$ განტოლების რაციონალური ფესვების პოვნისათვის, ჯერ განტოლების ორივე მხარე ისეთ (ნულისაგან განსხვავებულ) ერთსა და იმავე რიცხვზე გაამრავლოთ, რომ ყველა კოეფიციენტი მთელ რიცხვად იქცეს.

მაგალითად, $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{6}$ მრავალწევრის ფესვების მოსაძებნად

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{6} = 0 \text{ ან მისი ყველა წევრის 12-ზე გამრავლებით მიღებულ}$$

$$6x^3 - 4x^2 - 21x + 10 = 0 \text{ განტოლების ამოხსნაა საჭირო.}$$

მრავალწევრის ფესვების მოძებნისას შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული მოქმედებები.

1. წესის მიხედვით განისაზღვრება შესაძლო რაციონალური ნულების შესაბამისი რიცხვების სია.
2. ამ რიცხვებიდან შემოწმებით შეირჩევა მრავალწევრის მნიშვნელობის ნულად გადამქცევი მრავალწევრის ფესვი m რიცხვი, ანუ განისაზღვრება მრავალწევრის უნაშთოდ გამყოფი $x - m$ ორწევრი.
3. მოცემული მრავალწევრის $x - m$ ორწევრზე სინთეტიკური გაყოფის შესრულებით განისაზღვრება მეორე მამრავლი.
4. მეორე მამრავლის კვადრატული სამწევრის ან სხვადასხვა გამრავლების ფორმულებით მამრავლებად დაშლით მოიძებნება სხვა ფესვები. როცა ეს შეუძლებელია, სინთეტიკური გაყოფის წესით გრძელდება მრავალწევრის ყველა წრფივი მამრავლის მოძებნამდე.
5. განსაზღვრულ სიაში არსებული რიცხვებიდან შეიძლება არცერთი არ იყოს მრავალწევრის ნული. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში მრავალწევრს რაციონალური ფესვი არა აქვს.

მაგალითად, $f(x) = x^3 + x + 1$ მრავალწევრის რაციონალური ფესვი ± 1 შეიძლება იყოს. შევამოწმოთ: $f(-1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1$; $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ მრავალწევრს რაციონალური ფესვი არა აქვს.

სასწავლო დაგეგმვა

9. განსაზღვრეთ რომელი მოცემული მრავალწევრის ფესვია -1 ; 1 ; -2 ; 2 მნიშვნელობები, სინთეტიკური გაყოფის დახმარებით დაშალეთ მამრავლებად და იპოვეთ სხვა ფესვები.

ა) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$

დ) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$

ბ) $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 16x - 2$

ე) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$

გ) $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$

ვ) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12$

10. სინთეტიკური გაყოფის დახმარებით უჩვენეთ, რომ რიცხვი 5 არის $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 = 0$ განტოლების ფესვი და ამოხსენით ეს განტოლება.

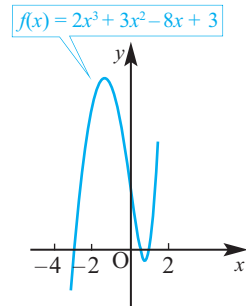
11. ამოხსენით განტოლება რაციონალური ფესვების პოვნის წესის გამოყენებით.

ა) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

ბ) $3x^3 - 4x^2 + 17x + 6 = 0$

12. ცნობილია, რომ $P(x)$ მესამე ხარისხის მრავალწევრის უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტი $a = 2$ და $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$. დაწერეთ მრავალწევრი მამრავლებად დაშლილი სახით.

13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ ფუნქციის გრაფიკი სურათზე ნაჩვენებია სახისა.
გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ მრავალწევრის ნულები. რაციონალური ფესვის მოძებნის წესისა და სინთეტიკური გაყოფის გამოყენებით იპოვეთ ნულები და გრაფიკის მიხედვით შეამოწმეთ.



გამოკვლევა. 1) გადაიწერეთ ნიმუშები რვეულში და განიხილეთ.

ა) $P(x) = x - 2$ პირველი ხარისხის მრავალწევრს ერთი ფესვი აქვს: $x - 2 = 0$; $x = 2$;

ბ) $P(x) = x^2 + 4x + 3$ მეორე ხარისხის მრავალწევრს ორი ფესვი აქვს:

$$x^2 + 4x + 3 = 0, (x + 1)(x + 3) = 0; x_1 = -1 \text{ და } x_2 = -3$$

გ) $P(x) = x^3 + 4x$ მესამე ხარისხის მრავალწევრს სამი ფესვი აქვს:

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4); x(x^2 + 4) = 0; x_1 = 0, x_2 = -2i, x_3 = -2i$$

დ) $P(x) = x^4 - 1$ მეოთხე ხარისხის მრავალწევრს ოთხი ფესვი აქვს:

$$(x - 1)(x + 1)(x + i)(x - i) = 0; x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -i, x_4 = i$$

ე) $(x - 3)^2 \cdot (x + 1)^3 = 0$ განტოლებას განმეორებადი ფესვების მხედველობაში მიღებით ხუთი ფესვი აქვს: $x_1 = x_2 = 3, x_3 = x_4 = x_5 = -1$.

2) უჩვენეთ მამრავლებად დაშლილი სახით მოცემული $P(x) = (x + 2)(x^2 - 1)$ და

$$Q(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$$

მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი და იპოვეთ ფესვები.

3) ნებისმიერი მრავალწევრის ხარისხი და ფესვების რაოდენობა ტოლია?

ალგებრის ძირითადი თეორემა

n -ური ხარისხის მრავალწევრის n რაოდენობის ფესვის არსებობის შესახებ განვიხილოთ კიდევ ერთი ნიმუში.

ნიმუში 2. იპოვეთ $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$ მრავალწევრის ყველა ფესვი.

ამოხსნა: რაციონალური ფესვების მოძებნის წესის თანახმად, მოცემული მრავალწევრის რაციონალური ფესვები (თუ არსებობს) $\pm 1, \pm 5$ რიცხვები შეიძლება იყოს. შევამოწმოთ:

$$P(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 14 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 + 5 = 0.$$

მაშასადამე, $x=1$ მოცემული $P(x)$ მრავალწევრის ფესვია. სინთეტიკური გაყოფით განვსაზღვროთ სხვა მამრავლი.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & x^4 & -6x^3 & +14x^2 & -14x & +5 \\ \times & 1 & -6 & 14 & -14 & 5 \\ \hline & 1 & -5 & 9 & -5 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5$$

$$\text{თუ } P(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$$

გამოსახულებაში $(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$ მამრავლის მიმართ კვლავ გამოვიყენებთ

რაციონალური ფესვების თეორემასა და სინთეტიკურ გაყოფას,

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1) \cdot (x^2 - 4x + 5); \quad P(x) = (x-1)^2(x^2 - 4x + 5) \text{ იქნება.}$$

ამოვხსნათ $(x-1)^2(x^2 - 4x + 5) = 0$ განტოლება:

$$(x-1)^2 = 0; \quad x_1 = x_2 = 1 \text{ (2-ჯერ გამეორებადი ფესვი);}$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0; \quad x = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

$$\text{ფესვები: } x_1 = x_2 = 1 \quad x_3 = 2 + i, \quad x_4 = 2 - i$$

განხილული ყველა ნიმუში გვიჩვენებს, რომ n ხარისხიან განტოლებას n რაოდენობის ფესვი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი) აქვს.

ალგებრის ძირითადი თეორემა

თეორემა. ნულზე მაღალი ხარისხის მქონე ნებისმიერ მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში სულ მცირე ერთი ფესვი აქვს.

თუ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ მრავალწევრი ნულზე მეტი ხარისხით კომპლექსურ კოეფიციენტია, მრავალწევრია, ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად მას სულ მცირე ერთი r_1 ფესვი აქვს. მამრავლების შესახებ თეორემის თანახმად $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$ იქნება. სადაც $Q_1(x)$ მრავალწევრი $n-1$ ხარისხისაა. თუ $n-1 = 0$ იქნება, $Q_1(x) = a_n$; თუ $n-1 > 0$ იქნება, მაშინ იგივე თეორემის თანახმად $Q_1(x)$ მრავალწევრს სულ მცირე ერთი ფესვი აქვს და თუ მას r_2 -ით ავღნიშნავთ $Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$ დანაშალი სწორი იქნება. $Q_2(x)$ კი $n-2$ ხარისხის მრავალწევრია. მაშასადამე, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$ დანაშალი შეგვიძლია ჩავწეროთ. იმავე წესით, თუ $n-2 = 0$, მაშინ $Q_2(x) = a_n$; თუ $n-2 > 0$ იქნება, იგივე თეორემის თანახმად $Q_2(x)$ მრავალწევრს სულ მცირე ერთი ფესვი აქვს და თუ მას r_3 -ით ავღნიშნავთ

$$Q_2(x) = (x - r_3)Q_3(x) \text{ იქნება და}$$

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)Q_3(x) \text{ ჩაწერა შეგვიძლია.}$$

ალგებრის ძირითადი თეორემა

თუ პროცესს $k = n$ -მდე გავაგრძელებთ, ბოლოს $Q_n(x) = a_n$ იქნება. მაშინ $P(x)$ მრავალწევრის დანაშაღია

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)a_n$$

სახით ჩაწერა შეგვეძლება. სადაც $r_1, r_2, \dots, r_n$ რიცხვები $P(x)$ მრავალწევრის ფესვებია. შეიძლება ეს ფესვები სხვადასხვა არ იყოს.

დასკვნა: თითოეულ n -ური ხარისხის ($n \geq 1$) მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში განმეორებადი ფესვების ჩათვლით n რაოდენობის ფესვი აქვს.

ავღნიშნოთ, რომ, თუ $a + bi$ რიცხვი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის კომპლექსური ფესვია, მაშინ შეუღლებული $a - bi$ რიცხვიც ამ მრავალწევრის ფესვია.

ნებისმიერი ნამდვილკოეფიციენტიანი მრავალწევრი მთავარი წევრის კოეფიციენტით და ნამდვილი ფესვების შესაბამისი $(x - r)$ სახით წრფივი მამრავლებისა და შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი $(x^2 + px + q)$ სახის კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა შეიძლება.

აქედან შეიძლება ასეთი დასკვნის გაკეთება, რომ კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვების მქონე კენტი ხარისხის მრავალწევრს ყოველთვის აქვს ნამდვილი ფესვი.

ნიშნუი: დაწერეთ მთავარი წევრის კოეფიციენტი 2, ფესვები 3 და $1 + i$ მქონე უმცირესხარისხიანი ნამდვილკოეფიციენტიანი მრავალწევრი მამრავლებად დაშლილი სახით.

ამოხსნა: თუ $1 + i$ რიცხვი მრავალწევრის ფესვია, მაშინ $1 - i$ შეუღლებული კომპლექსური რიცხვიც მრავალწევრის ფესვია. რადგან. $1 + i$ და $1 - i$ რიცხვები $x^2 + (1 + i + 1 - i)x + (1 + i)(1 - i) = x^2 - 2x + 2$ სამწევრის ფესვებია, ამიტომ საძიებელი მრავალწევრი $P(x) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2)$ იქნება.

სასწავლო დავალებები

14. მოცემულია მრავალწევრების მამრავლებად დანაშაღი. დაწერეთ მრავალწევრის ფესვები, განსაზღვრეთ ხარისხი.

ა) $P(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$

დ) $P(x) = (x + 2)^3(x - 2)$

ბ) $P(x) = (x - 1)^3(x - 4)^2$

ე) $P(x) = 3(x - 4)^3(x - 3)^2(x - 1)$

გ) $P(x) = (x + 2)(x - i)(x + i)$

ვ) $P(x) = (x - 7)(x + 4)^3(x + 8)$

15. მოცემული ფესვების მიხედვით იპოვეთ დანარჩენი ფესვები.

ა) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 16$; $x_1 = -1$

ბ) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$; $x_1 = 3$

გ) $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 28x - 15$; $x_1 = \frac{1}{2}$

დ) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$; $x_1 = 1, x_2 = -1$

16. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = 0$

ბ) $x^3 - 8x + 8 = 0$

გ) $x^3 - 22x + 24 = 0$

დ) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

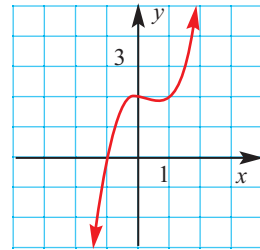
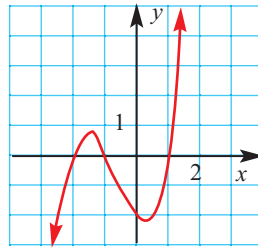
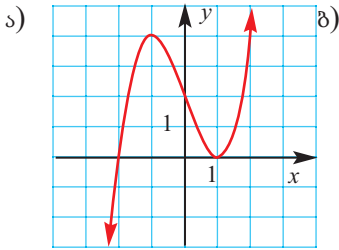
ალგებრის ძირითადი თეორემა

17. იპოვეთ მრავალწევრების ფესვები. განსაზღვრეთ რომელი მრავალწევრი რომელ გრაფიკს შეესაბამება.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$h(x) = x^3 - x^2 + 2$$



18. ამოხსენით განტოლებები. იპოვეთ ყველა ფესვი (ნამდვილი, ირაციონალური, კომპლექსური).

ა) $x^3 - 19x + 30 = 0$

დ) $2x^3 - 10x^2 + 12x - 4 = 0$

ბ) $x^3 - 7x - 6 = 0$

ე) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$

გ) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$

ვ) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$

19. ჰორნერის სქემის მიმდევრობითი გამოყენებით იპოვეთ რამდენჯერ განმეორებადი ფესვია:

ა) $x = 1$ რიცხვი $x^3 - 3x + 2$ მრავალწევრისა;

ბ) $x = -2$ რიცხვი $x^3 + 3x^2 - 4$ მრავალწევრისა.

20. ცნობილია, რომ $x^3 + 2x^2 + ax - 6 = 0$ განტოლების ერთი ფესვია $x = -2$. იპოვეთ a და ამოხსენით განტოლება.

21. 1) გაამარტივეთ. ა) i^5 ბ) i^7 გ) i^{23} დ) i^{17} ე) $(1 + i)^6$

2) იპოვეთ მრავალწევრების ფესვები.

ა) $P(x) = x^3 + 1$

ბ) $P(x) = x^4 - 1$;

გ) $P(x) = x^6 - 1$

22. ა) ჩაწერეთ მამრავლებად დაშლილი სახით მთელკოეფიციენტიანი კვადრატული სამწევრი, რომლის ერთ-ერთი ფესვია $3 - \sqrt{2}$.

ბ) ჩაწერეთ მამრავლებად დაშლილი სახით ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული სამწევრი, რომლის ერთ-ერთი ფესვია $2 + 3i$. შეამოწმეთ არის თუ არა ეს სამწევრი $x^2 - 4x + 13$.

გ) დაწერეთ ა და ბ პუნქტებში მოცემული დავალებების ამონახსენი განზოგადოებული მოსაზრებით.

23. დაწერეთ მთავარი წევრის კოეფიციენტი 1-ის, მოცემულ რიცხვებიანი ფესვების მქონე ყველაზე დაბალხარისხიანი ნამდვილკოეფიციენტიანი $P(x)$ მრავალწევრი. უჩვენეთ ხარისხი.

ა) -2 (3-ჯერ განმეორებადი ფესვი) და 1 (2-ჯერ განმეორებადი ფესვი)

ბ) 1 (2-ჯერ განმეორებადი ფესვი), $-i$ და i გ) 2 და $3 - i$.

ალგებრის ძირითადი თეორემა

გამოყენებითი დავალებები

ნიმუში: ლუნაპარკში არსებული კარუსელის კაბინის ნულოვანი მდგომარეობიდან სიმაღლის (მეტრობით) ცვლილების მოძრაობის პირველი 5 წამის განმავლობაში $h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. მოძრაობის დაწყებიდან 5 წამის განმავლობაში რომელ მომენტებში იყო კარუსელის კაბინა ნულოვან დონეზე?



ამოხსნა: $h(t)$ -ს ნულის ტოლი წერტილების გარდა, დანარჩენ შემთხვევებში კარუსელის კაბინა ნულოვანი დონიდან ან ზევით, ან კიდევე ქვევით იყო. მაშასადამე, ჩვენ მოცემული მრავალწევრის ფესვები უნდა ვიპოვოთ. გამოვიყენოთ რაციონალური ფესვების მოძებნის წესი.

1. შევამოწმოთ, ის რომ ერთ-ერთი ფესვი -1 -ია.

$$h(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 14 = -2 - 9 - 3 + 14 = 0$$

2. ვინაიდან ერთ-ერთი ფესვი -1 -ია, ამიტომ $t + 1$ მოცემული მრავალწევრის მამრავლია. სინთეტიკური გაყოფით განვსაზღვროთ მეორე მამრავლი.

-1	2	-9	3	14
		-2	11	-14
$\times$	2	-11	14	0

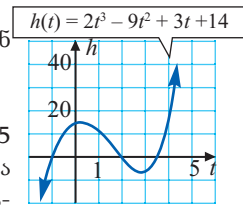
$$h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14 = (t + 1)(2t^2 - 11t + 14).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $2t^2 - 11t + 14 = (t - 2)(2t - 7)$, მაშინ

$$h(t) = (t + 1)(t - 2)(2t - 7).$$

$$t_1 = -1, t_2 = 2, t_3 = 3,5 \text{ იქნება.}$$

$t_2 = 2, t_3 = 3,5$ მომენტები მოძრაობის დაწყებიდან შემდგომი 5 წამის განმავლობაშია და ამ მომენტებში კარუსელის კაბინა ნულოვან დონეზე იყო. გრაფიკულად კლასიკურად აგებული გრაფიკი იმას უჩვენებს, რომ მრავალწევრის მოძებნილი ფესვები სწორია.



- 24.** სპორტული პერანგების მწარმოებელი კომპანიის მოგების $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$ სახით მოდელირება შეიძლება. სადაც P არის მოგება (მილიონ მანეთობით), x კი წარმოებული პერანგების რაოდენობა (მილიონობით). ანგარიშგების თანახმად, კომპანიამ 4 მილიონი პერანგის გაყიდვიდან 4 მილიონი მანათი მიიღო. თუ კომპანია მოისურვებს, რომ უფრო ნაკლები პერანგების წარმოებით მიიღოს იგივე მოგება, რამდენი უნდა იყოს პერანგების რაოდენობა?



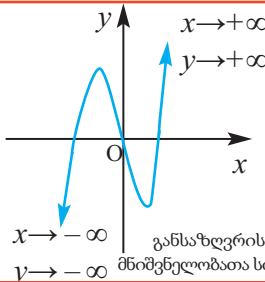
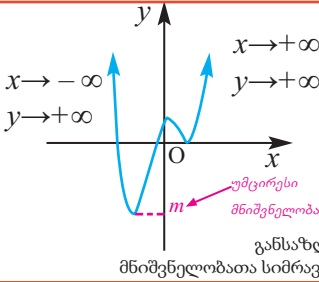
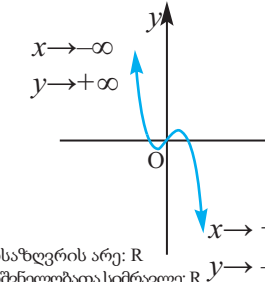
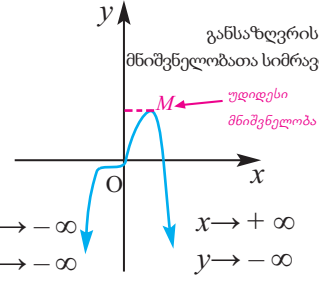
- 25.** ორი რიცხვის ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია. დაწერეთ მეორე რიცხვის მაჩვენებელი გამოსახულება, თუ ერთ-ერთი რიცხვი არის $n + 3$.
რა აზრის გამოთქმა შეიძლება ამ რიცხვების შესახებ $n = 1$ შემთხვევაში?

მრავალწევრა ფუნქციის გრაფიკი

მრავალწევრა ფუნქცია სტანდარტული სახით ასე იწერება: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ კერძო შემთხვევაში, როცა $n = 1$ წრფივი ფუნქცია (გრაფიკი წრფეა), როცა $n = 2$ კვადრატული ფუნქცია (გრაფიკი პარაბოლაა) მიიღება.

ნებისმიერი მრავალწევრი მთლიან რიცხვით სიმრავლეზე განსაზღვრული და გრაფიკი უწყვეტია - უწყვეტი ხაზია.

არგუმენტის მოდულით მეტი მნიშვნელობებისათვის მრავალწევრი მთავარ წევრში გამოსახული $y = a_n x^n$ ფუნქციის ქცევას იძენს. ქვემოთ მრავალწევრის გრაფიკების შესახებ ნიშნები და მათი ზოგიერთი თვისებებია მოცემული.

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$		
	n კენტი	n ლუწი
$a_n > 0$	 განსაზღვრის არე: $\mathbb{R}$ მნიშვნელობათა სიმრავლე: $\mathbb{R}$	 განსაზღვრის არე: $\mathbb{R}$ მნიშვნელობათა სიმრავლე: $[m; +\infty)$
$a_n < 0$	 განსაზღვრის არე: $\mathbb{R}$ მნიშვნელობათა სიმრავლე: $\mathbb{R}$	 განსაზღვრის არე: $\mathbb{R}$ მნიშვნელობათა სიმრავლე: $(-\infty; M]$

ნიშუი 1. განსაზღვრეთ მრავალწევრის ქცევა მრავალწევრის ხარისხსა და უმაღლეს ხარისხიანი წევრის კოეფიციენტის ნიშანზე, ასევე არგუმენტის მოდულის ზრდაზე დამოკიდებულებით.

ა) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$

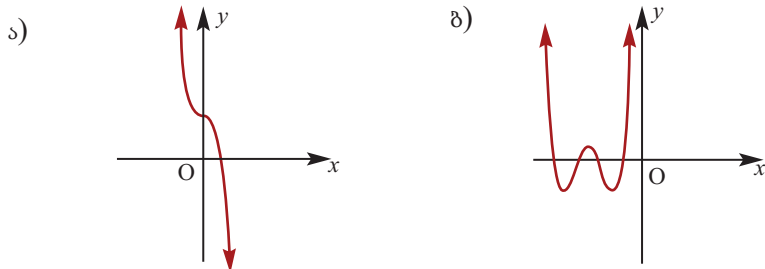
ბ) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$

ამოხსნა: ა) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ მრავალწევრის ხარისხია 3. კენტი. მთავარი წევრის კოეფიციენტია -2 . ცხრილიდანაც ჩანს, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $x \rightarrow -\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$; როცა $x \rightarrow +\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow -\infty$ იქნება.

ბ) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ მრავალწევრის ხარისხია 4, ლუწი. მთავარი წევრის კოეფიციენტია 1. ამ შემთხვევაში როცა $x \rightarrow -\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$; როცა $x \rightarrow +\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$ იქნება.

მრავალწევრა ფუნქცია

ნიმუში 2. მრავალწევრა ფუნქციების გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ მრავალწევრის ხარისხის ლუწ-კენტობა, მთავარი წევრის ნიშანი და ფუნქციის ქცევა არგუმენტის მოდულით დიდი მნიშვნელობებისათვის.



ამოხსნა: როცა $x \rightarrow -\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$
 როცა $x \rightarrow +\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow -\infty$
 მრავალწევრი კენტი ხარისხისაა
 $a_n < 0$.

ამოხსნა: როცა $x \rightarrow -\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$
 როცა $x \rightarrow +\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$
 მრავალწევრი ლუწი ხარისხისაა.
 $a_n > 0$.

ავლნიშნოთ, რომ როცა n კენტი, მაშინ მრავალწევრს სულ მცირე ერთი ნამდვილი ნული აქვს, ხოლო როცა n ლუწია, მაშინ ნამდვილი ნული შეიძლება არც ჰქონდეს.

ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით შეიძლება მრავალწევრა ფუნქციის ესკიზის აგება:

1. მოიძებნება გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის კოორდინატები (თუ არსებობს). ეს წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე აღინიშნება.
2. ნამდვილ ნულებს შორის მდებარე რამდენიმე მნიშვნელობისათვის განისაზღვრება ფუნქციის მნიშვნელობები, შესაბამისი წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე აღინიშნება.
3. განისაზღვრება გრაფიკის „წვეროს წერტილების“ ქცევა.
4. აღნიშნული წერტილებისა და „წვეროს წერტილების“ მიმართულების მიხედვით აიგება გრაფიკი.

ნიმუში 3. ააგეთ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ ფუნქციის გრაფიკი.

1. რაციონალური ნულების შესახებ თეორემის გამოყენებით ფუნქციის მოცემული გამოსახულების მამრავლებად დაშლით ვპოულობთ ნულებს.

თეორემის თანახმად შესაძლო რაციონალური ნულები 8-ის გამყოფი:
 $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$ რიცხვებს შორის შეიძლება იყოს.

$$\text{შევამოწმოთ } -1: f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) - 8 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

მაშასადამე, $x + 1$ ორწევრი ერთ-ერთი მამრავლია.

სინთეტიკური გაყოფით ვიპოვოთ მეორე მამრავლი:

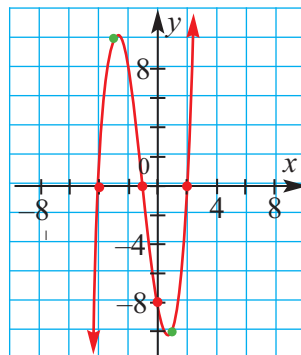
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^2 + 2x - 8)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -6 & -8 \\ -1 & -1 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 \\ \hline & x^2 + 2x - 8 \end{array}$$

რადგან $(x^2 + 2x - 8) = (x - 2)(x + 4)$, ამიტომ მოცემული მრავალწევრა ფუნქცია მთლიანად ჩავწერთ წრფივი მამრავლებით:

მრავალწევრა ფუნქცია

$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$; აქედან ვპოულობთ
ნულებს: -1 ; 2 ; -4 . ვინაიდან $f(0) = -8$, გრაფიკის y
ღერძთან გადაკვეთის წერტილი $(0; -8)$ იქნება.
ავლნიშნოთ ეს წერტილები საკოორდინატო
სიბრტყეზე.



2. გამოსათვლელად მარტივ $x = 1$ და $x = -3$ მნიშვნე-
ლობებში გამოვთვალოთ დამატებითი წერტილების
კოორდინატები: $f(-3) = (-3 + 1)(-3 - 2)(-3 + 4) = 10$
 $f(1) = (1 + 1)(1 - 2)(1 + 4) = -10$.
ავლნიშნოთ წერტილები: $(-3; 10)$ და $(1; -10)$.

3. განვსაზღვროთ x -ის მნიშვნელობის თანდათანობითი შემცირებით ან ზრდით
გრაფიკის ცვლილება. მთავარი წვერის ხარისხია 3. კენტია, კოეფიციენტები კი
დადებითია.

მაშასადამე, თუ $x \rightarrow +\infty$ მაშინ, $y \rightarrow +\infty$, თუ $x \rightarrow -\infty$ მაშინ კი $y \rightarrow -\infty$ იქნება.

4. აღნიშნული წერტილების შეერთებით სქემატურად დავხაზოთ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$
ფუნქციის გრაფიკი.

სასწავლო დავალებები

1. განსაზღვრეთ მრავალწევრის ხარისხი და მთავარი წვერის კოეფიციენტი,
არგუმენტის ქცევა მოდელის მაღალი მნიშვნელობებისათვის.

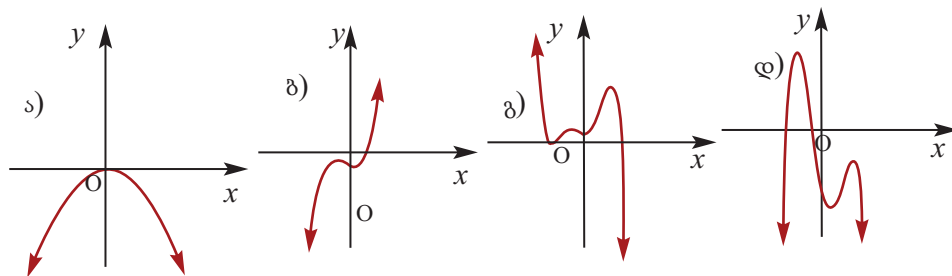
ა) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

ბ) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4$

გ) $f(x) = -x^6 + 2x^3 + 3x + 1$

დ) $f(x) = -4x^5 + 2x^3 - 3x + 1$

2. გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ მრავალწევრის ხარისხის ლუწ-კენტობა, მთავარი
წვერის ნიშანი და არგუმენტის უსასრულოდ დიდი ან მცირე მნიშვნელობისათვის
ფუნქციის მნიშვნელობის ნიშანი.



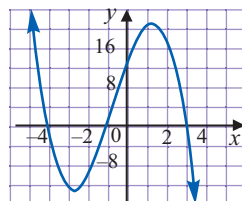
3. გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ:

ა) კენტია თუ ლუწი მრავალწევრის ხარისხი;

ბ) მთავარი წვერის კოეფიციენტის ნიშანი;

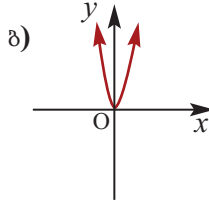
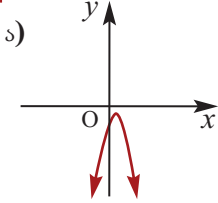
გ) x ღერძთან გადაკვეთის წერტილები;

დ) ფუნქციის ნიშნის დადებითი ან უარყოფითი ინტერ-
ვალები;



მრავალწევრა ფუნქცია

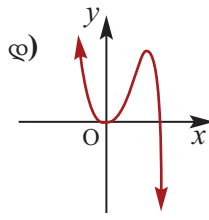
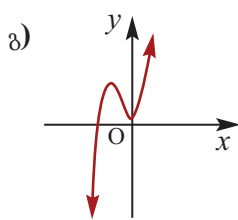
4. განსაზღვრეთ რომელი გრაფიკი რომელ ფუნქციას ეკუთვნის.



1) $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + 1$

2) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 3x^2$

3) $f(x) = 3x^4 - x^5 + x$



4) $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$

5. სქემატურად გამოსახეთ ფუნქციის გრაფიკები.

ა) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

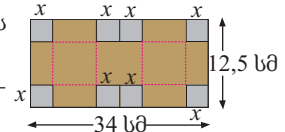
ბ) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

6. კომპანია 34 სმ $\times$ 12,5 სმ ზომების მქონე მართკუთხა მუყაო-საგან წვერობთან x სმ გვერდის მქონე კვადრატების ამოჭრის შემდეგ ყუთის წარმოებას გეგმავს.

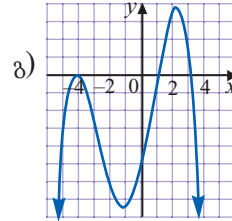
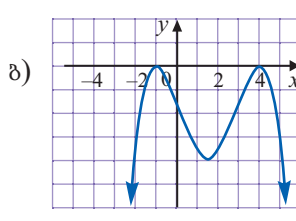
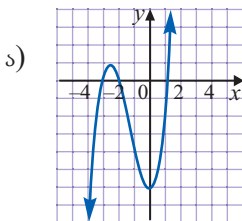
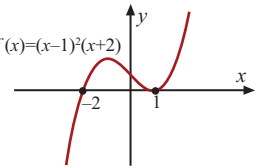
ა) დაწერეთ მრავალწევრა ფუნქცია, რომელიც უჩვენებს ყუთის მოცულობის x -ზე დამოკიდებულებას.

ბ) სქემატურად ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

გ) x -ის რომელი მთელი მნიშვნელობისათვის იქნება ყუთის მოცულობა 324 სმ³?



7. სურათზე მოცემულია $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციის გრაფიკი ლუწი რაოდენობით ნულ-ებში ეხება x ღერძს და მოზრუნდება. ამ ფაქტის გათვალისწინებით, ქვემოთ მოცემული გრაფიკების შესაბამისად, განსაზღვრეთ რა უმცირესი ხარისხის შეიძლება იყოს მრავალწევრი?



8. იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. ააგეთ თქვენს მიერ შერჩეული რომელიმე ორი ფუნქციის გრაფიკი.

$f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)$

$f(x) = -3(x + 3)^2(x + 1)^2$

$f(x) = (x - 2)^2(x + 5)$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

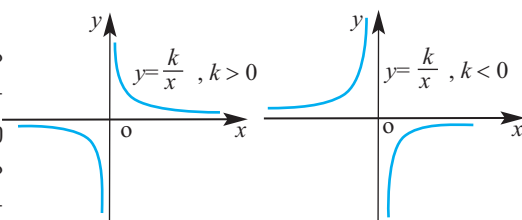
რაციონალური ფუნქცია

ორი მრავალწევრის განაყოფის სახით მოცემულ ფუნქციას **რაციონალური ფუნქცია**

ეწოდება: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0}$; $a_m \neq 0, b_n \neq 0$

რაციონალური ფუნქციის ყველაზე მარტივი ნიმუში $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციაა.

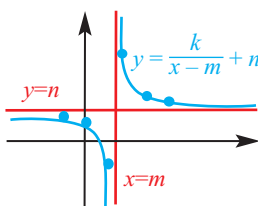
$y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება. x -ის მნიშვნელობები რაც უფრო ნულს უახლოვდება, ჰიპერბოლაზე არსებული წერტილები ორდინატა ღერძს ანუ $x = 0$ წრფეს, ხოლო x -ის მნიშვნელობების აბსოლიტური სიდიდით უსასრულოდ გაზრდის კვალობაზე კი ჰიპერბოლაზე მდებარე წერტილები აბსცისთა ღერძს ანუ $y = 0$ წრფეს უსასრულოდ უახლოვდება. $x = 0$ წრფეს $y = \frac{k}{x}$ ჰიპერბოლის **ვერტიკალური**



ლოვდება. $x = 0$ წრფეს $y = \frac{k}{x}$ ჰიპერბოლის **ვერტიკალური**

ასიმპტოტი, $y = 0$ წრფეს კი მისი **ჰორიზონტალური ასიმპტოტი**

ტოტი ეწოდება. $y = \frac{k}{x}$ ჰიპერბოლის $(m; n)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას $f(x) = \frac{k}{x-m} + n$ ფუნქციის გრაფიკი



მიიღება. ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სათავე $(m; n)$

წერტილად გარდაიქმნება და მიღებული ჰიპერბოლის

ვერტიკალური ასიმპტოტი $x = m$ წრფე, ჰორიზონტალური ასიმპტოტი კი

$y = n$ წრფე ხდება.

ნიმუში: ააგეთ $y = \frac{2x-1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა: $y = \frac{2x-1}{x-1}$ ფუნქცია წილადის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით $y = 2 + \frac{1}{x-1}$ სახით ჩავწერთ.

$x=1$ წრფე ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია,

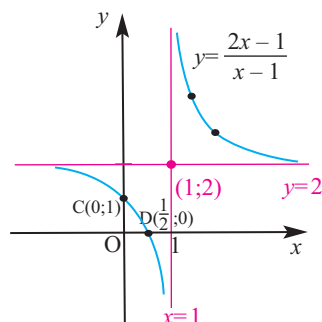
ხოლო $y=2$ წრფე კი ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

ვერტიკალური ასიმპტოტის მარჯვნივ და მარცხნივ

რამდენიმე წერტილში ფუნქციის შესაბამისი

მნიშვნელობებით შევადგინოთ ცხრილი.

x	-1	0	0,6	1,5	2	3
y	1,5	1	0	4	3	2,5



მიაქციეთ ყურადღება, რომ ჰიპერბოლის შტოები $(1;2)$ წერტილის მიმართ სიმეტრიულები არიან!

გრაფიკის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილი $C(0;1)$, x ღერძთან გადაკვეთის წერტილი კი $D(\frac{1}{2}; 0)$ იქნება. ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტების გათვალისწინებით გამოვსახოთ საკოორდინატო ღერძების C და D წერტილებში მკვეთი ჰიპერბოლის შტოები.

რაციონალური ფუნქცია

საერთოდ, რაციონალური ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად უნდა განისაზღვროს მისი საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები (თუ არსებობს) და ასიმპტოტები. თუ ფუნქცია გამოისახება ისეთი წილადის სახით, რომლის მნიშვნელიც $x=a$ წერტილში იქცევა ნულად, ხოლო მრიცხველი იქცევა ნულის არატოლ წილადად, მაშინ მოცემულ ფუნქციას გააჩნია ვერტიკალური ასიმპტოტი.

f რაციონალურ ფუნქციას შეიძლება გააჩნდეს არაუმეტეს ერთი ჰორიზონტალური ასიმპტოტისა, რომელიც განისაზღვრება $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრების m და n ხარისხების მნიშვნელობებზე დამოკიდებულებით.

თუ $m < n$, მაშინ $y = 0$ წრფე გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

თუ $m = n$, მაშინ $y = \frac{a_m}{b_n}$ წრფე ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

თუ $m > n$, მაშინ გრაფიკს ჰორიზონტალური ასიმპტოტი არ გააჩნია.

როცა $m = n + 1$, ანუ მრიცხველში არსებული მრავალწევრის ხარისხი მნიშვნელში არსებული მრავალწევრის ხარისხზე 1 ერთეულით მეტია, მაშინ მრავალწევრების გაყოფიდან მიღებული განაყოფი $y = ax + b$ სახის წრფივი ფუნქციაა და x -ის მოდულით დიდი მნიშვნელობებისთვის ფუნქციის გრაფიკი ამ წრფეს უსასრულოდ უახლოვდება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $y = ax + b$ წრფე რაციონალური ფუნქციის **დახრილი ასიმპტოტია**.

მაგ. 2. იპოვეთ $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ ფუნქციის ასიმპტოტები და სქემატურად გამოსახეთ მისი გრაფიკი.

ამოხსნა: $\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0$ განტოლებიდან მოიძებნება გრაფიკის x ღერძთან გადაკვეთის $(-2; 0)$, $(2; 0)$ წერტილები, რადგან, როცა $x = 0$ მაშინ $y = 4$ ამიტომ გრაფიკი y ღერძს $(0; 4)$ წერტილში გადაკვეთს. როცა $x = 1$ მაშინ მნიშვნელი 0-ად იქცევა, მრიცხველი კი ნულისაგან განსხვავებული ხდება. მაშასადამე, $x = 1$ წრფე ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია. მოცემულ ფუნქციას ჰორიზონტალური ასიმპტოტი არ გააჩნია. ($m > n$).

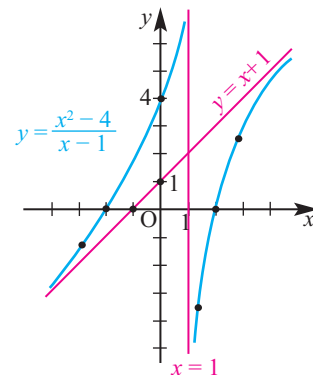
მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით ეს ფუნქცია $y = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$ სახით ჩავწე-

როთ. რადგან x -ის მოდულით დიდი მნიშვნელობებისათვის $\frac{3}{x - 1}$ წილადის მო-

დული მცირდება, ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $y = x + 1$ წრფეს უსასრულოდ უახლოვდება, ანუ $y = x + 1$ წრფე მოცემული ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტია. შევადგინოთ ვერტიკალური ასიმპტოტიდან მარჯვნივ და მარცხნივ რამდენიმე წერტილში ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების ცხრილი.

x	-3	-2	-1	0	1,5	2	3
y	-1,25	0	1,5	4	-3,5	0	2,5

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავლნიშნოთ წერტილები, რომელთა შესაბამისი კოორდინატების წყვილები ცხრილშია მოცემული. ვერტიკალური და დახრილი ასიმპტოტების გათვალისწინებით სქემატურად დავხაზოთ ფუნქციის გრაფიკი.



რაციონალური ფუნქცია

სასწავლო დაგეგმვა :

1. $\frac{2}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნით ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები.

ა) $y = \frac{2}{x-1}$ ბ) $y = \frac{2}{x+3}$ გ) $y = \frac{2}{x} - 1$ დ) $y = \frac{2}{x} + 1$

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ასიმპტოტები და ააგეთ გრაფიკი.

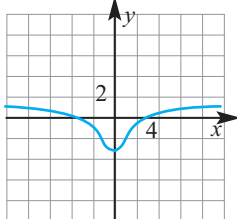
ა) $y = \frac{x-3}{x-2}$ ბ) $y = \frac{2x-3}{x-1}$ გ) $y = \frac{2x+1}{x}$ დ) $y = \frac{3x+2}{x+1}$

3. იპოვეთ მოცემული რაციონალური ფუნქციების ასიმპტოტები.

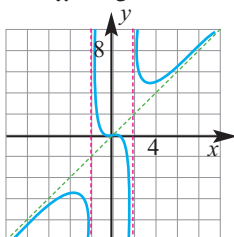
ა) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ ბ) $y = \frac{2x}{x^2-1}$ გ) $y = \frac{x^3+1}{x-1}$ დ) $y = \frac{2x^2+x+2}{x+1}$

4. მოცემულია ფუნქციები და გრაფიკები. განსაზღვრეთ რომელი გრაფიკი რომელ ფუნქციას მიეკუთვნება.

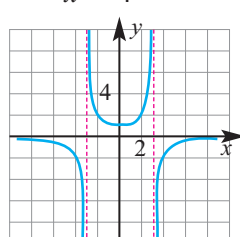
$y = \frac{-10}{x^2-9}$



$y = \frac{x^2-10}{x^2+3}$



$y = \frac{x^3}{x^2-4}$



5. იპოვეთ ფუნქციის ასიმპტოტები. შეადგინეთ მნიშვნელობათა ცხრილი და სქემატურად გამოსახეთ გრაფიკი.

ა) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$

ბ) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

გ) $y = \frac{x^2-3x}{x-2}$

6. იდეალური გაზის კანონის თანახმად P- წნევის, V- მოცულობის, T-ტემპერატურის იდეალური გაზისათვის $PV = nRT$ განტოლებით გამოსახული დამოკიდებულება ჭეშმარიტია. სადაც n არის გაზის მოლური რაოდენობა, R კი ინტერვალის მუდმივია.

ა) ჩათვალეთ, რომ T მუდმივია, ააგეთ P-ს V-ზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

ბ) რომელი წრფეებია გრაფიკის ასიმპტოტები?

გ) T-ს მუდმივობის პირობებში, გაზის მოცულობის უსასრულოდ გაზრდისას, რისი თქმა შეიძლება მისი წნევის ცვლილების შესახებ?



განმარტოვადი დავალები

1. $x^3 + mx^2 + nx + 2$ მრავალწევრის $x + 3$ ორწევრზე გაყოფისას ნაშთია -1 , ხოლო $x - 2$ ორწევრზე გაყოფისას ნაშთი 4 იქნება. იპოვეთ m და n პარამეტრების მნიშვნელობები.

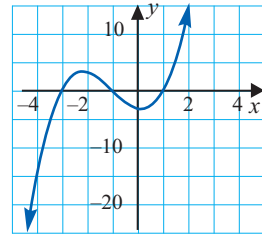
2. მოცემული სინთეტიკური გაყოფის სქემის მიხედვით დაწერეთ გასაყოფი, გამყოფი, განსაზღვრეთ და ნაშთი.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & -3 & 15 & -18 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

3. შეასრულეთ გაყოფის მოქმედება განშტოებითი გაყოფით.

ა) $(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$ დ) $(x^3 - 3x^2 - 7x + 6) : (x - 2)$
 ბ) $(x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2)$ ე) $(x^3 + 2x^2 - x + 5) : (x^2 - x + 1)$
 გ) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$ ვ) $(7x^3 + x^2 + x) : (x^2 + 1)$

4. სურათზე $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული.



- ა) გაყოფის მოქმედებაში ნაშთი -15 -ია. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა.

- ბ) გრაფიკის გამოყენებით განსაზღვრეთ

$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 3)$ და
 $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 1)$ გაყოფის მოქმედებიდან მიღებული ნაშთები.

5. უჩვენეთ, რომ მოცემული ორწევრი მოცემული მრავალწევრის მამრავლია.

$g(x) = x^3 - x^2 - 20x; x + 4$ $f(x) = x^4 - 6x^3 - 8x + 48; x - 6$
 $h(x) = x^3 - x^2 - 24x - 36; x + 2$ $s(x) = x^4 + 4x^3 - 64x - 256; x + 4$
 $r(x) = x^3 - 37x + 84; x + 7$ $t(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45; x - 5$

6. შეასრულეთ გაყოფის მოქმედებები სინთეტიკური გაყოფით.

ა) $(3x^2 + 7x - 20) : (x + 5)$ დ) $(5x^3 - 6x^2 + 3x + 11) : (x - 2)$
 ბ) $(5x^2 - 12x - 8) : (x + 3)$ ე) $(6x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1) : (x - 2)$
 გ) $(4x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$ ვ) $(x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 2x + 3) : (x - 3)$

7. მრავალწევრის მოცემული ფესვის მიხედვით განსაზღვრეთ სხვა ფესვები.

ა) $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 1; x = -1$ ბ) $f(x) = x^3 - 9x + 10; x = 2$

8. ამოხსენით განტოლება.

ა) $(4x^2 - 16)(x^2 - 3x - 10) = 0$ დ) $16x^6 = 54x^3$
 ბ) $(4x^2 - 81)(x^2 - 9) = 0$ ე) $2x^3 + 5x^2 = 8x + 20$
 გ) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$ ვ) $6x^5 - 18x^4 + 12x^3 = 36x^2$

9. დაშალეთ მრავალწევრები მამრავლებად.

ა) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ ბ) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

10. სქემატურად გამოსახეთ ა) $f(x) = 3x - x^3$ ბ) $f(x) = \frac{3x-1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

- მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში
- ვექტორები სივრცეში
- ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი
- წრფის ზოგადი განტოლება
- სიბრტყის განტოლება
- სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობა
- სფეროს განტოლება
- გარდაქმნები სივრცეში და სიბრტყეზე

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| ◆ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა | ◆ ერთეულოვანი ვექტორი |
| ◆ საკოორდინატო სიბრტყეები | ◆ რადიუს - ვექტორი |
| ◆ წერტილის კოორდინატები სივრცეში | ◆ კოლინეარული ვექტორები |
| ◆ ოქტანტები | ◆ კომპლანური ვექტორები |
| ◆ ვექტორი | ◆ წრფის ზოგადი განტოლება |
| ◆ ვექტორის კომპონენტები | ◆ სიბრტყის განტოლება |
| ◆ ვექტორის სიგრძე | ◆ სფეროს განტოლება |
| ◆ მგეზავი (ორტ) ვექტორი | |

ეს საინტერესოა!

დეკარტი და ფერმა ანალიტიკური გეომეტრიის ფუძემდებელი დიდი მეცნიერებია. თუმცა დეკარტმა თავისი შედეგები პირველმა გამოაქვეყნა. ფერმას შედეგებმა კი მისი სიკვდილის გამო დიდი ხნის შემდეგ იხილა დღის შუკი. საინტერესოა, რომ



რენე დეკარტი
(1596-1650)



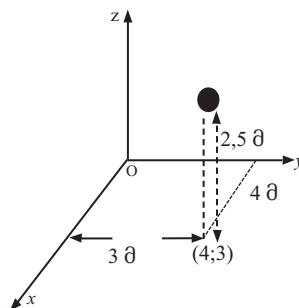
პიერ დე ფერმა
(1607-1665)

ისინი ერთი და იმავე შედეგამდე სრულიად განსხვავებული მიდგომით მივიდნენ. დეკარტმა კვლევები მოცემული მრუდის განტოლების მიხედვით, ხოლო ფერმამ კი მოცემული განტოლების მრუდის მიხედვით დაიწყო. ალგებრის წესების გეომეტრიაში გამოყენებამ გამოიწვია ანალიტიკური გეომეტრიის წარმოშობა. შემდგომში ანალიტიკური გეომეტრიის სრულყოფილი და მათემატიკური ანალიზის შემოქმედი ისააკ ნიუტონი წერდა: “მე დეკარტზე წინ წასვლა შეუძელი, მხოლოდ იმიტომ, რომ ჩემს უკან იდგა ისეთი ბუმბერაზი, როგორიც ის იყო”.

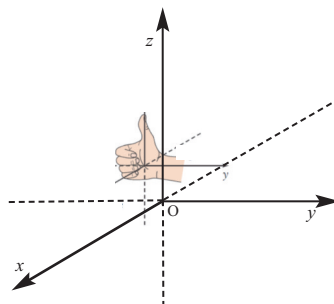
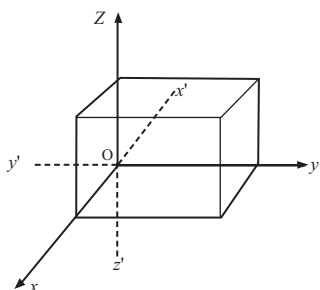


მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

დავუშვათ, რომ ბურთი ოთახში იატაკზე დაცემისას ვერტიკალურად ზევით ავარდება. ჩვენ ბურთის იატაკზე დაცემის ადგილის ოთახის სიგანისა და სიგრძის მიხედვით ორი მნიშვნელობით (კოორდინატით) განსაზღვრა შეგვიძლია. თუმცა, როცა ბურთი ჰაერშია ბურთის მდებარეობის ადგილის ორი კოორდინატით განსაზღვრა შეუძლებელია. თუ ბურთის იატაკზე დაცემის ადგილი განსაზღვრულია, როგორც (4; 3) და იგი ავარდა 2,5 მ სიმაღლეზე, მაშინ ბურთის მდებარეობა სივრცეში სამი კოორდინატით (4; 3; 2,5) განსაზღვრება.



მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. $x'Ox$, $y'Oy$ ქაღალდის ფურცლის სიბრტყეზე, $z'Oz$ კი ამ სიბრტყის მართობულის პირობით, გავავლოთ O წერტილზე გამავალი სამი ურთიერთგადამკვეთი და წყვილ-წყვილად მართობული წრფე. ზედ მიმართულება აღნიშნულ და სიგრძის ერთეულ არჩეულ ურთიერთმართობულ ამ სამ წრფეს საკოორდინატო ღერძები ეწოდება და სამგანზომილებიანი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შექმნით, მარტივ სივრცით მოდელს გამოსახავს. O კოორდინატთა სათავე თითოეულ საკოორდინატო ღერძს ორ (დადებით და უარყოფით) ნახევარღერძად ყოფს. განხილულ სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემას მარჯვენა ხელის სისტემასაც უწოდებენ. თუ თქვენი მარჯვენა ხელის თითებს y ღერძის დადებითი მიმართულებიდან x ღერძის დადებითი მიმართულებიდან z ღერძის დადებითი მიმართულებას დაიკავებს.

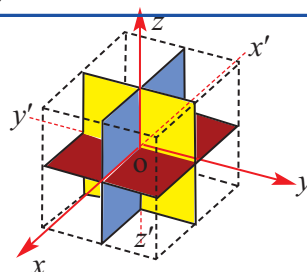


სამი საკოორდინატო ღერძი წყვილ-წყვილად გადაკვეთით საკოორდინატო სიბრტყეებს ქმნიან.

- O კოორდინატთა სათავე
- Ox , Oy , Oz საკოორდინატო ღერძები
- Oxy , Oyz , Ozx საკოორდინატო სიბრტყეები ეწოდება.

თითოეული საკოორდინატო სიბრტყე სივრცეს ორ ნახევარსივრცედ ყოფს და ამრიგად სამი საკოორდინატო სიბრტყე ერთად, სივრცეს რვა ნაწილად (თითოეულ ამ ნაწილს ოქტანტი ეწოდება) ყოფს:

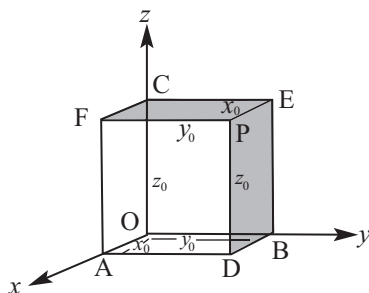
1. $Oxyz$; 2. $Ox'yz$; 3. $Ox'y'z$; 4. $Oxy'z$;
5. $Oxyz'$; 6. $Ox'yz'$; 7. $Ox'y'z'$; 8. $Oxy'z'$



მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

დავუშვათ, P სივრცის რაიმე წერტილია. P წერტილზე გავავლოთ Oyz , Ozx და Oxy სიბრტყეების პარალელური და საკოორდინატო ღერძების შესაბამისად A , B და C წერტილებში მკვეთი სიბრტყეები. მიღებული სამი სიბრტყე შემდეგია:

1. $ADPF \parallel Oyz$ სიბრტყისა;
2. $BEPD \parallel Oxz$ სიბრტყისა;
3. $CFPE \parallel Oxy$ სიბრტყისა.



წერტილის კოორდინატები სივრცეში.

- 1) P წერტილზე გამავალი და Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე x ღერძს $(x_0; 0; 0)$ წერტილში კვეთს.
- 2) P წერტილზე გამავალი და Oxz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე y ღერძს $(0; y_0; 0)$ წერტილში კვეთს.
- 3) P წერტილზე გამავალი და Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყე z ღერძს $(0; 0; z_0)$ წერტილში კვეთს.

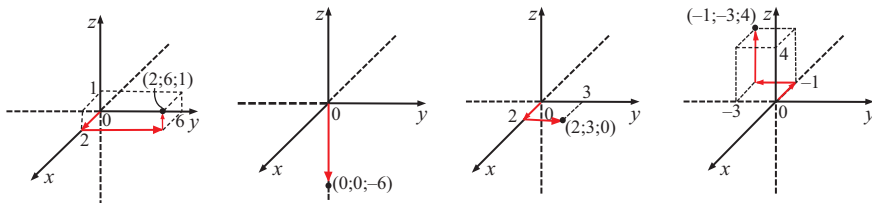
სივრცეში თითოეულ P წერტილს მოწესრიგებული $(x_0; y_0; z_0)$ სამეული შეესაბამება და პირიქით:

$$P \leftrightarrow (x_0; y_0; z_0).$$

• $(x_0; y_0; z_0)$ მოწესრიგებულ სამეულს მართკუთხა $(Oxyz)$ კოორდინატთა სისტემაში P წერტილის კოორდინატები, ან მართკუთხა **დეკარტის კოორდინატები**. ეწოდება. P წერტილიდან yz , zx და xy სიბრტყეებამდე მანძილი შესაბამისად მისი x_0 , y_0 , z_0 კოორდინატების აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლია. x_0 ; y_0 ; z_0 რიცხვებს P წერტილის შესაბამისად აბსცისი, ორდინატი და აპლიკატი ეწოდება და წერტილის კოორდინატები კი $P(x_0; y_0; z_0)$ სახით იწერება.

- 1) კოორდინატთა სათავე: $O(0; 0; 0)$.
- 2) Ox ღერძზე მდებარე წერტილი: $(x; 0; 0)$
 Oy ღერძზე მდებარე წერტილი: $(0; y; 0)$
 Oz ღერძზე მდებარე წერტილი: $(0; 0; z)$.
- 3) Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე წერტილი: $(x; y; 0)$
 Oyz საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე წერტილი: $(0; y; z)$
 Oxz საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე წერტილი: $(x; 0; z)$.

სივრცეში $(2; 6; 1)$ წერტილი 1-ელ ოქტანტში, $(0; 0; -6)$ წერტილი z -ის უარყოფით ნახევარღერძზე, $(2; 3; 0)$ წერტილი xy სიბრტყეზე, $(-1; -3; 4)$ წერტილი კი III ოქტანტში მდებარეობს.



მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

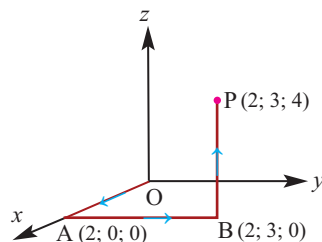
წერტილის კოორდინატების ნიშანი. წერტილის კოორდინატების ნიშანი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ ოქტანტში მდებარეობს. ქვემოთ მოცემულ ცხრილში ოქტანტებში წერტილების კოორდინატების ნიშნებია მოცემული.

ოქტანტები	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	OXYZ	OX'YZ	OX'Y'Z	OXY'Z	OXYZ'	OX'YZ'	OX'Y'Z'	OXY'Z'
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

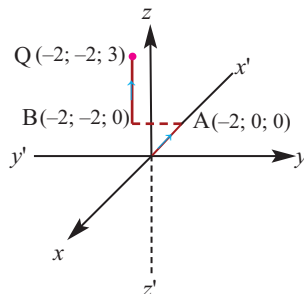
პირველ ოქტანტში ყველა კოორდინატის ნიშანი დადებითია, მეშვიდე ოქტანტში კი უარყოფითი. პირველ ოქტანტში ყველა კოორდინატის ნიშანი დადებითია, მეშვიდე ოქტანტში კი უარყოფითი.

ნიმუში 1: აავით ა) $P(2; 3; 4)$; ბ) $Q(-2; -2; 3)$ წერტილები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

ა) $P(2; 3; 4)$ წერტილის აგებისათვის კოორდინატთა სათავიდან x ღერძის დადებითი მიმართულებით ორ ერთეულ მანძილზე ავღნიშნოთ $A(2; 0; 0)$ წერტილი. A წერტილიდან y ღერძის დადებითი მიმართულების გასწვრივ y ღერძის პარალელურად 3 ერთეულ მანძილზე ავღნიშნოთ $B(2; 3; 0)$ წერტილი. B წერტილიდან z ღერძის დადებითი მიმართულების პარალელურად 4 ერთეულ მანძილზე ავღნიშნოთ $P(2; 3; 4)$ წერტილი.



ბ) $Q(-2; -2; 3)$ წერტილის აგებისათვის კოორდინატთა სათავიდან x ღერძის უარყოფითი მიმართულებით ორ ერთეულ მანძილზე ავღნიშნოთ $A(-2; 0; 0)$ წერტილი. A წერტილიდან y ღერძის უარყოფითი მიმართულების გასწვრივ y ღერძის პარალელურად 2 ერთეულ მანძილზე ავღნიშნოთ $B(-2; -2; 0)$ წერტილი. B - z ღერძის დადებითი მიმართულების პარალელურად 3 ერთეულ მანძილზე ავღნიშნოთ $Q(-2; -2; 3)$ წერტილი.



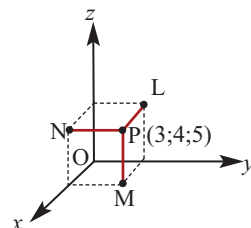
ნიმუში 2: $P(3; 4; 5)$ წერტილიდან საკოორდინატო ღერძების მართობეობა გავლებული. დაწერეთ A , B და C ფუძეების კოორდინატები.

ამოხსნა: P წერტილიდან x ღერძისადმი გავლებული მართობის y და z კოორდინატები ნულია. მაშასადამე, A წერტილის კოორდინატები $(3; 0; 0)$ იქნება. ანალოგიურად მოიძებნება დანარჩენი წერტილების კოორდინატები: $B(0; 4; 0)$ და $C(0; 0; 5)$.

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

ნიმუში 3. $P(3; 4; 5)$ წერტილიდან Oxy , Oxz და Oyz სიბრტყეებისადმი მართობებია გავლებული. დაწერეთ მართობების შესაბამისი M , N და L ფუძეების კოორდინატები.

ამოხსნა: P წერტილიდან Oxy სიბრტყისადმი გავლებული მართობის ფუძის Z კოორდინატი ნულია. მაშასადამე M წერტილის კოორდინატები $(3; 4; 0)$ იქნება. ანალოგიურად მოიძებნება დანარჩენი წერტილების კოორდინატები: $L(0; 4; 5)$ და $N(3; 0; 5)$



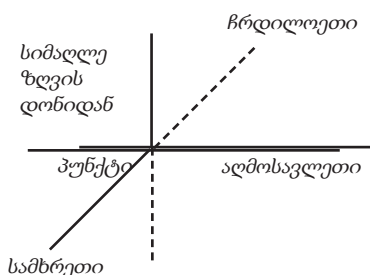
სასწავლო დაგვლებები

1. სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $(1; 1; 0)$, $(2; 3; -1)$ და $(-1; 2; 3)$ წერტილები.
2. 1) სივრცეში: ა) განსაზღვრეთ Oy ღერძზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.
ბ) განსაზღვრეთ Oxy სიბრტყეზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.
2) იპოვეთ $P(-2; 3; 1)$ წერტილიდან საკოორდინატო სიბრტყეებამდე და საკოორდინატო ღერძებამდე გავლებული მართობების ფუძეების კოორდინატები.
3. დაწერეთ რომელ ოქტანტში მდებარეობს თითოეული მოცემული წერტილი.

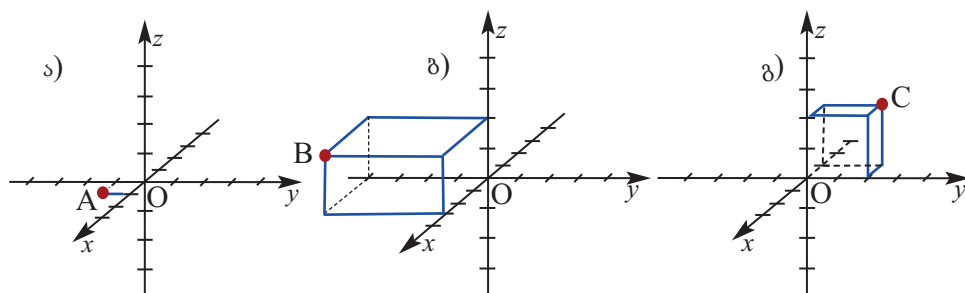
ა) $(1; 2; 5)$ ბ) $(4; -2; 5)$ გ) $(6; -2; -3)$ დ) $(4; 5; -1)$

ე) $(-4; 7; 2)$ ვ) $(-3; -1; 8)$ ზ) $(-3; 4; -9)$ თ) $(-6; -2; -1)$

4. მუსტაფა და მისი მეგობრები ალპინისტებთან ერთად მთაზე ავიდნენ. ისინი 3 კმ-ით აღმოსავლეთით, 2 კმ ჩრდილოეთით გავლითა და 4 კმ სიმაღლეზე ასვლით გეგმავდნენ გათვალისწინებულ პუნქტამდე მიღწევას. მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში დახაზეთ და უჩვენეთ მათი მისაღწევი პუნქტი.



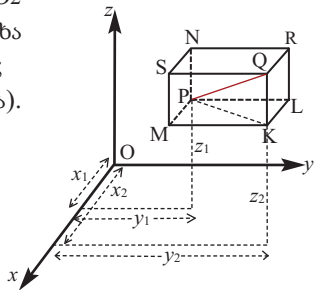
5. დაწერეთ აღნიშნული წერტილების კოორდინატები, რვეულში ჩაიხაზეთ კოორდინატთა სისტემა და თქვენც ააგეთ ეს წერტილები.



მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

სივრცეში მანძილი ორ წერტილს შორის. $P(x_1, y_1, z_1)$ და $Q(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის მანძილი $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ფორმულით გამოითვლება.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ PQ დიაგონალის მქონე $PMSNRLKQ$ პარალელებიპედის MP , PL და KQ წიბოები შესაბამისად Ox , Oy , Oz საკოორდინატო ღერძების პარალელურია. PKQ მართკუთხა სამკუთხედიდან ($\angle PKQ$ მართი კუთხეა) $PQ^2 = PK^2 + KQ^2$; PKL მართკუთხა სამკუთხედიდან ($\angle PLK$ მართი კუთხეა). $PK^2 = KL^2 + PL^2 = MP^2 + PL^2$; $KL = MP$
მაშინ $PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$



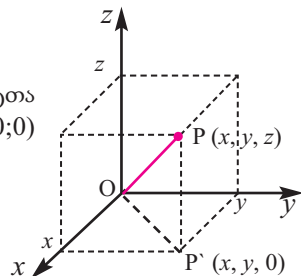
სადაც $MP = |x_2 - x_1|$, $PL = |y_2 - y_1|$ და $KQ = |z_2 - z_1|$
ამის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

მანძილი კოორდინატთა სათავიდან. სივრცით კოორდინატთა სისტემაში ნებისმიერი $P(x; y; z)$ წერტილის $O(0;0;0)$ კოორდინატთა სათავიდან მანძილი

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ფორმულით გამოითვლება.



მაგალიტი 1. ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებს კოლინეარული წერტილები ეწოდება. ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით უჩვენეთ, რომ $P(2; 4; 6)$, $Q(-2; -2; -2)$ და $R(6; 10; 14)$ წერტილები კოლინეარულია.

ამოხსნა: $PQ = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-4)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{16 + 36 + 64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

$$PR = \sqrt{(6-2)^2 + (10-4)^2 + (14-6)^2} = \sqrt{16 + 36 + 64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$QR = \sqrt{(6+2)^2 + (10+2)^2 + (14+2)^2} = \sqrt{64 + 144 + 256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$$

რადგან $QR = QP + PR$ ამიტომ P, Q და R წერტილები ერთ წრფეზეა ანუ კოლინეარულია.

მაგალიტი 2. იპოვეთ აბსცისთა ღერძზე მდებარე იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც $A(3; 2; 2)$ და $B(5; 5; 4)$ წერტილებიდან ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

ამოხსნა: აბსცისთა ღერძზე მდებარე წერტილი $P(x; 0; 0)$ სახისაა, ვინაიდან P წერტილი A და B წერტილიდან ერთი და იგივე მანძილითაა დაშორებული $PA = PB$ ანუ $PA^2 = PB^2$ უნდა იყოს. ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულით მივიღებთ:

$$(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-5)^2 + (0-5)^2 + (0-4)^2$$

აქედან $4x = 25 + 25 + 16 - 17$ ანუ $x = 12,25$

მაშასადამე, მოცემული A და B წერტილებიდან ტოლი მანძილით დაშორებული და აბსცისთა ღერძზე მდებარე წერტილი $P(12,25; 0; 0)$ იქნება.

მონაკვეთის განსაზღვრული პროპორციით გამყოფი წერტილის კოორდინატები.
 $P(x_1; y_1; z_1)$ და $Q(x_2; y_2; z_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის
 $PR : RQ = m : n$ პროპორციით დამყოფი R წერტილის კოორდინატები

$$R\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}; \frac{my_2 + ny_1}{m+n}; \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right) \text{ სახით მოიძებნება.}$$

დამტკიცება: დავუშვათ, PQ მონაკვეთის მოცემული პროპორციით დამყოფი წერტილია $R(x; y; z)$. გავავლოთ P, R და Q წერტილებიდან xy სიბრტყისადმი PL, RN და QM მართობები, L, N, M წეტილებიდან კი Ox ღერძის მიმართ LA, NC და MB მართობები. სურათის საფუძველზე, რადგან $AC = OC - OA = x - x_1$ და

$$BC = OB - OC = x_2 - x \text{ პროპორციული მონაკვეთების შესახებ}$$

თეორემის თანახმად მივიღებთ:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

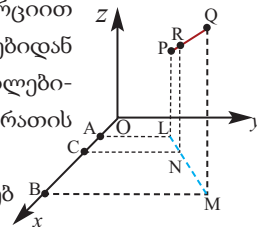
$$n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$(m+n)x = mx_2 + nx_1$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

y და z კოორდინატები მსგავსი წესით Oy და Oz ღერძებზე გავლებული მართობების მიხედვით განისაზღვრება.

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$



მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები. $P(x_1; y_1; z_1)$ და $Q(x_2; y_2; z_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუაწერტილი $M(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2})$ იქნება.

სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

წვეროების $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$ და $L(x_3, y_3, z_3)$ წერტილებში მდებარე სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის (მედიანების გადაკვეთის წერტილის) კოორდინატების მოძებნა შეიძლება

$$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right) \text{ სახით (დამოუკიდებლად შეამოწმეთ).}$$

ნამუში 3. მოცემულია $A(-2; 0; 6)$ და $B(10; -6; -12)$ წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის $AP : PB = 5 : 1$ პროპორციით დამყოფი P წერტილის კოორდინატები.

ამოხსნა: დავუშვათ, რომ P წერტილის კოორდინატებია $P(x; y; z)$ ეს წერტილი AB მონაკვეთის ყოფს $5:1$ შეფარდებით. მონაკვეთის მოცემული პროპორციით გამყოფი წერტილის კოორდინატები ფორმულის თანახმად

$$P(x; y; z) = P\left(\frac{5 \cdot 10 + 1 \cdot (-2)}{5+1}; \frac{5 \cdot (-6) + 1 \cdot 0}{5+1}; \frac{5 \cdot (-12) + 1 \cdot 6}{5+1}\right) =$$

$$= P(8; -5; -9) \text{ იქნება.}$$

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

ნიმუში 4: მოცემული სიმძიმის ცენტრის კოორდინატთა სათავეში მდებარე სამკუთხედის ორ წვეროს წერტილია (3; -5; 7) და (-1; 7; -6). იპოვეთ ამ სამკუთხედის მესამე წვეროს წერტილის კოორდინატები.

ამოხსნა: ვინაიდან სიმძიმის ცენტრი კოორდინატთა სათავეში მდებარეობს:

$$\begin{aligned} O \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) = \\ = O \left(\frac{3 - 1 + x_3}{3}; \frac{-5 + 7 + y_3}{3}; \frac{7 - 6 + z_3}{3} \right) = O(0; 0; 0) \\ \text{აქედან, } \frac{3 - 1 + x_3}{3} = 0; \quad \frac{-5 + 7 + y_3}{3} = 0; \quad \frac{7 - 6 + z_3}{3} = 0 \\ x_3 = -2 \qquad y_3 = -2 \qquad z_3 = -1 \end{aligned}$$

მაშასადამე, სამკუთხედის მესამე წვეროს წერტილი (-2; -2; -1) იქნება.

სასწავლო დაფალებები

6. იპოვეთ მანძილი წერტილებს შორის
ა) A(5; 4; 0) და B(8; 8; 4) ბ) M(7; 6; -3) და N(-1; -3; 9)
7. უჩვენეთ, რომ მოცემული სამი წერტილი კოლინეარულია.
ა) (-3; 2; 4), (-1; 5; 9), (1; 8; 14) ბ) (5; 4; 2), (6; 2; -1), (8; -2; -7)
8. დაამტკიცეთ, რომ (0; 7; 10), (-1; 6; 6) და (-4; 9; 6) წერტილები მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროს წერტილებია.
9. იპოვეთ A(2; 1; 3) წერტილიდან $\sqrt{17}$ ერთეულის მანძილზე ორდინატთა ღერძზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.
10. a -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება (5; -1; 7) და (a ; 5; 1) წერტილებს შორის მანძილი 9 ერთეულის ტოლი?
11. იპოვეთ მანძილი P(3; -1; 2) წერტილიდან :1) საკოორდინატო სიბრტყეებამდე; 2) საკოორდინატო ღერძებამდე; 3) კოორდინატთა სათავემდე.
12. წერტილების ადგილას შესაბამისი ინფორმაციების ჩაწერით დაასრულეთ წინადადებები.
1) P(3; 5; 6) წერტილიდან Oxy სიბრტყემდე მანძილი ერთეულია.
2) M(3; 4; 2) წერტილიდან Oz ღერძამდე მანძილი ერთეულია.
13. განსაზღვრეთ A(-1; 1; 0), B(1; 0; -1) და C(0; -1; 0) წერტილებიდან ერთსა და იმავე მანძილზე მყოფი და yz სიბრტყეზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.
14. განსაზღვრეთ A, B და C წერტილები შეიძლება თუ არა იყოს სამკუთხედის წვეროები.
ა) A(4; -2; 0), B(6; -5; 6), C(0; -7; 9)
ბ) A(3; 2; -2), B(5; 6; 2), C(1; -2; -6)

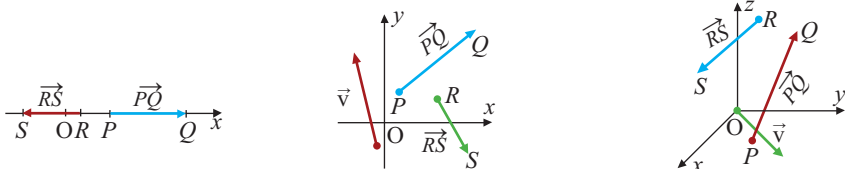
მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

15. $M(1; -2; 3)$ წერტილი იმ AB მონაკვეთის შუაწერტილია, რომლის ერთი წვეროც $A(3; 1; -1)$ წერტილში მდებარეობს. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები.
16. სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილების კოორდინატებია $(3; 2; 3)$, $(-1; 1; 5)$ და $(0; 3; 4)$ იპოვეთ სამკუთხედის წვეროს წერტილების კოორდინატები.
17. სამკუთხედის წვეროს წერტილებია $A(17; -2; -1)$, $B(1; -2; 11)$, $C(1; 16; -1)$. იპოვეთ ამ სამკუთხედის BM მედიანის სიგრძე.
18. იპოვეთ PQ მონაკვეთის $2:1$ შეფარდებით გამყოფი წერტილის კოორდინატები, თუ $P(2; -4; 3)$ და $Q(-4; 5; -6)$ იქნება. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).
19. $A(3; 2; -4)$, $B(5; 4; -6)$ და $C(9; 8; -10)$ კოლინეარული წერტილებია. რა პროპორციით ყოფს B წერტილი AC მონაკვეთს?
20. იპოვეთ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები, თუ სამკუთხედის წვეროს წერტილებია: $(9; 6; 9)$; $(3; 3; 15)$; $(0; 9; 12)$.
21. AB მონაკვეთი საკოორდინატო სიბრტყეებში პარალელურ წახნაგებზე მდებარე პარალელეპიპედის დიაგონალია. წერტილთა თითოეული წყვილისათვის:
ა) დახაზეთ შესაბამისი გეომეტრიული გამოსახულება.
ბ) დაწერეთ პარალელეპიპედის დანარჩენი 6 წვეროს კოორდინატები.
გ) იპოვეთ AB დიაგონალის სიგრძე.
1. $A(0; 0; 0)$; $B(7; 2; 3)$ 3. $A(-1; 1; 2)$; $B(2; 3; 5)$
2. $A(1; 1; 1)$; $B(3; 4; 2)$ 4. $A(2; -1; -9)$; $B(4; 0; -1)$
22. დაამტკიცეთ, რომ:
ა) $A(0; 4; 1)$, $B(2; 3; -1)$, $C(4; 5; 0)$ და $D(2; 6; 2)$ წერტილები კვადრატის წვეროს წერტილებია.
ბ) $(5; -1; 1)$, $(7; -4; 7)$, $(1; -6; 10)$ და $(-1; -3; 4)$ წერტილები რომბის წვეროს წერტილებია.
23. $A(9; 6; 0)$, $B(15; 9; 6)$, $C(21; -3; -8)$ სამკუთხედის წვეროს წერტილებია, $\angle BAC$ -ს ბისექტრისა BC გვერდს D წერტილში კვეთს. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები.
24. ა) ოთახის მოპირდაპირე კუთხეებიდან ერთი კოორდინატთა სათავეში, მეორე კი ამ კუთხიდან 4 მ ჩრდილოეთით, 3 მ აღმოსავლეთით, $3,5$ მ ზევით გამოსახეთ.
ბ) იპოვეთ მოპირდაპირე კუთხეების შემაერთებული დიაგონალის სიგრძე.
გ) დაწერეთ ოთახის მოდელის მაჩვენებელი პარალელეპიპედის 8 წვეროს წერტილის კოორდინატები.

ვექტორები სივრცეში

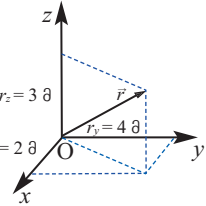
მხოლოდ მნიშვნელობით კი არა, ასევე მიმართულებითაც განსაზღვრულ სიდიდეს ვექტორიალური სიდიდე ანუ **ვექტორი** ეწოდება. ვექტორი მიმართულების მქონე მონაკვეთით აღინიშნება. ვექტორის მაჩვენებელი მონაკვეთის სიგრძეს **ვექტორის სიგრძე ანუ მოდული** ეწოდება.

ვექტორი ერთგანზომილებიან, ორგანზომილებიან და სამგანზომილებიან საკოორდინატო სისტემაში შეიძლება გამოისახოს.

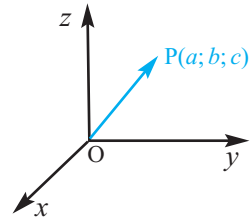


ერთგანზომილებიანი (R^1) ორგანზომილებიანი (R^2) სამგანზომილებიანი (R^3) ვექტორს, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილი ემთხვევა ერთმანეთს **ნულოვანი ვექტორი** ეწოდება. ნულოვანი ვექტორის მიმართულება განუსაზღვრელია.

სივრცეში განსაზღვრული წერტილის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავედ მიღებით, ნებისმიერი ობიექტის ადგილის (მდებარეობა) სივრცეში ვექტორით შეიძლება გამოისახოს. მაგალითად, თუ ბურთი სათამაშო მოედნის ცენტრიდან სიგანის გასწვრივ 2 მ -ით, სიგრძის გასწვრივ 4 მ წერტილიდან 3 მ სიმაღლეზეა ასროლილი, ბურთის სივრცეში მდებარეობა, ადგილი სურათზე მოცემული ვექტორით გამოისახება.

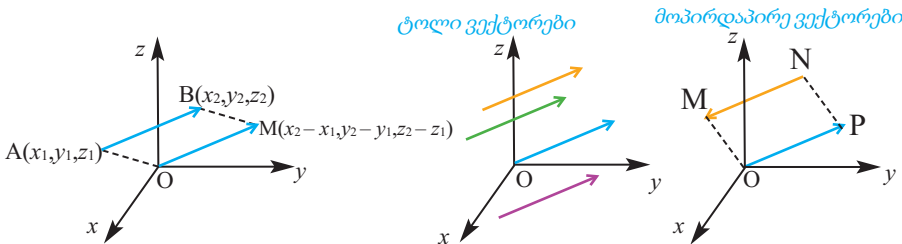


სივრცეში წერტილის ადგილის (მდებარეობის, პოზიციის) განმსაზღვრელ და საწყისი წერტილის შემაერთებელ ვექტორს **რადიუს-ვექტორი** ეწოდება. სივრცეში მოცემულ თითოეულ ვექტორს ერთი რადიუს-ვექტორი შეესაბამება. საკოორდინატო სისტემაში $P(a;b;c)$ წერტილის ადგილს $\vec{OP} \langle a;b;c \rangle$ ვექტორი განსაზღვრავს. $\vec{OP} \langle a;b;c \rangle$ ჩანაწერი ვექტორის სივრცეში კომპონენტებით ჩანაწერია.



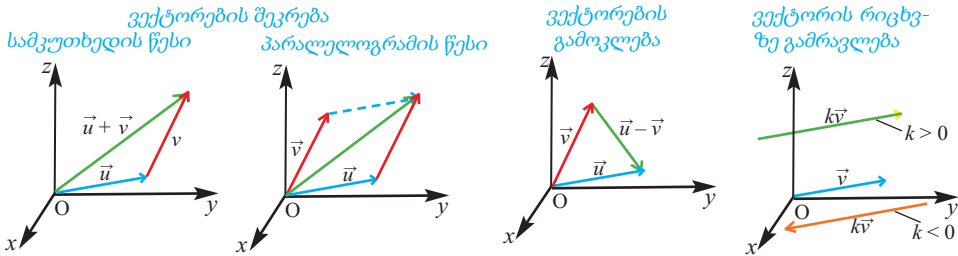
ტოლი მოდულებისა და ერთი და იგივე მიმართულების ვექტორებს **ტოლი ვექტორები** ეწოდება. ტოლი ვექტორები პარალელური გადატანით სრულად ემთხვევა ერთმანეთს. მაგალითად, სურათზე $\vec{AB}$ და $\vec{OM}$ ვექტორები ტოლია. $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორისა კი სიდიდით ტოლი და იმავე მიმართულების უსასრულო რაოდენობის ვექტორის გავლებზეა შესაძლებელი. სივრცეში, სათავეს $A(x_1; y_1; z_1)$, ბოლო $B(x_2; y_2; z_2)$ წერტილში მქონე $\vec{AB}$ ვექტორი კომპონენტებით $\langle x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \rangle$ სახით იწერება. ტოლი ვექტორების შესაბამისი კომპონენტები ტოლია და პირიქით.

მოდულით ტოლ, მოპირდაპირე მიმართულების ვექტორებს, **მოპირდაპირე ვექტორები** ეწოდება.



ვექტორები სივრცეში

ისევე როგორც სიბრტყეზე, სივრცეშიც ვექტორების გეომეტრიული წესით შეკრება და გამოკლება შეიძლება.



სივრცით დეკარტის კოორდინატა სისტემაშიც, თუ მოცემულია ორი წერტილის კოორდინატები, სათავისა და ბოლოსი, ამ წერტილებში მდებარე ვექტორის კომპონენტებისა და სიგრძის პოვნა და ვექტორებზე მოქმედებები სრულდება სიბრტყეზე კოორდინატა სისტემაში თქვენს მიერ შესწავლილი წესების მსგავსად.

ვექტორის სიგრძე. ვექტორის მოდული შეიძლება მოვძებნოთ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით.

თეორემა. თუ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები შესაბამისად არის $P(x_1, y_1, z_1)$ და $Q(x_2, y_2, z_2)$ მაშინ $\vec{PQ}$ ვექტორის სიგრძე

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ ფორმულით გამოითვლება.}$$

დასკვნა. $\vec{OP} \langle x; y; z \rangle$ რადიუს-ვექტორის სიგრძე $|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ იქნება.

(კოორდინატა სათავიდან მოცემულ წერტილამდე მანძილის ფორმულის იგივეურია).

ვექტორების შეკრება და გამოკლება. $\vec{v} \langle v_1; v_2; v_3 \rangle$ და $\vec{u} \langle u_1; u_2; u_3 \rangle$ ვექტორების ჯამი (სხვაობა) არის ვექტორი, რომლის კომპონენტები ამ ვექტორების კომპონენტების ჯამის (სხვაობის) ტოლია. $\vec{v} + \vec{u} = \langle v_1 + u_1; v_2 + u_2; v_3 + u_3 \rangle$
 $\vec{v} - \vec{u} = \langle v_1 - u_1; v_2 - u_2; v_3 - u_3 \rangle$

მაგალიტი 1. დაწერეთ $\vec{v} = \langle 2; 1; -3 \rangle$ და $\vec{u} = \langle 0; 4; -2 \rangle$ ვექტორების ჯამი.

ამოხსნა: $\vec{v} + \vec{u} = \langle 2; 1; -3 \rangle + \langle 0; 4; -2 \rangle = \langle 2; 5; -5 \rangle$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება: $\vec{v} \langle v_1; v_2; v_3 \rangle$ ვექტორის k რიცხვზე ნამრავლი $k\vec{v} = \langle kv_1; kv_2; kv_3 \rangle$ სახით განსაზღვრული ვექტორია.

ვექტორის ნამდვილ რიცხვზე გამრავლებისათვის მართებულია ქვემოთ მოცემული ალგებრული წესები:

- თითოეული $k \in \mathbb{R}$ -სათვის $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- თითოეული $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ -სათვის $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$
- თითოეული $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ -სათვის $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{u} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{u})$

მაგალიტი 2. მოცემულია $\vec{u} \langle 1; -2; 3 \rangle$ და $k = 3$ რიცხვი. კომპონენტებით ჩაწერეთ $k\vec{u}$ ვექტორი.

ამოხსნა: $k\vec{u} = \langle 3 \cdot 1; -2 \cdot 3; 3 \cdot 3 \rangle = \langle 3; -6; 9 \rangle$

ვექტორები სივრცეში

კოლინეარული ვექტორები. თუ ვექტორების გამომსახველი მიმართული მონაკვეთები პარალელურია ან კიდევ ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობენ, მათ კოლინეარული ვექტორები ეწოდება. თუ $\vec{a} \neq 0$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარულია, მაშინ არსებობს ერთადერთი ისეთი k რიცხვი, რომ $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ პირობას აკმაყოფილებს. როცა $k > 0$, ეს ვექტორები ერთნაირი მიმართულებისანი არიან, როცა $k < 0$, მაშინ კი მოპირდაპირე. კოლინეარული ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია.

$$b_1 = k \cdot a_1, b_2 = k \cdot a_2, b_3 = k \cdot a_3.$$

როცა $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$, ეს პირობა $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = k$ სახით იწერება.

ნიმუში 3. განსაზღვრეთ $\vec{a} = \langle -1; 2; -3 \rangle$ და $\vec{b} = \langle -3; 6; -9 \rangle$ ვექტორები არიან თუ არა კოლინეარული.

ამოხსნა: $\frac{-1}{-3} = \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$ ამიტომ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარული და ერთნაირი მიმართულებისანი არიან.

ნიმუში 4. ააგეთ $\vec{AB}$ ვექტორის ტოლი რადიუს-ვექტორი.

სამკუთხედის წესის თანახმად: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

A და წერტილების შესაბამისი რადიუს-ვექტორები

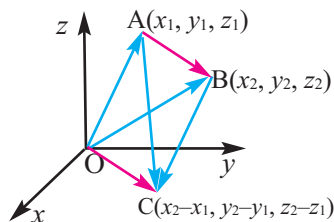
$\vec{OA} \langle x_1; y_1; z_1 \rangle$ და $\vec{OB} \langle x_2; y_2; z_2 \rangle$ ვექტორებია.

სიბრტყეზე ვექტორების შეკრების წესის თანახმად

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$. აქედან,

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \langle x_2; y_2; z_2 \rangle - \langle x_1; y_1; z_1 \rangle =$$

$$= \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \rangle = \vec{OC}.$$



ნიმუში 5. მოცემულია $\vec{AB}$ ვექტორი, რომლის საწყისი წერტილია $A(-3; -4; 1)$ და

ბოლო წერტილია $B(1; -2; 3)$. ა) იპოვეთ $\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე;

ბ) კომპონენტებით ჩაწერეთ $\vec{AB}$ ვექტორის ტოლი რადიუს-ვექტორი.

ამოხსნა: ა) $|\vec{AB}| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-2 - (-4))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

ბ) $\vec{AB}$ ვექტორის ტოლი რადიუს-ვექტორი ავლნიშნოთ $\vec{OP}$ -ით.

A წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი $\vec{OA} \langle -3; -4; 1 \rangle$, B წერტილის შესაბამისი

რადიუს-ვექტორი კი $\vec{OB} \langle 1; -2; 3 \rangle$ იქნება. $\vec{AB} = \vec{OB} \langle 1; -2; 3 \rangle - \vec{OA} \langle -3; -4; 1 \rangle = \vec{AB} \langle 4; 2; 2 \rangle$

$\vec{AB} = \vec{OP}$, ამიტომ საძიებელი ვექტორი $\vec{OP} \langle 4; 2; 2 \rangle$ იქნება.

ნიმუში 6. მოცემულია $P(2; 1; 5)$, $Q(3; 5; 7)$,

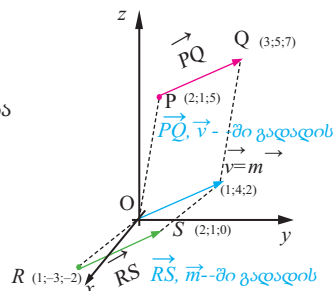
$R(1; -3; -2)$ და $S(2; 1; 0)$ წერტილები. $\vec{PQ} = \vec{RS}$ ტოლობა

მართებულია?

ამოხსნა: $\vec{PQ} = \langle 3 - 2; 5 - 1; 7 - 2 \rangle = \langle 1; 4; 2 \rangle$,

$$\vec{RS} = \langle 2 - 1; 1 - (-3); 0 - (-2) \rangle = \langle 1; 4; 2 \rangle. \text{ ცხადია}$$

შესაბამისი კომპონენტების ტოლობიდან $\vec{PQ} = \vec{RS}$.



ვექტორები სივრცეში

სასწავლო დაგეგმვა

1. სივრცეში R და S წერტილების კოორდინატების მიხედვით კომპონენტებით ჩაწერეთ $\overrightarrow{RS}$ ვექტორი და გამოთვალეთ მისი სიგრძე.
ა) $R(3; -1; 1), S(3; -2; 1)$ ბ) $R(4; 3; -6), S(-5; -2; 5)$
2. გამოთვალეთ ვექტორების სიგრძე.
ა) $\vec{v}\langle 2; -1; 1 \rangle$ ბ) $\vec{v}\langle 2; -1; 0 \rangle$ გ) $\vec{v}\langle 3; 2; -2 \rangle$
დ) $\vec{v}\langle 0; 0; 1 \rangle$ ე) $\vec{v}\langle 6; 4; -4 \rangle$ ვ) $\vec{v}\langle -2; 3; 0 \rangle$
3. კომპონენტებით ჩაწერეთ ვექტორი, რომლის სივრცეში საწყისი წერტილია $A(1; -2; 3)$ და ბოლო წერტილია $B(-2; 1; 1)$. განსაზღვრეთ ტოლი რადიუს-ვექტორი.
ა) სივრცის $P(1; -1; 1), Q(2; -2; 2), R(2; 0; 1), S(3; -1; 2)$ წერტილებისათვის მართებულია თუ არა $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ ტოლობა?
4. ბ) მოცემულია წერტილები: $A(1; 0; 1), B(-1; 1; 2), C(0; 2; -1)$. იპოვეთ $D(x; y; z)$ წერტილი, თუ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
იპოვეთ უცნობი კოორდინატის ისეთი მნიშვნელობა, რომ მოცემული ვექტორები პარალელური და ერთი და იგივე მიმართულებისა გახდნენ.
ა) $\vec{a}\langle -1; 2; 3 \rangle$ და $\vec{b}\langle x; 6; 9 \rangle$ ბ) $\vec{a}\langle 4; y; 6 \rangle$ და $\vec{b}\langle 10; 20; 15 \rangle$
6. $\vec{a}\langle 3; 0; 4 \rangle$ და $\vec{b}\langle 2; 1; -1 \rangle$ მოცემული ვექტორებია. კომპონენტებით ჩაწერეთ $2\vec{a} - 3\vec{b}$.
მითითება: $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კომპონენტები ჩაწერეთ ვექტორის გამოსახულებაში ადგილებზე და გამოიყენეთ ვექტორის რიცხვზე გამრავლების წესი.
7. მოცემულია $\vec{v}\langle 2; 1; -1 \rangle$ და $\vec{w}\langle 3; -4; 2 \rangle$ ვექტორები. კომპონენტებით ჩაწერეთ ქვემოთ მოცემული ვექტორები:
ა) $\vec{v} - \vec{w}$ ბ) $2\vec{v} - 3\vec{w}$ გ) $-\vec{v} - 2\vec{w}$ დ) $2(\vec{v} + \vec{w})$
8. $\vec{a}\langle -1; 2; 0 \rangle$ ვექტორისათვის რომელი ვექტორის მიმატებით მიიღება $\vec{b}\langle 3; 1; 5 \rangle$ ვექტორი?
9. მოცემულია $A(1; 2; 4)$ და $B(4; 8; 19)$ წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის $AK : KB = 2:1$ პროპორციით გამყოფი K წერტილის კოორდინატები ვექტორების კოლინეარულობის პირობის გამოყენებით.
10. $\vec{a}\langle 1; -1; k \rangle$ და $\vec{b}\langle -1; -6; -4 \rangle$ მოცემული ვექტორებია. k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $2\vec{a} - \vec{b}$ ვექტორის სიგრძე 5-ის ტოლი?
11. **ფიზიკა.** სხეულზე მოდებული ორი ძალის ვექტორული კომპონენტებია $\langle 3; -2; 4 \rangle$ და $\langle 6; 2; 5 \rangle$. კომპონენტებით ჩაწერეთ სხეულის წონასწორობის შენარჩუნებისათვის საჭირო ძალა.

ვექტორები სივრცეში

ერთსა და იმავე სიბრტყეზე ან პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე ვექტორებს **კომპლანური ვექტორები** ეწოდება. მაგალითად კუბის მოპირდაპირე წახნაგებზე მდებარე ყველა ვექტორი კომპლანურია. კუბის ერთი წვეროდან გამოსულ სამ წიბოზე მიმართული ვექტორები კი არაკომპლანურია.

ერთეულოვანი ვექტორი. ისეთ ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთი ერთეულის ტოლია, **ერთეულოვანი ვექტორი** ეწოდება.

ნებისმიერი არანულოვანი $\vec{v}$ ვექტორისათვის $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ვექტორი ერთეულოვანი ვექტორია.

ნიმუში 1. განსაზღვრეთ $\vec{a} = \langle 4; -2; 4 \rangle$ ვექტორის მიმართულების მქონე: ა) $\vec{u}$ ერთეულოვანი ვექტორი; ბ) კომპონენტებით ჩაწერეთ 10 ერთეულის სიგრძის $\vec{a}$ -თან ერთნაირ მიმართულებიანი $\vec{v}$ ვექტორი.

ამოხსნა: ა) ერთეულოვანი ვექტორი ავლნიშნოთ $\vec{u}$ ასოთი:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{u} = \frac{\langle 4; -2; 4 \rangle}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{\langle 4; -2; 4 \rangle}{6} = \frac{\langle 4; -2; 4 \rangle}{6} = \left\langle \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\rangle$$

შევამოწმოთ, რომ ამ ვექტორის სიგრძე ნამდვილად ერთის ტოლია:

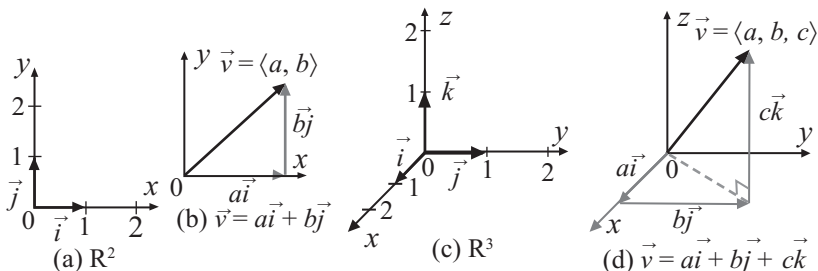
$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

ბ) $\vec{a} = \langle 4; -2; 4 \rangle$ ვექტორის მიმართულებით სიგრძით 10 ერთეულის მქონე ვექტორის განსაზღვრისათვის წინა (ა) პუნქტში მოძებნილი ერთეულოვანი ვექტორის კომპონენტები უნდა გავამრავლოთ 10-ზე:

$$\vec{v} = 10 \vec{u} = 10 \cdot \left\langle \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\rangle = \left\langle \frac{20}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{20}{3} \right\rangle$$

სივრცეში მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში Ox, Oy, Oz საკოორდინატო დერძების დადებითი მიმართულების მქონე და შესაბამისად $\vec{i} = \langle 1; 0; 0 \rangle, \vec{j} = \langle 0; 1; 0 \rangle$ და $\vec{k} = \langle 0; 0; 1 \rangle$ სახით განსაზღვრულ ვექტორებს საკოორდინატო (მგეზავი) ვექტორები ეწოდება. ცხადია, რომ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორებიც არაკომპლანური ვექტორებია.

ორთ ვექტორები სხვადასხვა კოორდინატა სისტემაში



სიბრტყეზე და სივრცეში ნებისმიერი რადიუს-ვექტორი შეიძლება საბაზისო ვექტორებით გამოსახოს. R^2 სისტემაში $A(x; y)$ წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი მგეზავი ვექტორებით $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ სახით, R^3 სისტემაში $A(x; y; z)$ წერტილის შესაბამისად რადიუს-ვექტორი $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ სახით გამოსახება და ამ ჩანაწერსაც ვექტორის კომპონენტებით ჩანაწერი ეწოდება. აქ x, y, z რიცხვები A წერტილის კოორდინატებია.

თეორემა. ნებისმიერი $\vec{a} = \langle a_1; a_2; a_3 \rangle$ ვექტორი $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ საკოორდინატო ვექტორებით ერთნაირად შეიძლება დაიშალოს და მართებულია $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ ტოლობა.

ნიმუში 2. სიბრტყით კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო ვექტორებით გამოსახეთ $\vec{a}$ ვექტორი, რომლის საწყისის წერტილია $(2; -5)$, ბოლო წერტილი კი $(1; -3)$.

ამოხსნა: რადგან $\vec{a} = \langle 1-2; -3 - (-5) \rangle = \langle -1; 2 \rangle$ ამიტომ მივიღებთ: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

ნიმუში 3. დაწერეთ $\vec{a} = \langle -3; 2; 7 \rangle$ ვექტორი საკოორდინატო ვექტორებით დანაშაღის სახით.

ამოხსნა: დანაშაღის შესახებ თეორემის მიხედვით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$$

ნიმუში 4. ა) დაწერეთ $P(1; -3; 2)$ წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ სახით.

ბ) კომპონენტებით დაწერეთ $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ვექტორი $r(x; y; z)$ სახით.

ამოხსნა: ა) რადიუს-ვექტორის საწყისის წერტილი $O(0; 0; 0)$ კოორდინატთა სათავეშია. მაშინ $\vec{OP} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ იქნება.

ბ) $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = 3\langle 1; 0; 0 \rangle - 2\langle 0; 1; 0 \rangle - \langle 0; 0; 1 \rangle = \langle 3; 0; 0 \rangle - \langle 0; 2; 0 \rangle - \langle 0; 0; 1 \rangle = \langle 3; -2; -1 \rangle$

ნიმუში 5. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ და $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ იპოვეთ და ვექტორების ჯამი და სხვაობა.

ამოხსნა: $\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

სასწავლო დავალებები

12. დაწერეთ P წერტილის კოორდინატების მიხედვით $\vec{OP}$ რადიუს-ვექტორი $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ სახით.

ა) $(1; 3; -1)$ ბ) $(2; -1; 0)$ გ) $(-3; 2; -2)$ დ) $(-4; 0; -3)$

13. დაწერეთ $\vec{OP}$ რადიუს-ვექტორის მონაცემების მიხედვით P წერტილის კოორდინატები.

ა) $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ბ) $-\vec{i} - 2\vec{k}$ გ) $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ დ) $-\vec{i} - 4\vec{j}$

14. იპოვეთ ვექტორების სიგრძე.

ა) $\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ბ) $\vec{OP} = \langle -3; 1; 2 \rangle$ გ) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

15. იპოვეთ უცნობი კომპონენტი, თუ ცნობილია, რომ ვექტორები ტოლია.

ა) $\vec{a} = 2\vec{i} + y\vec{k}$ და $\vec{b} = x\vec{i} - 3\vec{k}$ ბ) $\vec{a} = x\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ და $\vec{b} = \langle -3; y; z \rangle$

16. დაწერეთ თითოეული ვექტორის მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორი. შეამოწმეთ თქვენი პასუხი.

ა) $\vec{OR} = \langle 3; 0; 1 \rangle$ ბ) $\vec{OP} = \langle -3; 1; 2 \rangle$ გ) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

ვაქტორები სივრცეში

17. დაწერეთ $\vec{u}$ ვექტორის მიმართულების, სიგრძით მოცემული რიცხვის ტოლი $\vec{v}$ ვექტორი.

ა) $\vec{u} = \langle 0; 3; 0 \rangle$, $|\vec{v}| = 6$

ბ) $\vec{u} = \langle 1; 1 \rangle$, $|\vec{v}| = 5$

გ) $\vec{u} = \langle \sqrt{3}; 3; 2 \rangle$, $|\vec{v}| = 2$

დ) $\vec{u} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $|\vec{v}| = 2$

18. დაწერეთ ქვემოთ მოცემული ვექტორების მგეზავ ვექტორებად დანაშალები, თუ ცნობილია, რომ $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ და $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

ა) $2\vec{a} - 3\vec{b}$

ბ) $3\vec{a} + \vec{b}$

გ) $-2\vec{a} - 4\vec{b}$

19. იპოვეთ ვექტორის სიგრძე.

ა) $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

ბ) $\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$

გ) $\vec{l} = 7\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

20. სივრცეში $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ და $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ვექტორებია მოცემული. განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული ვექტორებიდან თითოეული არის თუ არა $\vec{a}$ ან $\vec{b}$ ვექტორის კოლინეარული.

1) $-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

2) $5\vec{i} - 10\vec{j} + 15\vec{k}$

3) $4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

4) $6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$

5) $-2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$

6) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

21. $\vec{OA} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ და $\vec{OB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ რადიუს-ვექტორებია. დაწერეთ ქვემოთ მოცემული ვექტორების საკოორდინატო ვექტორებით დანაშალი.

ა) $\vec{AO}$

ბ) $\vec{OA} - 2\vec{OB}$

გ) $4\vec{BO}$

დ) $-2\vec{OA} + 3\vec{OB}$

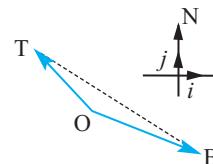
22. დილბარი ამბობს, რომ $\langle 1; 1; 1 \rangle$ ერთეულოვანი ვექტორია, $\langle \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$ კი არაა ერთეულოვანი ვექტორი. თქვენ როგორ დაასაბუთებდით დილბარის ნათქვამის მცდარობას ან ჭეშმარიტებას?

23. ორი ვექტორის ჯამის სიგრძე მათი სიგრძეების ჯამზე ან ნაკლებია ან კიდევ ტოლია. ჩაწერეთ ეს მოსაზრება მათემატიკურად და დაასაბუთეთ მისი სისწორე. მითითება: გამოიყენეთ სამკუთხედის უტოლობა.

24. სიმაღლეზე მდგომი დამკვირვებლისაგან მაღალი ძაბვის დენის ტრანსფორმატორი 4 კმ დასავლეთით, 3 კმ ჩრდილოეთით, ახალი აშენებული შენობა კი 5 კმ სამხრეთით და 2 კმ აღმოსავლეთით წერტილში მდებარეობს. ჩათვალით, რომ დამკვირვებლის დგომის ადგილი კოორდინატთა სათავეა.

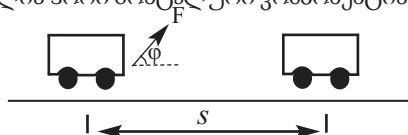
ა) განსაზღვრეთ ტრანსფორმატორის $\vec{OT}$ და შენობის $\vec{OB}$

რადიუს-ვექტორი. ბ) დაწერეთ შენობის ტრანსფორმატორის მიმართ ადგილის განმსაზღვრელი $\vec{TB}$ ვექტორი.



ურიკამ წრფივ გზაზე φ დახრილი კუთხით $\vec{F}$ ძალის გავლენით s გადაადგილება შესრულა. გამოთვალეთ დახარჯული ენერგია თუ $\vec{F}$ ძალის მნიშვნელობა F იქნება, $\vec{F} = \langle F \cos \varphi; F \sin \varphi \rangle$. F ძალის ვერტიკალური კომპონენტის ჰორიზონტალურ გზაზე შესრულებული სამუშაო ნულის ტოლია. $\vec{F}$ ძალის ჰორიზონტალური კომპონენტის s გზაზე შესრულებული სამუშაო კი

$$A = F \cdot s \cdot \cos \varphi \text{ იქნება.}$$



ტვირთის d მანძილზე გადანაცვლების დროს შესრულებული სამუშაო გადანაცვლების ვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობისა და $\vec{F}$ ძალის ვექტორის მოძრაობის მიმართულებისაკენ კომპონენტის აბსოლუტური მნიშვნელობის ($|\vec{F}| \cos \theta$) ნამრავლის ტოლია:

$A = |\vec{F}| d \cos \theta$. მუშაობა სკალარული სიდიდეა. თუმცა მისი მნიშვნელობა გამოყენებული ძალის გადანაცვლებულ ვექტორებს შორის დარჩენილი კუთხის მნიშვნელობაზეა დამოკიდებული.

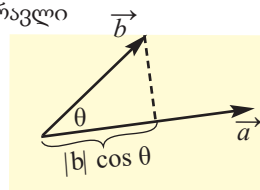
ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

არანულოვან ორ ვექტორს შორის კუთხე ეწოდება მათი ტოლობის პირობით ერთი და იმავე წერტილიდან გავლებულ ვექტორებს შორის კუთხეს. ცხადია, რომ ორ ვექტორს შორის θ კუთხის მნიშვნელობა $0 \leq \theta \leq \pi$ შუალედშია.

არანულოვანი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების აბსოლუტური მნიშვნელობებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს და

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ სახით იწერება.

$$\text{მაშასადამე, } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$



სკალარული ნამრავლის თვისებები

- ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, ანუ ვექტორის სკალარული კვადრატი მისი სიგრძის კვადრატის ტოლია.
- **სკალარული ნამრავლის გადანაცვლებადობის თვისება.** ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის მართებულია $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ტოლობა.

- **სკალარული ნამრავლის ჯუფთებადობის თვისება.** ნებისმიერი a და b ვექტორებისა და m ნამდვილი რიცხვისათვის

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$$

- **სკალარული ნამრავლის განრიგებადობის თვისება:**

$$1) \text{ ნებისმიერი } \vec{a}, \vec{b} \text{ ვექტორებისა და } m \text{ ნამდვილი რიცხვისათვის } m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$2) \text{ ნებისმიერი } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ვექტორებისათვის } \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

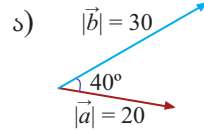
კერძო შემთხვევაში ორტ ვექტორების სკალარული ნამრავლისათვის მივიღებთ:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0,$$

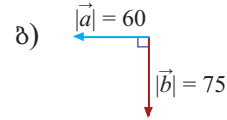
ნიმუში 1. სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ a და b ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

ამოხსნა: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$

ა) $|\vec{a}| = 20$ ერთეული $|\vec{b}| = 30$ ერთეული $\theta = 40^\circ$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 20 \cdot 30 \cos 40^\circ \approx 459,6$



ბ) $|\vec{a}| = 60$ ერთეული $|\vec{b}| = 75$ ერთეული $\theta = 90^\circ$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60 \cdot 75 \cos 90^\circ = 60 \cdot 75 \cdot 0 = 0$



ნიმუში 2. $(\vec{r} + \vec{s}) \cdot (\vec{r} - \vec{s})$ გამოსახულება გაამარტივეთ სკალარული ნამრავლის თვისებების გამოყენებით.

ამოხსნა: $(\vec{r} + \vec{s}) \cdot (\vec{r} - \vec{s}) = (\vec{r} + \vec{s}) \cdot \vec{r} + (\vec{r} + \vec{s}) \cdot (-\vec{s}) = \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{s} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot (-\vec{s}) + \vec{s} \cdot (-\vec{s}) =$
 $= |\vec{r}|^2 + \vec{s} \cdot \vec{r} - 1 \cdot \vec{r} \cdot \vec{s} - 1 \cdot \vec{s} \cdot \vec{s} = |\vec{r}|^2 + \vec{s} \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{s} - |\vec{s}|^2 = |\vec{r}|^2 - |\vec{s}|^2$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი სიბრტყეზე დეკარტის კოორდინატთა სისტემის კოორდინატებიდან შეიძლება განისაზღვროს.

დავუშვათ, მოცემულია $\vec{a} \langle a_1, a_2 \rangle$ და $\vec{b} \langle b_1, b_2 \rangle$ ვექტორები.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

ABC სამკუთხედიდან $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1; a_2 - b_2 \rangle$

კოსინუსების თეორემის თანახმად

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta. \text{ აქედან მივიღებთ:}$$

$$2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$

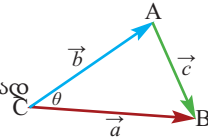
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{2}$$

$$= \frac{\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} - \cancel{a_1^2} + 2a_1b_1 - \cancel{b_1^2} - \cancel{a_2^2} + 2a_2b_2 - \cancel{b_2^2}}{2}$$

$$= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2} = a_1b_1 + a_2b_2. \text{ მაშასადამე}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$



ამრიგად, $\vec{a} \langle a_1; a_2 \rangle$ და $\vec{b} \langle b_1; b_2 \rangle$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი შესაბამისი კომპონენტების ნამრავლების ჯამის ტოლია.

სამგანზომილებიან დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $\vec{a} \langle a_1; a_2; a_3 \rangle$ და $\vec{b} \langle b_1; b_2; b_3 \rangle$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება მსგავსი წესით.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

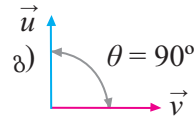
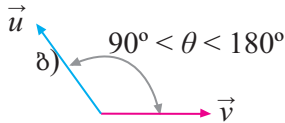
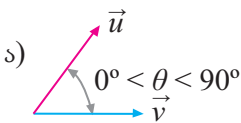
ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

მაგალიტი 3. იპოვეთ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ სკალარული ნამრავლი, თუ $\vec{a} = \langle 2; -3; 5 \rangle$ და $\vec{b} = \langle 1; 2; -4 \rangle$

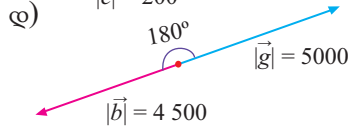
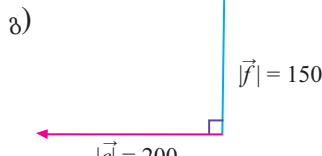
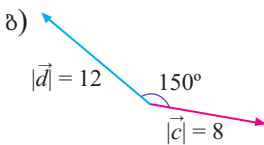
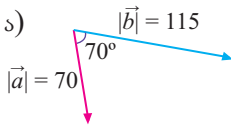
ამოხსნა: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = 2 - 6 - 20 = -24$

სასწავლო დავალებები

- 1) ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებაში $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის მდებარე θ კუთხის მნიშვნელობა $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ უნდა აღინიშნოს. რა მიზეზით არის ეს პირობა მოცემული?
2) θ კუთხის მნიშვნელობის მიხედვით განსაზღვრეთ სკალარული ნამრავლის ნიშანი.



2. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.



3. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. θ ვექტორებს შორის მდებარე კუთხეა.

ა) $|\vec{f}| = 5,8$; $|\vec{g}| = 6,4$; $\theta = 180^\circ$ ბ) $|\vec{m}| = 16$; $|\vec{p}| = 2$; $\theta = 45^\circ$

გ) $|\vec{m}| = 16$; $|\vec{n}| = 28$; $\theta = 35^\circ$ დ) $|\vec{m}| = 2,5$; $|\vec{s}| = 20$; $\theta = 120^\circ$

4. იპოვეთ კომპონენტებით მოცემული ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

ა) $\vec{a} \langle 6; 2; 4 \rangle$; $\vec{b} \langle 9; 3; 6 \rangle$ ბ) $\vec{s} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{t} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

გ) $\vec{p} \langle -3; 2; 5 \rangle$; $\vec{q} \langle 3; 1; 6 \rangle$ დ) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

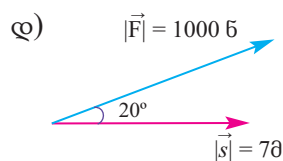
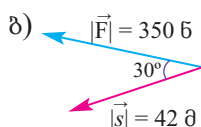
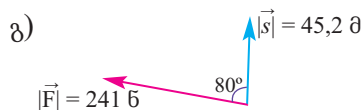
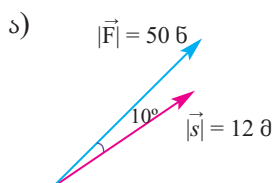
5. მოცემულია $\vec{a} \langle -2; 1; 3 \rangle$ და $\vec{b} \langle 1; 4; -3 \rangle$ ვექტორები. იპოვეთ $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$ სკალარული ნამრავლი. ამოხსენით ამოცანა სხვადასხვა ხერხით.

6. გამოთვალეთ მოცემული $\vec{F}$ ძალის (ნიუტონობით) გავლენით სხეულის $\vec{s}$ გადანაცვლების დროს (მეტრობით) შესრულებული სამუშაო. $\vec{F}$ და $\vec{s}$ ვექტორები ერთნაირი მიმართულებისაა.

ა) $\vec{F} \langle 5; 2 \rangle$, $\vec{s} \langle 7; 4 \rangle$

ბ) $\vec{F} \langle 100; 400 \rangle$, $\vec{s} \langle 12; 27 \rangle$

7. სურათზე მოცემული ინფორმაციების მიხედვით გამოთვალეთ $\vec{F}$ ძალის $\vec{s}$ გადანაცვლების ვექტორის მიმართულებით დახარჯული ენერგია.

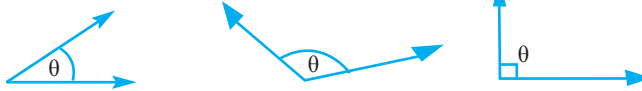


8. $\vec{a} \langle 3; 4 \rangle$ ვექტორის მიმართულებით 20 ნ ძალა ($\vec{F}$) იქნა გამოყენებული.
- ა) დაწერეთ $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულებით არსებული ერთეულოვანი ვექტორი.
- ბ) ა პუნქტის ამოხსნის გამოყენებით, კომპონენტებით დაწერეთ $\vec{F}$ ძალა.
- გ) იპოვეთ ამ ძალის გავლენით ობიექტის $(0; 0)$ წერტილიდან $(6; 8)$ წერტილამდე გადანაცვლების დროს შესრულებული სამუშაო.
9. კონვეიერული ხაზის გაჩერების გამო თანამშრომელმა მასზე მყოფი ყუთი ხელით $(-3; 0)$ წერილიდან $(3; 0)$ წერტილში 30° -იანი კუთხით 50 ნ ძალით გამოთრევით მოიტანა. კონვეიერის ხაზის სიგრძის მეტრული ზომის გათვალისწინებით იპოვეთ დახარჯული ენერგია. კონვეიერული ხაზის გაჩერების გამო თანამშრომელმა მასზე მყოფი ყუთი ხელით $(-3; 0)$ წერილიდან $(3; 0)$ წერტილში 30° -იანი კუთხით 50 ნ ძალით გამოთრევით მოიტანა. კონვეიერის ხაზის სიგრძის მეტრული ზომის გათვალისწინებით იპოვეთ დახარჯული ენერგია.
10. 20° -იანი დახრის კუთხით გამოყენებული ძალით ხარატის დაზგის ადგილის ჰორიზონტალური მიმართულებით 8 მ გადანაცვლებაზე დახარჯული ენერგია 150 ჯოულის ტოლია. იპოვეთ გამოყენებული ძალის აბსოლუტური მნიშვნელობა.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

ორი ვექტორის შორის კუთხე

არანულოვან ორ ვექტორის შორის კუთხე $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ დამოკიდებულებიდან მოიძებნება. სადაც, $0 \leq \theta \leq \pi$.



ნიმუში. იპოვეთ $\vec{a} = \langle -3; 4 \rangle$ და $\vec{b} = \langle 9; 12 \rangle$ ვექტორებს შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი.

ამოხსნა: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 9 + 4 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{-27 + 48}{5 \cdot 15} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$

დასკვნა: ორი არანულოვანი ვექტორი მხოლოდ მაშინ არის ურთიერთმართობული, როდესაც სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

ნიმუში. k -ს რა მნიშვნელობისათვის არიან $\vec{a} = \langle 3; 4 \rangle$ და $\vec{b} = \langle k; 12 \rangle$ ვექტორები ურთიერთმართობულები?

ამოხსნა: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ უნდა იყოს: $3 \cdot k + 4 \cdot 6 = 0$, აქედან, როცა $k = -8$, მაშინ $\vec{a} \perp \vec{b}$

სასწავლო დაგვარებები

11. რამდენი გრადუსია ვექტორებს შორის მდებარე კუთხე?
 - ა) $\vec{a} \langle -3; 6 \rangle$ და $\vec{b} \langle 4; 2 \rangle$
 - ბ) $\vec{m} \langle -2; -8 \rangle$ და $\vec{n} \langle 6; -1 \rangle$
 - გ) $\vec{e} \langle 2; 3; 0 \rangle$ და $\vec{f} \langle 9; -6; 2 \rangle$
 - დ) $\vec{t} \langle -2; -1; 2 \rangle$ და $\vec{s} \langle 2; 1; -2 \rangle$
12. 1) $\vec{u} \langle 6; -2; -5 \rangle$ და $\vec{v} \langle -12; 4; 10 \rangle$ ვექტორებს შორის კუთხის მოძებნით დაამტკიცეთ ამ ვექტორების კოლინეარულობა.
 2) იპოვეთ k -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ $\vec{u} \langle 0; 1; 1 \rangle$ და $\vec{v} \langle k; 2; 1 \rangle$ ვექტორებს შორის კუთხე გახდეს 45° .
13. ა) კომპონენტებით დაწერეთ $\vec{a} \langle 4; 3 \rangle$ ვექტორის მართობული და სიგრძით 10-ის ტოლი ვექტორი.
 ბ) k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $\vec{u} \langle 2; 5; -3 \rangle$ და $\vec{v} \langle k; 4; 2 \rangle$ ვექტორები ურთიერთმართობული?
14. მოცემულია წერტილები $A(3; -1; -2)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(1; 1; -3)$, $D(3; -1; -3)$.
 იპოვეთ კუთხე $\angle ABC$ და $\angle CDA$ ვექტორებს შორის.
15. შეამოწმეთ სამკუთხედები არიან თუ არა მართკუთხა. დაწერეთ მართი კუთხის სახელი. ამოცანა ამოხსენით სხვადასხვა ხერხით.
 - ა) $\triangle ABC$, რომლის წეროს წერტილებია: $A(3; 1)$, $B(-2; 3)$ და $C(5; 6)$;
 - ბ) $\triangle STU$, რომლის წეროს წერტილებია: $S(4; 6)$, $T(-3; 7)$ და $U(-5; -4)$.
16. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, რომლის წეროს წერტილებია $A(5; 1)$, $B(4; -7)$ და $C(-1; -8)$.

წრფის განტოლება

წრფის ზოგადი განტოლება

სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემაში წრფის განტოლება $ax + by + c = 0$ სახით მოიცემა. ამ განტოლებას წრფის ზოგად განტოლებასაც უწოდებენ.

წრფის მართობულ ვექტორს წრფის **ნორმალ** **ვექტორი** ანუ **ნორმალ** ეწოდება.

ვუჩვენოთ, რომ $\langle a; b \rangle$ ნორმალის მქონე ვექტორის ზოგადი განტოლება $ax + by + c = 0$ სახისაა.

დავუშვათ, რომ $P_0(x_0; y_0)$ წრფეზე მოცემული წერტილია, $P(x; y)$ წრფის ნებისმიერი წერტილია, ხოლო, $\vec{n} \langle a; b \rangle$ კი წრფის ნორმალ ვექტორია.

$\vec{P_0P} \langle x - x_0; y - y_0 \rangle$ და $\vec{n} \langle a; b \rangle$ ვექტორები მართობულია. მაშინ

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0.$$

აქედან $\langle a; b \rangle \cdot \langle x - x_0; y - y_0 \rangle = 0$,

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0,$$

$$ax + by - by_0 - ax_0 = 0 \text{ მიიღება.}$$

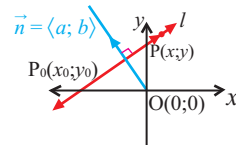
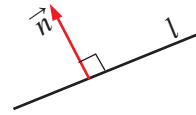
თუ $-by_0 - ax_0 = c$ სახით ავღნიშნავთ, მივიღებთ წრფის $ax + by + c = 0$ ზოგად განტოლებას, სადაც $a^2 + b^2 > 0$.

კერძო შემთხვევაში:

• $a = 0, b \neq 0.$ $y = -\frac{c}{b}$ *აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფის განტოლება*

• $a \neq 0, b = 0.$ $x = -\frac{c}{a}$ *ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფის განტოლება*

• $c = 0.$ $ax + by = 0$ *კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფის განტოლება*



მაგ-ში 1. დაწერეთ $A(4; -2)$ წერტილზე გამავალი და ნორმლი $\vec{n} = \langle 5; 3 \rangle$ -ის მქონე l წრფის სკალარული განტოლება.

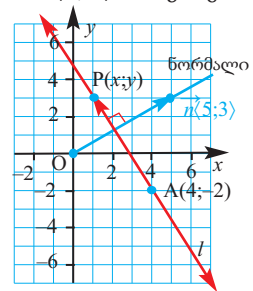
ამოხსნა: ჩვენ, ჯერ $\vec{n} = \langle 5; 3 \rangle$ ვექტორის კოორდინატთა სისტემაში აგების შემდეგ, $A(4; -2)$ წერტილზე გამავალი მართობული წრფის გავლებით შეგვიძლია ამოცანა გრაფიკულად გამოვსახოთ. ახლა კი დავწეროთ საძიებელი განტოლება.

1-ლი ხერხი.

დავუშვათ, რომ $P(x; y)$ წერტილი l წრფეზე მდებარე და მოცემული A წერტილისაგან განსხვავებული წერტილია. მაშინ $\vec{AP}$ ვექტორი l წრფის კოლინეარულია და $\vec{AP} = \langle x - 4; y - (-2) \rangle = \langle x - 4; y + 2 \rangle$
 $\vec{n}$ და $\vec{AP}$ ვექტორების ურთიერთმართობულობიდან $\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$. აქედან
 $\langle 5; 3 \rangle \cdot \langle x - 4; y + 2 \rangle = 0; 5(x - 4) + 3(y + 2) = 0; 5x + 3y - 14 = 0$ მიიღება.

მე-2 ხერხი:

$\vec{n} = \langle 5; 3 \rangle$ ვექტორის მიხედვით $Ax + By + C = 0$ განტოლება $5x + 3y + C = 0$ სახით შეგვიძლია ჩავწეროთ. $A(4; -2)$ წერტილის ამ წრფეზე მდებარეობის გამო,
 $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + C = 0, C = -14$ გამოითვლება და წრფის განტოლება $5x + 3y - 14 = 0$ იქნება.



წრფის განტოლება

ნიმუში 2. იპოვეთ კუთხე $x - y + 1 = 0$ და $2x + y - 3 = 0$ განტოლებებით მოცემულ წრფეებს შორის.

ამოხსნა: წრფეებს შორის მდებარე კუთხე შეიძლება განისაზღვროს მათ ნორმალებს შორის მდებარე კუთხით.

$\vec{n}_1 \langle 1; -1 \rangle$ და $\vec{n}_2 \langle 2; 1 \rangle$ ნორმალ ვექტორებს შორის მდებარე მკუთხისათვის მივიღებთ:

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,3162. \text{ საიდანაც } \theta \approx 72^\circ$$

სასწავლო დავალებები

- დაწერეთ $\vec{n}$ ნორმალის მქონე და P_0 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.
 - $P_0(-2; 5), \vec{n} \langle 4; 3 \rangle$
 - $P_0(3; -4), \vec{n} \langle 2; -3 \rangle$
- დაწერეთ $2x - 4y + 5 = 0$ წრფის მართობული და $P(-1; 1)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.
- მოცემულია $x - 3y + 6$ და $x + 2y - 7 = 0$ წრფეები.
 - დახაზეთ ამ წრფეების გრაფიკული გამოსახულება.
 - იპოვეთ მათ შორის მდებარე მახვილი და ბლაგვი კუთხე 1° -ის სიზუსტით.
- იპოვეთ წრფეებს შორის მდებარე კუთხეები.
 - $y = 0,5x + 6$ და $y = -0,75x - 1$
 - $2x - y + 3 = 0$ და $x + 2y - 1 = 0$
- გამოიკვლიეთ ნიმუში. იპოვეთ მანძილი მოცემული წერტილიდან განტოლებით მოცემულ l წრფემდე.
 - $P_0(1; 3) \quad l: 3x - 4y = 3$
 - $P_0(2; 1) \quad l: 2x - y = 7$
 - $P_0(0; 2) \quad l: x - y = 4$
 - $P_0(3; 0) \quad l: x + 2y = 0$

ნიმუში. იპოვეთ მანძილი $P_0(1; 3)$ წერტილიდან $3x - 4y = 3$ წრფემდე.

ამოხსნა: დავუშვათ $P_0(1; 3)$ წერტილიდან მოცემული წრფისადმი გავლებული მართობის ფუძე არის $P(x; y)$.

$\vec{P_0P} \langle x-1; y-3 \rangle$ და $\vec{n} \langle 3; -4 \rangle$ ვექტორების კოლინეარულობის

გამო არსებობს ისეთი k რიცხვი რომ, $\vec{P_0P} = k \cdot \vec{n}$ ან

$\langle x-1; y-3 \rangle = \langle 3k; -4k \rangle$. შესაბამისი კომპონენტების

ტოლობიდან მივიღებთ: $x = 3k + 1, y = -4k + 3$. P წერ-

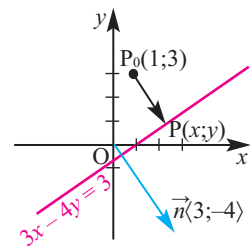
ტილის x და y კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ $3x - 4y = 3$ განტოლებას:

$$3(3k + 1) - 4(-4k + 3) = 3$$

საიდანაც ვპოულობთ: $k = \frac{12}{25}$

$$\text{მაშინ } |\vec{P_0P}| = |k| \cdot |\vec{n}| = \frac{12}{25} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \frac{9}{25} \cdot 5 = 2,4$$

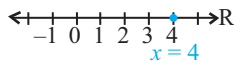
მიიღება, ანუ საძიებელი მანძილი 2,4 ერთეულია.



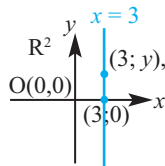
სიბრტყის განტოლება

გამოკვლევა. ერთი და იგივე განტოლება მაგალითად, $x = 3$ განტოლება რომელიც წერტილთა სიმრავლეს გამოისახება ერთგანზომილებიან ორგანზომილებიან და სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში?

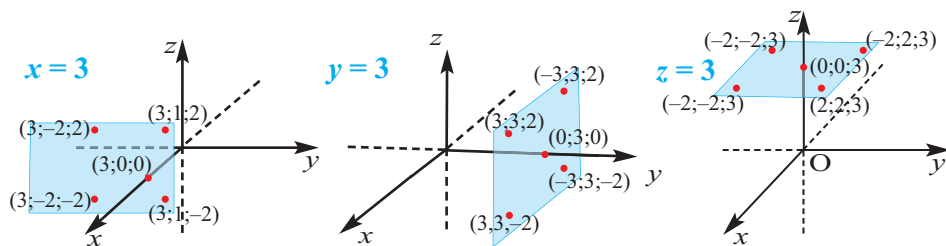
1. ერთგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემაში, ანუ რიცხვით ღერძზე $x = 3$ განტოლებას ერთი წერტილი შეესაბამება.



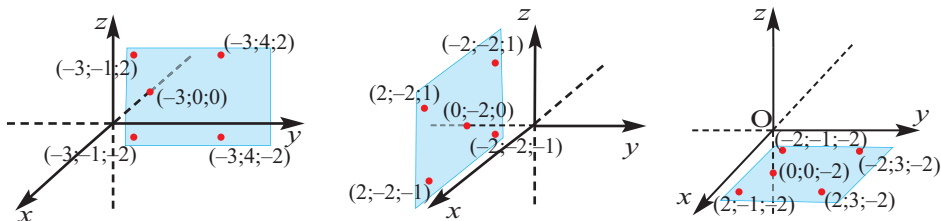
2. ორგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში $x = 3$, ან კიდევ $x + 0 \cdot y = 3$ განტოლებას აკმაყოფილებს ყველა ის წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(3; y)$ ($y \in R$) ამ წერტილთა სიმრავლე კი y ღერძის პარალელური წრფეა.



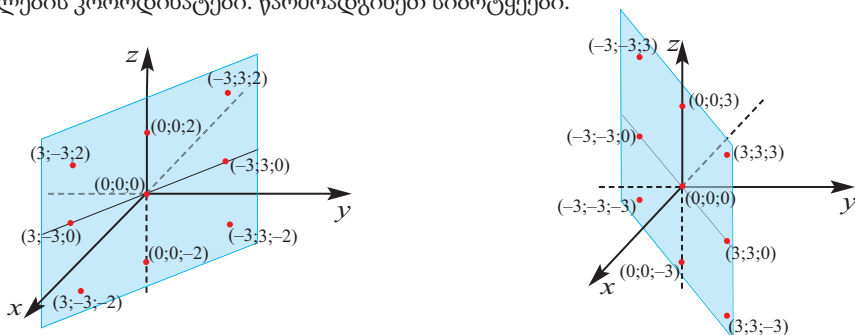
3. სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში $x = 3$, ან კიდევ $x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$ განტოლებას აკმაყოფილებს ყველა ის წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(3; y; z)$ ($y, z \in R$) ამ წერტილთა სიმრავლე კი Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყეა. ანალოგიურად $y = 3$ და $z = 3$ განტოლებები შესაბამისად Oxz და Oxy სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეებია.



4. სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში წარმოადგინეთ წერტილთა სიმრავლე რომელიც აკმაყოფილებს $x = -3$, $y = -2$ და $z = -2$ განტოლებას.



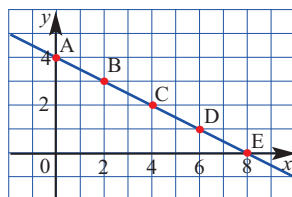
5. დააკავშირეთ $x + y = 0$ და $x - y = 0$ განტოლებებით სიბრტყეზე აღნიშნული წერტილების კოორდინატები. წარმოადგინეთ სიბრტყეები.



სიბრტყის განტოლება

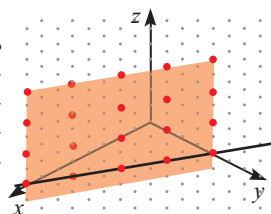
ორგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში წრფის განტოლება $ax + by + c = 0$ სახისაა.

მაგალითად, $x + 2y - 8 = 0$ განტოლება სიბრტყეზე წრფეს განსაზღვრავს და $A(0; 4)$, $B(2; 3)$, $C(4; 2)$, $D(6; 1)$, $E(8; 0)$ და სხვ. წერტილები ამ წრფეზეა.



წრფის ეს განტოლება ჩავწერთ სამგანზომილებიან $x + 2y - 0z = 8$ კოორდინატთა სისტემაში. აქ ვინაიდან z -ის კოორდინატი ნულია, z აპლიკატმა ნებისმიერი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს. ანუ ნებისმიერი z რიცხვისათვის სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში $A(0; 4; z)$, $B(2; 3; z)$, $C(4; 2; z)$,

$D(6; 1; z)$, და $E(8; 0; z)$ წერტილების კოორდინატები $x + 2y - 0z = 8$ ამ განტოლებას დააკმაყოფილებს. თუ ყველა ამნაირ წერტილს სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში ავაგებთ, მივიღებთ z ღერძის პარალელურ სიბრტყეს. ზოგადად, სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში $ax + by + cz + d = 0$ განტოლება სიბრტყეს განსაზღვრავს.



სიბრტყე სხვადასხვა ხერხით შეიძლება განისაზღვროს:

- არაკოლინეარული სამი წერტილით
- წრფითა და მასზე არამდებარე წერტილით
- ორი მკვეთი წრფით
- ორი პარალელური წრფით
- ერთი წერტილითა და ამ წერტილში მოცემული მიმართულებით გავლებული მართობით.

სიბრტყის განსაზღვრის სხვადასხვა გზებს შორის უკანასკნელის გამოყენებით, კიდევ ერთხელ ვუჩვენოთ, რომ სიბრტყის განტოლება $ax + by + cz + d = 0$ სახისაა.

სიბრტყის მართობულ ვექტორს მისი **ნორმალის** ეწოდება.

დავუშვათ, მოცემულია α სიბრტყე და მასზე მდებარე $P_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილი. $\vec{n}\langle a; b; c \rangle$ სიბრტყეზე გავლებული

ნორმალის ვექტორია. სიბრტყეზე ავიღოთ P_0 -საგან განსხვავებული ნებისმიერი $P(x; y; z)$ წერტილი. სიბრტყის მართობული წრფე სიბრტყეზე

მდებარე ნებისმიერი წრფის მართობული იქნება. მაშასადამე $\vec{n} \perp P_0P$ იქნება. აქედან

შეგვიძლია დავწეროთ $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$,

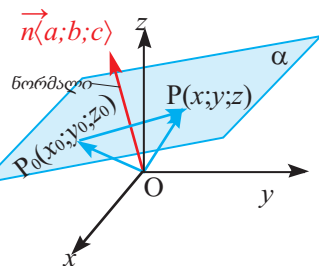
თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{n}\langle a; b; c \rangle$ და $\vec{P_0P}\langle x - x_0; y - y_0; z - z_0 \rangle$ მაშინ:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

თუ გამოვიყენებთ $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ აღნიშვნას, მაშინ სიბრტყის განტოლების

$$ax + by + cz = d \text{ სახით დაწერა შეიძლება.}$$



მააქციეთ ყურადღება! სიბრტყის განტოლებაში სამივე ცვლადის კოეფიციენტები სიბრტყის ნორმალის კომპონენტებია და $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

სიბრტყის განტოლება

ნამუშაო 1. ნორმალური ვექტორი $\vec{n} \langle -1; 3; 4 \rangle$ მქონე სიბრტყე $A(1; 2; 3)$ წერტილზე გადის. დაწერეთ ამ სიბრტყის განტოლება.

ამოხსნა: ამოცანის ამოხსნა ორი ხერხით შეიძლება.

1-ლი ხერხი. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი $P(x; y; z)$ წერტილი და A სათავისა და P ბოლოს მქონე ვექტორი ჩავწეროთ კომპონენტებით. იქნება:

$$\vec{AP} = \langle x - 1; y - 2; z - 3 \rangle.$$

ვინაიდან $\vec{n} \langle -1; 3; 4 \rangle$ ნორმალური ვექტორია, ამიტომ $\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$, ან კიდევ

$$\langle -1; 3; 4 \rangle \cdot \langle x - 1; y - 2; z - 3 \rangle = 0 \quad \text{უნდა აკმაყოფილებდეს. აქედან}$$

$$-1(x - 1) + 3(y - 2) + 4(z - 3) = 0,$$

$$-x + 1 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0,$$

$$-x + 3y + 4z - 17 = 0.$$

თუ ამ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ (-1) -ზე, სიბრტყის განტოლება

$$x - 3y - 4z + 17 = 0 \quad \text{იქნება.}$$

მე-2 ხერხი. ჩვენთვის ცნობილია, რომ სიბრტყის განტოლება $ax + by + cz + d = 0$, ხოლო მისი ნორმალური ვექტორი $\vec{n} = \langle a; b; c \rangle$ სახისაა. მაშასადამე, $\vec{n} \langle -1; 3; 4 \rangle$ ნორმალის მიხედვით,

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$, სიბრტყის განტოლება

$$(-1)x + 3y + 4z + d = 0 \quad \text{ანუ} \quad -x + 3y + 4z + d = 0 \quad \text{იქნება. ამ განტოლებაში სიბრტყეზე}$$

მდებარე A წერტილის $(1; 2; 3)$ კოორდინატებს თუ შევიტანთ, შეგვიძლია ვიპოვოთ d პარამეტრი:

$$-x + 3y + 4z + d = 0,$$

$$-1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + d = 0; \quad d = -17. \quad \text{ამრიგად, სიბრტყის განტოლება}$$

$$-x + 3y + 4z - 17 = 0 \quad \text{ან} \quad x - 3y - 4z + 17 = 0 \quad \text{იქნება.}$$

ნამუშაო 2. სიბრტყე $x + 2y - z - 8 = 0$ განტოლებითაა მოცემული.

ა) შეამოწმეთ $A(1; 3; -1)$, $B(3; 5; 1)$, $C(-1; 3; 1)$ წერტილები მდებარეობენ თუ არა მოცემულ სიბრტყეზე.

ბ) განსაზღვრეთ სიბრტყის x, y, z ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

გ) დაწერეთ სიბრტყეზე მდებარე სხვა რომელიმე წერტილის კოორდინატები.

ამოხსნა:

ა) შემოწმება:

$$A(1; 3; -1)$$

$$x + 2y - z - 8 = 0$$

$$1 + 2 \cdot 3 - 1 - 8 = 0$$

მდებარეობს

$$B(1; 5; 3)$$

$$x + 2y - z - 8 = 0$$

$$1 + 2 \cdot 5 - 3 - 8 = 0$$

მდებარეობს

$$C(1; 3; -1)$$

$$x + 2y - z - 8 = 0$$

$$-1 + 2 \cdot 3 - 1 - 8 = -4$$

არ მდებარეობს

სიბრტყის განტოლება

ბ) სიბრტყის x , y , z ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები:

x ღერძის გადაკვეთის- y ღერძის გადაკვეთის- z ღერძის გადაკვეთისას
 x და y კოორდინატები x და z კოორდინატები x და y კოორდინატები
 ტები ნულის ტოლია. ტები ნულის ტოლია. ნულის ტოლია.

$$x = 8$$

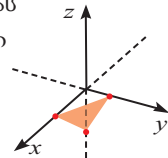
$$(8; 0; 0)$$

$$y = 4$$

$$(0; 4; 0)$$

$$z = -8$$

$$(0; 0; -8)$$



გ) მოცემულ სიბრტყეზე სხვა რომელიმე წერტილის კოორდინატების განსაზღვრისათვის ცვლადებიდან ორს მიანიჭეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა და იპოვეთ მესამე ცვლადი.

მაგალითად, როცა $x = 4$, $y = -5$ მაშინ $4 + 2(-5) - z - 8 = 0$, $z = -14$ მიიღება.

მაშასადამე, $(4; -5; -14)$ წერტილი მოცემულ სიბრტყეზე მდებარეობს.

სასწავლო დაგეგმვა

1. შეამოწმეთ მოცემული წერტილები მდებარეობენ თუ არა $4x + 3y - 5z = 10$ სიბრტყეზე.

ა) $A(1; 2; 0)$ ბ) $B(1,2; -2,4; 6,2)$ გ) $C(-7; 6; 4)$ დ) $D(-2; 1; -3)$
2. დაწერეთ თითოეულ სიბრტყეზე მდებარე სამი წერტილის კოორდინატები.

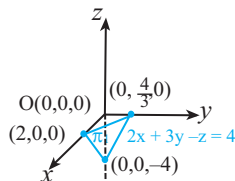
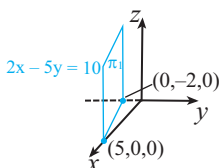
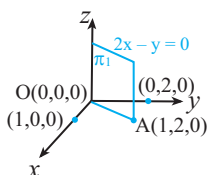
ა) $x = 6$ ბ) $2x - 5y + z - 1 = 0$ გ) $3x + 7y - 2z = 6$
3. დაწერეთ ნორმალური $\vec{n}$ -ის მქონე და P_0 წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ა) $P_0(2; 1; 3)$, $\vec{n} \langle 7; 1; 1 \rangle$ ბ) $P_0(5; 1; 9)$, $\vec{n} \langle 1; 0; 0 \rangle$
 გ) $P_0(0; 6; 2)$, $\vec{n} \langle 2; 0; -1 \rangle$ დ) $P_0(0; 0; 0)$, $\vec{n} \langle 2; 1; 4 \rangle$
4. სიბრტყე, რომლის ნორმალურია $\vec{n} \langle -12; 8; 10 \rangle$ კოორდინატთა სათავეზე გადის. დაწერეთ ამ სიბრტყის განტოლება.
5. სიბრტყე $x - 7y - 18z = 0$ განტოლებითაა მოცემული.

ა) დაწერეთ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.
 ბ) დაასაბუთეთ, რომ ეს სიბრტყე კოორდინატთა სათავეზე გადის.
 გ) დაწერეთ ამ სიბრტყეზე მდებარე სამი წერტილის კოორდინატები.
6. ა) დაწერეთ Oyz სიბრტყის პარალელური $A(3; 1; 2)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.
 ბ) დაწერეთ $B(2; 2; -1)$ წერტილზე და Ox ღერძზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

სიბრტყის განტოლება

7. დაწერეთ $M(1; 3; 1)$ და $N(2; -3; 0)$ წერტილების შემართებული მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალი, მისი მართობული სიბრტყის განტოლება.
 $A(2; -1; 1)$ წერტილი ამ სიბრტყეზე მდებარეობს?
8. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $B(1; 2; 3)$ წერტილზე და ნორმალი:
 ა) y დერძის პარალელურია;
 ბ) xy სიბრტყის მართობულია.
9. ა) დაწერეთ $A(1; -2; 3)$ წერტილზე გამავალი და $x + 2y - 3z - 6 = 0$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლება.
 ბ) დაწერეთ $A(1; 1; -2)$, $B(2; -1; -1)$ და $C(1; -2; 1)$ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.
10. $Ax + By + Cz + D = 0$ განტოლებაში კოეფიციენტების სხვადასხვა მოცემული შემთხვევების მიხედვით დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები სიბრტყის მდებარეობის შესახებ და დახაზეთ და წარმოადგინეთ ახალი ნიმუშები.
 ა) A, B, C კოეფიციენტებიდან მხოლოდ რომელიმე ორია ნულის ტოლი.
 ბ) A, B, C კოეფიციენტებიდან მხოლოდ რომელიმე ერთია ნულის ტოლი.
 გ) A, B, C კოეფიციენტებიდან სამივე განსხვავებულია ნულისაგან.



11. იპოვეთ მანძილი მოცემული Q წერტილიდან მოცემულ α სიბრტყემდე.

ა) $Q(1; 3; 3)$

ბ) $Q(2; -1; -1)$

გ) $Q(2; 2; 2)$

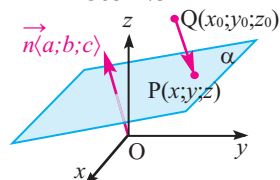
დ) $Q(1; 2; 0)$

$\alpha: 12x + 4y + 3z + 6 = 0$

$\alpha: 2x - 3y + z = 2$

$\alpha: x + y + z = -1$

$\alpha: 3x - 4y - 5z - 2 = 0$



ნიმუში. იპოვეთ მანძილი $Q(1; 3; 3)$ წერტილიდან $12x + 4y + 3z + 6 = 0$ სიბრტყემდე.

ამოხსნა. დავუშვათ $Q(1; 3; 3)$ წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლენილი მართობის ფუძე $\vec{QN}(x-1; y-3; z-3)$. ვინაიდან $\vec{QN} \perp \vec{n}(12; 4; 3)$ ვექტორები კოლინეარულია, არსებობს ისეთი k რიცხვი, რომ $\vec{QN} = k \cdot \vec{n}$, ან კიდევ $\langle x-1; y-3; z-3 \rangle = \langle 12k; 4k; 3k \rangle$. შესაბამისი კომპონენტების ტოლობიდან მიიღება: $x = 12k + 1, y = 4k + 3, z = 3k + 3$. N წერტილის x, y, z კოორდინატები აკმაყოფილებს სიბრტყის განტოლებას: $12(12k + 1) + 4(4k + 3) + 3(3k + 3) + 6 = 0$.

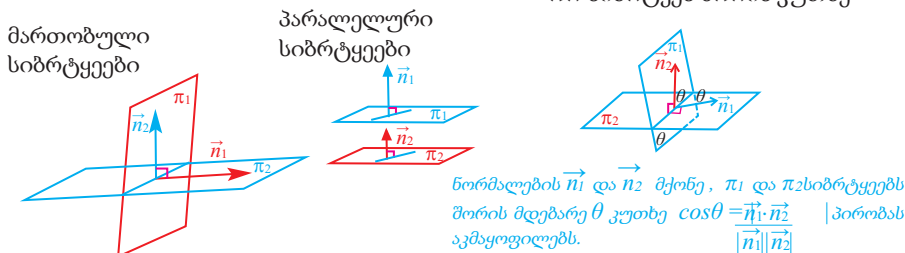
აქედან $k = -\frac{3}{13}$. მაშინ $|\vec{QN}| = |k| \cdot |\vec{n}| = \frac{3}{13} \cdot \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = 3$.

ეს იმას ნიშნავს, რომ, Q წერტილიდან მოცემულ სიბრტყემდე მანძილი 3 ერთეულია.

თუ სიბრტყეები მართობულები არიან, მაშინ მათი ნორმალეზი მართობულებია და პირიქით: $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

თუ სიბრტყეები პარალელურები არიან, მაშინ მათი ნორმალეზი პარალელურებია და პირიქით: $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

ორ სიბრტყეს შორის კუთხე



ნმუშა. სიბრტყეების მართობულობისა და პარალელურობის განსაზღვრა განტოლებების მიხედვით.

ა) α და β სიბრტყეების განტოლებები შესაბამისად არის: $\alpha: 2x - 3y + z - 1 = 0$

და $\beta: 4x - 3y - 17z = 0$. დაასაბუთეთ, რომ ეს სიბრტყეები მართობულებია.

ბ) α და β სიბრტყეების განტოლებები შესაბამისად არის: $\alpha: 2x - 2y - z + 3 = 0$

და $\beta: 2x - 2y - z - 1 = 0$. დაასაბუთეთ, რომ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

ამოხსნა: თუ α და β სიბრტყეები მართობულია, α სიბრტყის

$\vec{n}_\alpha \langle 2; -3; 1 \rangle$ ნორმალისა და β სიბრტყის $\vec{n}_\beta \langle 4; -3; -7 \rangle$ ნორმალის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლი უნდა იყოს. შევამოწმოთ:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = \langle 2; -3; 1 \rangle \cdot \langle 4; -3; -7 \rangle = 2 \cdot 4 - 3(-3) + 1(-7) = 8 + 9 - 7 = 0$$

მაშასადამე, α და β სიბრტყეები პერპენდიკულარულები არიან: $\alpha \perp \beta$

ბ) α და β სიბრტყეების ნორმალეზი ერთი და იგივეა $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \langle 2; -2; -1 \rangle$. ვინაიდან ამ სიბრტყეებისათვის D მუდმივი სხვადასხვაა, ისინი ერთმანეთს არ ემთხვევიან და პარალელური სიბრტყეებია.

სასწავლო დაგვლებები

12. $P(1; 2; -3)$ წერტილი ნორმალი $\vec{n} \langle 3; 2; 5 \rangle$ მქონე სიბრტყეზეა.

ა) დაწერეთ სიბრტყის განტოლება.

ბ) $2x - 2y - cz - 1 = 0$ განტოლებაში c კოეფიციენტი შეარჩიეთ ისე, რომ ეს სიბრტყეები მართობულები გახდნენ.

გ) რომელიმე $\vec{a}$ ვექტორის სიბრტყის პარალელურობისათვის საჭიროა $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ იყოს. გამოიკვლიეთ $\vec{a} \langle -4, 1, 2 \rangle$ ვექტორის ამ სიბრტყესთან პარალელურობის საკითხი.

13 k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $4x + ky - 2z + 1 = 0$ და $2x + 4y - z + 4 = 0$ განტოლებებით მოცემული სიბრტყეები:

ა) პარალელური; ბ) მართობული?

14. განსაზღვრეთ $x - y - 2z + 3 = 0$ და $2x + y - z + 2 = 0$ სიბრტყეებს შორის მდებარე კუთხე.

სფეროს განტოლება

განსაზღვრება. მოცემული $P_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილიდან r მანძილზე მყოფი ყველა წერტილის სიმრავლეს **სფერო** ეწოდება.

P_0 წერტილს **სფეროს ცენტრი**, r -ს კი **რადიუსი** ეწოდება.

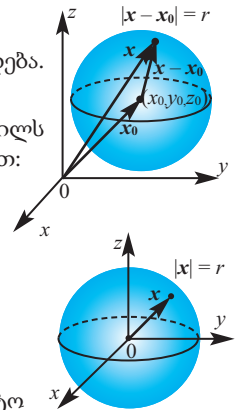
თუ $P(x; y; z)$ სფეროზე რაიმე წერტილი იქნება, ორ წერტილს შორის მანძილზე ფორმულის თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

ეს არის იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია P_0 და რადიუსია r .

კერძო შემთხვევაში, იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსია r იქნება: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

როგორც სურათიდან ხედავთ, ამ სფეროს Oxy საკოორდინატო სიბრტყესთან გადაკვეთა მისი დიდი წრეწირია:

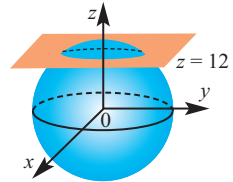


ნამუშაო 1. დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი $M(2; -1; 1)$ წერტილშია და რადიუსია $r = 5$.

ამოხსნა: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$

ნამუშაო 2. დაწერეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ სფეროსა და $z = 12$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული ფიგურის გამომსახველი განტოლება.

ამოხსნა: სფეროს რადიუსია $\sqrt{169} = 13$. თუ სფეროს განტოლებაში გავითვალისწინებთ $z = 12$ მივიღებთ: $x^2 + y^2 + 12^2 = 169$; $x^2 + y^2 = 169 - 144 = 25$

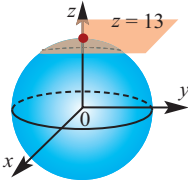


მოცემული სფეროს $z = 12$ სიბრტყესთან გადაკვეთა, არის $(0; 0; 12)$ წერტილში ცენტრის მქონე, $r = 5$ რადიუსიანი წრეწირი.

სფეროსთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილის მქონე სიბრტყეს **სფეროს მხები სიბრტყე** ეწოდება.

მაგალითად, $z = 13$ სიბრტყე $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ სფეროს $(0; 0; 13)$ წერტილში ეხება.

სფეროს მხები სიბრტყე შეხების წერტილში გამავალი რადიუსის მართობულია.



სასწავლო დაფალებები

- ა) დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეში მდებარეობს და რადიუსია 4..

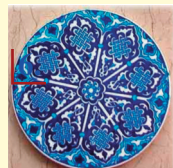
ბ) დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი $M(1; -2; 4)$ წერტილში მდებარეობს და რადიუსია 6 .
- იპოვეთ $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 35$ განტოლებით მოცემული სფეროს საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.
- დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი $(2; 3; -1)$ წერტილშია და გადის $(4; -1; 1)$ წერტილზე.

სფეროს განტოლება

4. იპოვეთ მანძილი $A(1; 2; 3)$ წერტილიდან $(x-9)^2 + (y+7)^2 + (z+9)^2 = 36$ განტოლებით მოცემული სფეროს ცენტრამდე.
შეამოწმეთ, ქვემოთ მოცემული განტოლებები არის თუ არა სფეროს განტოლებები?
5. თუ სფეროს განტოლებებია, მაშინ განსაზღვრეთ ცენტრი და რადიუსი.
- ა) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 37 = 0$
- ბ) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 19 = 0$
- გ) $x^2 + y^2 - z^2 + 12x + 2y - 4z + 32 = 0$
- დ) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 4z - 44 = 0$
6. განსაზღვრეთ $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 10z + 54 = 0$ განტოლებით მოცემული სფეროს ცენტრი და რადიუსი, იპოვეთ მანძილი $A(8; 0; 7)$ წერტილიდან ამ სფერომდე.
7. სფეროს მხები სიბრტყე შეხების წერტილში გავლებული რადიუსის მართობულია. დაწერეთ იმ სფეროს განტოლება, რომელიც $A(3; 4; 0)$ წერტილში $z = 0$ სიბრტყეს ეხება და რომლის რადიუსიც 7-ის ტოლია.
8. გეომეტრიულად გამოსახეთ იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატებიც ქვემოთ მოცემულ პირობებს აკმაყოფილებენ.
- ა) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ ბ) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$
9. P წერტილის ისეთი მდებარეობა აქვს, რომ $A(-1, 5, 3)$ წერტილიდან მანძილი $B(6, 2, -2)$ წერტილიდან არსებულ მანძილზე ორჯერ მეტია: უჩვენეთ, რომ ამ წერტილთა სიმრავლე სფეროა.
10. დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი $(2; -3; 6)$ წერტილშია და ეხება
- ა) xy ; ბ) yz ; გ) xz სიბრტყეებს.
11. დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ერთ-ერთი დიამეტრის წვეროს წერტილებია $(2; 1; 4)$ და $(4; 3; 10)$.
12. ა) დაწერეთ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი $(6, 8, -5)$ წერტილში მდებარეობს და რადიუსი 6 ერთეულის ტოლია.
ბ) მოახდინეთ ამ სფეროს თითოეულ საკოორდინატო სიბრტყესთან გადაკვეთის წარდგენა.
13. $\vec{r} = \langle x; y; z \rangle, \vec{a} = \langle 2; 1; -1 \rangle$ და $\vec{b} = \langle 1; 1; 0 \rangle$ პირობებში უჩვენეთ, რომ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0$ ტოლობა გამოსახავს სფეროს განტოლებას და იპოვეთ მისი ცენტრი.
14. სივრცეში ტოლრადიუსიანი ოთხი სფერო ერთმანეთს ეხება. ცნობილია, რომ ამ სფეროებიდან სამის ცენტრი $(\sqrt{2}; 0; 0), (0; \sqrt{2}; 0), (0; 0; \sqrt{2})$ წერტილებშია, ხოლო მეოთხის ცენტრი კი მე-7 ოქტანტში მდებარეობს. იპოვეთ მეოთხე სფეროს ცენტრი და სფეროების რადიუსი.

გარდაქმნები სივრცეში და სიბრტყეზე

მომხატველები, სპილენძის დამამუშავებლები, ხალიჩის მხატვრები ერთი და იგივე მოხატულობების პარალელური გადატანით, მოზრუნებით, ასახვის მოძრაობებითა და ჰომოთეტიური გარდაქმნებით ქმნიან ახალ მოხატულობებს.



ნახევანი. ქვაზე მოხატულობების ნიმუშები

ჩინური ჭურჭელი

ეს საინტერესოა! გამოჩენილმა ჰოლანდიელმა მხატვარმა ესკერმა მხატვრობის ისტორიაში მათემატიკის სიმეტრიის, კომბინატორიკის, სტერეომეტრიის, ტოპოლოგიის განყოფილების წესების ფერების შეფერილობებთან შეერთებით სიბრტყის შემავსებელი სურათებით შექმნა მოძრავი, დინამიკური ნაწარმოებები. სპეციალური მათემატიკური განათლების არმქონე ესკერი ნაწარმოებს ინტუიციისა და ვიზუალური წარმოდგენების მიხედვით ქმნიდა. პარალელურ გადატანაზე შექმნილ გარკვეულ ნაწარმოებს მან „სიბრტყის წესიერი მოძრაობა“ უწოდა.

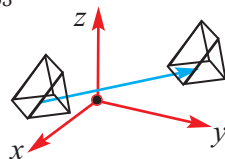


https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

სივრცეში F ფიგურის თითოეული P წერტილისათვის რაიმე გარკვეული წესით სივრცის ერთადერთ P' წერტილში გადამყვან შესაბამისობას F ფიგურის გარდაქმნა ეწოდება. ისეთ გარდაქმნას, რომელიც წერტილებს შორის მანძილს ინარჩუნებს მოძრაობა ეწოდება. მოძრაობისას სიბრტყეები სიბრტყეებში გადადის, წრფეები - წრფეებში, მონაკვეთები - მონაკვეთებში და კუთხეები - კონგრუენტულ კუთხეებში. მაშასადამე, მოძრაობაში ფიგურა თავის კონგრუენტულ ფიგურად გარდაიქმნება.

პარალელური გადატანა. ორგანზომილებიან კოორდინატა სისტემაში თითოეული $(x; y)$ წერტილის $(x+a; y+b)$ წერტილში გადამყვანი მოძრაობა $\langle a; b \rangle$ ვექტორით შესრულებული პარალელური გადატანაა.

ანალოგიური წესით სივრცეში პარალელური გადატანისას თითოეული წერტილის კოორდინატები $(x; y; z) \rightarrow (x+a; y+b; z+c)$ სახით იცვლება. პარალელური გადატანა მოძრაობაა, თითოეული პარალელური გადატანა ერთ ვექტორს შეესაბამება და პირიქით.



ნიმუში 1. $\vec{p}(2; -1; 3)$ ვექტორით შესრულებული პარალელური გადატანისას, რომელ წერტილად გარდაიქმნება $A(-4; 5; 6)$ წერტილი?

ამოხსნა: განსაზღვრების თანახმად, ასეთ გარდაქმნაში A წერტილის გარდაქმნილი A' წერტილის კოორდინატები $x' = -4 + 2 = -2$; $y' = 5 - 1 = 4$; $z' = 6 + 3 = 9$ იქნება. მაშასადამე, ამ პარალელური გარდაქმნით $A(-4; 5; 6)$ წერტილი $A'(-2; 4; 9)$ წერტილში გადადის.

სიმეტრია. სივრცეში წერტილისა და წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ისევე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე. სივრცეში სიბრტყის მიმართ სიმეტრიაც განიხილება.

გარდაქმნები სივრცეში და სიბრტყეზე

სივრცეში $(x; y; z)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილებია:

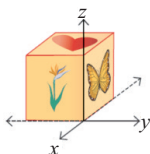
- კოორდინატთა სათავის მიმართ: $(-x; -y; -z)$
- Ox ღერძის მიმართ: $(x; -y; -z)$
- Oy ღერძის მიმართ: $(-x; y; -z)$
- Oz ღერძის მიმართ: $(-x; -y; z)$
- Oxy სიბრტყის მიმართ: $(x; y; -z)$
- Oyz სიბრტყის მიმართ: $(-x; y; z)$
- Oxz სიბრტყის მიმართ: $(x; -y; z)$

ნამუში . იპოვეთ $(1; 2; 3)$ წერტილის $z = 5$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული წერტილი.

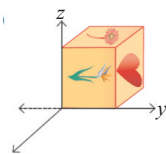
ამოხსნა: $z = 5$ სიბრტყის მიმართ $(1; 2; 3)$ წერტილის სიმეტრიული $(x'; y'; z')$ წერტილი $z = 5$ სიბრტყეზე, მაშასადამე, თან Oxy სიბრტყის მართობულ წრფეზეა. ამიტომაც ამ წერტილების აბსცისები და ორდინატები ერთი და იგივეა: $x' = 1, y' = 2$. z' კოორდინატი კი $(z' + 3) : 2 = 5$ დამოკიდებულებიდან გამოითვლება: $z' = 7$. ამრიგად, საძიებელი წერტილი $(1; 2; 7)$ იქნება.

მობრუნება. სივრცეში ფიგურის l წრფის გარშემო θ კუთხით მობრუნება ისეთ მობრუნებას ეწოდება, რომლის დროსაც l წრფის მართობულ თითოეულ სიბრტყეზე მისი l წრფესთან გადაკვეთის წერტილის გარშემო იმავე მიმართულებით იმავე θ კუთხით მობრუნება ხდება. l წრფეს მობრუნების ღერძი, θ -ს კი მობრუნების კუთხე ეწოდება.

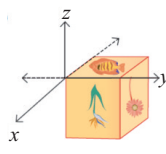
ქვემოთ მოცემულ სურათზე წახნაგებზე სხვადასხვა გამოსახულებიანი კუბის x ღერძის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ -ით მობრუნების შესაბამისი ნიმუშებია მოცემული.



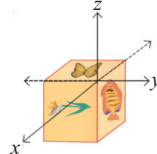
საწყისი მდგომარეობა



90° მობრუნება



180° მობრუნება



270° მობრუნება

ჰომოთეტია. სივრცეში სიბრტყის მსგავსად მსგავსების გარდაქმნის ცნება შემოიტანება. თუ ფიგურის გარდაქმნის დროს წერტილისმიერ ორ X და Y წერტილის შორის მანძილი ერთი და იგივე $k > 0$ - ჯერ იცვლება, ასეთ გარდაქმნას **მსგავსების გარდაქმნა**, k რიცხვს კი **მსგავსების კოეფიციენტი** ეწოდება.

თუ F ფიგურის გარდაქმნისას წერტილისმიერი X წერტილის გარდაქმნით მიღებული X' წერტილისათვის $\vec{OX'} = k \cdot \vec{OX}$, მაშინ ამ გარდაქმნას O ცენტრიანი და k

კოეფიციენტიანი ($k \neq 0$) **ჰომოთეტია** ეწოდება.

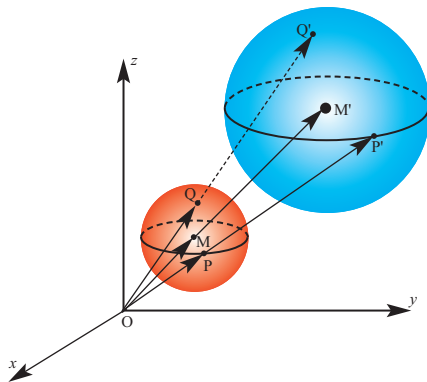
ჰომოთეტია მსგავსების გარდაქმნაა. კერძო შემთხვევაში, როცა $k = -1$ ცენტრული სიმეტრია, ხოლო როცა $k = 1$ იგივერი გარდაქმნა მიიღება.

გარდაქმნები სივრცეში და სიბრტყეზე

ნამუშაუ. მოცემულია სფერო, რომლის ცენტრი $M(1;3;3)$ წერტილშია და რადიუსი 2-ის ტოლია. დაწერეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და ჰომოთეტიის კოეფიციენტია $k=3$.

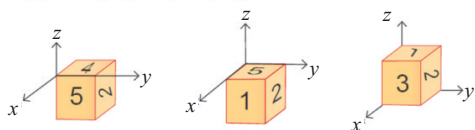
ამოხსნა: M წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი $\vec{OM}(1; 3; 3)$, M' წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი კი $\vec{OM}'(x'; y'; z')$ -ით ავლნიშნოთ. მაშინ, განსაზღვრების თანახმად $\vec{OM}' = k \cdot \vec{OM}$ ან $(x'; y'; z') = 3 \cdot (1; 3; 3) = (3; 9; 9)$.

აქედან $x'=3$, $y'=9$, $z'=9$. ანუ, მიღებული სფეროს ცენტრი $M'(3; 9; 9)$ იქნება. რადგან ამ სფეროს რადიუსია $R = M'P' = 3MP = 3 \cdot 2 = 6$, ამიტომ მისი განტოლება $(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-9)^2 = 36$ იქნება.



სასწავლო დაფალებები

- სურათზე კუბის y ღერძის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მიმდევრობით 90° , 180° , 270° -ით მობრუნებები ნაჩვენებია. ამ სურათების მიხედვით დახაზეთ კუბის თავდაპირველი მდგომარეობის სურათი.



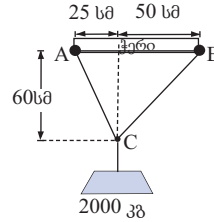
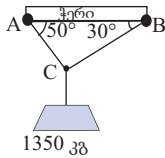
- პარალელური გადატანისას $A(2; 0; -1)$ წერტილი $A'(4; -3; 5)$ წერტილში გადადის. ამ პარალელური გადატანისას, რომელ წერტილში გადადის; ა) კოორდინატთა სათავე; ბ) $B(-3; 1; 0)$ წერტილი?
- დაწერეთ ა) Oxy ; ბ) Oyz ; გ) Oxz სიბრტყის მიმართ $B(2;3;1)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.
- რომელ წერტილად გარდაიქმნება $A(3; 2; 5)$ წერტილი: ა) $x = 4$; ბ) $y = 3$; გ) $z = 2$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიაში?
- რომელ წერტილში გადავა $A(0; -3; 2)$ წერტილი $P(1; 2; 3)$ ცენტრიანი და $k = 3$ კოეფიციენტიანი ჰომოთეტიის დროს?
- დახაზეთ ერთ-ერთი წვეროს კოორდინატთა სათავეში და იმავე წვეროდან გამოსული წიბოების საკოორდინატო ღერძების დადებითი მიმართულების მქონე ერთეულოვან წიბოიანი კუბი. დაწერეთ ჰომოთეტიის ცენტრის კოორდინატთა სათავეში მქონე და $k=2$ კოეფიციენტიანი ჰომოთეტიით მიღებული კუბის წვეროს წერტილების კოორდინატები.

განმაზოგადებელი დავალებები

1. $\vec{a} \langle 1; -1; 2 \rangle$ და $\vec{b} \langle 2; -3; -1 \rangle$ ვექტორებიდან თითოეულისათვის შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული დავალებები.
 ა) დაწერეთ ვექტორების ორთ ვექტორებად დანაშალები.
 ბ) იპოვეთ ვექტორების სიგრძე.
 გ) იპოვეთ $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ სკალარული ნამრავლი.
2. იპოვეთ A (2; 3; 4), B (7; 4; 7) და C (-1; 6; 3) წერტილების წერტილებში მქონე სამკუთხედის AM მედიანის სიგრძე.
3. P(4;3) წერტილზე გამავალი წრფე $\vec{m} \langle 5; -1 \rangle$ რადიუს-ვექტორის პარალელურია. დახაზეთ წრფის გრაფიკი.
4. მოცემულია წერტილები A(1; -2; 4), B (2; 1; -3), C (-5; 0; 2) და D (3; 4; 0): კომპონენტებით ჩაწერეთ შემდეგი ვექტორები:
 ა) $\vec{AB}$
 ბ) $\vec{CD}$
 გ) $\vec{AC} + \vec{BD}$
 დ) $\vec{AC} - \vec{BC}$
5. მოცემული თითოეული შემთხვევისათვის იპოვეთ a და b ვექტორების სკალარული ნამრავლი.
 ა) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 40^\circ$
 ბ) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$
 გ) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 10$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$
6. იპოვეთ კუთხე $\langle 1; 2; 3 \rangle$ და $\langle -15; 2; 4 \rangle$ ვექტორებს შორის.
7. იპოვეთ A (2; 2; 1) წერტილის B (7; -3; 6) წერტილთან შემაერთებული AB მონაკვეთის 2 : 3 შეფარდებით გამყოფი C წერტილის კოორდინატები. განიხილეთ ორი შემთხვევა.
8. მოცემულია $\vec{a} \langle 4; 2 \rangle$ და $\vec{b} \langle 2; -4 \rangle$ ვექტორები:
 ა) დახაზეთ ეს ვექტორები;
 ბ) რომელია უფრო მეტი: $|\vec{a} + \vec{b}|$, თუ $|\vec{a}| + |\vec{b}|$?

განმაზოგადებელი დაგალებები

9. იპვეთ მოცემული ტვირთის გავლენით თოკზე წარმოქმნილი დაჭიმულობის ძალა.



10. სხეულზე მოქმედი 20 ნ, 55 ნ და 75 ნ ძალები x ღერძის დადებით მიმართულებასთან შესაბამისად 30° , 45° , 120° -იან კუთხეს ადგენენ. იპვეთ ტოლქმედი ძალის მიმართულება და აბსოლუტური მნიშვნელობა.
11. განსაზღვრეთ წერტილი, რომელიც Oyz სიბრტყეზე ძევს და $A(2; 0; 3)$, $B(0; 3; 2)$ და $C(0; 0; 1)$ წერტილებიდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული.
12. m -ის რა მნიშვნელობისათვისაა მოცემული წერტილები კოლინეარული?:
 ა) $A(4; 2)$, $B(m; -7)$, $C(6; 4)$;
 ბ) $A(3; -1; 0)$, $B(m; 2; 3)$, $C(7; 3; 4)$?
13. განსაზღვრეთ $\vec{a}(12; -20; 16)$ და $\vec{b}(12; -20; 16)$ ვექტორების პარალელურობა და მართობულობა
14. დაწერეთ ცენტრის $(2; 3; -1)$ წერტილში მქონე, $(4; -1; 1)$ წერტილზე გამავალი სფეროს განტოლება.
15. სიბრტყე $x=0$ განტოლებითაა მოცემული.
 ა) დაწერეთ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.
 ბ) დაასაბუთეთ, რომ ეს სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე.
 გ) დაწერეთ ამ სიბრტყეზე მდებარე სამი წერტილის კოორდინატები.
16. იპვეთ $A(-2; 0; 3)$ და $B(0; 2; -1)$ წერტილებიდან ტოლ მანძილებზე მყოფი და Oz ღერძზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.
17. $A(1; -2; 7)$, $B(2; 3; 5)$ და $D(-1; 3; 6)$ წერტილები $ABCD$ რომბის წვეროებია. იპვეთ C წვეროს კოორდინატები.
18. რომელ წერტილად გარდაიქმნება $A(3; 5; 0)$ წერტილი, თუ ჰომოთეტიის ცენტრია $M(1; 2; -3)$, კოეფიციენტი $k = 2$?

- ფუნქციის ზღვარი წერტილში
- მნიშვნელობათა ცხრილისა და გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის ზღვრის ვარაუდი
- ზღვრის არსებობა
- ზღვრის თვისებები
- ფუნქციის უწყვეტობა
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემცველი სპეციალური ზღვრები
- უსასრულო ზღვრები და ზღვარი უსასრულობაში. ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები
- რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|--------------------|-------------------------------|
| ◆ ზღვარი | ◆ წერტილში უწყვეტობა |
| ◆ ცალმხრივი ზღვარი | ◆ ინტერვალში უწყვეტობა |
| ◆ მარცხენა ზღვარი | ◆ მონაკვეთზე უწყვეტობა |
| ◆ მარჯვენა ზღვარი | ◆ ცნობილი ზღვრები |
| ◆ ზღვრის არსებობა | ◆ ზღვარი უსასრულობაში |
| ◆ უწყვეტობა | ◆ რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი |

ეს საინტერესოა!

ლიმიტი ლათინური “limes” სიტყვიდან არის აღებული და საზღვარს, ბოლო-უმაღლეს საფეხურს ნიშნავს.

ზღვრის ცნება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ინგლისელი მათემატიკოსის ისაკ ნიუტონის (1642-1727) და გერმანელი მათემატიკოსის გოტფრიდ ლაიბნიცის (1646-1716) მიერ იქნა მოცემული. თუმცა ვერც ნიუტონმა და ვერც ლაიბნიცმა ვერ შეძლეს ბოლომდე გაეხსნათ მისი მათემატიკური არსი. ლიმიტის ზუსტი განსაზღვრება მოგვცა ფრანგმა მათემატიკოსმა კოშმა. გერმანელი მეცნიერის ვაიერშტრასის გამოკვლევებმა კი დაასრულა მნიშვნელოვანი თეორიის შექმნა.



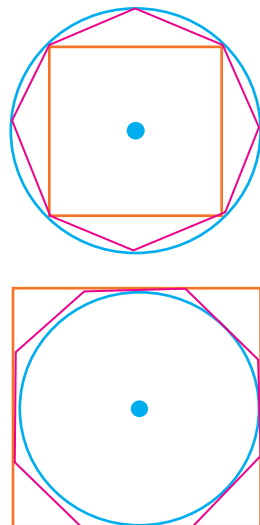
ფუნქციის ზღვარი წერტილში

ზღვრის ცნება მათემატიკის ფუნდამენტალური ცნებათაგანია.

ზღვრის ცნების გააზრებისათვის, ჯერ ქვემოთ მოცემულ ნიმუშებს გადავავლოთ თვალი.

1. წრის ფართობი.

გენიალური მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი არქიმედე წრის ფართობის მოსაძებნად ჩახაზული და შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედების ფართობებს იყენებდა. წრეში ჩახაზული კვადრატის ფართობი წრის ფართობთან შედარებით საკმაოდ ნაკლებია, თუმცა რვაკუთხედის ფართობი წრის ფართობისაგან ნაკლებად განსხვავდება. თუ წრეში ჩაიხაზება წესიერი 16-კუთხედი, 32- კუთხედი და ასე შემდეგ, მაშინ ამ მრავალკუთხედის ფართობი წრის ფართობთან კიდევ უფრო ახლოს იქნება. თუ ჩახაზული წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობას უსასრულოდ გავზრდით, მისი ფართობი წრის ფართობს უსასრულოდ მიუახლოვდება. წრეზე შემოხაზული მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობის ზრდის კვალობაზეც მის ფართობსა და წრის ფართობს შორის სხვაობა მცირდება. არქიმედეს ეს მიდგომა სინამდვილეში ზღვრის კონცეფციის საფუძველს წარმოადგენს.

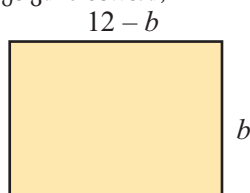


$$2. \quad 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$$

მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის ფორმულა $b_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ სახისაა. მნიშვნელში რიგხვის ზრდის კვალობაზე ყოველი მომდევნო წევრი, ვხედავთ რომ, მის წინამდებარეზე ნაკლებია. n -ის უსასრულოდ გაზრდის მკვალობაზე ივარაუდეთ b_n -ის მნიშვნელობა რომელ მნიშვნელობას მიუახლოვდება!

გამოკვლევა. 24 მ სიგრძის მავთულით მართკუთხა ფორმის ფართობი უნდა შემოისაზღვროს. როგორ უნდა შეირჩეს მისი ზომები, რომ ფართობი იყოს უდიდესი?

ამოხსნა: თუ მართკუთხედის სიგრძეს ავლნიშნავთ, a , სიგანეს კი b ასოთი, მართკუთხედის პერიმეტრი $P = 2a + 2b$ იქნება. პირობის თანახმად $2a + 2b = 24$. საიდანაც $a = 12 - b$. თუ $S = ab$ ფართობის ფორმულაში გავითვალისწინებთ $a = 12 - b$, მართკუთხედის ფართობის სიგანეზე დამოკიდებულება $S = (12 - b)b$ ან $S(b) = 12b - b^2$ სახით შეიძლება ჩაიწეროს.



ფუნქციის ზღვარი წერტილში

b -ს როგორც მარჯვნიდან, ისე მარცხნიდან 6 -თან მიახლოებული მნიშვნელობებისათვის, შევადგინოთ ფართობის მნიშვნელობის მაჩვენებელი ცხრილი.

	b	b მარცხნიდან რაც უფრო 6 -ს უახლოვდება				b მარჯვნიდან რაც უფრო 6 -ს უახლოვდება		
სიგანე	b	5,0	5,5	5,9	6,0	6,1	6,5	7,0
ფართ.	S	35,00	35,75	35,99	36,00	35,99	35,75	35,00

მაშასადამე, b -ს მნიშვნელობა როგორც მარცხნიდან ისე მარჯვნიდან რაც უფრო 6 -ს უახლოვდება, $S(b)$ -ს მნიშვნელობა 36 -ს უახლოვდება. თანაც ეს მიახლოება არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ უახლოვდება b 6 -ს. ამ შემთხვევაში რიცხვ 36 -ს b ცვლადის 6 რიცხვთან მიახლოებისას $S(b)$ ფუნქციის ლიმიტი (ზღვარი) ეწოდება და შემდეგნაირად გამოისახება.

$$\lim_{b \rightarrow 6} S(b) = \lim_{b \rightarrow 6} (12b - b^2) = 36$$

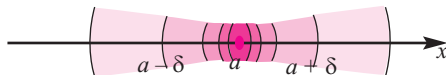
b ცვლადის 6 -თან მიახლოებისას S ფუნქციის ზღვარი 36 -ის ტოლია.

აქ $b \rightarrow 6$ ჩანაწერი გულისხმობს b რაც უფრო 6 -ს უახლოვდება, თუმცა b -ს 6 -თან ტოლობას არ ითვალისწინებს. როგორც ცხრილიდან ჩანს მარცხნიდან მიახლოებისას 6 -ზე ნაკლები რიცხვებით, მარჯვნიდან მიახლოებისას 6 -ზე მეტი რიცხვებით ხდება 6 -თან მიახლოება.

$S(b) = 36 - (b - 6)^2$ სახით ჩაწერითაც შეიძლება იმის დანახვა, რომ $|b - 6|$ სიდიდე რაც უფრო 0 -ს უახლოვდება, S -ის მნიშვნელობა მით უფრო უახლოვდება 36 -ს.

$(a - \delta; a + \delta)$ ინტერვალს a წერტილის δ მიდამო ($\delta > 0$) ეწოდება.

δ -ს შერჩევით ამ მიდამოდან აღებული ნებისმიერი x -ებისათვის $|x - a|$ მანძილი ნებისმიერ დადებით რიცხვზე მცირე შეიძლება გავხადოთ. მაშასადამე, $x - a$ სხვაობაც 0 -ს ნებისმიერი დონით შეგვიძლია მივუახლოვოთ.



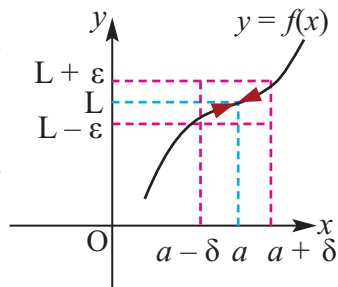
დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის მომცავ რაიმე მიდამოშია (შეიძლება, a წერტილის გარდა) განსაზღვრული. $x - a$ სხვაობა რაც უფრო 0 -ს უახლოვდება, $f(x) - L$ სხვაობაც 0 -ს თუ მიუახლოვდება, მაშინ L რიცხვს $x = a$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი ეწოდება და $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ სახით იწერება.

ფუნქციის ზღვარი წერტილში

განსაზღვრება. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შეიძლება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვის მოძებნა, რომ $0 < |x - a| < \delta$ პირობის დამაკმაყოფილებელი x -ებისათვის $|f(x) - L| < \varepsilon$. მაშინ L რიცხვს $f(x)$ ფუნქციის a წერტილში ზღვარი ეწოდება და $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ სახით იწერება.

ეს მოკლედ გეომეტრიულად ასე შეიძლება განიმარტოს.

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ორდინატა ღერძზე L წერტილის $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ მიდამო ავიღოთ და $L - \varepsilon, L + \varepsilon$ წერტილებიდან აბსცისთა ღერძის პარალელური ხაზები გავავლოთ. მივიღებთ ზოლს, რომლის სიგანეც 2ε იქნება და $f(x)$ ფუნქციის $(a - \delta; a + \delta)$ მიდამოში მყოფი ყველა x -ების ($x \neq a$) შესაბამისი მნიშვნელობები $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ ინტერვალში, გრაფიკი კი 2ε სიგანის მქონე ამ ზოლში განთავსდება.



ნიმუში 1. ზღვრის განსაზღვრების გამოყენებით ვუჩვენოთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$

ამოხსნა: ავღნიშნოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. $|x - 2| < \delta$ პირობის

დამაკმაყოფილებელი x -ებისათვის

შევაფასოთ $|(3x - 2) - 4|$ სიდიდე:

$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta$. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ თუ შევარჩევთ, $|x - 2| < \delta$ პირობის დამაკმაყოფილებელი x -ებისათვის $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ დამოკიდებულებას დააკმაყოფილებს. ეს კი, განსაზღვრების თანახმად, ნიშნავს $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$

ზღვარი შეიძლება სხვადასხვა ხერხებით განისაზღვროს.

- ცხრილის მიხედვით
- გრაფიკის მიხედვით
- ანალიტიკური ხერხით

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილისა და გრაფიკის მიხედვით ზღვრის სავარაუდო განსაზღვრა.

ნიმუში 2. იპოვეთ ზღვარი მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენით: $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)$

ამოხსნა: x -ის მარცხნიდან და მარჯვნიდან 2-თან ახლო ზოგიერთ მნიშვნელობებში $f(x) = 3x - 2$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები დავეწეროთ ცხრილში.

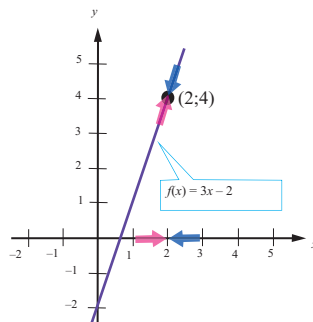
x	1,9	1,99	1,999	2,0	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,700	3,970	3,997	?	4,003	4,030	4,300

ფუნქციის ზღვარი წერტილში

x -ის მნიშვნელობების 2-თან როგორც მარცხნიდან, ისე მარჯვნიდან მიახლოებისას $f(x)$ -ის მნიშვნელობა 4-ს უახლოვდება.

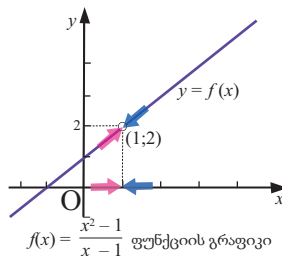
$f(x) = 3x - 2$ ფუნქციის გრაფიკის აგებითა და x -ის 2-თან როგორც მარჯვნიდან, ისე მარცხნიდან მიახლოებით ამ ფუნქციის მნიშვნელობის 4-თან მიახლოების დანახვა შეიძლება.

მაშასადამე, შეგვიძლია ჩავწეროთ: $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$.



ნიმუში 3. იპოვეთ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

ამოხსნა: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ფუნქცია $x = 1$ წერტილში არ არის განსაზღვრული და როცა $x \neq 1$, მაშინ $f(x) = x + 1$. შევადგინოთ x -ის მარცხნიდან და მარჯვნიდან 1-თან მიახლოების მნიშვნელობათა ცხრილი.



x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1

როგორც ცხრილიდან ჩანს, რაც უფრო უახლოვდება x -ის მნიშვნელობა 1-ს, მით უფრო $f(x)$ -ის მნიშვნელობა უახლოვდება 2-ს. შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკის აგებითაც შეიძლება იმის დანახვა, რომ ეს მოსაზრება სწორია.

ყურადღება! მოცემული ფუნქცია $x=1$ წერტილში არ არის განსაზღვრული. თუმცა ამ წერტილში ფუნქციას ზღვარი გააჩნია და ეს ზღვარი 2-ის ტოლია:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

ყურადღება მიაქციეთ ფუნქციის ზღვარსა და ფუნქციის მოცემულ წერტილში მნიშვნელობის ცნებებს შორის სხვაობას!

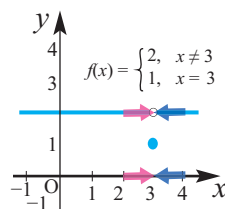
ნიმუში 4. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$ ფუნქციის გრაფიკის

მიხედვით იპოვეთ: ა) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ზღვარი; ბ) $f(3)$ -ის მნიშვნელობა.

ამოხსნა: ა) ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს, რომ როცა x -ის მნიშვნელობა მისი წარაფის 3-საკენ, ფუნქციის მნიშვნელობა 2-ს უახლოვდება:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

ბ) $x=3$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა 1-ის ტოლია: $f(3) = 1$



ფუნქციის ზღვარი წერტილში

სასწავლო დაფალებები

1. განსაზღვრეთ ზღვარი ცხრილის მიხედვით.

ა) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 3)$

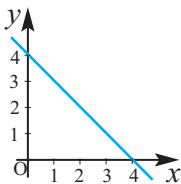
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

ბ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)$

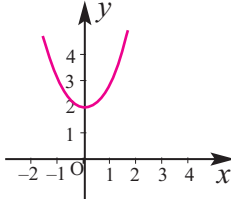
x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$				?			

2. იპოვეთ ფუნქციის ზღვრები ფუნქციის გრაფიკების გამოყენებით.

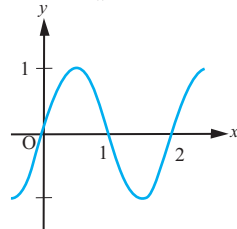
ა) $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)$



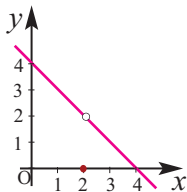
ბ) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)$



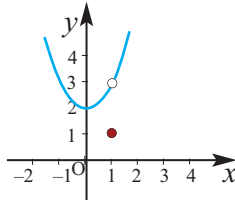
გ) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sin \pi x)$



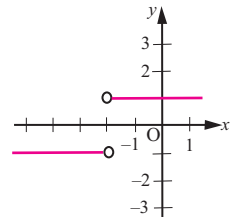
დ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$



ე) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



ვ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x + 2|}{x + 2}$



3. 24 სმ გვერდებიანი კვადრატული ფორმის მუყაოს კუთხეებიდან x სმ გვერდებიანი კვადრატები ამოჭრეს და შემდეგ გადაკეცვის გზით პირლია ყუთი დაამზადეს.

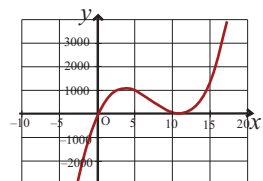
ა) მოცემული ინფორმაციის მიხედვით სქემატურად დახაზეთ ყუთის სურათი და ზედ შესაბამისი აღნიშვნები გააკეთეთ.

ბ) უჩვენეთ, რომ ყუთის მოცულობა $V = 4x(12 - x)^2$ ფორმულით გამოითვლება.

გ) როცა $-x$ -ის მნიშვნელობა მიისწრაფვის 4-საკენ, ყუთის მოცულობა უდიდესი იქნება. დაასრულეთ ქვემოთ მოცემული ცხრილი და გამოიკვლიეთ x -ის მნიშვნელობის 4-თან მიახლოებისას, როგორც იცვლება ფუნქციის მნიშვნელობა. ცხრილის მიხედვით გამოთვალეთ $\lim_{x \rightarrow 4} V$.

x	3	3,5	3,9	4	4,1	4,5	5
V							

დ) გრაფიკულატორის დახმარებით ააგეთ $V(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით შეამოწმეთ, რომ როცა $x=4$, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა აღწევს მაქსიმუმს.



ფუნქციის ზღვარი წერტილში

ზღვარის არსებობა. ცალმხრივი ზღვრები.

ზოგჯერ საჭირო ხდება x ცვლადის მხოლოდ ერთი მხრიდან (მარჯვნიდან ან მარცხნიდან) a -სკენ მისწრაფების შემთხვევების განხილვა.

მარცხენა ზღვარი. თუ x -ის მნიშვნელობების a -ზე ნაკლებობის პირობებში a -სთან მიახლოებისას $f(x) \rightarrow L$ სხვაობა ნულს უახლოვდება, მაშინ L რიცხვს $f(x)$ ფუნქციის a წერტილში მარცხენა ზღვარი ეწოდება და $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ სახით იწერება.

მარჯვენა ზღვარი. თუ x -ის მნიშვნელობების a -ზე მეტობის პირობებში a -სთან მიახლოებისას $f(x) \rightarrow L$ სხვაობა ნულს უახლოვდება, მაშინ L რიცხვს $f(x)$ ფუნქციის a წერტილში მარჯვენა ზღვარი ეწოდება და $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ სახით იწერება.

თუ $f(x)$ ფუნქციას მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები გააჩნია და ტოლია, მაშინ $x = a$ წერტილში ფუნქციას ზღვარი გააჩნია და

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ტოლობა ჭეშმარიტია.}$$

ამ გამონათქვამის შებრუნებულიც ჭეშმარიტია. შებრუნებული გამონათქვამი თქვენ დაწერეთ!

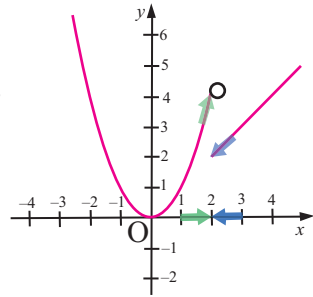
გამოვიკვლიოთ ნაწილ-ნაწილ მოცემულ ფუნქციებზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან ზღვარი.

მაგალითი 5.
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

ფუნქციის $x = 2$ წერტილში იპოვეთ მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები.

ამოხსნა: მარცხენა ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

მარჯვენა ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$



ვინაიდან მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები ტოლი არ არის, მოცემულ ფუნქციას $x=2$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

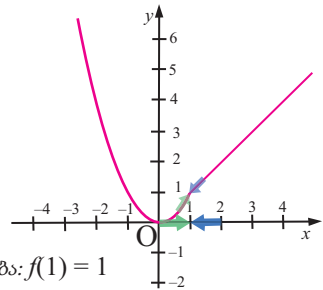
მაგალითი 6.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$
 ფუნქციის $x = 1$

წერტილში იპოვეთ მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები.

ამოხსნა: მარცხენა ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

მარჯვენა ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ფუნქციის მნიშვნელობა: $f(1) = 1$



გამოვიკვლიოთ!

ა)
$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 3 \\ 9 - x & x > 3 \end{cases}$$

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი. შეამოწმეთ $x = 3$ წერტილში აქვს თუ არა ზღვარი.

ბ)
$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x > 1 \\ x^2 + 3 & x \leq 1 \end{cases}$$

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი. შეამოწმეთ $x = 1$ წერტილში აქვს თუ არა ზღვარი.

ფუნქციის ზღვარი წერტილში

ფუნქციის ზღვრისათვის მოცემულ განსაზღვრებაში გათვალისწინებულია, რომ a და L რიცხვები სასრულია. თუმცა a და L (ერთი ან ორივე) შეიძლება არ იყოს სასრული.

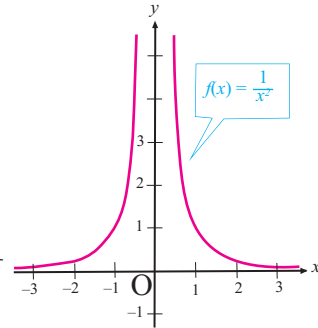
განვიხილოთ ზღვარი:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

გრაფიკიდანაც ჩანს, რომ x -ის მარცხნიდან და მარჯვ-

ნიდან ნულისაკენ მისწრაფებისას,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



ფუნქციის მნიშვნელობა უსასრულოდ იზრდება. მაშასადამე, თუ გვინდა, რომ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა შეძლებისდაგვარად დიდი იყოს, $|x|$ -ის მნიშვნელობა შეძლებისდაგვარად მცირე უნდა ავიღოთ. მაგალითად,

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 100$$

$$0 < |x| < \frac{1}{1000} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 1000000$$

$|x|$ -ის მნიშვნელობა რაც უფრო მცირდება, ფუნქციის მნიშვნელობა შეუზღუდავად იზრდება.

$\frac{1}{x^2}$ ფუნქცია, როცა $x \rightarrow 0$ არის უსასრულოდ ზრდადი. ეს ასე იწერება: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

სასწავლო დაგეგმვები

4. იპოვეთ ზღვრები (თუ არსებობს) მოცემული ფუნქციების გრაფიკების გამოყენებით. თუ ზღვარი არ არსებობს, განმარტეთ მიზეზი.

$$1) f(x) = \begin{cases} x + 6, & x < 1 \\ 8 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

ა) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; გ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x < 0 \\ 1 - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

ა) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; გ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5. ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი ზღვრები.

ა) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$

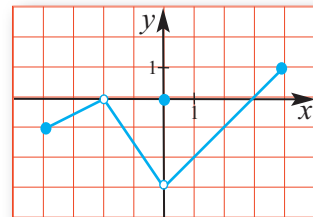
ბ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

გ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

დ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ე) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ვ) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$



6. დახაზეთ მოცემული პირობების დამაკმაყოფილებელი რაიმე $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ა) $f(-1) = 3$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ და $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ არ ჰქონდეს.

ბ) $f(-2) = 4$, $f(0) = 5$, $f(2) = 0$ და $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

ზღვრის თვისებები

ფუნქციის ზღვრის შესახებ ქვემოთ მოცემული გამონათქვამები ჭეშმარიტია.

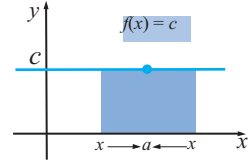
თუ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში ზღვარი აქვს, იგი ერთადერთია.

მუდმივის ზღვარი.

$f(x) = c$ მუდმივი ფუნქციისათვის $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$.

• მუდმივის ზღვარი მისივე ტოლია.

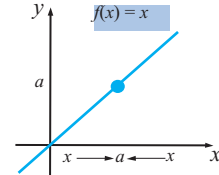
მაგალიტი. $\lim_{x \rightarrow 3} 7 = 7$, $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5$



• იგივეური ფუნქციის ზღვარი.

$f(x) = x$ იგივეური ფუნქციისათვის $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

მაგალიტი. $\lim_{x \rightarrow -5} x = -5$



ფუნქციის ზღვრის გამოთვლისას გამოიყენება ქვემოთ მოცემული თვისებები.

თუ L, M, a ნამდვილი რიცხვებია და $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, მაშინ:

1. ჯამის ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$

ორი ფუნქციის ჯამის ზღვარი მათი ზღვართა ჯამის ტოლია.

მაგალიტი. $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 6) = \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 6 = 3 + 6 = 9$

2. სხვაობის ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$

ორი ფუნქციის სხვაობის ზღვარი მათი ზღვართა სხვაობის ტოლია.

მაგალიტი. $\lim_{x \rightarrow -1} (11 - x) = \lim_{x \rightarrow -1} 11 - \lim_{x \rightarrow -1} x = 11 + 1 = 12$

3. ნამრავლის ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$

ორი ფუნქციის ნამრავლის ზღვარი მათი ზღვართა ნამრავლის ტოლია.

კერძო შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

ანუ მუდმივი მამრავლი შეიძლება გატანილი იქნას ზღვრის ნიშნის გარეთ

მაგალიტი. $\lim_{x \rightarrow 5} (-2x) = (-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 5} x = -2 \cdot 5 = -10$

4. განაყოფის ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$

ორი ფუნქციის განაყოფის ზღვარი, თუ გამყოფის ზღვარი განსხვავებულია ნულისაგან, ამ ფუნქციების ზღვართა შეფარდების ტოლია.

მაგალიტი. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+5}{4-x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (4-x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5}{\lim_{x \rightarrow 2} 4 - \lim_{x \rightarrow 2} x} = \frac{2+5}{4-2} = \frac{7}{2} = 3,5$

5. ხარისხის ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n = L^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

კერძო შემთხვევაში, $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

მაგალიტი. ა) $\lim_{x \rightarrow 10} x^4 = 10^4 = 10000$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2}{\lim_{x \rightarrow 3} x^3} = \frac{2}{27}$

ზღვრის თვისებები

მოცემული გამონათქვამების საფუძველზე ქვემოთ მოცემული დასკვნის გაკეთება შეიძლება.

მრავალწევრა და რაციონალური ფუნქციის ზღვარი

ნებისმიერი $P(x)$ მრავალწევრისათვის $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$.

ნებისმიერი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებისათვის, როცა $Q(a) \neq 0$, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

ნიმუში. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4) = 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 3 \cdot (2)^2 + 4 = 16$

ნიმუში. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ როგორც ხედავთ, რაციონალური ფუნქციის მნიშვნელი, როცა $x = 1$ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშასადამე, ზემოთ მოცემული თვისების გამოყენება შეგვიძლია.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{2 \cdot (1)^2 + 1 + 1}{1 + 1} = 2.$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებისათვის $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(a)}$

ნიმუში. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$

სასწავლო დაფალებები

1. გამოთვალეთ ზღვრის თვისებების გამოყენებით.

ა) $\lim_{x \rightarrow 2} 8$ ბ) $\lim_{x \rightarrow 6} x$ გ) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 4)$ დ) $\lim_{x \rightarrow -2} 7x^2$

2. 1) თუ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 2$ და $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 3$ იპოვეთ:

ა) $\lim_{x \rightarrow c} (5g(x))$ ბ) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$ გ) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x))$ დ) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

2) თუ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{3}{2}$ და $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \frac{1}{2}$ იპოვეთ:

ა) $\lim_{x \rightarrow c} (4f(x))$ ბ) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x))$ გ) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x))$ დ) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

3. გამოთვალეთ ზღვრის თვისებების გამოყენებით.

1) $\lim_{x \rightarrow 2} (-4x^2 + 2x - 5)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x - x^3)$ 3) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 4x + 1)$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} (5x^3 + 6x^2 - 8)$ 5) $\lim_{x \rightarrow -3} (2x^2 + 4x + 1)$ 6) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$

4. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim_{x \rightarrow 4} x^2$ ბ) $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^3)$ გ) $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)^5$
 დ) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 1}$ ე) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x}$ ვ) $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[3]{x + 1}$

ზღვრის თვისებები

5. გამოთვალეთ ზღვრები.

ა) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x+1}$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x-4}$

გ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4}{x-2}$

დ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x-1}$

ე) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+1}$

ვ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2}$

6. ა) დახაზეთ რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც $x = 2$ წერტილში განსაზღვრულია, თუმცა როცა $x \rightarrow 2$, ზღვარი არ გააჩნია.

ბ) დახაზეთ რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც $x = 2$ წერტილში არ არის განსაზღვრული, თუმცა როცა $x \rightarrow 2$, ზღვარი გააჩნია.

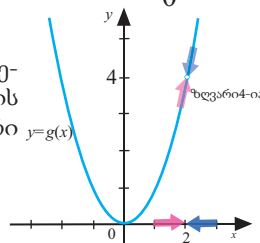
ზღვრის გამოთვლის ზოგიერთი ხერხი

ზღვრის პოვნა რაციონალური გამოსახულების მრიცხველისა და მნიშვნელის მამრავლებად დაშლითა და შეკვეცით.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ ზღვარს თუ $x = 2$ -ში ადგილზე ჩაწერით გამოვთვლით $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა მიიღება.

ამ შემთხვევაში რაციონალური გამოსახულების მრიცხველისა და მნიშვნელის მამრავლებად დაშლით, შეკვეცის გზით გამარტივებისა და შესაბამისი ეკვივალენტური გამოსახულების ჩაწერით ზღვარი გამოითვლება:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4.$$



შეამოწმე შენი თავი! გამოთვალეთ (თუ არსებობს) რაციონალური ფუნქციების ზღვრები, ხოლო თუ არ არსებობს, განმარტეთ მიზეზი.

ა) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-5}$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$

გ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x}$

რადიკალისაგან გათავისუფლებით ზღვრის პოვნა

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$ მრიცხველის რადიკალისაგან გათავისუფლებით ზღვარი.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4 - 4}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} + \lim_{x \rightarrow 0} 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

გამოიყენება ზღვრის თვისებები

ზღვრის თვისებები

7. გამოთვალეთ რაციონალური ფუნქციების ზღვარი (თუ არსებობს), თუ არ არსებობს, განმარტეთ მიზეზი.

ა) $\lim_{x \rightarrow 3} (-4x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 5} (-x^3)$

გ) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2$

დ) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 4x + 1)$

ე) $\lim_{x \rightarrow 6} (-5x^2 + 6x + 8)$

ვ) $\lim_{t \rightarrow -2} (t + 4)^2$

ზ) $\lim_{t \rightarrow 1} (3t - 1)(5t^2 + 2)$

თ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{3x}$

ი) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6}{x^2 - 7x + 6}$

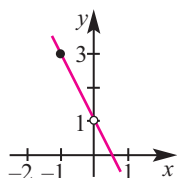
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$ ინფორმაციის არსებობის პირობებში გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x^2 - 1}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 1}{x - 1}$; გ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - 1)^2}{(x - 1)^2}$

თითოეული გამოთვლის ნაბიჯზე მიუთითეთ ზღვრის თვისება.

9. აღნიშნეთ წერტილები, რომლებშიც ფუნქცია განუსაზღვრელია. ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ ზღვარი (თუ არსებობს).

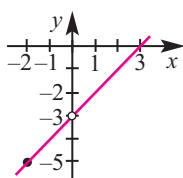
$g(x) = \frac{-2x^2 + x}{x}$



ა) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

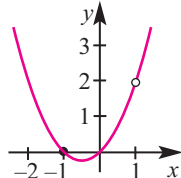
$h(x) = \frac{x^2 - 3x}{x}$



ა) $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

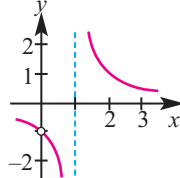
$\varphi(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$



ა) $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x)$

$f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$



ა) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

10. გამოთვალეთ ზღვრები.

ა) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 12}{x - 3}$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x - 2}$

გ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

დ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

ე) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

ვ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 4x}$

ზ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

თ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

ი) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$

11. გამოთვალეთ ზღვრები სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} [(x+1)^2 (3x-1)^3]$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} [(x+2)^3 (3x+2)]$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16+x}-4}{x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

12. გამოთვალეთ ფუნქციების ზღვრები.

$$1) f(x) = 5 - x, \quad g(x) = x^3$$

$$ა) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$ბ) \lim_{x \rightarrow 4} g(x)$$

$$გ) \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$$

$$2) f(x) = x + 7, \quad g(x) = x^2$$

$$ა) \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

$$ბ) \lim_{x \rightarrow 4} g(x)$$

$$გ) \lim_{x \rightarrow -3} g(f(x))$$

$$3) f(x) = 4 + x^2, \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$ა) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$ბ) \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

$$გ) \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$$

გამოყენებითი დავალებები

ნიმუში. აინშტაინის ფარდობითობის სპეციალური თეორემის თანახმად უძრაობაში მყოფი დამკვირვებლის მიმართ მოძრაობაში მყოფი სხეულის სიგრძე, სისწრაფის მომატების კვალობაზე მცირდება. თუ სხეულის სიგრძე უძრავ მდგომარეობაში L_0 , v სიჩქარიან მოძრაობაში კი უძრაობაში მყოფი ობიექტის მიმართ L იქნება, მაშინ L_0 და L შორის დამოკიდებულება იქნება:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ხელოვნური თანამგზავრის სიჩქარის სინათლის სიჩქარესთან მიახლოებისას, რა შეიძლება ითქვას თანამგზავრის სიგრძის შესახებ?

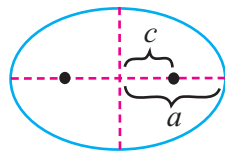
ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $\lim_{v \rightarrow c} L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ უნდა გამოვთვალოთ:

$$\lim_{v \rightarrow c} L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{0} = 0.$$

მაშასადამე, სიჩქარე რაც უფრო სინათლის სიჩქარეს მიუახლოვდება, უძრაობაში მყოფ ობიექტთან მიმართებაში თანამგზავრის სიგრძე მცირდება, ნულს უახლოვდება.



- 13.** სიბრტყის ფოკუსად წოდებული ორი წერტილიდან მანძილების მუდმივი ჯამის მქონე ყველა წერტილთა სიმრავლეს ელიფსი ეწოდება. დიდი დიამეტრი $2a$ -ს მქონე ელიფსის ფართობი $\pi a\sqrt{a^2 - c^2}$ ფორმულით გამოითვლება. c ელიფსის ფოკუსის წერტილიდან ცენტრამდე მანძილია. გამოთვალეთ ფართობის ზღვარი, როცა $c \rightarrow 0$. განსაზღვრეთ ამ ზღვრის აზრი.



- 14.** ტბის წყლის დაბინძურებისაგან $p\%$ -ით გასუფთავებისათვის საჭირო თანხის (ათას მანათობით) $C = \frac{25000p}{100 - p}$, ($0 \leq p < 100$), ფორმულით გამოთვლა შეიძლება.

ა) გამოთვალეთ ტბის წყლის 50%-ით გასუფთავებისათვის საჭირო თანხა.

ბ) 100 მილიონ მანათად ტბის წყლის დაბინძურებისაგან რამდენი პროცენტით გასუფთავება შესაძლებელი?

გ) გამოთვალეთ $\lim_{p \rightarrow 100^-} C$ და განმარტეთ აზრი.

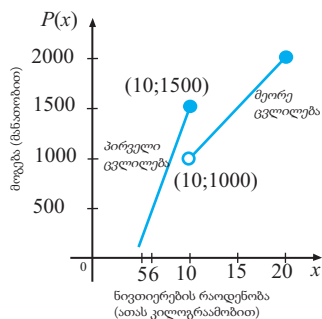
- 15.** გრაფიკი უჩვენებს ქიმიური ნივთიერების (ათას კილოგრამით) გაყიდვიდან მიღებულ შემოსავალს. გრაფიკის გამოყენებით გამოთვალეთ მოთხოვნილი ზღვრები (თუ არსებობს).

ა) $\lim_{x \rightarrow 6} P(x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 10^-} P(x)$

გ) $\lim_{x \rightarrow 10^+} P(x)$

დ) $\lim_{x \rightarrow 10} P(x)$



- 16.** ფოსტა სასწრაფო გზავნილებისათვის არაუმეტეს 0,3 კგ მასის წერილებს იღებს. თუ წერილის მასა 0,1 კგ-მდეა 20 მანათს, 0,1 კგ-ის ზევით კი ყოველი 25 გრამისათვის დამატებით 2 მანათს იღებს. x კგ მასის წერილის გაგზავნის თანხა აღნიშნეთ $M(x)$ -ით და იპოვეთ შემდეგი სიდიდეები:

ა) $\lim_{x \rightarrow 0,1^-} M(x)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 0,1^+} M(x)$

გ) $\lim_{x \rightarrow 0,3^-} M(x)$

დ) $M(0,3)$

ე) $\lim_{x \rightarrow 0,25^-} M(x)$

ვ) $\lim_{x \rightarrow 0,25^+} M(x)$

ზ) $\lim_{x \rightarrow 0,25} M(x)$

თ) $M(0,25)$

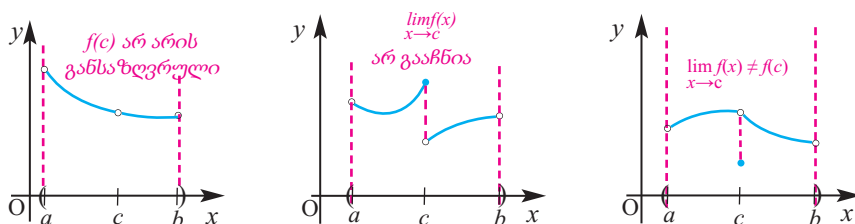
- 17.** იპოვეთ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, თუ x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის

კმაყოფილდება $8 - x^2 \leq f(x) \leq 8 + x^2$ პირობა.

ფუნქციის უწყვეტობა

ფუნქციის უწყვეტობა ხშირ შემთხვევაში მარტივად ქვემოთ მოცემული სახით განიმარტება. თუ რაიმე ფუნქციის გრაფიკის კალმის ფურცლიდან აუღებლად გავლება შესაძლებელია, ეს ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციაა. წინააღმდეგ შემთხვევაში გრაფიკს წვეტის (ნახტომის) წერტილები გააჩნია და ეს ფუნქცია წვეტადია. წვეტადი ფუნქციის გრაფიკის ერთ ჯერზე კალმის ფურცლიდან აუღებლად გავლება შეუძლებელია.

წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა. ფუნქციის წერტილში უწყვეტობისათვის გრაფიკი ამ წერტილში არ უნდა გაწყდეს, გრაფიკზე ნახტომი არ უნდა იყოს. ფუნქციებს, რომელთა გრაფიკი ქვემოთ არის მოცემული $x = c$ წერტილში ან წვეტა ან კიდეც ნახტომი აქვთ. მაშასადამე, ეს ფუნქციები $x = c$ წერტილში წვეტადები არიან. განვიხილოთ ეს შემთხვევები.



როგორც გრაფიკებიდან ჩანს, როცა ფუნქცია $x = c$ წერტილში წვეტადია:

1. ფუნქცია $x = c$ წერტილში არ არის განსაზღვრული, თუმცა მის განსაზღვრულ მიდამოში განსაზღვრულია.
2. $f(x)$ ფუნქციას $x = c$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.
3. $f(x)$ ფუნქციას $x = c$ წერტილში ზღვარი გააჩნია, თუმცა $f(c)$ -ს ტოლი არ არის.

ფუნქციის შეწყვეტის c წერტილს **წყვეტის წერტილი** ეწოდება.

თუ ზემოთ მოცემული პირობებიდან არც ერთს არ აკმაყოფილებს, მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ ფუნქცია $x = c$ წერტილში უწყვეტია.

წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა. f ფუნქციის c წერტილში უწყვეტობისათვის ქვემოთ მოცემული სამი პირობა უნდა იქნას დაკმაყოფილებული:

1. ფუნქცია $x = c$ წერტილში უნდა იყოს განსაზღვრული;
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ზღვარი უნდა ჰქონდეს;
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ტოლობას უნდა აკმაყოფილებდეს.

ნიმუში. გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების უწყვეტობა.

$$a) g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad b) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

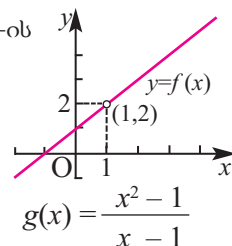
ფუნქციის უწყვეტობა

ამოხსნა: ა) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს, რომ x -ის

მნიშვნელობების 1-თან მიახლოებისას ფუნქციას ზღვარი გაა-

ჩნია და 2-ის ტოლია: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

თუმცა $x = 1$ მნიშვნელობისათვის ეს ფუნქცია არ არის განსაზღვრული. ფუნქცია $x = 1$ წერტილში წყვეტადია.



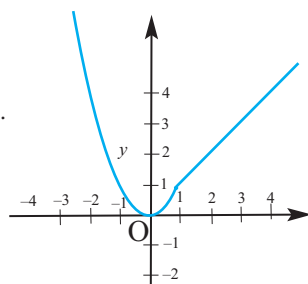
ავლნიშნოთ, რომ ფუნქცია $x = 1$ წერტილის გარდა მთელ ნამდვილ ღერძზე განსაზღვრულია და უწყვეტია.

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, x -ის მნიშვნელობების 1-თან მიახლოებისას ფუნქციას ზღვარი გააჩნია და იგი 1-ის ტოლია. თანაც, როცა $x = 1$, ფუნქციის მნიშვნელობაც 1-ის ტოლია.

ფუნქციის ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

ფუნქციის მნიშვნელობა: $f(1) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$

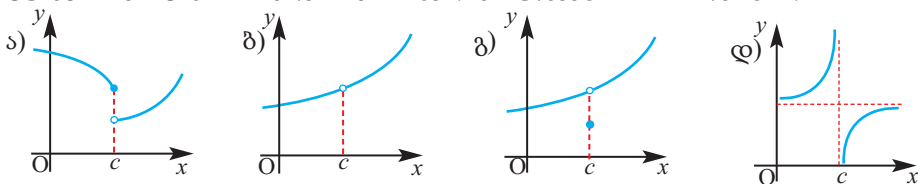


როცა $x \rightarrow 1$ ფუნქციის ზღვარი, ფუნქციის $x = 1$ წერტილში მნიშვნელობის ტოლია.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ მაშასადამე, ეს ფუნქცია $x = 1$ წერტილში უწყვეტია.

სასწავლო დაფალებები

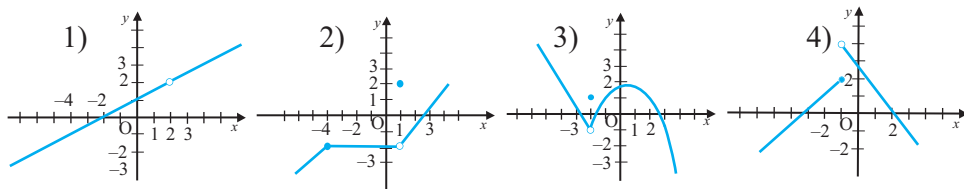
1. ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით გამოიკვლიეთ უწყვეტობა $x = c$ წერტილში.



2.

გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ ფუნქციის ყველა $x = a$ კვეთის წერტილები და იპოვეთ ქვემოთ მოცემულები (თუ არსებობს):

ა) $f(a)$; ბ) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$; გ) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$; დ) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$



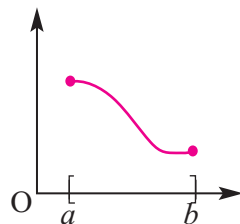
3. განსაზღვრეთ ფუნქციის წვეტის წერტილები (თუ არსებობს).

ა) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ ბ) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ გ) $f(x) = x^2 - 9x + 18$ დ) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$

ფუნქციის უწყვეტობა

ფუნქციის ინტერვალში უწყვეტობა

განსაზღვრება. $(a; b)$ ინტერვალის თითოეულ წერტილში უწყვეტ ფუნქციას ამ ინტერვალში უწყვეტი ფუნქცია ეწოდება.



ფუნქციის მონაკვეთზე უწყვეტობა

განსაზღვრება. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a; b]$

მონაკვეთზე, უწყვეტია $(a; b)$ ინტერვალში და $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$,

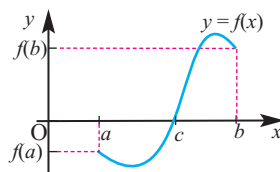
$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, მაშინ $f(x)$ -ს $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია ეწოდება.

ნებისმიერი მრავალწევრა ფუნქცია მთელ რიცხვით ღერძზე უწყვეტია. რაციონალური ფუნქცია მნიშვნელის 0-საგან განსხვავებულ ყველა წერტილში უწყვეტია. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ ფუნქციები მთელ ნამდვილ ღერძზე, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \log_a x$ ფუნქციები განსაზღვრის არეებზე უწყვეტები არიან.

მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქციების შესახებ მართებულია ქვემოთ მოცემული თეორემები.

გაიერშტრასის თეორემა. მონაკვეთზე უწყვეტ ფუნქციას ამ მონაკვეთზე აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

კოშის თეორემა. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტია და მისი წვეროს წერტილებში საპირისპირო ნიშნიან მნიშვნელობებს იღებს. მაშინ $[a; b]$ მონაკვეთის შიგნით ერთ წერტილში მაინც იქცევა ნულად.



დასკვნა: მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია, უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის არსებულ ყველა მნიშვნელობას იღებს.

ამ თეორემის გამოყენებით შეიძლება ქვემოთ მოცემულ ტიპის ამოცანების ამოხსნა.

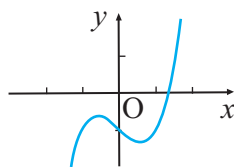
ნიმუში 1. არსებობს თუ არა ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომლის კუბი ამ რიცხვზე ერთი ერთეულით მეტი იქნება?

ამოხსნა: საძიებელმა რიცხვმა $x = x^3 - 1$, ანუ $x^3 - x - 1 = 0$

განტოლება უნდა დააკმაყოფილოს. ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიკვლიოთ $f(x) = x^3 - x - 1$ ფუნქცია. როგორც ფუნქციის გრაფიკულატორით აგებული გრაფიკიდან ჩანს x -ის 1 და 2 მნიშვნელობებში ფუნქციის მნიშვნელობები სხვადასხვა ნიშნიანებია. მართლაც, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$. მაშინ

კოშის თეორემის თანახმად ისეთი $c \in (1; 2)$ რიცხვი არსებობს, რომ $f(c) = 0$. ეს

c რიცხვი $x^3 - x - 1 = 0$ განტოლების ფესვია და საძიებელი რიცხვია.



ფუნქციის $(a; b)$ ინტერვალში უწყვეტობა, მის $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტობას არ ნიშნავს.

ფუნქციის უწყვეტობა

ნიმუში 2. $f(x) = \frac{|x-6|}{x-6}$ გამოიკვლიეთ ფუნქციის უწყვეტობა.

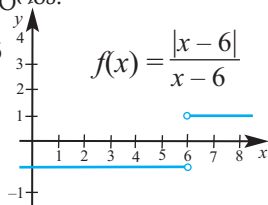
ამოხსნა: როგორც გრაფიკიდან ჩანს, x -ის მარჯვნიდან 6-თან მიახლოებისას ფუნქციის ზღვარი 1, მარცხნიდან მიახლოებისას კი -1-ია.

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \frac{|x-6|}{x-6} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \frac{|x-6|}{x-6} = -1$$

ანუ, $x = 6$ წერტილში ფუნქციას ზღვარი არა აქვს.

მოცემული ფუნქცია $x = 6$ წერტილში წყვეტადია, $(-\infty; 6)$ და $(6; +\infty)$

ინტერვალებიდან თითოეულში კი უწყვეტია.



ნიმუში 3. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილები.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$$

ამოხსნა:

$y = x+2$ წრფივი ფუნქცია, $y = 2$ მუდმივი ფუნქცია, $y = x^2+2$ მრავალწევრა ფუნქცია x -ის თითოეული მნიშვნელობისათვის უწყვეტია. მაშასადამე, უწყვეტობა მხოლოდ $x = 0$ და $x = 1$ „გარდამავალ“ წერტილებში შეიძლება დაირღვეს.

ჯერ გამოვიკვლიოთ ფუნქციის უწყვეტობა $x = 0$ წერტილში.

1. ფუნქციის მნიშვნელობა. $x = 0$ მნიშვნელობისათვის ფუნქცია განსაზღვრულია და $f(0) = 0+2 = 2$

2. ზღვრის არსებობა. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ -ის არსებობის განსაზღვრისათვის გამოვიკვლიოთ ფუნქციის მარჯვენა ($x \rightarrow 0^+$) და მარცხენა ($x \rightarrow 0^-$) ზღვრები. მარცხნიდან 0-თან მიახლოებისას x -ის მნიშვნელობები 0-ზე ნაკლებია და ამ შემთხვევაში $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2$. x -ის მნიშვნელობა 0-თან მარჯვნიდან მიახლოებისას მეტია 0-ზე და ამ შემთხვევაში

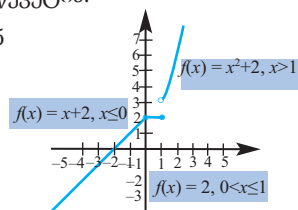
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2. \text{ მაშასადამე, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

3. ფუნქციისა და ზღვრის მნიშვნელობა მოცემულ წერტილში.

რადგან $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, ამიტომ $x = 0$ წერტილში ფუნქცია უწყვეტია.

! მოცემული ფუნქციის $x = 1$ წერტილში უწყვეტობა თქვენ

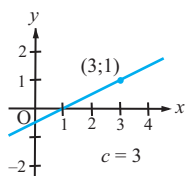
გამოიკვლიეთ, შედეგი გრაფიკით შეამოწმეთ.



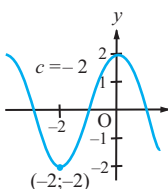
სასწავლო დაფალებები

4. თითოეული გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ ზღვრები და გამოიკვლიეთ ფუნქციების უწყვეტობა.

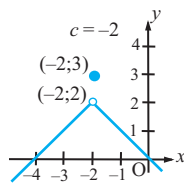
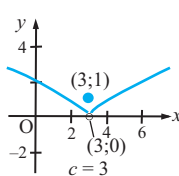
ა) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$



ბ) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$



გ) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$



ფუნქციის უწყვეტობა

5. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციების წვეტის წერტილები. იპოვეთ ამ წერტილებში ზღვარი (თუ არსებობს).

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5} \quad 3) p(x) = \frac{|x + 2|}{x + 2} \quad 4) f(x) = \frac{5 + x}{x - 2}$$

6. გაამარტივეთ ფუნქციის მოცემული გამოსახულება. დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები აღნიშნულ წერტილში უწყვეტობის შესახებ.

$$ა) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, x = -3$$

$$ბ) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, x = 1$$

$$გ) f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}, x = 4$$

$$დ) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 11x + 30}{x^2 - 4}, x = 2$$

7. განსაზღვრეთ ფუნქციებს მოცემულ შუალედებში აქვთ თუ არა წვეტა.

$$1) f(x) = \frac{x}{x^3 + 8}$$

$$2) f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$ა) (-2; 2]$$

$$ბ) [-4; 3]$$

$$ა) (0; 1] \quad ბ) [-1; 1]$$

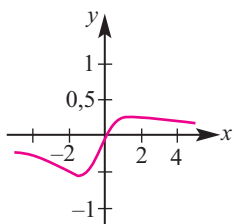
8. **ღია ტიპის შეკითხვა.** მოცემული მოთხოვნების შესაბამისად დახაზეთ რომელიმე ფუნქციის გრაფიკი. დაწერეთ მოცემულ წერტილში უწყვეტობის შესახებ.

$$ა) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \text{ და } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

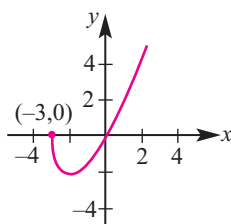
$$ბ) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \text{ და } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$$

9. განსაზღვრეთ გრაფიკებმოცემული ფუნქციები, რომელ შუალედში არიან უწყვეტები.

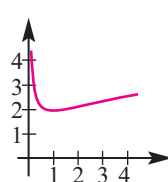
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 2}$$



$$f(x) = x\sqrt{x+3}$$



$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$



ფუნქციის უწყვეტობა

10. ა) ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები.
 ბ) უჩვენეთ ფუნქციის წვეტის წერტილები.
 გ) წვეტის წერტილებში იპოვეთ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები.

$$1) f(x) = \begin{cases} 1 & x < -2 \\ x+3 & -2 \leq x \leq 5 \\ 7 & x > 5 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 4 \\ x-2 & x > 4 \end{cases}$$

11. 1) ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობების შესახებ თეორემის გამოყენებით უჩვენეთ, რომ ფუნქცია მოცემული შუალედის განსაზღვრულ წერტილებში იღებს მოცემულ მნიშვნელობას.

ა) $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0; 5]$, $f(c) = 11$

ბ) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0; 3]$, $f(c) = 0$

- 2) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ფუნქციის: ა) $[-2; -1]$; ბ) $[-1; 1]$; გ) $[1; 2]$ მონაკვეთის წვერის წერტილებში მნიშვნელობების ნიშნების განსაზღვრით გამოიკვლიეთ $x^3 - 3x + 1 = 0$ განტოლებას მოცემულ მონაკვეთზე აქვს თუ არა ფესვი.

12. ავტომობილის ქირით გამცემა კომპანიამ 12 დღიანი ქირის შესახებ განსაზღვრა ქვემოთ მოცემული:

1 დღიდან 5 დღემდე ყოველდღიურად 28 მანათ ქირას იღებს, მე-6 და მე-7 დღეს შეუძლიათ უფასოდ გამოიყენონ. შემდგომ დღეებში კვლავ 28 მანეთი იქნება ქირა. $F(t)$ ფუნქციაა, t ($0 < t \leq 12$) დღის განმავლობაში გადახდილი თანხაა.

- 1) გამოთვალეთ $F(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ქვემოთ მოცემულ წერტილებში.

ა) $t = 4$

ბ) $t = 5$

გ) $t = 6$

დ) $t = 7$

ე) $t = 8$

- 2) იპოვეთ ზღვრები: ა) $\lim_{x \rightarrow 5^+} F(t)$

ბ) $\lim_{x \rightarrow 5^-} F(t)$

- 3) t -ს რა მნიშვნელობებისათვის არის $F(t)$ ფუნქცია წყვეტადი?

13. დამკვირვებლების მიერ წარმოებული გამოკვლევების შედეგის მიხედვით ბროილერის ქათმების მასების (გრამობით) პირველი 56 დღეში ზრდის ქვემოთ მოცემული სახით ნაწილ-ნაწილ ფუნქციით გამოსახვა შეიძლება.

$$M(t) = \begin{cases} 48 + 3,64t + 0,6363t^2 + 0,00963t^3, & \text{თუ } 1 \leq t \leq 28 \\ -1004 + 65,8t, & \text{თუ } 28 < t \leq 56 \end{cases}$$

- ა) იპოვეთ 20 დღიანი ბროილერის ქათმის მასა.

- ბ) $t \rightarrow 28$ პირობით, იპოვეთ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან და მარცხნიდან.

$t = 28$ წერტილში $M(t)$ ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციაა?

- გ) რატომ ჩათვალეს მკვლევარებმა ბროილერის ქათმის მასის შეცვლის ორი ფუნქციით გამოსახვა საჭიროდ?

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლიმიტები

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლიმიტები

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$$

a რიცხვი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის განსაზღვრის არეში შედის.

მაგალითი:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0$$

პირველი ცნობილი ლიმიტი

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ფუნქციის $x = 0$ წერტილში აქვს ლიმიტი და ეს ლიმიტი 1-ის ტოლია:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

იმის გათვალისწინებით, რომ x არის ნამდვილი რიცხვი ან კუთხის რადიანული ზომა, $x \rightarrow 0^+$ პირობით შედგენილი მნიშვნელობათა ცხრილის მიხედვით

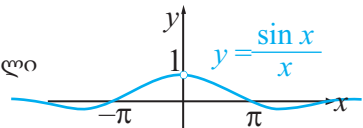
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობის 1-თან მიახლოების ვარაუდი შეიძლება.

$x \rightarrow 0^+$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99833416	0,99998333	0,99999983	0,99999999

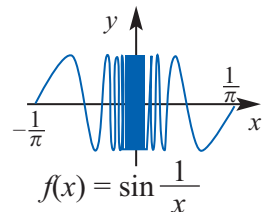
$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$, ანუ ვინაიდან მოცემული ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა $x \rightarrow 0^-$ შემთხვევაშიც $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ იქნება.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ფუნქციის გრაფიკულატორით აგებული გრაფიკიდან ჩანს, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



ავლნიშნოთ, რომ, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ ლიმიტი არა აქვს. როგორც გრაფიკულატორით აგებული გრაფიკიდან ჩანს, ფუნქცია კენტი ფუნქციაა, არაპერიოდულია. რაც უფრო x -ის მნიშვნელობა 0-ს უახლოვდება, ფუნქციის მნიშვნელობები -1 და 1 შორის იცვლება.



მაგალითი 1. იპოვეთ ლიმიტი. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

ამოხსნა $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

! უჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$. $t = kx$ -ით აღნიშნეთ და გაითვალისწინეთ, რომ $x = \frac{t}{k}$.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემცველი სპეციალური ზღვრები

ნიმუში 2. იპოვეთ ზღვარი $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3\sin x}{x}$.

ამოხსნა : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{10x}{x} - \frac{3\sin x}{x} \right]$ გამოსახულება იწერება ორი წილადის სხვაობის სახით.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{x}$$
გამოიყენება სხვაობის ზღვრის თვისება.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 10 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$
გამოითვლება ზღვარი.

$$= 10 - 3 \cdot 1 = 7$$

ნიმუში 3. უჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

ამოხსნა: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$ მრიცხველი და მნიშვნელი მრავლდება $1 + \cos x$ გამოსახულებაზე.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$
მარტივდება.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$
გაითვალისწინება, რომ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$$
გამოსახულება იწერება ორი წილადის ნამრავლის სახით
გამოიყენება ნამრავლის ზღვრის თვისება.

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = 0$$

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$ მნიშვნელობები
 გაითვალისწინება.

სასწავლო დაგეგმვები

1. იპოვეთ ზღვრები.

1. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$

2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg} x$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \cos \frac{\pi x}{3}$

4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos 3x$

5. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$

2. იპოვეთ ზღვრები.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x}$

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{2t}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

4. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \operatorname{tg} \theta}{\theta}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$

10. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 3h - \sin h}{h}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x - \sin 3x}$

3. გამოთვალეთ ზღვრები.

ა) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2}$

ბ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

გ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3}$

1. უსასრულო ზღვრები.

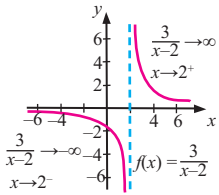
ნამუშა. სურათზე მოცემული $f(x) = \frac{3}{x-2}$ ფუნქციის

გრაფიკიდან როგორც ჩანს, რაც უფრო x -ის მნიშვნელობა 2-ს მარჯვნიდან მიუახლოვდება, y -ის მნიშვნელობა **უსასრულოდ იზრდება**. ანუ

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

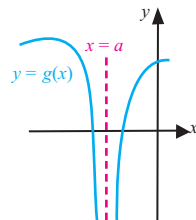
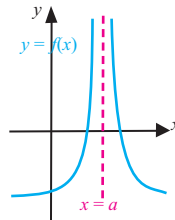
x -ის მნიშვნელობა რაც უფრო 2-ს მარცხნიდან უახლოვდება, y -ის მნიშვნელობა **უარყოფითია და მოდულით უსასრულოდ იზრდება**.

ანუ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$



ვინაიდან მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები განსხვავებულია, მოცემულ ფუნქციას $x=2$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

სურათზე გრაფიკოვანი ფუნქცია $f(x)$ უნქცია კი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის a რიცხვის განსაზღვრულ მიდამოში a რიცხვის გარდა, ყველა მნიშვნელობებში არის განსაზღვრული და როცა $x \rightarrow a$, მაშინ $f(x) \rightarrow \infty$. ეს ზღვრით $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ სახით იწერება.



ანალოგიური მიდგომით $g(x)$ ფუნქციისათვისაც $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ზღვარი ფუნქციის უსასრულო ცვლილებას გვიჩვენებს.

ფუნქციის უსასრულო ცვლილების ზღვრის დახმარებით ქვემოთ მოცემული 6 შემთხვევით გამოსახვა შეიძლება.

ვერტიკალური ასიმპტოტი.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

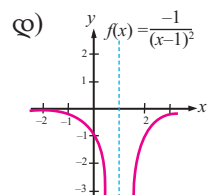
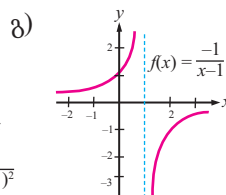
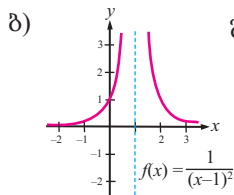
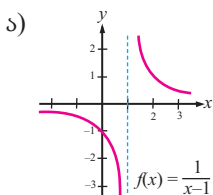
$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$$

თუ ამ დამოკიდებულებებიდან რომელიმე ერთ-ერთი სრულდება, მაშინ $x = a$ წრფე $f(x)$ ფუნქციის **ვერტიკალური ასიმპტოტია**.

ნამუშა. მოცემული გრაფიკების მიხედვით გამოიკვლიეთ მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x = 1$ წერტილში.



უსასრულო ზღვრები და ზღვარი უსასრულობაში. ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები

ამოხსნა: ა) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ და $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია. თუმცა მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები უზღვე-
ნებენ, როგორც იცვლება ფუნქცია.

ბ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ ფუნქციის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა
ზღვარია $+\infty$

გ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$ და $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია. თუმცა
მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები უზვენებენ,
როგორც იცვლება ფუნქცია.

დ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ ფუნქციის როგორც მარჯვენა, ისე
მარცხენა ზღვარია $-\infty$.

$x = 1$ წრფე ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია.

როცა f და g ფუნქციები მოცემულ ინტერვალში უწყვეტი ფუნქციებია, ამ
ინტერვალში შემავალ c წერტილში $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$ და $x \neq c$ მაშინ თუ $g(x) \neq 0$, ამ
შემთხვევაში $x = c$ წრფე

$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია.

ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში. ჰორიზონტალური ასიმპტოტი

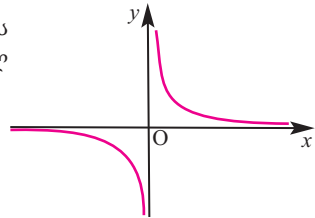
$y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე x -ის მნიშვნელობების
უსასრულო შეცვლით (ზრდა ან შემცირება) კიდეც ერთხელ
განვიხილოთ ფუნქციის ცვლილება.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს, რომ როცა
 $x \rightarrow +\infty$, მაშინ $\frac{1}{x}$ -ს უახლოვდება.

გამოვსახოთ ეს ზღვრის დახმარებით: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

ამასთან, როცა, $x \rightarrow -\infty$ მაშინაც $\frac{1}{x}$ -ს უახლოვდება: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$,

$y = 0$ წრფე $f(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.



ჰორიზონტალური ასიმპტოტი. თუ არსებობს $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ან $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
ზღვრები, მაშინ $y = b$ წრფე $f(x)$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

განსაზღვრება. თუ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, მაშინ $f(x)$ -ს როცა $x \rightarrow a$ უსასრულოდ კლებადი

ეწოდება. მაგალითად, $\frac{1}{x}$ ფუნქცია, როცა $x \rightarrow \infty$ უსასრულოდ კლებადია.

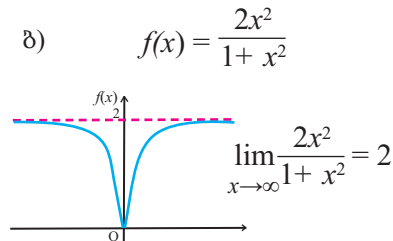
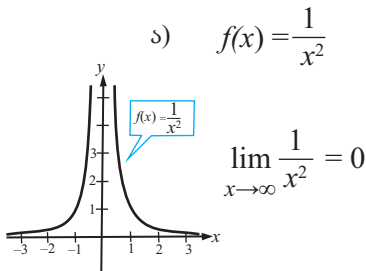
უსასრულო ზღვრები და ზღვარი უსასრულობაში. გერტიკალური და პოროზონტალური ასიმპტოტები

როცა $x \rightarrow \infty$, თუ f ფუნქცია, უსასრულოდ კლებადია, მაშინ $\frac{1}{f}$ ფუნქცია უსასრულოდ ზრდადია. მაგალითად, როცა $x \rightarrow \infty$ მაშინ $\frac{1}{x^2}$ უსასრულოდ კლებადი, x^2 ფუნქცია კი უსასრულოდ ზრდადია.

სასრული რაოდენობის უსასრულოდ კლებადი ფუნქციების ჯამიცა და ნამრავლიც უსასრულოდ კლებადია.

კერძო შემთხვევაში, როცა $n > 0$ მაშინ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

ნიმუში. გრაფიკის მიხედვით $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ -ის პოვნა.



ზღვრის თვისებები ფუნქციის უსასრულობაში ზღვრისათვის მართებულია.

ნიმუში. იპოვეთ ზღვარი $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{3x^2-1}$.

ამოხსნა: წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გაცეოთ x^2 -ზე და გამოვიყენოთ ზღვართა თვისებები.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{3x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 \cdot 0 - 5 \cdot 0}{3 - 1 \cdot 0} = 0$$

როცა $x \rightarrow \pm \infty$ მაშინ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ფუნქცია მრავალწევრის უმაღლესხარისხიანი წევრის ხასიათს ატარებს. ანუ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \text{ და } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ რაციონალური ფუნქცია არის ორი მრავალწევრის შეფარდება, მაშინ რაციონალური ფუნქციის ზღვრისათვის მივიღებთ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{ax^n + \text{უფრო დაბალი ხარ. წევრები}}{bx^m + \text{უფრო დაბალი ხარ. წევრები}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \frac{a}{b} & n = m \\ 0 & n < m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

სადაც $a \neq 0$ და $b \neq 0$

ნიმუში

ა) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+3}{3x^3+5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^3}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{3}$

თუ თეორემის მიხედვით ამოვხსნით:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+3}{3x^3+5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

ბ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

სასწავლო დაგეგმვები

1. განსაზღვრეთ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტები.

ა) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ ბ) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 8}$ გ) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 3}$

2. როცა $x \rightarrow \pm\infty$, ზღვრების გამოთვლით განსაზღვრეთ ფუნქციების
ჰორიზონტალური ასიმპტოტები (თუ არსებობს).

ა) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ბ) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ გ) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 5}{x^2 - 1}$

3. განსაზღვრეთ ფუნქციების შესაძლო ვერტიკალური და ჰორიზონტალური
ასიმპტოტები, რაციონალური ფუნქციის ზღვრის შესახებ თეორემის მიხედვით.

ა) $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$ ბ) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}$

ბ) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$ დ) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 5}{x^2 - x}$

4. იპოვეთ ზღვრები.

ა) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{7x - 1}$ ბ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 2}{4x - 5}$ გ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x}{2x^2 - 2x + 1}$

დ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 5}{3x^2 + 2}$ ე) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{4x^2 + 5}$ ვ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$

ზ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x + 2} - \frac{x - 1}{2x + 16} \right)$ თ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

5. გამოთვალეთ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \rightarrow +\infty$ და $x \rightarrow -\infty$.

ა) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x > 1 \\ \frac{4x}{2x-5}, & x \leq 1 \end{cases}$ ბ) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+3}, & x > 0 \\ \frac{2x-3}{x-1}, & x \leq 0 \end{cases}$

6. მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის დაწერეთ $\frac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდება და

უჩვენეთ, რომ ამ შეფარდების ზღვარი $x \rightarrow \pm\infty$ პირობებში არის 1-ის ტოლი.

ა) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4$

ბ) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 6x^3$

7. $f(x)$ მრავალწევრი გაყავით $g(x)$ მრავალწევრზე. იპოვეთ ნაშთი რაციონალური
ფუნქციების ზღვრის შესახებ თეორემის თანახმად. რას გამოსახავს განაყოფი?

$f(x) = 6x^2 - 3x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 3x$

$f(x) = 2x^3 - x^3 + x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

გამოყენებითი დაკავლებები.

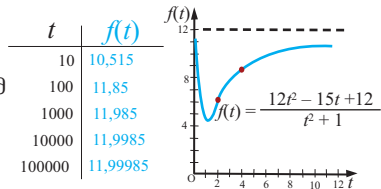
ქვემოთ მოცემულ მაგალითზე განვიხილოთ როგორ იცვლება ფუნქცია არგუმენტის მნიშვნელობის უსასრულობასთან მიახლოებისას.

ნიმუში. ტბის წყლის განსაზღვრულ ოდენობაში ჟანგბადის კონცენტრაცია ნორმალურ მდგომარეობაში 12 ერთეულია. $t = 0$ დროში განსაზღვრული ნარჩენების ტბაში ჩადინებით ჟანგბადის კონცენტრაცია შეიცვალა. ტბის წყალში ჟანგბადის კონცენტრაციის ოდენობის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილება

$$f(t) = \frac{12t^2 - 15t + 12}{t^2 + 1}$$

სახით განისაზღვრა. განსაზღვრეთ დროის გასვლის კვალობაზე როგორ იცვლებოდა წყალში კონცენტრაცია. ჟანგბადის კონცენტრაცია წყალში შეიძლება ისევ 12 ერთეული იყოს?

ამოხსნა: თუ მოცემული ფუნქციის გრაფიკს გრაფკალკულატორით ავაგებთ, დავინახავთ, რომ t -ს მნიშვნელობის უსასრულოდ ზრდასთან ერთად ფუნქციის მნიშვნელობა 12-ს უახლოვდება. თუმცა კონცენტრაციის 12-თან ტოლობა არ ფიქსირდება. ეს სიტუაცია ზღვრებით მათემატიკურად



$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 12$ სახით შეგვიძლია გამოვსახოთ.

აქ $y = 12$ წრფე მოცემული ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

- 8. საშუალო ფასი.** საავადმყოფოში ჩაბარებული ანალიზების საერთო ფასის(მანათობით) $S(n) = 150 + 30n$ სახით გამოთვლა შეიძლება. სადაც n ანალიზების რაოდენობას უჩვენებს. ერთი ანალიზის $\bar{S}(n)$ საშუალო ფასის $S(n)$ -ის n -ზე გაყოფით პოვნა შეიძლება.

იპოვეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(n)$ და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

- 9. მედიცინა.** სისხლში მიღებული წამლის პრეპარატის შეწოვის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილების

$$M(t) = \frac{0,21t}{t^2 + 2}$$

ფორმულით განსაზღვრა შეიძლება.

იპოვეთ $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)$ და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

- 10. შრომის ნაყოფიერება.** კომპანიის მენეჯერების გამოკვლევების თანახმად, მუშაკის შრომის ნაყოფიერება n დღეს მუშაობის განმავლობაში $P(n) = \frac{64n}{n+8}$ ფორმულის მიხედვით იცვლება. იპოვეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

- 11. პინგვინები.** ანტარქტიდაში პინგვინების რაოდენობის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილება ქვემოთ მოცემული ფორმულითაა

$$N(t) = \frac{400\,000}{1 - 0,143e^{-0,01t}}$$

ა) გამოთვალეთ პინგვინების რაოდენობა 10 წლის შემდეგ ($t = 10$).

ბ) ცნობილია, რომ პინგვინების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება. იპოვეთ t დროის უსასრულობასთან მიახლოებისას პინგვინების რაოდენობა მოცემული ფორმულის მიხედვით ლიმიტის გამოთვლით.



რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

დავწეროთ $a_n = \frac{2n+1}{n}$ ზოგადი წევრი მქონე მიმდევრობის პირველი რამდენიმე წევრი:

$$3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{11}{5}; \frac{13}{6}; \dots$$

როგორც ხედავთ რაც უფრო იზრდება n , მიმდევრობის წევრების მნიშვნელობა მით უფრო მცირდება და 2-ს უახლოვდება.

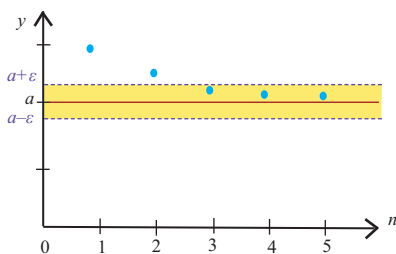
მართლაც, $|a_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| = \frac{1}{n}$ ამიტომ, რაც უფრო იზრდება n , მით უფრო $a_n - 2$ სხვაობის მოდული 0-ს საკმაოდ უახლოვდება.

მაგალითად, მე-11-დან დაწყებული ($n > 10$) ყველა წევრისათვის $|a_n - 2| < 0,1$ პირობას, 101-დან დაწყებული ($n > 100$) შემდგომი ყველა წევრისათვის $|a_n - 2| < 0,01$ პირობას აკმაყოფილებს. საერთოდ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შეიძლება ისეთი N ნომრის მოძებნა, რომ $n > N$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყველა n -ისათვის $|a_n - 2| < \varepsilon$ იყოს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ განხილული მიმდევრობის ზღვარი 2-ია.

განსაზღვრება. დავუშვათ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და a_n მიმდევრობისათვის არსებობს ისეთი N ნომერი, რომ ამ ნომრის შემდეგ მოსული ყველა n ($n > N$)-ისათვის $|a_n - a| < \varepsilon$ უტოლობას აკმაყოფილებს. მაშინ a რიცხვს a_n მიმდევრობის ზღვარი ეწოდება და ეს ასეთი სახით იწერება:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ თუ a რიცხვი a_n მიმდევრობის ზღვარია, მაშინ მოცემული ε რიცხვისათვის მიმდევრობის განსაზღვრული ნომრის შემდეგ მოსული ყველა წევრი ($a - \varepsilon; a + \varepsilon$) მიდამოში მდებარეობს და ამ მიდამოს გარეთ მიმდევრობის სასრული რაოდენობის წევრი შეიძლება მოთავსდეს, ეს იმას ნიშნავს, რომ,



როცა $n > N$, მაშინ საკოორდინატო სისტემაში $(n; a_n)$ წერტილები $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$ ზოლშია. სასრული ზღვრის მქონე მიმდევრობას **კრებადი**, სასრული ზღვრის არამქონე მიმდევრობას კი **განშლადი** მიმდევრობა ეწოდება.

თვისება. თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, იგი ერთადერთია.

რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, მაშინ a_n მიმდევრობას უსასრულოდ კლებადი ეწოდება. მაგალითად, n -ური წევრის მქონე

$\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}; \frac{1}{n^3}; \dots; \frac{A}{n^k}$ (A რაიმე რიცხვია, $k \in \mathbb{N}$) მიმდევრობა უსასრულოდ კლებადია.

თითოეული კრებადი მიმდევრობა მისი ზღვრისა და უსასრულოდ კლებადის ჯამის ტოლია და პირიქით: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

მაგალითად, რადგან $a_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ და $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ამიტომ

$a_n = \frac{2n+1}{n}$ მიმდევრობა კრებადია და ზღვარი 2-ის ტოლია: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

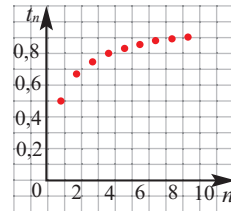
ნიმუში. იპოვეთ მიმდევრობების ზღვარი (თუ გააჩნიათ), თუ არ გააჩნიათ, განმარტეთ მიზეზი.

ა) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ბ) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots, 3^{n-2}, \dots$

ამოხსნა: ა) ვუჩვენოთ, რომ $t_n = \frac{n}{n+1}$ მიმდევრობისათვის $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$. როცა $n \rightarrow \infty$

$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ ამიტომ, განსაზღვრების თანახმად $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

იმის დანახვა, რომ მიმდევრობის ზღვარი 1-ის ტოლია n -ის საკმაოდ რაოდენობის მნიშვნელობისათვის საკოორდინატო სიბრტყეზე ($n; t_n$) წერტილების აღნიშვნითაც შეიძლება.



ბ) n -ის უსასრულოდ გაზრდისას $a_n = 3^{n-2}$ მიმდევრობის წევრები უსასრულოდ იზრდება, ანუ უსასრულობას უახლოვდება. მაშასადამე, მიმდევრობას სასრული ზღვარი არ გააჩნია. ჩვენ შესაბამისი წერტილების საკოორდინატო სისტემაში აღნიშვნითაც შეგვიძლია ამის დანახვა.

პერიოდული ათწილადები სასრული ზღვრის მქონე რიცხვითი მიმდევრობების ერთ-ერთი ნიმუშია.

$$0,3333(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots = \frac{1}{3}$$

მოცემული პერიოდული ათწილადი ზოგადი წევრი $b_n = 3 \cdot 10^{-n}$, პროგრესიის მნიშვნელი $q = \frac{1}{10}$ -ის მქონე უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამია. თუ ამ უსასრულო ჯამს განვიხილავთ როგორც მისი პირველი n წევრის $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ ჯამების მიმდევრობის ზღვარს, ეს ზღვარი.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,3(1-10^{-n})}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3} \text{ იქნება.}$$

რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

ავლნიშნოთ, რომ a_n რიცხვითი მიმდევრობა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციაა. შეიძლება იმის ჩვენება, რომ თუ $a_n = f(n)$ და $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,

$$\text{მაშინ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A. \text{ მაგალითად, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3} \text{ ამიტომ, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

როცა $x \rightarrow \infty$, ფუნქციის წერტილში ზღვრის ცნობილი თვისებები მიმდევრობის ზღვრისათვისაც ჭეშმარიტია.

დავუშვათ, რომ x_n და y_n მიმდევრობები კრებადია და $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$. მაშინ:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a - b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c \cdot a \text{ (სადაც } c \text{ რაიმე მუდმივია)}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \cdot b$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, y_n \neq 0)$$

ნიმუში. გამოთვალეთ: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$

ამოხსნა: თუ ფრჩხილებში მოცემულ გამოსახულებას შეუღლებულ ირაციონალურ გამოსახულებაზე გავამრავლებთ, გავყოფთ და გამოვიყენებთ ზღვრების შესახებ თვისებებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{2}{n})} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = 1. \end{aligned}$$

სასწავლო დავალებები

1. ივარაუდეთ, ქვემოთ მოცემული მიმდევრობების წევრები, რომელ რიცხვთან არიან კრებადი.

ა) 0,5; 0,55; 0,555; 0,5555; 0,55555; ...

ბ) 0,36; 0,3636; 0,363636; 0,36363636; ...

გ) 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; 3,141592; ...

რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

2. იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი (თუ არსებობს). თუ არ არსებობს, განმარტეთ მიზეზი.

ა) $1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1, \dots$

ბ) $5,9; 5,99; 5,999; 5,999\ 9; 5,999\ 99; 5,999\ 999; \dots$

გ) $3,1; 3,01; 3,001; 3,000\ 1; 3,000\ 01, \dots$

დ) $3; 2,9; 3; 2,99; 3; 2,999; 3; 2,999\ 9, \dots$

3. $a_n = \frac{n}{n+1}$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობის ნომერი $n = 99; 999; 9999$

წევრები გამოთვალეთ და შეადარეთ მიღებული მნიშვნელობები. დაწერეთ n -ის მნიშვნელობების ზრდის კვალობაზე $|a_n - 1|$ გამოსახულების მნიშვნელობის ცვლილების შესახებ. როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ $a_n - 1$ უსასრულოდ კლებადია? იპოვეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი (თუ არსებობს). თუ არ არსებობს, განმარტეთ მიზეზი.

ა) $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots;$ $f(n) = \frac{n-1}{n}$

ბ) $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; \dots;$ $f(n) = \frac{n^2}{n+1}$

გ) $2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots;$ $f(n) = 2^{2-n}$

დ) $4; 5\frac{1}{2}; 4\frac{2}{3}; 5\frac{1}{4}; 4\frac{4}{5}; 5\frac{1}{6}; \dots;$ $f(n) = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$

5. გამოთვალეთ ზღვრები.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{2}{n})$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{n}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{3n+2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+1}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3n^2}{n^2+1}$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n)}{n}$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5\sqrt{4^n}}$

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+2n+1}}{1-2n^3}$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{10}+2}{(n^2+1)^5}$

11) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2+1}{2n} - \frac{2n-1}{4})$

12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$

13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (2n+3)}{(n+2) \cdot (4n+1)}$

14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(2n+1) \cdot n}$

15) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n} - n)$

16) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n} - 2n)$

რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

მონოტონური და შემოსაზღვრული მიმდევრობის ზღვარი

თუ n -ის ყველა მნიშვნელობისათვის $a_{n+1} > a_n$ მაშინ a_n მიმდევრობას ზრდადი, ხოლო თუ $a_{n+1} < a_n$ მაშინ კლებადი მიმდევრობა ეწოდება. მაგალითად, $a_n = \frac{n}{n+1}$ მიმდევრობა ზრდადია. მართლაც

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n \cdot (n+2)}{(n+2) \cdot (n+1)} = \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} > 0.$$

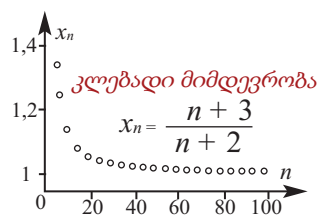
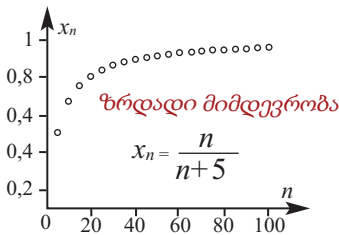
$c_n = \frac{n}{3^n}$ მიმდევრობა კი კლებადია. ამ მიმდევრობის ყველა წევრი დადებითია და

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{3} < 1$$

ამიტომ მივიღებთ: $c_{n+1} < c_n$

ზრდად და კლებად მიმდევრობებს **მონოტონური მიმდევრობა** ეწოდება.

მონოტონური მიმდევრობის გრაფიკით მოცემის ნიმუშები



თუ რაიმე m და M რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა $m \leq a_n \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$), მაშინ a_n მიმდევრობას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

გაიერშტრასის თეორემა. ნებისმიერი მონოტონურ და შემოსაზღვრულ მიმდევრობას ზღვარი გააჩნია.

მეორე ცნობილი ზღვარი

შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრია $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ მონოტონურად ზრდადობისა და შემოსაზღვრულობის გამო ზღვარი გააჩნია და e რიცხვის ტოლია.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \text{ სადაც } e = 2,718281828459045....$$

შენიშვნა: e რიცხვთან დაკავშირებით უმრავლესი ზღვრების გამოთვლისას უნდა გავითვალისწინოთ: თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

ნიმუში. გამოთვალეთ ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$.

ამოხსნა: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$

ნიმუში. გამოთვალეთ ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{2n}$.

ამოხსნა: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{3}} \right)^{\frac{6n}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{n+1}} = e^6$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ დამოკიდებულებაში n ნატურალური რიცხვია.

შეიძლება იმისი ჩვენება, რომ x -ის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის

პირობებშიც მართებულია $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ დამოკიდებულება.

ბოლო დამოკიდებულებაში $\frac{1}{x} = t$ ჩანაცვლებით $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ სახითაც შეიძლება

ჩაიწეროს. ამ ზღვრის გამოყენებით $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ დამტკიცებაც შეიძლება.

ნიმუში. $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}}$ გამოთვალეთ ზღვარი.

ამოხსნა: $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

სასწავლო დაგეგმვები

6. გამოთვალეთ ზღვრები.

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n}$

ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n}$

გ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n$

დ) $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{5}{t}}$

ე) $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3+t}{t}}$

ვ) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t+3}{t+1} \right)^{\frac{1}{t}}$

7. $a_n = \frac{n+3}{n}$ მიმდევრობისათვის გამოიკვლიეთ მონოტონური კლებადობა და შემოსაზღვრულობა, უჩვენეთ რომ ზღვარი 1-ის ტოლია.

- 8.** 1. წარმოიდგინეთ, რომ 1 მანათი 1 წლის ვადით შეტანილი გაქვთ ბანკში და წლის განმავლობაში ყოველ ჯერზე $\frac{100}{n}$ % მატებით n -ჯერ ხდება გამოთვლა. იპოვეთ:
- წლიური ;
 - ნახევარწლიური ;
 - კვარტალური ;
 - ყოველთვიური ;
 - დღიური ;
2. რა კავშირი აქვს ქვემოთ მოცემულ მიმდევრობასა და ამ გამოთვლებს?
- $$\left(1 + \frac{1}{1} \right)^1, \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2, \left(1 + \frac{1}{3} \right)^3, \left(1 + \frac{1}{4} \right)^4, \dots, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \dots$$
3. რა კავშირი აქვს e რიცხვსა და ამ მიმდევრობას?

განმაზოგადებელი დავალებები

1. გამოთვალეთ ზღვრები (თუ არსებობს).

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} 3(1 - x)(2 - x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x + 6}$$

$$4. \lim_{t \rightarrow -4} \frac{t^2}{4 - t}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$

$$9. \lim_{h \rightarrow 2} \frac{1}{4 - h^2}$$

$$10. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 4h^3}{h^2 - h^3}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}$$

$$12. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

$$15. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 1}$$

2. გამოიკვლიეთ ფუნქციების უწყვეტობა.

$$1) f(x) = \pi$$

$$2) f(x) = x^2 + 8x - 10$$

$$3) f(x) = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 4)}$$

$$4) f(x) = \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 5)}$$

$$5) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$6) f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$

3. x -ის მოდულით ძალიან დიდ მნიშვნელობებში რაციონალური ფუნქცია მრიცხველში და მნიშვნელში არსებული მრავალწევრების უმაღლესი ხარისხის გამომსახველ ფუნქციის ქცევას იძენს. ასეთ ფუნქციას მოცემული რაციონალური ფუნქციის უსასრულობაში ცვლილების მაჩვენებელი მოდელიც ეწოდება. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციის მოდელი უსასრულობაში. თუ არსებობს, იპოვეთ ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

$$1) f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

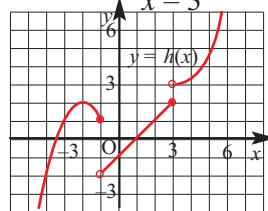
$$2) f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2x}$$

$$3) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 3}{x - 3}$$

4. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ (როცა შესაძლებელია).

$$ა) \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) \quad ბ) \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) \quad გ) \lim_{x \rightarrow -1} h(x) \quad დ) h(-1)$$

$$ე) \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) \quad ვ) \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) \quad ზ) \lim_{x \rightarrow 3} h(x) \quad თ) h(3)$$



5. მეზაერების აეროპორტიდან სასტუმრომდე გადამყვანი კომპანიის კერძო ტაქსები პირველი კილომეტრისათვის 3 მანეთსა და 60 კაპიკს, ყოველ მომდევნო კილომეტრისათვის 1 მანეთსა და 25 კაპიკს იღებენ.

აეროპორტიდან მოძაობის დამწყებმა ტაქსმა 8 კილომეტრი გაიარა.

ა) დახაზეთ მომსახურების გადასახადის მანძილზე დამოკიდებულების ამსახველი გრაფიკი.

ბ) ამ სიტუაციის შესაბამისად გამოიკვლიეთ მომსახურების გადასახადის ფუნქციის უწყვეტობა.

6. გეომეტრიულად განმარტეთ ერთ წრეწირში ჩახაზული წესიერი ოთხკუთხა, რვაკუთხა, თექვსმეტკუთხა და ა.შ. მრავალკუთხედების პერიმეტრების მიმდევრობის ზრდადობა და შემოსაზღვრულობა.

7. იპოვეთ $f(x) = \frac{x + |x|}{x}$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x = 0$ წერტილში.

ბრუნვის ფიგურები. ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი

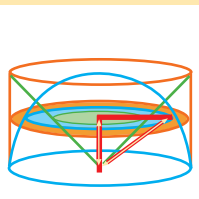
- ბრუნვის ფიგურები
- ცილინდრი
- ცილინდრის ზედაპირის ფართობი
- კონუსი
- კონუსის ზედაპირის ფართობი
- წაკვეთილი კონუსი და ზედაპირის ფართობი
- ბირთვი და მისი ნაწილები
- ბირთვის ზედაპირის ფართობი
- კომპლექსური ფიგურების ზედაპირის ფართობი
- ბრუნვითი ფიგურების სიბრტყითი კვეთები
- მსგავსი ფიგურების ზედაპირის ფართობი

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|--------------------|--------------------|
| ◆ ბრუნვის ღერძი | ◆ ბირთვი |
| ◆ ბრუნვის ფიგურები | ◆ დიდი წრე |
| ◆ ცილინდრი | ◆ ბირთვის სეგმენტი |
| ◆ კონუსი | ◆ ბირთვის სარტყელი |
| ◆ მსახველი | ◆ ბირთვის ფენა |

ეს საინტერესოა!

დიდი ბერძენი მეცნიერი არქიმედე ბირთვისა და მისი მომცავი ცილინდრის როგორც ზედაპირების, ისე მოცულობების თანაფარდობის 2:3 არსებობის აღმოჩენით ძალიან იყო აღფრთოვანებული. მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, დიდი საინჟინრო აღმოჩენებისა და გამოგონებების ავტორი არქიმედე ყველა სამუშაოს შორის ყველაზე ღირებულად სახელდობრ ამ ფაქტს მიიჩნევდა. მას, სიკვდილის შემდეგ



საფლავზე ამ დამტკიცების მაჩვენებელი გრავიურის გამოსახვა სურდა. ისტორიიდან ცნობილია, რომ სიცილიაში მდებარე არქიმედეს მშობლიური ქალაქი სერაკუზი რომაელების ალყის წინააღმდეგ არქიმედეს გამოგონილი იარაღით იბრძოდა. რომაელმა სარდალმა ქალაქში შესვლისას გასცა ბრძანება, რომ არქიმედე არ მოეკლათ. თუმცა სახით არქიმედეს არმცნობმა ჯარისკაცმა იგი სიცოცხლეს გამოასალმა. დიდმა ფილოსოფოსმა, მწერალმა ციცერონმა არქიმედეს სიკვდილიდან დიდი ხნის შემდეგ (ისტორიული ინფორმაციების თანახმად



137 წლის შემდეგ) იპოვა მისი საფლავი. ციცერონის მიერ შესრულებული ეს სამუშაო ბევრი მხატვრის ნაწარმოების მუზად იქცა.



ბრუნვის ფიგურები

მეთუნეობა თიხისაგან დამზადებული ტალახის გუნდების ღერძის გარშემო ბრუნვით სპეციალური ფორმის მიცემითა და შეერთებით კერამიკული ჭურჭლის დამზადების ხელობაა. ეს ხელობა დღესაც ცოცხლობს. აზერბაიჯანის სხვადასხვა რაიონებში დოქის, ქვაბისა და სხვა საყოფაცხოვრებო ჭურჭლის დამამზადებელი ხელოსნები საქმიანობენ. გამოიკვლიეთ თიხის ტალახის სხვადასხვა ფორმაში მომყვანი დაზგის მუშაობის პრინციპი.



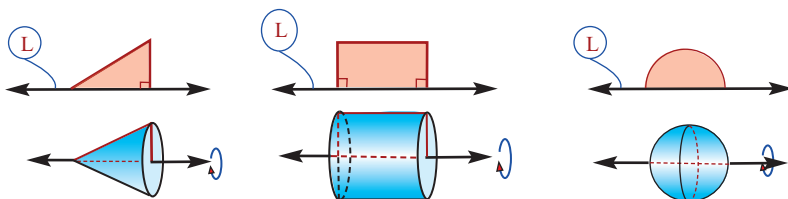
<https://www.youtube.com/watch?v=4Qiu4iFeXI0>

სიბრტყითი ფიგურის (მრუდის მოცემულ შუალედში მომცავი სიბრტყითი ნაწილის) განსაზღვრული ღერძის გარშემო ერთი სრული პერიოდით ბრუნვით სხვადასხვა სივრცითი ფიგურა მიიღება. ამ ღერძს ბრუნვის ღერძი ეწოდება.

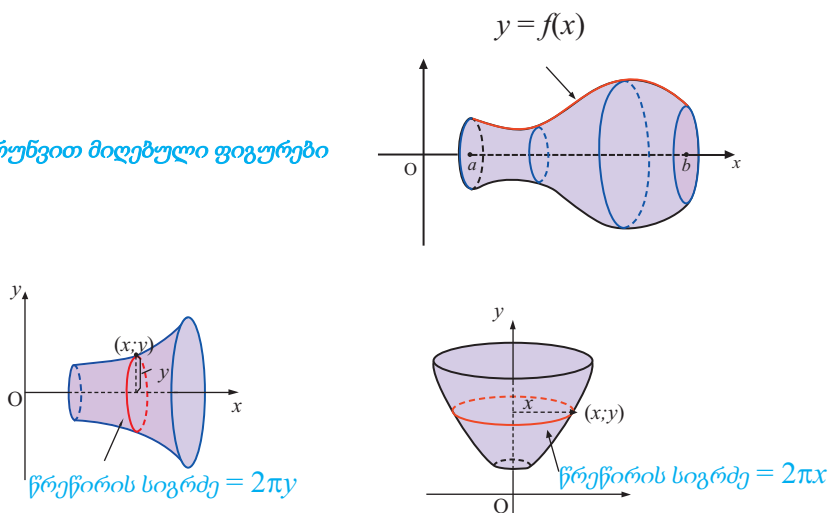
ცილინდრი, კონუსი, სფერო აშნაირი ბრუნვით მიღებული მარტივი სივრცითი ფიგურებია.

მაგალითად, მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის გარშემო ბრუნვით კონუსი მიიღება, მართკუთხედის ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით-ცილინდრი, ნახევარწრის დიამეტრის გარშემო ბრუნვით კი ბირთვი წარმოიქმნება.

L ბრუნვის ღერძი



ბრუნვით მიღებული ფიგურები

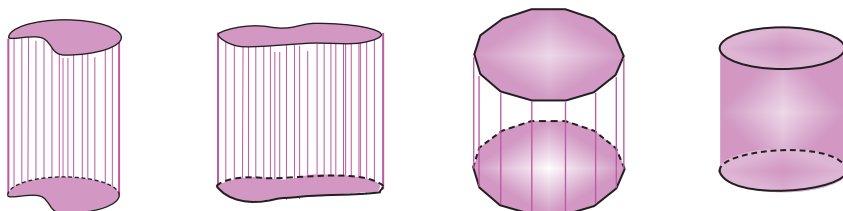


ცილინდრი

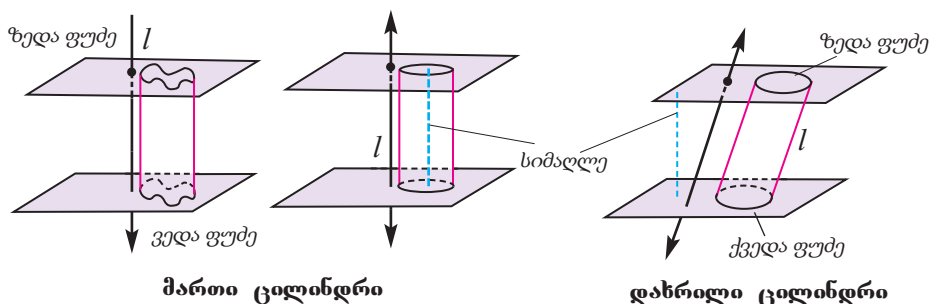
ცილინდრი საზოგადოებრივი შენობების, სასტუმროების, საავადმყოფოების მბრუნავი მინის კარები მრუწვის ფიგურების მიღების წარმოდგენისათვის თვალსაჩინო ნიმუშებია. მართკუთხა კარის უძრავად დამაგრებული მეტალის საყრდენის გარშემო ბრუნვით ცილინდრი შემოიხაზება.



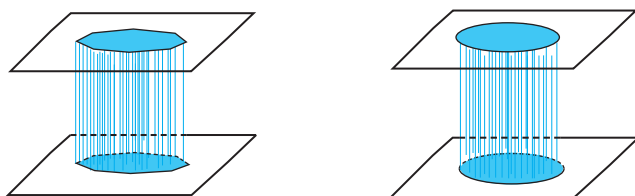
ორი პარალელური და კონგრუენტული სიბრტყითი ფიგურისა და მათი შესაბამისი წერტილების შემაერთებელი ყველა მონაკვეთი შექმნილ სივრცით ფიგურას ცილინდრი ეწოდება. ამ სიბრტყითი ფიგურებს ცილინდრის ფუძეები, მათი შესაბამისი წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთებს კი ცილინდრის მსახველი ეწოდება. ცილინდრის, რომლის მსახველი ფუძის სიბრტყისადმი მართობულია მართი ცილინდრი ეწოდება, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - დახრილი ცილინდრი ეწოდება. მანძილს ფუძის სიბრტყეებს შორის ცილინდრის **სიმაღლე** ეწოდება.



ქვემოთ მოცემულ სურათზე მართი და დახრილი ცილინდრული ფიგურების მიღებაა ასახული.



ქვემოთ მოცემული სურათების შედარებით შეიძლება ასეთი დასკვნის გაკეთება, რომ შესაძლებელია პრიზმა განვიხილოთ როგორც ცილინდრის კერძო შემთხვევა.



ცილინდრი

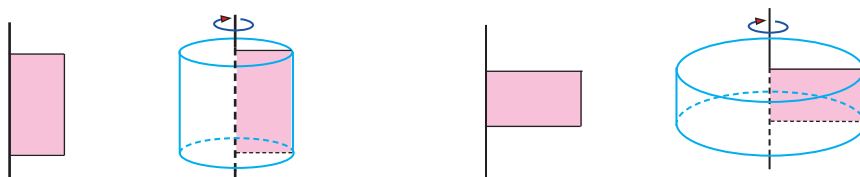
მართ ცილინდრს, რომლის ფუძეც წრეა **მართი წრიული ცილინდრი** ეწოდება.

ჩვენ ამის შემდეგ ცილინდრზე საუბრისას მართ წრიულ ცილინდრს ვიგულისხმებთ. სხვა შემთხვევაში ცილინდრის ნიშნები იქნება მოცემული.

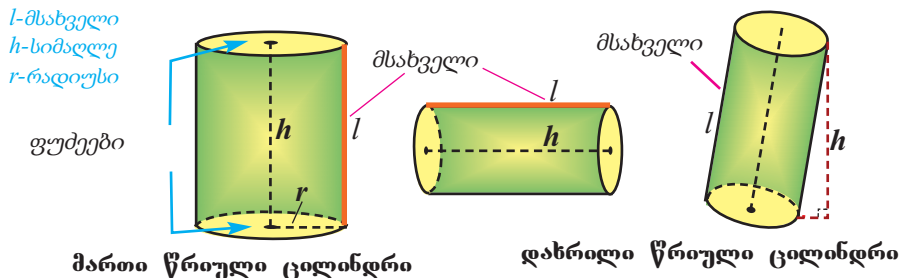
მართი წრიული ცილინდრი ასევე შეიძლება განვიხილოთ როგორც მართკუთხედის ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სივრცითი ფიგურა. მართი წრიული ცილინდრის მსახველი სიმაღლის ტოლია.

ფუძეში არსებული წრის რადიუსს **ცილინდრის რადიუსი** ეწოდება.

მართკუთხედის სხვადასხვა გვერდების გარშემო ბრუნვით ამ გვერდებს ტოლი სიმაღლის მქონე ცილინდრების მიღება შეიძლება.



მართი წრიული ცილინდრის ფუძეების ცენტრებზე გამავალ წრფეს **ცილინდრის ღერძი** ღერძი ეწოდება.



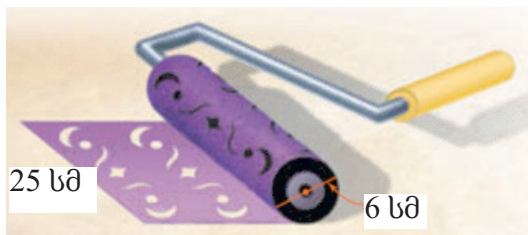
სასწავლო დავალებები

1. დახრილი ცილინდრის მსახველი 12 სმ-ია და იგი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე.
2. იპოვეთ 3 სმ და 4 სმ გვერდებიანი მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული ცილინდრის სიმაღლე და ფუძის დიამეტრი. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).
3. მართკუთხა ქაღალდის ფურცლის გვერდების ზომებია 20 სმ და 30 სმ. იპოვეთ მისი დამრგვალებით მიღებული ცილინდრის ფუძის რადიუსი. (განიხილეთ ორი შემთხვევა). პასუხი შეასწავლეთ დაამრგვალეთ.

ცილინდრის ზედაპირის ფართობი

ცილინდრის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

ქალაქში დახაზეთ შლილის სახით სხვადასხვა ზომის ცილინდრები, ამოჭერთ ისინი და დაწებებით დაამზადეთ.

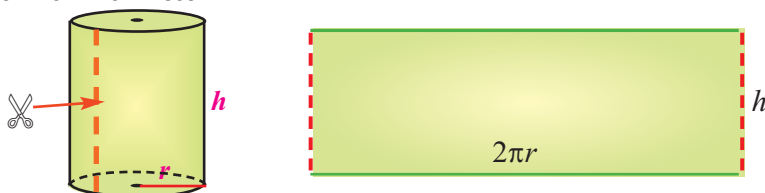


მუსტაფა ცილინდრის ფორმის გორგოლაჭიანი ფუნჯით კედელს ღებავს. მას კი საჭირო დროს გამოთვლისათვის სჭირდება იმის ცოდნა, თუ ერთი სრული ბრუნის განმავლობაში რა ფართობს შეღებავს. თქვენ რას ურჩევთ მას?

ვინაიდან ფუნჯი ცილინდრული ფორმისაა ერთი სრული ბრუნის დროს ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ტოლი მართკუთხა ფორმის სიბრტყის ნაწილი შეიღებება.

ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობის მსგავსი ფორმულით გაიანგარიშება. ცილინდრის სრული ზედაპირი მისი გვერდითი ზედაპირისა და ორი კონგრუენტული წრისაგან შედგება.

h სიმაღლისა და r რადიუსის მქონე ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $2\pi r$ და h ზომებიანი მართკუთხედის r რადიუსიანი წრეწირის გარშემო შემოხვევა.



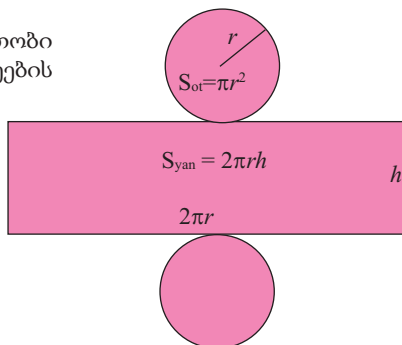
ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძის წრის სიგრძისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

$$S_{გვ} = 2\pi rh$$

ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი გვერდითი ზედაპირის ფართობისა და ფუძეების ფართობების ჯამის ტოლია:

$$S_{სრ} = S_{გვ} + 2S_{ფ}$$

$$S_{სრ} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$



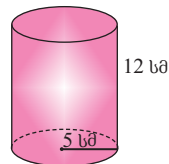
ცილინდრის ზედაპირის ფართობი

ნიმუში. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 12 სმ-ია, ხოლო რადიუსი - 5 სმ.

ამოხსნა: $S_{\text{გვ}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \approx 376,8$ (სმ)

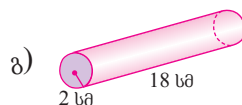
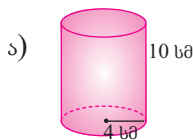
$$S_{\text{ფდ}} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78,5$$
 (სმ²)

$$S_{\text{სრ}} = S_{\text{გვ}} + 2S_{\text{ფდ}} = 120\pi + 2 \cdot 25\pi = 170\pi \approx 533,8$$
 (სმ²)

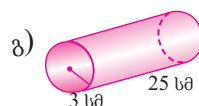


სასწავლო დაგეგმვები

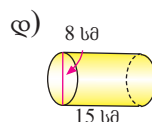
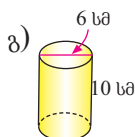
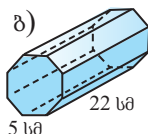
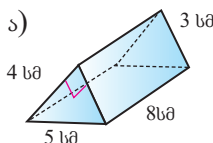
1. მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.



2. ღია ცილინდრის ფორმის ჭურჭელი უნდა შეიღებოს როგორც გარედან ისე შიგნიდან. იპოვეთ შესაღები ფართობი.



3. გამოთვალეთ პრიზმებისა და ცილინდრების სრული ზედაპირის ფართობი:



მართი სამკუთხა პრიზმა

წესიერი რვაკუთხა პრიზმა

4. თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსი და სიმაღლე ორჯერ გაიზრდება:

- ა) როგორ შეიცვლება ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი?
 ბ) როგორ შეიცვლება ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი?

5. ცილინდრის სიმაღლე ფუძის რადიუსზე 10 სმ-ით მეტია, სრული ზედაპირი კი 144π სმ²-ია. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე და რადიუსი.

6. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი დიაგონალი 10 სმ-ისა და ერთ-ერთი გვერდის 6 სმ-ის მქონე მართკუთხეა. იპოვეთ ამ ცილინდრის სრული ზედაპირი. გამოიკვლიეთ შესაძლო შემთხვევები.

7. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობის შეფარდება სრულ ზედაპირთან, თუ მისი სიმაღლე ფუძის დიამეტრის ტოლია.

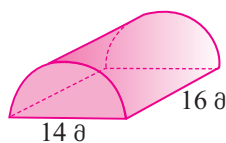
8. ცილინდრის ფორმის ყუთის რადიუსი 6 სმ-ია, სიმაღლე 14 სმ. მხოლოდ ყუთის ზედა ფუძის დამზადებისას არ იქნა მუყაო გამოყენებული. სულ მცირე, რა ოდენობის მუყაო იქნა გამოყენებული?

ცილინდრის ზედაპირის ფართობი

გამოყენებითი დავალებები

ნიმუში. იპოვეთ ნახევარწრიული ფუძის მქონე და სურათზე მოცემულზომებიანი მართი ცილინდრული სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა: $S_{\text{გვ.გვ}} = \pi r h + 2rh = \pi \cdot 7 \cdot 16 + 14 \cdot 16 = 112\pi + 224 \approx 575,86 \text{ (მ}^2\text{)}$

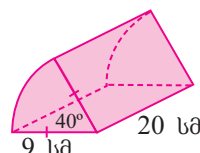


ნიმუში. სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წრიული სექტორის 40° ფუძიანი მართი ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა: ვიცით, რომ $S_{\text{სრ}} = 2 \cdot S_{\text{ფ}} + S_{\text{გვ}}$

სექტორის ფართობის ფორმულის თანახმად:

$$S_{\text{ფ}} = \frac{\theta}{360} \pi r^2 = \frac{40}{360} \cdot \pi \cdot 9^2 = 9\pi \text{ (სმ}^2\text{)}$$

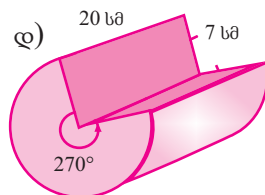
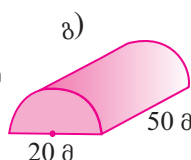
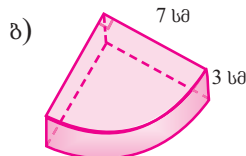
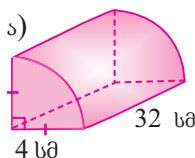


ფიგურის გვერდითი ზედაპირის ფართობი შედგება 9 სმ რადიუსისა და 20 სმ სიმაღლის მქონე ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის $\frac{1}{9}$ ნაწილისა და $9\text{ სმ} \times 20\text{ სმ}$ ზომების მქონე ორი კონგრუენტული მართკუთხედის ჯამისაგან:

$$S_{\text{გვ}} = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 9 \cdot 20 + 2 \cdot 9 \cdot 20 = 40\pi + 360 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

ამრიგად, $S_{\text{სრ}} = 2 \cdot S_{\text{ფ}} + S_{\text{გვ}} = 2 \cdot 9\pi + 40\pi + 360 = 58\pi + 360 \approx 542,21 \text{ (სმ}^2\text{)}$

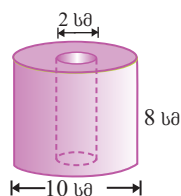
- 9.** სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ფიგურების გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.



- 10.** მანქანებისა და მექანიზმების ზოგიერთი დეტალები მილისებრ გახვრეტილი ცილინდრის ფორმისაა. ასეთი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი შიგა და გარე გვერდითი ზედაპირის ჯამის სახით, ხოლო ფუძეების ფართობი კი რადიუსების სხვაობის მხედველობაში მიღებით გამოითვლება. ამ მოსაზრებების მხედველობაში მიღებით:

ა) გამოთვალეთ სურათზე მოცემული ფიგურის გვერდითი ზედაპირი და სრული ზედაპირი.

ბ) დაწერეთ ამოხვრეტილი ცილინდრისათვის გვერდითი და სრული ზედაპირის გამოსათვლელი ფორმულები.



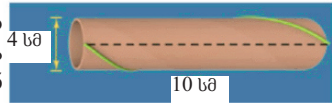
- 11.** ცილინდრული საკვამლე მილის დიამეტრი 70 სმ, სიმაღლე 20 მ-ია. რამდენი კვადრატული მეტრი რკინის ფურცელი დასჭირდება ამ ზომის საკვამლე მილის დამზადებას, თუ მთელი სამუშაოს შესრულებისას რკინის 5%-ის დანაკარგს აქვს ადგილი?

ცილინდრის ზედაპირის ფართობი

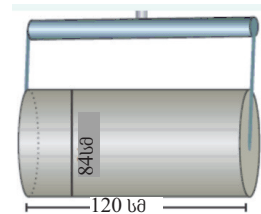
12. ასფალტის სატკეპნ მანქანას ორი ასფალტის გასასწორებელი სატკეპნი ცილინდრის ფორმის ნაწილი აქვს. დიდი ცილინდრის სიმაღლე 1, 25 მ, დიამეტრი 1,5 მ-ია. რა ზომის ზედაპირს გაასწორებს ეს ნაწილი ერთი სრული ბრუნის დროს?



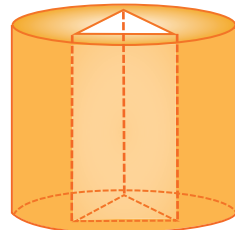
13. ცილინდრის ფორმის საჩუქრის ყუთზე გადაკრული შესახვევის გასახსნელად სპეციალური წრფივი ნაჭერია დატოვებული. გასახსნელი ხაზის ქვედა წვეროდან დაწყებული ფერადი წვრილი თოკი ცილინდრზეა შემოხვეული (ერთხელ) და ქსოვილის მეორე წვეროზე დამაგრებული. იპოვეთ ამ ძაფის სიგრძე, თუ ცილინდრის ფუძის დიამეტრი 4 სმ, ხოლო სიმაღლე კი 10 სმ-ია. მითითება: ცილინდრის შლილის სახეზე გეომეტრიულად განსაზღვრეთ ძაფის მდებარეობა.



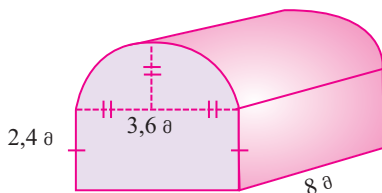
14. სათამაშო მოედნის გასწორებისათვის 84 სმ დიამეტრისა და 120 სმ სიგრძის ცილინდრის ფორმის დანადგარმა 500 სრული ბრუნი უნდა შეასრულოს. რამდენი კვადრატული მეტრი სათამაშო მოედანი?



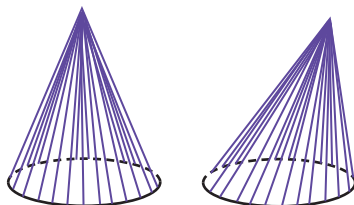
15. 10 სმ რადიუსისა და 12 სმ სიმაღლის მქონე ცილინდრში სურათზე ნაჩვენების მსგავსად მართი სამკუთხა პრიზმა ამოიჭრა. პრიზმის ფუძეში არსებული სამკუთხედის გვერდები 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ-ია. მიღებული ფიგურის სრული ზედაპირი უნდა შეიღებოს. რისი ტოლია შესაღები ფართობი?



16. სურათზე ნაჩვენები ზომის სათბურის ზედაპირი და გვერდები პოლიეთილენითაა დაფარული. პოლიეთილენი 15 მ სიგრძისა და 2 მ სიგანის გრაგნილით იყიდება. რამდენი გრაგნილი პოლიეთილენი უნდა იქნეს შეძენილი ამ სამუშაოს შესრულებისათვის?



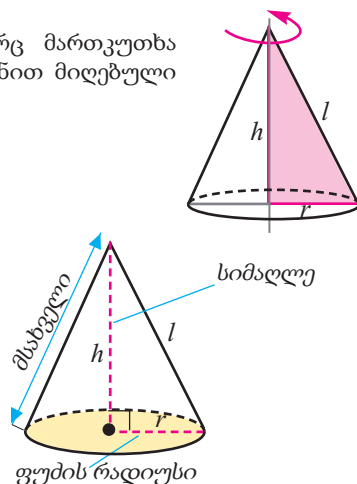
რაიმე სიბრტყითი ფიგურის წერტილების ამ სიბრტყეზე არამდებარე წერტილთან შემაერთებული ყველა მონაკვეთისაგან შექმნილ სივრცით ფიგურას **კონუსი** ეწოდება. სიბრტყით ფიგურას კონუსის ფუძე, ხოლო ამ წერტილს კი კონუსის **წვეროს წერტილი** ეწოდება. კონუსის წვეროდან ფუძის სიბრტყისადმი დაშვებულ მართობს **კონუსის სიმაღლე** ეწოდება. კონუსს, რომლის ფუძეც წრეა **წრიული კონუსი** ეწოდება. თუ წვერო ფუძის ცენტრის მართობულია წრიულ კონუსს **მართი წრიული კონუსი** ეწოდება. წრიული კონუსის წვეროს წერტილის ფუძის წრეწირის რომელიმე წერტილთან შემაერთებელ მონაკვეთს **კონუსის მსახველი** ეწოდება.



ამის შემდეგ კონუსზე საუბრისას მართი წრიული კონუსი გვექნება მხედველობაში.

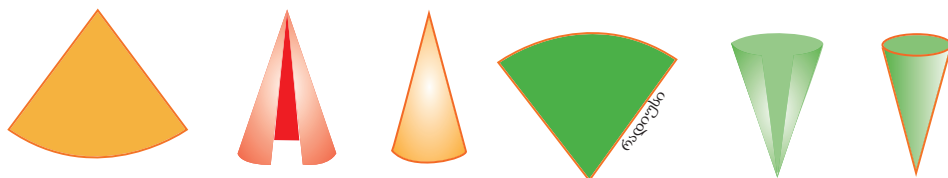
კონუსი ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტის გარშემო ბრუნით მიღებული სივრცითი ფიგურა.

კონუსის წვეროს წერტილსა და ფუძის ცენტრზე გამავალ წრფეს **კონუსის ღერძი**, ფუძის რადიუსს კი **კონუსის რადიუსი** ეწოდება. კონუსის მსახველს, სიმაღლესა და რადიუსს შორის მართებულია $l^2 = h^2 + r^2$ დამოკიდებულება (პითაგორას თეორემის თანახმად).



კონუსის აგება.

ცნობილია, რომ მართკუთხედის დამრგვალებით ცილინდრის დამზადება შეიძლება. წრიული სექტორის დამრგვალებით კონუსის დამზადება შეიძლება.



სექტორის რადიუსი კონუსის მსახველის, რკალის სიგრძე კი ფუძის წრის წრეწირის სიგრძის ტოლი იქნება.

კონუსი

მცირე საპროექტო სამუშაო. გამოიკვლიეთ ურთიერთდაპოკიდებულება წრიულ სექტორს, კონუსის მსახველსა და ფუძის რადიუსს შორის.

1. დავუშვათ, რომ კონუსი R რადიუსიანი და ცენტრული α° კუთხის მქონე წრიული სექტორისგანაა შექმნილი. რომელი ფორმულით შეიძლება კონუსის ფუძის რადიუსის გამოთვლა?

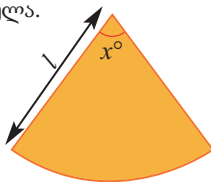


- სექტორის რკალის სიგრძე $\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$ ფორმულით გამოითვლება.
- სექტორის რკალის სიგრძე ასევე კონუსის ფუძის წრის წრეწირის სიგრძის ტოლია. იპოვეთ ფუძის რადიუსი.

$$2\pi r = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R, \quad r = \frac{\alpha}{360} R$$

✓ იპოვეთ 12 სმ რადიუსისა და 45° -იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი წრიული სექტორისაგან შექმნილი კონუსის მსახველის სიგრძე და ფუძის რადიუსი.

2. დავუშვათ, რომ კონუსის ფუძის რადიუსია r , ხოლო მსახველია l . რამდენ გრადუსიანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი სექტორია კონუსის გვერდითი ზედაპირი? დაწერეთ ზოგადი ფორმულა.



$$\frac{x}{360} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

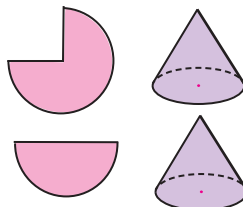
✓ რამდენ გრადუსიანი ცენტრული კუთხის წრის სექტორისაგან შეიძლება ისეთი კონუსის დამზადება, რომლის ფუძის რადიუსი 10 სმ-ია, სიმაღლე კი 24 სმ?

✓ განსაზღვრეთ თანაფარდობა ნახევარწრისაგან დამზადებული კონუსის რადიუსსა და მსახველს შორის.

✓ აიშე ამბობს, რომ “ 60° -იანი ცენტრული კუთხისა და 18 სმ რადიუსის მქონე წრიული სექტორის შესაბამისი კონუსის ფუძე 3 სმ რადიუსიანი წრეწირია. მე 18 გავყავი 6-ზე და ეს პასუხი მივიღე” სწორია აიშეს ამონახსენი? დაწერეთ დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება.

3. რომელი კონუსი იქნება უფრო მაღალი?

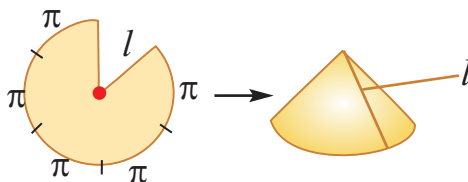
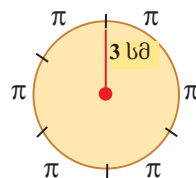
ნახევარწრისაგან დამზადებული კონუსისა თუ იმავე წრის სამი მეოთხედისაგან დამზადებული წრეწირის? დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება.



კონუსის ზედაპირის ფართობი

პრაქტიკული შეცადინება. კონუსი. გვერდითი ზედაპირის ფართობი

- ✓ დახაზეთ ქაღალდზე 3 სმ რადიუსიანი წრე.
- ✓ დაყავით წრე 6 ტოლ ნაწილად.
- ✓ წრის წრეწირის სიგრძე $2\pi \cdot 3 = 6\pi$, იქნება. ტოლი რკალეებიდან თითოეულის სიგრძე π იქნება. ეს ზომა აღნიშნეთ წრეზე.
- ✓ ერთი ნაწილი სურათზე ნაჩვენები სახით ამოჭერით, დანარჩენი ქაღალდის შემოხვევით კონუსი დაამზადეთ.



- ა) კონუსის ფუძე უნდა იყოს წრიული ფორმის. უჩვენეთ, რომ ამ წრის წრეწირის სიგრძე არის 5π .
- ბ) იპოვეთ ფუძის რადიუსი.
- გ) იპოვეთ მოცემული წრის ფართობი.
- დ) იპოვეთ ერთ ნაწილ ამოჭრილ-ამოღებული წრის ფართობი.
- ე) გეომეტრიულად ახსენით კონუსის გვერდით ზედაპირი და სრული ზედაპირი.

ახლა კი დაამზადეთ სხვადასხვა რადიუსის ტოლი ნაწილების ამოჭრა-ამოღებით მიღებული სხვადასხვა კონუსები.

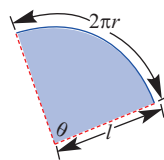
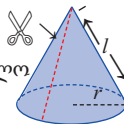
- ა) გაზომეთ კონუსის ფუძის რადიუსი.
- ბ) გაზომეთ კონუსის მსახველი.

ფუძის რადიუსი					
მსახველი					
ზედაპირის ფართობი					

კონუსის გვერდითი ზედაპირი, სრული ზედაპირი

კონუსის ზედაპირი შედგება გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის წრისაგან.

სურათზე კონუსის ფუძის რადიუსი r -ით, ხოლო მსახველი l -ით არის აღნიშნული.



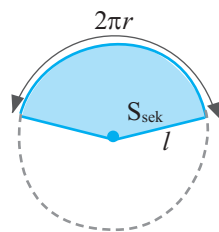
კონუსის გვერდითი ზედაპირი l -რადიუსიანი წრის θ ცენტრული კუთხის შესაბამისი სექტორია.

მაშასადამე, სექტორის ფართობი ასეთი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია.

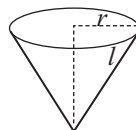
✓ სექტორის რადიუსი l -ის (წრეწირის სიგრძე $2\pi l$) წრის განსაზღვრული ნაწილია.

✓ სექტორის რკალის სიგრძე კონუსის ფუძის წრეწირის სიგრძის $2\pi r$ -ის ტოლია.

✓ იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მთელი წრის რა ნაწილს შეადგენს სექტორი, საჭიროა სექტორის რკალის სიგრძის მთელი წრეწირის სიგრძესთან შეფარდება.



$$\frac{\text{სექტორის რკალის სიგრძე}}{\text{მთელი წრეწირის სიგრძე}} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$



მაშასადამე, სექტორი წრის $\frac{r}{l}$ ნაწილს შეადგენს.

✓ ვინაიდან წრის ფართობია πl^2 , ამიტომ მისი $\frac{r}{l}$ ნაწილის ფართობი $\pi l^2 \cdot \frac{r}{l}$ იქნება. მაშასადამე $S_{\text{გვ}} = \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi l r$,

$$S_{\text{გვ}} = \pi l r$$

კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი მისი ფუძის წრეწირის სიგრძის ნახევრისა და მსახველის ნამრავლის ტოლია.

✓ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი

$$S_{\text{სრ}} = S_{\text{გვ}} + S_{\text{ფძ}} = \pi l r + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

$$S_{\text{სრ}} = \pi l r + \pi r^2 \text{ ან } S_{\text{სრ}} = \pi r(l + r)$$

ნიმუში. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა: მოცემულია: $d = 5$ მ

$$h = 6$$
 მ

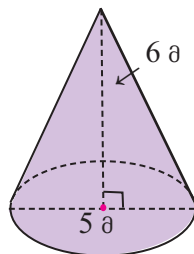
უნდა ვიპოვოთ: $S_{\text{გვ}}$ და $S_{\text{სრ}}$

$$S_{\text{გვ}} = \pi l r \text{ და } S_{\text{სრ}} = \pi r(l + r)$$

l მსახველის პოვნისათვის გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2,5^2 + 6^2} = 6,5 \text{ (მ)}$$

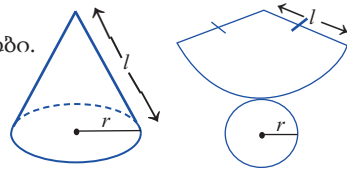
$$S_{\text{გვ}} = \pi \cdot 6,5 \cdot 2,5 = 16,25\pi \text{ (მ}^2\text{); } S_{\text{სრ}} = 22,75\pi \text{ (მ}^2\text{)}$$



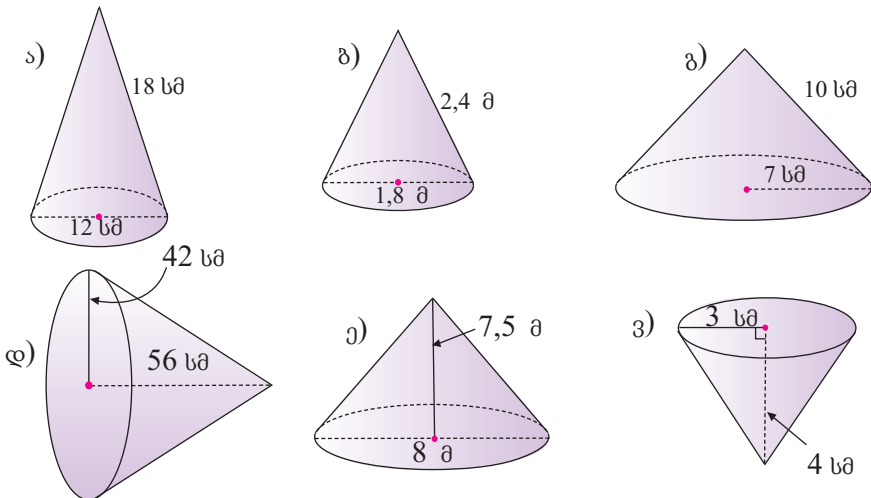
კონუსის ზედაპირის ფართობი

სასწავლო დაგეგმვები

1. მოცემულია წრიული სექტორი, რომლის რადიუსი 25 სმ-ია, ხოლო რკალის სიგრძეა 14π სმ.
- რამდენი გრადუსია სექტორის ცენტრული კუთხე?
 - იპოვეთ ამ სექტორით დამზადებული კონუსის ფუძის რადიუსი და გვერდითი ზედაპირი.
 - იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.
 - იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი.



2. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი.

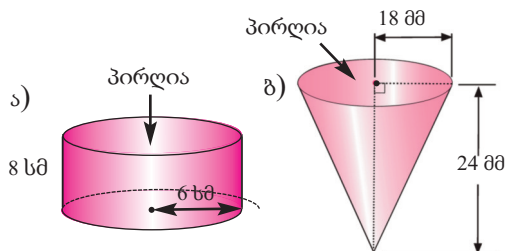


3. კონუსის სრული ზედაპირის კალკულატორით გამოთვლისას, შესაბამისი ცვლადების მოცემის შემთხვევაში $\pi l r + \pi r^2$ გამოსახულების გამოყენება არის უფრო ხელსაყრელი თუ $\pi r(l + r)$ გამოსახულების? დაწერეთ თქვენი მოსაზრება.

4. დაწერეთ ფორმულები:

- რომელიც გამოსახავს კონუსის მსახველის გვერდით ზედაპირზე და ფუძის რადიუსზე დამოკიდებულებას.
- რომელიც გამოსახავს კონუსის ფუძის რადიუსის გვერდით ზედაპირსა და მსახველზე დამოკიდებულებას.

5. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ცილინდრისა და კონუსის ფორმის პირდია ჭურჭლის შიგა ზედაპირის ფართობი.

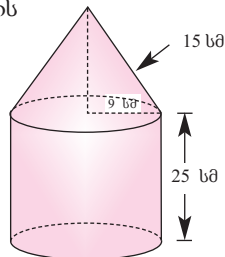


კონუსის ზედაპირის ფართობი

6. ღია ტიპის შეკითხვა. კონუსის ფუძის რადიუსის მსახველთან შეფარდება

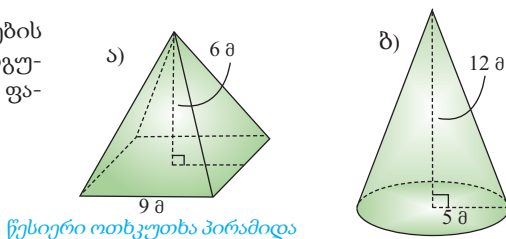
$\frac{5}{14}$ -ის ტოლია. დაწერეთ ამ კონუსის გვერდითი ზედაპირის შესაბამისი ორი მნიშვნელობა.

7. ფიგურა სურათზე მოცემული ზომების ცილინდრისა და კონუსისაგანაა აგებული. გამოთვალეთ სრული ზედაპირის ფართობი.



8. კონუსის სიმაღლე 80 სმ-ია, ხოლო დიამეტრი 120 სმ. გამოთვალეთ გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

9. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი.



წესიერი ოთხკუთხედი პირამიდა

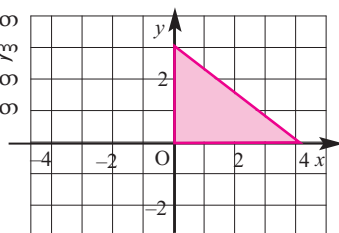
10. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 3 სმ და 4 სმ-ია, იპოვეთ ამ მართკუთხა სამკუთხედის პიპოტენუსის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირი.

11. სურათზე მოცემული სამკუთხედი ბრუნავს ქვემოთ მოცემული ღერძების გარშემო და თითოეულ შემთხვევაში სივრცითი ფიგურა მიიღება. გამოსახეთ მიღებული სივრცითი ფიგურები და გამოთვალეთ მათი სრული ზედაპირი π ერთეულებში.

ა) y ღერძის გარშემო; ბ) x ღერძის გარშემო;

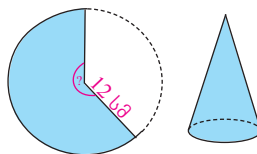
გ) $x = 4$ წრფის გარშემო;

დ) $y = 3$ წრფის გარშემო.



12. კონუსის 10სმ^2 ფართობის მქონე გვერდითი ზედაპირის გაშლისას მიიღება სექტორი, რომლის კუთხეც არის 36° . იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირი.

13. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $96\pi\text{სმ}^2$ -ია. მისი გაშლილი სახის სექტორის რადიუსი 12 სმ-ია. იპოვეთ ცენტრული კუთხე.



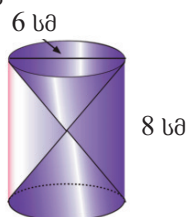
კონუსის ზედაპირის ფართობი

14. დაამტკიცეთ, რომ ნახევარწრისაგან დამზადებული კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძის ფართობის ორმაგის ტოლია.

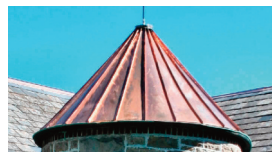
გამოყენებითი დავალებები

15. ლეილას სურს თოჯინისათვის კონუსის ფორმის ქუდის დამზადება. რას უდრის კონუსის ფორმის ქაღალდის ქუდის ფართობი, თუ ფუძის რადიუსი 8 სმ-ია, ხოლო მსახველის სიგრძე 30 სმ?

16. მინისაგან დამზადებული ქვიშის საათი სურათზე ნაჩვენები ზომებით მინის ცილინდრშია მოთავსებული. რომლისათვის უფრო მეტი მინა იქნა გამოყენებული ცილინდრისათვის თუ კონუსისათვის?



17. ნაგებობის სახურავს კონუსის ფორმა აქვს. კონუსის სახურავის სიმაღლე 3 მ-ია, ფუძის რადიუსი - 1,5მ. გამოთვალეთ სახურავის კრამიტით დაფარული ფართობი.



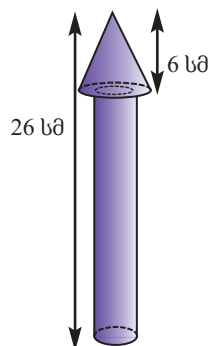
18. 10 სმ წიბოს მქონე კუბში ქვემოთ აღნიშნული ფიგურებია ჩახაზული. ჩახაზული ფიგურის ფუძე კუბის ერთ-ერთ წახნაგზე, წვერო მოპირდაპირე წახნაგზე მდებარეობს.

ა) წესიერი პირამიდა (ფუძე არის კვადრატი - კუბის წახნაგი)

ბ) კონუსი (ფუძე იმ კვადრატში ჩახაზული წრეა, რომელიც კუბის წახნაგია).

შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზები. იპოვეთ ჩახაზული ფიგურის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

19. სურათზე ნაჩვენები რაკეტის მოდელი ცილინდრისა და კონუსისაგან არის აწყობილი. ცილინდრის სიმაღლე 20 სმ-ია, კონუსის სიმაღლე - 6 სმ. ცილინდრის დიამეტრი 3 სმ-ია კონუსი დიამეტრი 5 სმ. რაკეტის ცილინდრული ნაწილი წითელ, ხოლო კონიკური ნაწილი კი ნარინჯისფერში უნდა შეიღებოს. იპოვეთ თითოეული ფერის ფართობი.



20. ცილინდრისა და კონუსის სიმაღლეები ერთი და იგივეა და ერთი ერთეულია, რადიუსებიც ერთი და იგივეა $\sqrt{3}$ ერთეულია. გამოთვალეთ და შეადარეთ მათი გვერდითი ზედაპირის ფართობები.

ცილინდრისა და კონუსის სიბრტყითი კვეთები

კონუსის ზედაპირის სიბრტყითი კვეთები (კონიკური კვეთების თეორია) ანტიკური პერიოდის გეომეტრიის მწვერვალად ითვლება. აპოლონიუს (ჩვ. წ. აღმდეგ მე-3 საუკუნე) გამოკვლევების თანახმად მსახველები უსასრულო (სხივი) კონუსის სიბრტყითი კვეთები შეიძლება იყოს ელიფსი (თუ სიბრტყე მსახველს კვეთს), პარაბოლის (თუ მკვეთი სიბრტყე ერთ-ერთი მსახველის პარალელურია), ჰიპერბოლის შტო (თუ მკვეთი სიბრტყე მსახველებიდან ორის პარალელურია).

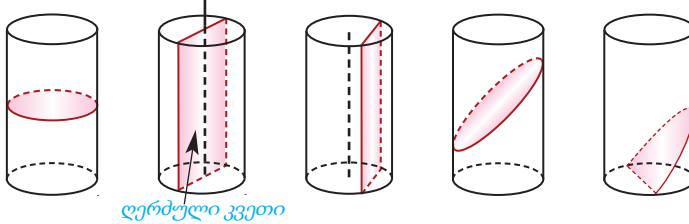
ცილინდრის სიბრტყითი კვეთები

ცილინდრის ფუძის პარალელური სიბრტყითი კვეთი წრეა.

ცილინდრის ღერძზე გამავალ სიბრტყით კვეთს, **ღერძული კვეთი** ეწოდება. ცილინდრის ღერძული კვეთი არის მართკუთხედი, რომლის გვერდებია h და $2r$ მაშასადამე $S_{ღკვ} = 2rh$.

ცილინდრს, რომლის ღერძული კვეთი კვადრატია ($h = 2r$) **ტოლგვერდა ცილინდრი** ეწოდება.

ცილინდრის ღერძის პარალელური სიბრტყითი კვეთიც მართკუთხედი.



კონუსის სიბრტყითი კვეთები

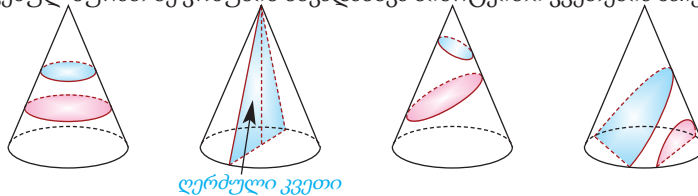
კონუსის ფუძის სიბრტყის პარალელური სიბრტყითი კვეთი წრეა,

კონუსის ღერძზე გამავალ სიბრტყით კვეთას **ღერძული კვეთი** ეწოდება.

ეს კვეთი არის ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის ვერდები მსახველის, ხოლო ფუძე კი დიამეტრის ტოლია.: $S_{ღკვ} = rh$

კონუსს, რომლის ღერძული კვეთი წესიერი სამკუთხედი ($l = 2r$) **ტოლგვერდა კონუსი** ეწოდება.

ქვემოთ მოცემულ სურათზე კონუსის სხვადასხვა სიბრტყითი კვეთებია ნაჩვენები.



ნიმუში. ცილინდრის ღერძიდან 3 სმ-ის მანძილზე ღერძის პარალელურად გავლებული სიბრტყითი კვეთი არის კვადრატია, რომლის ფართობი 64 სმ²-ია. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

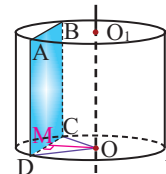
ამოხსნა: ჯერ მოვებზნოთ ცილინდრის რადიუსი და სიმაღლე.

პირობის თანახმად $CD = AD$ და $S_{კვ} = CD \cdot AD = 64$. აქედან $CD = AD = 8$, $h = 8$ (სმ).

$\triangle OMD$ -დან:

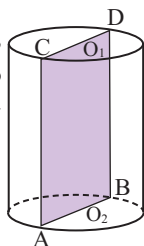
$$r^2 = OD^2 = OM^2 + MD^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \text{ აქედან } r = 5 \text{ (სმ).}$$

$$\text{მაშასადამე, } S_{სრ} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5 \cdot (8 + 5) = 130\pi \text{ (სმ).}$$



სასწავლო დაფალებები

1. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი 14 მ^2 -ია. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

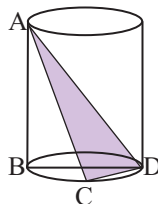


2. ცილინდრის სიმაღლე 6 სმ , ფუძის რადიუსი 5 სმ -ია. იპოვეთ ცილინდრის ღერძის პარალელური და ღერძიდან 4 სმ -ის დაშორებით გავლებული კვეთის ფართობი.

3. კონუსის ფუძის ფართობის ღერძული კვეთის ფართობთან შეფარდება π -ს ტოლია. იპოვეთ მსახველის მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხე.

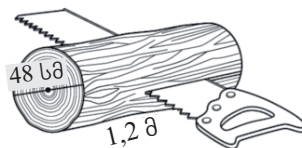
4. ტოლგვერდა კონუსის ფუძის რადიუსი R -ის ტოლია. იპოვეთ ურთიერთშორის 30° -იანი კუთხის მქონე ორ მსახველზე გამავალი მკვეთის ფართობი.

5. AB ცილინდრის სიმაღლე, BD კი ფუძის დიამეტრია. იპოვეთ ACD სამკუთხედის ფართობი, თუ $AB=4\text{სმ}$, $BD=6\text{სმ}$, $CD=4\text{სმ}$. მითითება: სამი მართობის შესახებ თეორემის გამოყენებით უჩვენეთ, რომ $\triangle ACD$ მართკუთხა სამკუთხედი.



6. კონუსის სიმაღლე 20 სმ , ფუძის რადიუსი 25სმ -ია, იპოვეთ წვეროზე გამავალი და ფუძის ცენტრიდან 12 სმ მანძილზე მდებარე მკვეთის ფართობი.

7. ცილინდრის ფორმის შეშის ნაჭრის დიამეტრი 48 სმ , სიგრძე $1,2 \text{ მ}$ -ია. შეშა სურათზე ნაჩვენები წესით შუაზე გაყოფილი. გამოთვალეთ ერთი ნაწილის სრული ზედაპირის ფართობი.

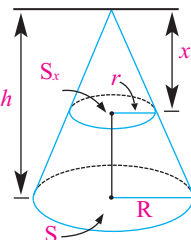


8. შეშის საჭრელი ხერხით გამხმარი ხიდან სურათზე ნაჩვენები ზომების ნაჭერი ჩამოაჭრეს. იპოვეთ ამ ნაჭრის ფუძის ფართობი.



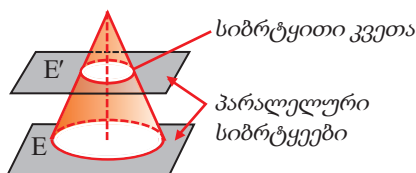
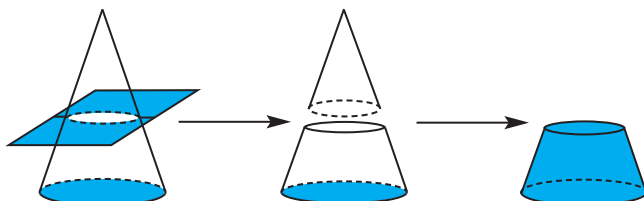
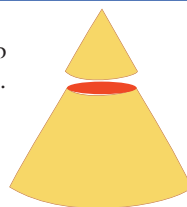
9. h სიმაღლის S ფუძის ფართობიანი კონუსი წვეროდან x მეტრ მანძილზე ფუძის პარალელური სიბრტყითაა გადაკვეთილი. კვეთის ფართობია S_x . დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{S_x}{S} = \frac{x^2}{h^2}$$



წაკვეთილი კონუსი

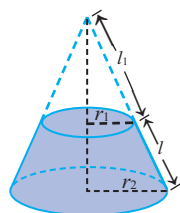
მართი წრიული კონუსის ფუძის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთისას პატარა კონუსი და წაკვეთილი კონუსი მიიღება.



წაკვეთილი კონუსი ფუძის პარალელურ სიბრტყით მკვეთსა და ფუძის სიბრტყეს შორის დარჩენილი ფიგურაა.

წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი დიდი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობისა და მისგან ფუძის პარალელური სიბრტყით ჩამოკვეთილი პატარა კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობის სხვაობის ტოლია. სურათზე მოცემული აღნიშვნების გამოყენებით ეს სხვაობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$S_{გვ} = \pi r_2(l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi [(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$



სამკუთხედების მსგავსებიდან $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l + l_1}{r_2}$ პროპორციის დაწერა შეიძლება. აქედან

$$l_1 r_2 = r_1(l + l_1) \text{ ან } (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l \text{ ტოლობას ჩვენს მიერ გვერდითი}$$

ზედაპირის ფართობისათვის დაწერილ ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$S_{გვ} = \pi (r_1 l + r_2 l) = \pi l(r_1 + r_2).$$

ამ ფორმულის წაკვეთილი კონუსის $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ საშუალო რადიუსის აღნიშვნის გამოყენებით

$$S_{გვ} = 2\pi r l$$

სახით ჩაწერა შეიძლება.

წაკვეთილი კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი გვერდითი ზედაპირის, ქვედა და ზედა ფუძეების ფართობების ჯამის ტოლია:

$$S_{სრ} = \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

წაკვეთილი კონუსი და ზედაპირის ფართობი

ნამუშაუ. 8 სმ სიმაღლისა და 6 სმ ფუძის რადიუსის მქონე კონუსის ფუძის პარალელური სიბრტყით არის გადაკვეთილი. მიღებული წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე 4 სმ-ია. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა: მოცემულია: $r_2 = 6$, $h = 8$ სმ, $h_{\text{წკონ}} = 4$ სმ

უნდა ვიპოვოთ: $S_{\text{გგ}} = ?$

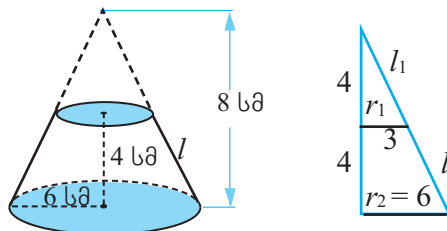
$S_{\text{სრ}} = ?$

$$S_{\text{გგ}} = \pi l(r_1 + r_2), \quad r_1 = \frac{r_2}{2} = 3,$$

$$l = l_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

$$S_{\text{გგ}} = 5(3 + 6) \pi = 45\pi \text{ (სმ}^2\text{)},$$

$$S_{\text{სრ}} = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi \text{ (სმ}^2\text{)}.$$



სასწავლო დაგალებები

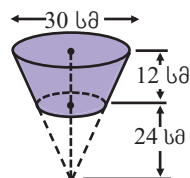
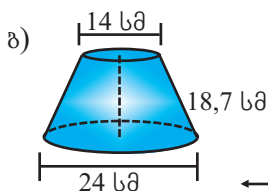
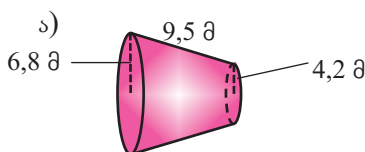
1. ა) წაკვეთილი კონუსის მსახველი 4 სმ, ფუძეების წრეწირების სიგრძეები 18 სმ და 6 სმ-ია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი. გამოთვლების დროს ჩათვალით, რომ $\pi = \frac{22}{7}$

ბ) წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე 4 სმ-ია, ხოლო ფუძეების რადიუსი შესაბამისად 3 სმ და 6 სმ-ია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

2. წაკვეთილი კონუსის ფორმის ქაღალდის ქუდის ღია ქვედა ფუძის რადიუსი 10 სმ, ზედა ფუძის რადიუსი კი 4 სმ-ია. წაკვეთილი კონუსის მსახველი 15 სმ-ია. სულ მცირე რამდენი კვადრატული სანტიმეტრი ქაღალდი იქნა გამოყენებული ქუდისათვის?



3. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.



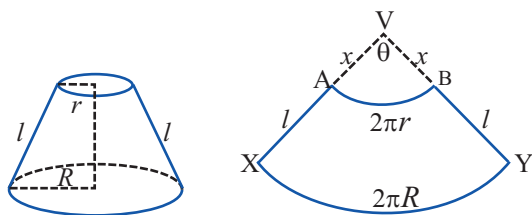
4. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობი.

წაკვეთილი კონუსი და ზედაპირის ფართობი

5. წაკვეთილი კონუსის ფორმის სათლის ფუძის დიამეტრი 22 სმ, ღია ზედა ფუძის დიამეტრი კი 36 სმ-ია. დაახლოებით რამდენი მანათის მასალა დაიხარჯება ერთ სათლზე, თუ მისი სიმაღლე 24 სმ-ია და სათლის დამზადებაზე გამოყენებული მეტალის 1 მ²-ის ფასი კი 5^რ მანათია?



6. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსები და მსახველი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 1:4:5. იპოვეთ წვეთი ცნობილია, რომ სიმაღლე 8 სმ-ია.
7. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე, თუ მისი სრული ზედაპირი 572π მ²-ია, ხოლო ფუძეების რადიუსები კი 6მ და 14 მ-ია.
8. წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირია S, ფუძეების რადიუსები კი R და r -ია. იპოვეთ სრული კონუსის გვერდითი ზედაპირი.
9. წაკვეთილი კონუსის მსახველი 5 სმ-ია, ფუძეების რადიუსები კი 1 სმ და 5 სმ. იპოვეთ იმ ცილინდრის ფუძის რადიუსი, რომლის სიმაღლე და გვერდითი ზედაპირი ამ წაკვეთილი კონუსის სიმაღლისა და გვერდითი ზედაპირის ტოლია.
10. ABYX ფიგურა წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის გაშლილი სახეა.



ა) დაწერეთ AB და XY რკალების სიგრძეების θ კუთხეზე დამოკიდებულება.

უჩვენეთ, რომ რადიანობით $\theta = \frac{2\pi(R-r)}{l}$ ტოლობა მართებულია.

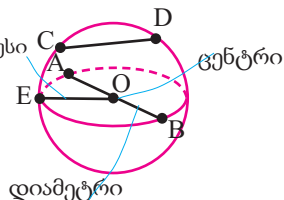
ბ) ზემოთ მოცემული ტოლობისა და სამკუთხედების მსგავსებით გამოყენებით

უჩვენეთ, რომ $x = \frac{lr}{R-r}$

გ) იპოვეთ AVB და XVY სექტორების ფართობები და მათი გამოყენებით იპოვეთ ABYX -ის ფართობი, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

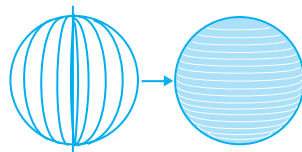
ბირთვი და მისი ნაწილები

სივრცის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომელთა დაშორება მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილს არ აღემატება ბირთვი ეწოდება. მოცემულ წერტილს **ბირთვის ცენტრი**, მოცემულ მანძილს კი **ბირთვის რადიუსი** (R) ეწოდება.



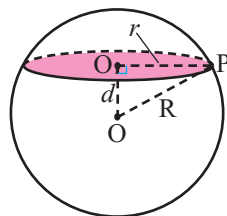
ბირთვის ცენტრიდან R მანძილზე მყოფი ყველა წერტილის სიმრავლე ქმნის ბირთვის ზედაპირს. ბირთვის ზედაპირი სფეროა. ბირთვის ზედაპირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს ბირთვის **ქორდა** (CD), ცენტრზე გამავალ ქორდას კი ბირთვის **დიამეტრი** (AB) ეწოდება.

ბირთვიც ცილინდრისა და კონუსის მსგავსად სიბრტყის ნაწილის განსაზღვრული ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული სივრცითი ფიგურაა. ნახევარწრის დიამეტრის გარშემო ბრუნვის შედეგად ბირთვი მიიღება.



ბირთვის ნებისმიერი კვეთა სიბრტყით არის წრე. ამ წრის ცენტრი, ბირთვის ცენტრზე გამავალი სიბრტყისადმი გავლებული მართობის ფუძეა.

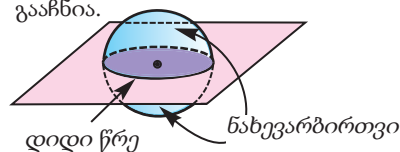
თუ ბირთვის რადიუსი იქნება R , მანძილი მკვეთი სიბრტყის ცენტრიდან d , ხოლო გადაკვეთისას მიღებული წრის რადიუსი r , მაშინ $r^2 = R^2 - d^2$ მიიღება.



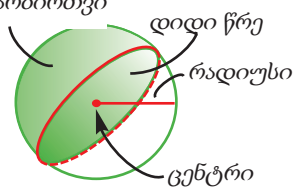
ნაშუა. 10 სმ რადიუსიანი ბირთვი ცენტრიდან 8 სმ მანძილზე მყოფი საბრტყითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

ამოხსნა: რადგან $R = 10$, $d = 8$ ამიტომ კვეთისას მიღებული წრის ფართობი $S_{კვ} = \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2) = \pi \cdot (10^2 - 8^2) = 36\pi$ (სმ²) იქნება.

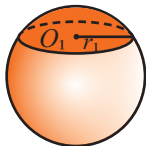
ბირთვის ცენტრზე გამავალი სიბრტყით კვეთა ამ წრეებს შორის უდიდესია და დიდი წრე ეწოდება. დიდ წრეს ბირთვთან ერთი და იგივე ცენტრი, რადიუსი და დიამეტრი გააჩნია.



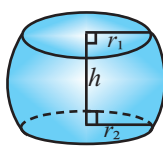
ნახევარბირთვი



ამასთან ბირთვზე ქვემოთ მოცემული ნაწილებიც გამოიყოფა.



ბირთვის სეგმენტი



ბირთვის ფენა-ორ პარალელურ მკვეთ სიბრტყეს შორის დარჩენილი ნაწილი



ბირთვის ნაჭერი

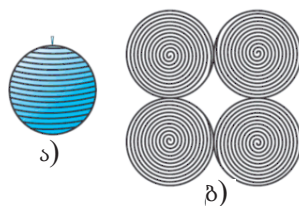
ბირთვის ზედაპირის ფართობი

პრაქტიკული მეცადინეობა. ჯგუფური სამუშაო.

ბურთის ზედაპირის ბაწრით დაფარვა.

საჭირო მასალები: ბურთი, ბაწარი, ქაღალდის ფურცლები.

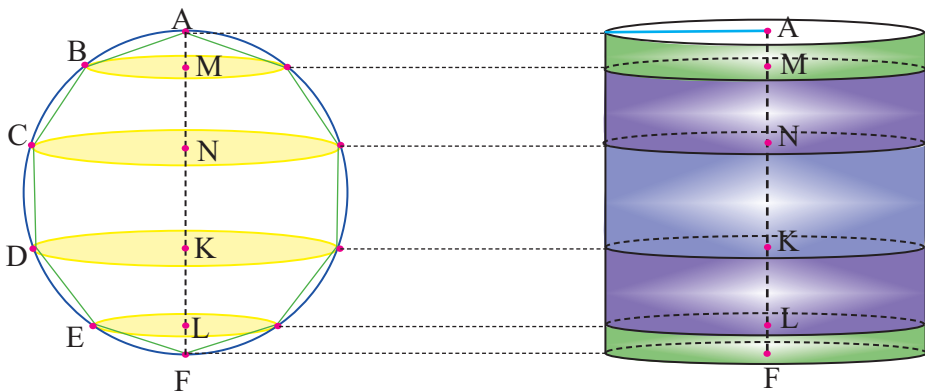
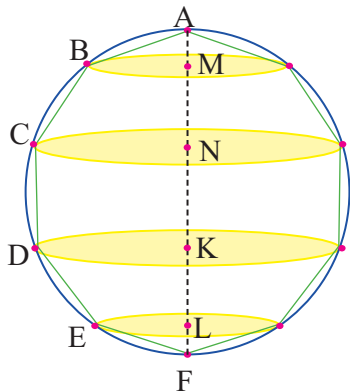
1. თითოეულ ჯგუფს ერთი ბურთი ეძლევა. ისინი ცდილობენ ბურთს ბაწარი ისე შემოახვიონ და დაფარონ ბურთი, რომ არც სივარდიელ დარჩეს და არც ბაწრის რიგები ერთმანეთს არ დაემთხვეს. ტყავისა და ქსოვილის ბურთის ლურსმანზე დამაგრებითა და ბრუნვით ამ სამუშაოს უფრო ადვილად შესრულება შეიძლება.
2. ბურთის დიამეტრის გაზომვისათვის ტარდება განხილვა. დიამეტრის განსაზღვრის შემდეგ გამოითვლება მისი რადიუსი.
3. ქაღალდის ფურცელზე იხაზება ბურთის რადიუსის ტოლრადიუსიანი ოთხი წრე, .
4. ბურთზე შემოხვეული ბაწარი იხსნება. ბაწარი ოთხი წრის იმავე წესით შესავსებად გამოიყენება. გამოითქმება მოსაზრებები ბირთვის ზედაპირის ფართობის შესახებ, იწერება ფორმულა.



ბირთვის ზედაპირის ფართობი

ბირთვის ზედაპირის ფართობი $S = 4\pi r^2$ ფორმულით გამოითვლება, სადაც r ბირთვის რადიუსია.

r რადიუსიან წრეწირში ჩავხაზოთ წესიერი მრავალკუთხედი, შესაბამისი წრის დიამეტრის გარშემო ბრუნვისაგან მიღებული ბირთვის ზედაპირის მსახველები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ამ მრავალკუთხედის გვერდების მქონე კონუსის, წაკვეთილი კონუსისა და ცილინდრების გვერდითი ზედაპირების ჯამის ზღვარი. (როცა მრავალკუთხედის გვერდების ჯამი უსასრულოდ იზრდება). ვუჭვენოთ, რომ მრავალკუთხედის გვერდის ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული თითოეული სხეულის (კონუსი, წაკვეთილი კონუსი და ცილინდრი) გვერდითი ზედაპირის ფართობი სიმაღლით ამ სხეულის სიმაღლის, ფუძის რადიუსი კი მრავალკუთხედის აპოთემის ტოლი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ტოლია. მრავალკუთხედის აპოთემა ავლნიშნოთ r_1 -ით.



ბირთვის ზედაპირის ფართობი

AB მსახველის მქონე კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია: $S_k = \pi \cdot AB \cdot BM$
 რადგან $\triangle AMB_1 \sim \triangle ATO$ ამიტომ $\frac{AM}{AT} = \frac{B_1M}{OT}$.

$AT \cdot B_1M = AM \cdot OT$ ტოლობის ორივე მხარის 2-ზე გამრავლებით, თუ გავითვალისწინებთ $2 \cdot AT = AB$,
 $OT = r_1$ მაშინ $AB \cdot B_1M = 2r_1 \cdot AM$ იქნება.

მაშასადამე, $S_k = \pi \cdot AB \cdot B_1M = 2\pi r_1 \cdot AM$

BC მსახველის მქონე წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $S_{\text{წკონ}} = \pi(BM + CN) \cdot BC$

$$QG = \frac{BM + CN}{2} \text{ ტოლობიდან გამომდინარე}$$

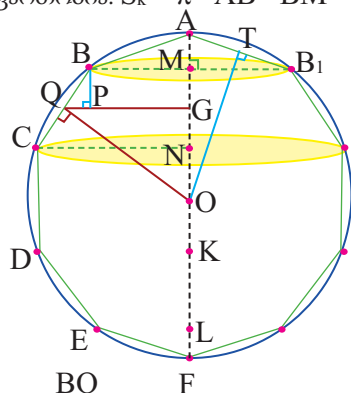
$S_{\text{წკონ}} = 2\pi \cdot QG \cdot BC$ იქნება.

მეორის მხრივ, რადგან $\triangle BPQ \sim \triangle QGO$, ამიტომ $\frac{BP}{QG} = \frac{BQ}{OQ}$.

$QG \cdot BQ = BP \cdot OQ$ ტოლობის ორივე მხარის 2-ზე გამრავლებით $2 \cdot BQ = BC$, $2 \cdot BP = MN$, $OQ = r_1$ -ის გათვალისწინებით $QG \cdot BC = r_1 \cdot MN$ და $S_{kk} = 2\pi r_1 \cdot MN$ იქნება.

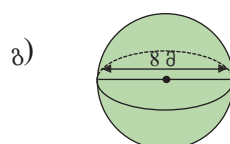
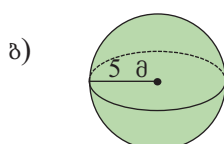
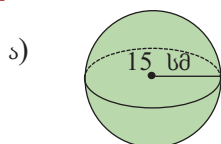
CD მსახველის მქონე ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობისათვის ცხადია, რომ $S_{\text{გვ}} = 2\pi r_1 \cdot NK$ ანალოგიური წესით DE მსახველის მქონე წაკვეთილი კონუსისა და EF მსახველის მქონე კონუსის გვერდითი ზედაპირისათვის შესაბამისად $S_{k.k.2} = 2\pi r_1 KL$, $S_{k2} = 2\pi r_1 LF$. მაშასადამე, მრავალკუთხედის დიამეტრის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ზედაპირის ფართობი იქნება: $S = 2\pi r_1 (AM + MN + MK + KL + LF) = 2\pi r_1 \cdot AF = 2\pi r_1 \cdot 2r = 4\pi r r_1$.

მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობის უსასრულოდ გაზრდით, r_1 -ის მნიშვნელობა ბირთვის რადიუსს, მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი ბირთვის ზედაპირის ფართობს უახლოვდება და მაშასადამე, მივიღებთ: $S_{\text{ბირთვი}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.



სასწავლო დაგეგმვები

1. გამოთვალეთ ბირთვის ზედაპირის ფართობი.



2. გამოთვალეთ სათამაშო ბურთების ზედაპირის ფართობი.



ფეხბურთის
ბურთი
 $r = 11$ სმ



წიგბურთის
ბურთი
 $r = 3,3$ სმ



ბოულინგის
ბურთი
 $r = 10,9$ სმ



გოლფის
ბურთი
 $d = 4,3$ სმ



კალათბურთის
ბურთი $d = 24,3$ სმ

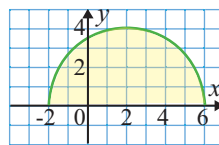
3. მთვარის დიამეტრი დედამიწის დიამეტრის ერთი მეოთხედის ტოლია. დაწერეთ ამ ორი ციური სხეულის ზედაპირის ფართობების შეფარდება.



ბირთვის ზედაპირის ფართობი

4. სურათზე მოცემული ნახევარწრე ღერძის გარშემო ერთი სრული ბრუნით შემოაბრუნეს.

ა) რომელი სივრცითი ფიგურა იქნა მიღებული?
 ბ) სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ ამ სხეულის ზედაპირის ფართობი.



5. 5 სმ რადიუსიანი ბირთვის ზედაპირის ფართობი 4 სმ რადიუსიანი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობზე 5-ჯერ მეტია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე

ბირთვის ზედაპირის ფართობის არქიმედესეული განმარტება:

დავუშვათ, სურათზე ნაჩვენებების მსგავსად წესიერ მრავალკუთხედში ჩაბაზულია წრე.

ამ ფიგურის ბრუნვის შედეგად ბირთვი და მისი სახურავი სივრცითი სხეული მიიღება.

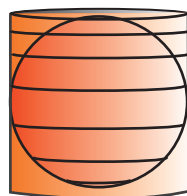
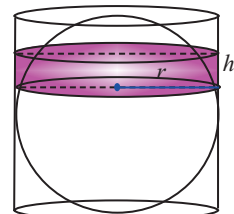
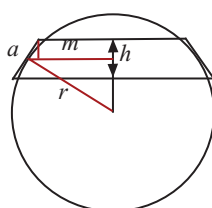
ეს სივრცითი სხეული შედგება ორი წაკვეთილი კონუსისაგან და ცილინდრისაგან.

თუ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობას უსასრულოდ გავზრდით, სივრცითი სხეული ფორმით ბირთვს უფრო მეტად მიუახლოვდება.



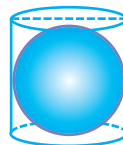
თუ ვიპოვით წაკვეთილი კონუსებისა და ცილინდრის ზედაპირების ჯამს, შევძლებთ ბირთვის ზედაპირის ფართობის პოვნას. განვიხილოთ წაკვეთილი კონუსებიდან ერთ-ერთის ღერძული კვეთი. დავუშვათ, რომ შუა წრეწირის რადიუსია m , სიმაღლე კი h . ჩავთვალოთ, რომ ბირთვის რადიუსია r , ხოლო დიდ წრეზე შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედის გვერდია a , როგორც ვხედავთ, წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $2\pi ma$ და ამასთან $2\pi ma = 2\pi rh$ ანუ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირი ფუძის r რადიუსისა და h სიმაღლის მქონე ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ტოლია. მაშასადამე, ბირთვის მომცავი ფიგურის ცილინდრად მიღება შეიძლება. აქედან კი მიიღება, რომ ბირთვის ზედაპირის ფართობი ტოლია იმ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირისა, რომლის ფუძის რადიუსია r , ხოლო სიმაღლეა $2r$.

ანუ, $S = S_{\text{ცილ.გვ}} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$



6. არქიმედეს აღტაცებაში მომყვანი ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობის სფეროს ზედაპირის ფართობთან 3:2 შეფარდება თქვენც დაამტკიცეთ.

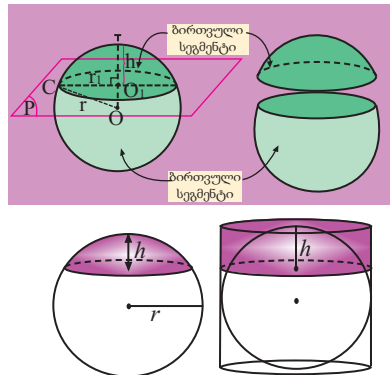
ა) იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის ფართობი;
 ბ) იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი;
 გ) დაწერეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობის ბირთვის ზედაპირის ფართობთან შეფარდება.



ბირთვული სეგმენტის ფართობი

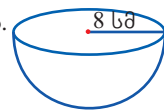
მკვეთი სიბრტყე ბირთვს ორ სეგმენტად ჰყოფს. ბირთვის სიბრტყესთან გადაკვეთით მიღებულ წრეს სეგმენტის ფუძე, ხოლო ბირთვის ამ წრისადმი მართობული დიამეტრის სეგმენტის შიგნით დარჩენილ ნაწილს სეგმენტის სიმაღლე ეწოდება. r რადიუსის მქონე ბირთვისგან გამოყოფილი h სიმაღლის ბირთვული სეგმენტის სფერული ზედაპირის ფართობი

$S = 2\pi rh$ ფორმულით გამოითვლება.



7. 18 სმ რადიუსის მქონე ბირთვი ცენტრიდან 5 სმ-ის მანძილზე სიბრტყითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ მიღებული მცირე ბირთვული სეგმენტის ზედაპირის ფართობი.
8. 400π სმ² ზედაპირის ფართობის მქონე ბირთვი ცენტრიდან 6 სმ მანძილზე სიბრტყითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ მიღებული დიდი ბირთვული სეგმენტის ზედაპირის ფართობი.
9. ბირთვი ცენტრიდან 3 სმ-ის მანძილზე სიბრტყითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ ბირთვისა და თითოეული სეგმენტის ზედაპირის ფართობი, თუ გადაკვეთისას მიღებული წრის წრეწირის სიგრძე 8π სმ-ია.

10. ა) გამოთვალეთ ნახევარბირთვის სიბრტყითი ზედაპირის ფართობი.



ბ) გამოთვალეთ ნახევარბირთვის სფერული ზედაპირის ფართობი.

გ) გამოთვალეთ ნახევარბირთვის სრული ზედაპირის ფართობი.

დ) დაწერეთ ნახევარბირთვის სრული ზედაპირის ფართობისათვის განმარტებული ფორმულა.

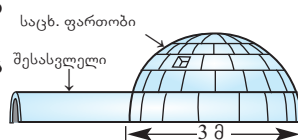
11. იპოვეთ ნახევარბირთვის რადიუსი, თუ მისი სრული ზედაპირის ფართობი 147π სმ²-ია.

12. ბირთვის რადიუსი 15 სმ-ია. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომლის დანახვაც შესაძლებელია ცენტრიდან 25 სმ-ის მანძილზე არსებული წერტილიდან.

13. **ეონოგრაფია.** კანადაში, გრენლანდიაში, ალიასკაზე ადამიანები იგლუდ წოდებულ თოვლის სახლებში ცხოვრობენ. ამ სახლების საცხოვრებელი ნაწილი ნახევარსფეროს ფორმისაა.

ა) სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ იგლუს საცხოვრებელი ფართობი (იატაკი).

ბ) იპოვეთ სახლის საცხოვრებელი ფართობის ყინვით დაფარული ზედაპირის ფართობი.

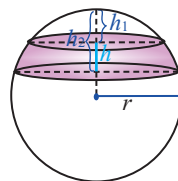


ბირთვული სარტყელის ფართობი

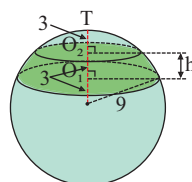
ბირთვული სარტყელი ბირთვის ზედაპირის ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის დარჩენილი ნაწილია. პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილს ბირთვული სიბრტყის სიმაღლე ეწოდება.

ბირთვული სარტყლის სფერული ზედაპირის ფართობი შეგვიძლია ვიპოვოთ როგორც სიბრტყეების მიერ ბირთვიდან გამოყოფილი სეგმენტების სფერული ნაწილების ზედაპირების სხვაობა.

r რადიუსიანი ბირთვიდან გამოყოფილი h სიმაღლის ბირთვული სარტყელის ფართობი $S = 2\pi rh$ ფორმულით გამოითვლება.



ნამუშაო. ბირთვის რადიუსი სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი და დაყოფის წერტილებზე რადიუსის მართობული სიბრტყეებია გაგლეხული. იპოვეთ მიღებული ბირთვული სარტყელის ფართობი, თუ ბირთვის რადიუსი $r = 9$ იქნება.



ამოხსნა: რადგან $r = 9$, $h = 3$ ამიტომ ბირთვის სარტყელის ფართობი $S = 2\pi rh = 54\pi$ იქნება.

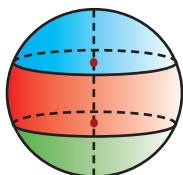
- 14.** 20 სმ რადიუსის მქონე ბირთვის ცენტრიდან ერთმანეთისაგან 8 სმ-იანი დაშორებით ორი პარალელური სიბრტყით ბირთვული სარტყელია გამოყოფილი.

ა) გამოთვალეთ ბირთვული სარტყლის ზედაპირის ფართობი.

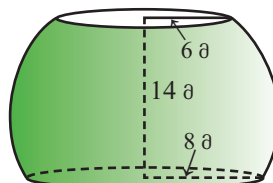
ბ) იპოვეთ თანაფარდობა ბირთვული სარტყლის ზედაპირის ფართობსა და ბირთვის ზედაპირის ფართობს შორის.

- 15.** ბირთვული სარტყლის ფართობი 48π სმ²-ია, სიმაღლე კი 4 სმ-ია. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.

- 16.** ბირთვის დიამეტრი 30 სმ-ია და ორი პარალელური სიბრტყით სამ ნაწილადაა გაყოფილი. იპოვეთ ბირთვიდან გამოყოფილი თითოეული ნაწილის სფერული ზედაპირის ფართობი.



- 17.** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ბირთვის სარტყლის ზედაპირის ფართობი.



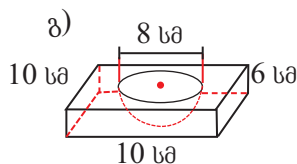
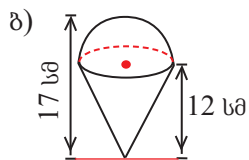
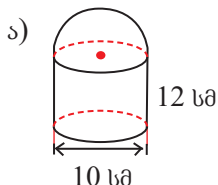
- 18.** ბირთვის სარტყლის ფუძეების რადიუსებია 20 სმ და 24 სმ, ბირთვის რადიუსი კი 25 სმ-ია. იპოვეთ ბირთვული სარტყლის ზედაპირის ფართობი. განიხილეთ ორი შემთხვევა.

- 19.** იპოვეთ ბირთვული სარტყლის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 7 სმ, ხოლო ფუძეების რადიუსები 16 სმ და 33 სმ-ია.

- 20.** ბირთვის რადიუსია R . იპოვეთ ბირთვული სარტყლის სიმაღლე, თუ ფუძეებიდან ერთი არის ბირთვის უდიდესი წრე, ხოლო გვერდითი ზედაპირი კი ფუძეების ფართობების ჯამის ტოლია.

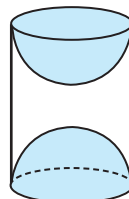
კომპლექსური ფიგურების ზედაპირის ფართობი

1. იპოვეთ ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი.

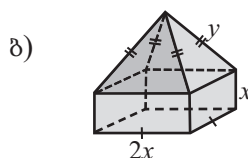
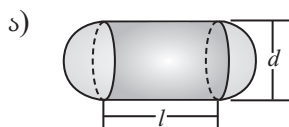


წესიერი პრიზმიდან ამოიჭრა ნახევარბირთვი

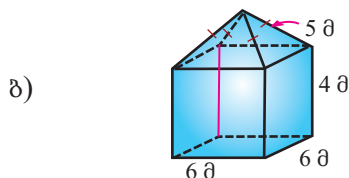
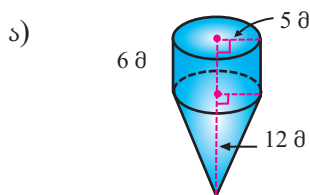
2. ცილინდრული ფორმის ხისაგან სურათზე ნაჩვენებების მსგავსად ორი ერთნაირი ნახევარსფეროს ამოჭრით სუვენირი დამზადეს. გამოთვალეთ მისი სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ცილინდრის სიმაღლე 10 სმ, ხოლო რადიუსი 4 სმ-ია.



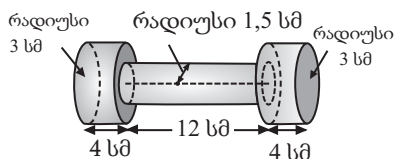
3. მოცემული ცვლადებით დაწერეთ ფორმულები ფიგურების სრული ზედაპირის გამოთვლისათვის.



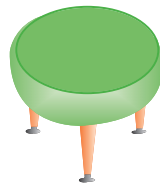
4. გამოთვალეთ ფიგურების ზედაპირის ფართობი.



5. სურათზე ნაჩვენები ზომის მეტალის კონსტრუქციის გალაქვა ხდება სპეციალური ტექნოლოგიით. 1 კვ.მ. ლაქით დაფარვისათვის 0,25 ლ ლაქი გამოიყენება. რამდენი ლიტრი ლაქი იქნება საჭირო 1000 ცალი ასეთი კონსტრუქციის გალაქვისათვის?



6. რეზიდს სურათზე ნაჩვენები ფორმის ტაბურეტის დამზადება სურს. მისი ფუძის ნაწილი არის ცილინდრის ფორმის 30 სმ რადიუსითა და 20 სმ სიმაღლით. ცილინდრის გვერდით ზედაპირსა და ზედა მხარეზე ქსოვილია გადაკრული. ნაკერებისა და ამოჭრილი ფორმების გამო გადასაკრავი ქსოვილი რეალურ ფართობთან შედარებით 20%-ით მეტი იქნა გამოყენებული. რეზიდს საამისოდ 1 მ² ქსოვილი აქვს. ეყოფა თუ არა ეს ქსოვილი გადასაკრავად?



7. ვეხბურთის ბურთის ზედაპირი ერთმანეთზე მიკერებული რამდენიმე წესიერი ექვსკუთხედისაგან (ჰექსაგონი) შედგება. ექვსკუთხედების ზომები სურათზეა ნაჩვენები.

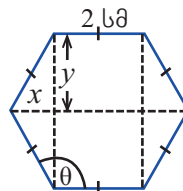
ა) იპოვეთ θ კუთხე.

ბ) იპოვეთ X და Y ცვლადების მნიშვნელობები.

გ) იპოვეთ სურათზე ნაჩვენები ტრაპეციის ფართობი.

დ) იპოვეთ ექვსკუთხედის ფართობი.

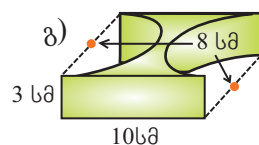
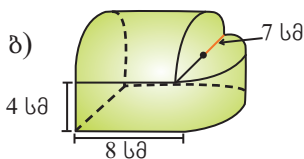
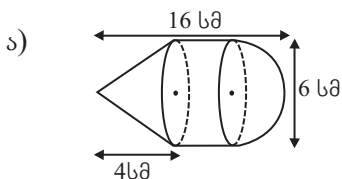
ე) იპოვეთ რამდენი ექვსკუთხედისაგან შედგება ბურთის ზედაპირი, თუ ბურთის ზედაპირის ფართობი $192\sqrt{3}$ სმ²-ია.



8. 2 სმ სიმაღლის აბი, 0,5 სმ დიამეტრიანი ცილინდრისა და ორი ნახევარსფეროსაგან შედგება. აბის მიღებისა და შეწოვის გაადვილებისათვის იგი სპეციალური ფენით არის დაფარული. გამოთვალეთ ამ ფენის ფართობი.



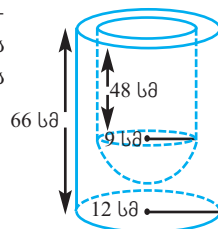
9. იპოვეთ ფიგურების ზედაპირის ფართობი.



10. 66 სმ სიმაღლისა და 12 სმ ფუძის რადიუსის მქონე პლასტიკური მასალისაგან 48 სმ სიმაღლისა და 9 სმ რადიუსის მქონე ცილინდრი, ხოლო შემდეგ სურათზე ნაჩვენების მსგავსი სფერულ ნაწილამოჭრილი ჭურჭელი დამზადდა.

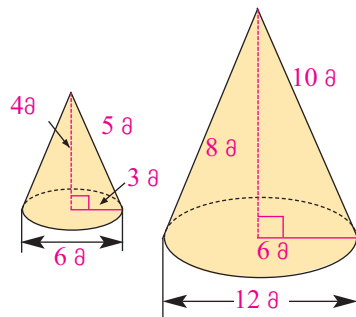
ა) იპოვეთ ჭურჭლის შიგა ზედაპირის ფართობი.

ბ) იპოვეთ ჭურჭლის გარე ზედაპირის ფართობი.



მსგავსი ფიგურების ზედაპირის ფართობი

მსგავსი სივრცითი ფიგურების შესაბამისი წრფივი ზომების შეფარდება მუდმივია და მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია. მაგალითად, იმისათვის, რომ შევამოწმოთ, სურათზე მოცემული კონუსები არიან თუ არა მსგავსი, ვიპოვოთ მოცემული შესაბამისი ზომების თანაფარდობა. თუ ეს კონუსები მსგავსია, რადიუსების შეფარდება სიმაღლეების შეფარდების ტოლი უნდა იყოს.



$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \quad \frac{12}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

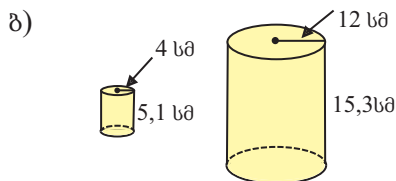
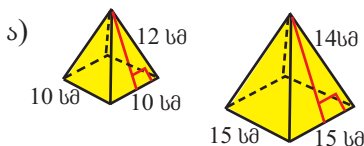
მაშასადამე, ეს ორი კონუსი მსგავსია და მსგავსების კოეფიციენტი 2-ია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მცირე კონუსის ყველა ზომა ორჯერ თუ გავზრდით, დიდი კონუსის კონგრუენტულ კონუსს მივიღებთ. ან კიდევ პირიქით, თუ დიდ კონუსს ორჯერ შევამცირებთ, მცირე კონუსის ზომისა და ფორმის კონუსს მივიღებთ. რაიმე ფიგურის პროპორციულად გაზრდითა და შემცირებით მათი მსგავსი ფიგურების მიღება შესაძლებელია.

მსგავსი ფიგურების ზედაპირების ფართობების შეფარდება, მათი შესაბამისი წრფივი ზომების შეფარდების კვადრატის ანუ მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია:

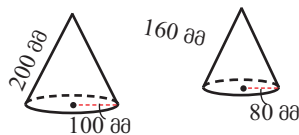
$$F_1 \sim F_2 \Rightarrow \frac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$$

სასწავლო დაგვლებები

1. განსაზღვრეთ არიან თუ არა მსგავსი ქვემოთ მოცემული ფიგურები.



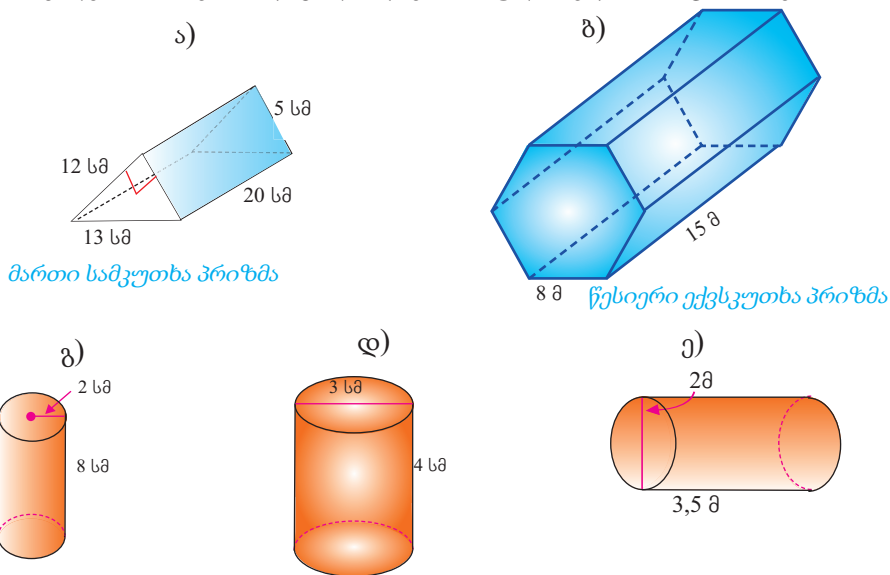
2. სურათზე მოცემულია მსგავსი კონუსები. იპოვეთ მათი სრული ზედაპირების ფართობების შეფარდება. გამოსახეთ მცირე კონუსის სიმაღლე დიდი კონუსის სიმაღლის საშუალებით.



3. ორი ბირთვის რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1: 3. იპოვეთ მცირე ბირთვის ზედაპირის ფართობი, თუ დიდი ბირთვის ზედაპირის ფართობი მცირე ბირთვის ზედაპირის ფართობზე $15\pi \text{ სმ}^2$ -ით მეტია
4. ორი მსგავსი ცილინდრის ზედაპირის ფართობია 48π და 108π კვადრატული ერთეული. თითოეული ცილინდრის დიამეტრი სიმაღლის ტოლია. იპოვეთ ცილინდრების რადიუსები და სიმაღლეები.

განმაზოგადებელი დაჯგუფებები

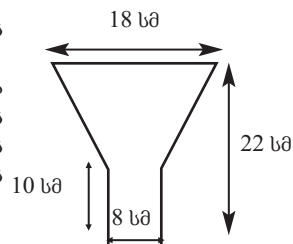
1. 5 სმ რადიუსის მქონე კონუსის ზედაპირის ფართობი ტოლია იმ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობისა, რომლის სიმაღლეც 4 სმ, ხოლო რადიუსი 5 სმ-ია. გამოთვალეთ კონუსის სიმაღლე.
2. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძის ფართობზე ორჯერ მეტია.
ა) დაწერეთ კონუსის მსახველის რადიუსზე (r) დამოკიდებულება.
ბ) რისი ტოლი იქნება ამ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ რადიუსი 6 სმ იქნება?
3. გამოთვალეთ პრიზმებისა და ცილინდრების სრული ზედაპირის ფართობები.



4. 8 სმ სიმაღლისა და 5 სმ დიამეტრის მქონე ცილინდრის ფორმის პარაფინიდან სურათზე მოცემული წესით ამოჭრა ხორციელდება. შემდეგ სანთლის სრული ზედაპირის სპეციალური პლასტიკით დაფარვით პარაფინის ზომის ცილინდრულ მუყაოს ყუთში ჩაიწყობა. 100 სანთლის ყუთისათვის კიდეც 5% მუყაოს დანაკარგის გათვალისწინებით, სულ მცირე რამდენი კვადრატული მეტრი მუყაო იქნება საჭირო?

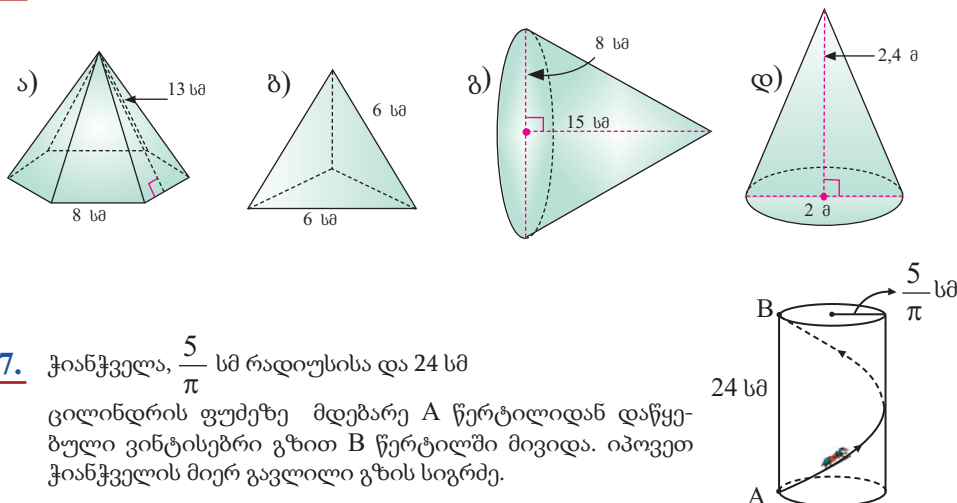


5. სურათზე ნაჩვენები რკინის კონსტრუქცია ხორბლის საცავიდან ხორბლის ჩამოშვების დროს გამოიყენება. სურათი 1: 20 მასშტაბით არის გადაღებული. კონსტრუქცია ცილინდრული და წაკვეთილი კონუსის ფორმის ნაწილებისაგან შედგება. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ ამ კონსტრუქციისათვის გამოყენებული მეტალის მასალა.



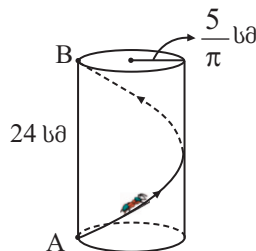
განმაზოგადებელი დაგალებები

6. გამოთვალეთ პირამიდებისა და კონუსების სრული ზედაპირის ფართობები.



7. ჭიანჭველა, $\frac{5}{\pi}$ სმ რადიუსისა და 24 სმ

ცილინდრის ფუძეზე მდებარე A წერტილიდან დაწყებული ვინტისებრი გზით B წერტილში მივიდა. იპოვეთ ჭიანჭველის მიერ გავლილი გზის სიგრძე.

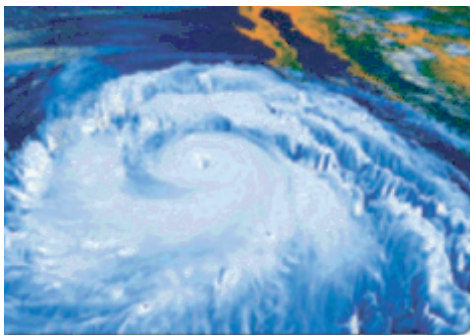


8. ბირთვის ზედაპირის მხებ სიბრტყეზე აღებული წერტილიდან შეხების წერტილამდე მანძილი 9 სმ, ხოლო ბირთვის ცენტრამდე მანძილი კი 15 სმ-ია. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის ფართობი.
9. კონუსის შლილი 8 სმ რადიუსისა და 90° -იანი კუთხის მქონე წრიული სექტორია. იპოვეთ ამ კონუსის ღერძული კვეთის ფართობი.
10. ცილინდრის მსახველი 10 სმ-ია. ცილინდრის მსახველზე ერთმანეთის მართობული, 30 სმ^2 და 40 სმ^2 ფართობების მქონე ორი სიბრტყითი კვეთია გავლებული. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.
11. R რადიუსიანი ბირთვის ცენტრიდან d_1 და d_2 მანძილზე მკვეთი პარალელური სიბრტყეებია გავლებული. იპოვეთ მიღებული ბირთვული სარტყლის ზედაპირის ფართობი. განიხილეთ ორი შემთხვევა..
12. წაკვეთილი კონუსის ღერძული კვეთის დიაგონალია d . იგი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხის შემქმნელი ტოლფერდა ტრაპეციაა. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი.
13. კონუსის ღერძული კვეთი არის ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის წვეროს კუთხეა 2α , სიმაღლე კი H. იპოვეთ: ა) კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი; ბ) კონუსის გვერდითი ზედაპირის გაშლისას მიღებული სექტორის ცენტრული კუთხე.
14. 5 სმ რადიუსიანი ბირთვიდან 1 სმ სიმაღლის მქონე სეგმენტი და წვეროს ბირთვის ცენტრში, ფუძედ კი სეგმენტის ფუძის მქონე კონუსია ამოკვეთილი. იპოვეთ დარჩენილი სხეულის ზედაპირის ფართობი.

- ცვლილების საშუალო სიჩქარე, ცვლილების მყისი სიჩქარე
- ფუნქციის წარმოებული
- მხედის განტოლება
- გაწარმოების წესები
- ნამრავლის გაწარმოების წესი
- განაყოფის გაწარმოების წესი
- რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი
- ამოცანების ამოხსნა წარმოებულის გამოყენებით
- მეორე რიგის წარმოებული
- მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების წარმოებული
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| ◆ ცვლილების საშუალო სიჩქარე | ◆ დიფერენცირება |
| ◆ ცვლილების მყისი სიჩქარე | ◆ მეორე რიგის წარმოებული |
| ◆ გრაფიკის მკვეთი | ◆ მარგინალური მნიშვნელობა |
| ◆ გრაფიკის მხედი | ◆ მარგინალური შემოსავალი |
| ◆ კუთხური კოეფიციენტი | ◆ მარგინალური მოგება |
| ◆ წარმოებული ფუნქცია | |
| ◆ დიფერენციალი | |



ცვლილების საშუალო სიჩქარე, ცვლილების მყისი სიჩქარე

ჩვენ დღემდე შესწავლილი ალგებრული წესებით რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესაბამის სტატისტიკურ ინფორმაციებს მოვიპოვებდით. თუმცა ხშირად წარმოებაში, ასევე მეცნიერების სხვადასხვა სფეროებში საჭირო ხდება უფრო დინამიკური ინფორმაციების მოპოვება, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ერთი ცვლადის გავლენით გვჭირდება ვნახოთ როგორ იცვლება მეორე ცვლადი. მაგალითად, რეკლამის მენეჯერს ხარჯების ყოველი ახალი თანხის შედეგად აინტერესებს, როგორც იცვლება შემოსავალი, ან ექიმს მიცემული წამლის დოზის ზრდისას აინტერესებს ღვიძლის სტრუქტურაში ცვლილების დინამიკა და ა.შ. განვიხილოთ მაგალითები ცვლილებით სიჩქარის განსაზღვრის შესახებ.

საშუალო სიჩქარე. სურათზე საავტომობილო მაგისტრალზე თანაბარსიჩქარიანი

მოძრაობისა და ქალაქში არათანა- $s(t)$

ბარსიჩქარიანი მოძრაობისას გავლილი

გზის დროზე დამოკიდებულების

გრაფიკებია მოცემული. თანაბარსი-

ჩქარიანი მოძრაობისას ტოლი დროის

მონაკვეთში გავლილი გზების სიგრძე

ტოლია და მოძრაობის გრაფიკის

ამსახველი წრფის კუთხური კოეფიციენტი

სიჩქარეს გვიჩვენებს. ცვლადსიჩქარიანი

მოძრაობისას კი ავტომობილის მიერ

თანატოლ დროის მონაკვეთებში გავლილი მანძილი შეიძლება არ იყოს თანატოლი. ამ

შემთხვევაში გამოიყენება საშუალო სიჩქარის მნიშვნელობა.

სხეულის მიერ განსაზღვრული დროის განმავლობაში გავლილი გზის ამ დროსთან

შეფარდების **საშუალო სიჩქარე** ეწოდება.

$$v_{\text{საშ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ნიმუში 1. წერტილი მოძრაობს წრფივად $s(t) = 0,5 t^2$

კანონით. იპოვეთ ა) $[1; 3]$, ბ) $[1; 2]$ დროით შუალედში

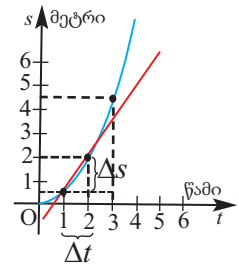
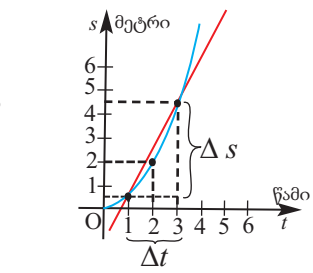
საშუალო სიჩქარე (s მეტრობით, t წამობით იზომება).

ამოხსნა: ა) $1 \leq t \leq 3$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{4,5 - 0,5}{2} = 2 \text{ (მ/წმ)}.$$

ბ) $1 \leq t \leq 2$ დროით შუალედში საშუალო სიჩქარე:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{2 - 0,5}{1} = 1,5 \text{ (მ/წმ)}.$$

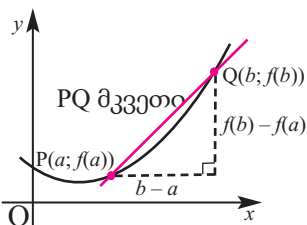


ცვლილების საშუალო სიჩქარე, ცვლილების მყისი სიჩქარე

ცვლილების საშუალო სიჩქარე

$f(x)$ ფუნქციის $a \leq x \leq b$ შუალედში საშუალო ცვლილების სიჩქარე $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ სახით მოიძებნება.

ეს განაყოფი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $(a; f(a))$ და $(b; f(b))$ წერტილებზე გაშვებული მკვეთის კუთხური კოეფიციენტის ტოლია.



მყისი სიჩქარე. გამოვიკვლიოთ მყისი სიჩქარე ქვემოთ მოცემულ მაგალითზე.

ნიმუში 2. ცხრილში $s = 0,5 t^2$ კანონით წრფივად მოძრაობი წერტილის Δt -ს ზოგიერთი მცირე მნიშვნელობებისათვის $[2; 2+\Delta t]$ დროის მონაკვეთში საშუალო სიჩქარე გამოთვლილი.

დროის მონაკვეთი	საშუალო სიჩქარე
$[2; 2,1]$	$\frac{s(2,1) - s(2)}{2,1 - 2} = \frac{2,205 - 2}{2,1 - 2} = \frac{0,205}{0,1} = 2,05$
$[2; 2,01]$	$\frac{s(2,01) - s(2)}{2,01 - 2} = \frac{2,02005 - 2}{2,01 - 2} = \frac{0,02005}{0,01} = 2,005$
$[2; 2,001]$	$\frac{s(2,001) - s(2)}{2,001 - 2} = \frac{2,0020005 - 2}{2,001 - 2} = \frac{0,0020005}{0,001} = 2,0005$

ცხრილის მიხედვით შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $t = 2$ წამის მყისი სიჩქარე 2 მ/წმ იქნება. საერთოდ, $[2; 2+\Delta t]$ დროის მონაკვეთში საშუალო სიჩქარე

$$\frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t} = \frac{0,5 \cdot (2+\Delta t)^2 - 0,5 \cdot 2^2}{\Delta t} = \frac{2\Delta t + 0,5(\Delta t^2)}{\Delta t} = 2 + 0,5\Delta t$$

იქნება. Δt -ს ნულთან მიახლოებით $[2; 2+\Delta t]$ დროის მონაკვეთის შემცირებით, ზღვრულ მდგომარეობაში $t = 2$ წამის მომენტისათვის ვიპოვით სიჩქარეს: $v(2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2 + 0,5\Delta t) = 2$.

ამრიგად, $s(t)$ კანონით წრფივად მოძრაობისას ნებისმიერ t მომენტში სიჩქარე

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \text{ იქნება.}$$

მსგავსი წესით ნებისმიერი ფუნქციისათვის $x = a$ წერტილში მომენტში ცვლილების

სიჩქარის $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ან $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ სახით გამოსახვა შეიძლება.

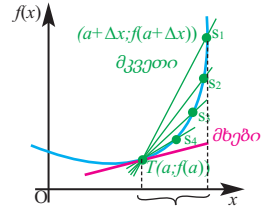
ცვლილების მყისი სიჩქარე

$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ზღვარი f ფუნქციის $x = a$ წერტილში მყისი ცვლილების სიჩქარეს გამოსახავს.

ცვლილების საშუალო სიჩქარე, ცვლილების მყისი სიჩქარე

ახლა კი მკვეთის მდებარეობის მრუდზე ცვლილების აღნიშვნით დავაკვირდეთ საშუალო სიჩქარის მყისი სიჩქარედ გადასვლას.

გრაფიკზე $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ წერტილები S წერტილის T წერტილის მიმართულებით ადგილშეცვლილი მდებარეობებია. აქ Δx -ის მნიშვნელობები რაც უფრო მცირდება და 0-ს უახლოვდება, S წერტილიც მრუდის გასწვრივ ადგილს იცვლის, T წერტილის უახლოვდება და ბოლოს მას დაემთხვევა.



მრუდზე დარჩენის პირობით S წერტილი რაც უფრო T წერტილს უახლოვდება TS მკვეთის ზღვრულ მდებარეობაში (თუ ზღვარი არსებობს) მყოფ წრფეს T წერტილში მრუდისადმი გავლებული **მხები** ეწოდება.

როცა $\Delta x \rightarrow 0$ მკვეთის კუთხური კოეფიციენტის მაჩვენებელი შეფარდების ზღვარი ანუ $f(x)$ ფუნქციის $x = a$ წერტილში მყისი ცვლილების ფუნქციის გრაფიკის $T(a; f(a))$ წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტის ტოლია

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

მაგალიტი 3. იპოვეთ თავისუფალი ვარდნისას სიჩქარე $t = 2$ წამის მომენტში.

ამოხსნა: თავისუფალი ვარდნისას სხეულის გავლილი მანძილის t დროზე

დამოკიდებულება $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ სახისაა. სადაც g თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა და

რადგან $g \approx 10$ (მ/წმ²), ამიტომ $s = 5t^2$ შეგვიძლია დავწეროთ.

მოძრაობის დაწყებიდან 2 წამის შემდეგ Δt წამიან დროის ინტერვალში საშუალო სიჩქარე $\frac{5 \cdot (2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2}{\Delta t}$ მ/წმ იქნება.

$t = 2$ წმ-ის მომენტში სიჩქარე ქვემოთ მოცემული ზღვრის მნიშვნელობის ტოლია:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5 \cdot (2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2}{\Delta t} = 5 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(2 + \Delta t)^2 - 2^2]}{\Delta t} = 5 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4 + \Delta t) = 20 \text{ (მ/წმ).}$$

მაგალიტი 4. მოცემულია ფუნქცია $y = x^2 + 3x$ იპოვეთ: ა) $1 \leq x \leq 3$ შუალედში

ცვლილების საშუალო სიჩქარე; ბ) მყისი სიჩქარე, როცა $x = 2$

ამოხსნა: ა) როცა $a = 1, b = 3$ საშუალო ცვლილების სიჩქარე

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{[3^2 + 3 \cdot 3] - [1^2 + 3 \cdot 1]}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ იქნება.}$$

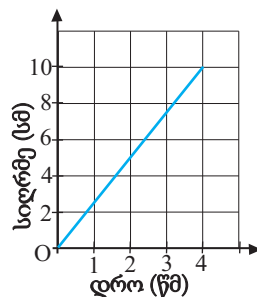
ბ) როცა $x = 2$, მომენტში ცვლილების სიჩქარე

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 + 3 \cdot (2 + \Delta x) - (2^2 + 3 \cdot 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 2 \cdot 2\Delta x + \Delta x^2 + 3 \cdot 2 + 3\Delta x - 2^2 - 3 \cdot 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 7) = 7 \text{ იქნება.} \end{aligned}$$

ცვლილების საშუალო სიჩქარე, ცვლილების მყისი სიჩქარე

სასწავლო დავალებები

1. წყლის ავტომატი 4 წამის განმავლობაში ჭიქას წყლით ავსებდა. გრაფიკი ჭიქაში არსებული წყლის დონის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილებას ასახავს. განსაზღვრეთ წყლის დონის ცვლილების სიჩქარე. სიჩქარე დროის რომელიმე ინტერვალში იცვლება?

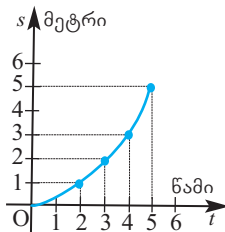


2. სურათზე გავლილი s მანძილის t დროზე დამოკიდებულებაა გამოსახული.

1) იპოვეთ საშუალო სიჩქარე მოცემული დროის მონაკვეთში:

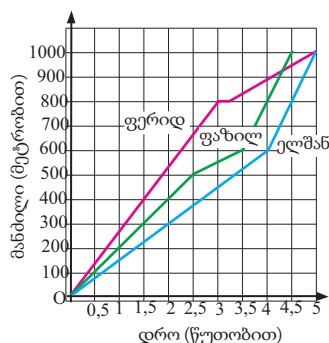
ა) $[0; 2]$ ბ) $[2; 3]$ გ) $[4; 5]$ დ) $[0; 5]$

2) ამ დავალებაში მიღებული შედეგები შეადარეთ პირველ დავალებაში მიღებულ შედეგებთან. განაზოგადეთ თქვენი მოსაზრებები.



3. გრაფიკი ასახავს ინფორმაციას სამი პირის მიერ 1000 მ მანძილზე სირბილის შესახებ.

ა) ვინ არის ამ შეჯიბრის გამარჯვებული? დაასაბუთეთ.
 ბ) დაწერეთ თითოეული სპორტსმენისათვის გარბენილ გზაზე სიჩქარის ცვლილების ამსახველი ინფორმაცია.

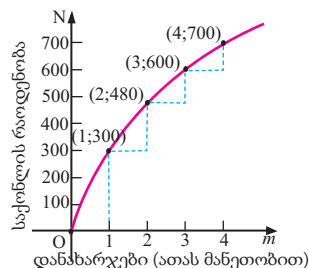


4. ცხრილის მიხედვით: ა) $-3 \leq x \leq -1$; ბ) $-3 \leq x \leq 3$; გ) $1 \leq x \leq 7$; დ) $3 \leq x \leq 9$ შუალედებში განსაზღვრეთ ცვლილების საშუალო სიჩქარე.

x	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
y	7	-5	-3	-1	5	12	21	48

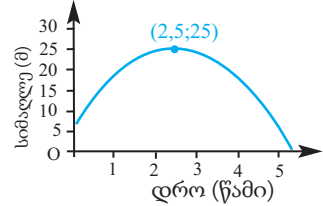
5. გრაფიკი ასახავს საქონლის $N(m)$ გაყიდული რაოდენობის ცვლილების რეკლამაზე გაწეული ფულად დანახარჯებზე (m , ათას მანეთობით) დამოკიდებულებას.

ა) განსაზღვრეთ m -ის ცვლილებით $N(m)$ -ის ცვლილება.
 ბ) იზრდება თუ კლებულობს საშუალო სიჩქარე m -ის ზრდის შედეგად? როგორ განმარტავდით ამას რეალური სიტუაციის შესაბამისად?



ცვლილების საშუალო სიჩქარე, ცვლილების მყისი სიჩქარე

6. გრაფიკი ასახავს ზევით ასროლილი ბურთის მოძრაობას.



- 1) მაქსიმუმ, რა სიმაღლემდე ავიდა ბურთი?
- 2) რომელი სიმაღლიდან იქნა ბურთი ჰაერში ასროლილი?
- 3) დროის რომელ შუალედში მცირდებოდა ბურთის დედამიწიდან სიმაღლე?
- 4) მოცემული დროის ინტერვალებში (წამობით) იპოვეთ ბურთის დედამიწიდან სიმაღლით ცვლილების საშუალო მნიშვნელობა ა) 0-დან 1-მდე; ბ) 3-დან 4-მდე.

7. ზღვაში არსებული ნავთობის ერთ-ერთი პლატფორმიდან მოხდა ნავთობის გაჟონვა. ჩაღვრის შედეგად ზღვაში გავრცელება ყოველ 30 წამში 1 მ რადიუსის მატებით წრის სახით ხდებოდა



- 1) შეადგინეთ ცხრილი და ააგეთ გრაფიკი, რომელიც ასახავს ინფორმაციას მე-2 წუთიდან 30-ე წუთამდე ნავთობის გავრცელების ფართობის შესახებ.
- 2) იპოვეთ მოცემული დროის ინტერვალებში გავრცელების სიჩქარის საშუალო ცვლილება:

- ა) პირველ 5 წუთში; ბ) მორიგ 10 წუთში; გ) პირველი 30 წუთის განმავლობაში.
- 3) იპოვეთ სხვაობა მე-5 წუთზე გავრცელების სიჩქარესა და მე-20 წუთზე გავრცელების სიჩქარეს (შორის.) რისთვის შეიძლება იყოს ეს ინფორმაცია გამოსადეგი?

8. თითოეული ფუნქციისათვის შეავსეთ ცხრილი.

ა) $f(x) = 4x^2$

ბ) $f(x) = -5x^2$

გ) $f(x) = x^2 + x$

დ) $f(x) = \frac{2}{x}$

x	h	$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
5	2	
5	1	
5	0,1	
5	0,01	

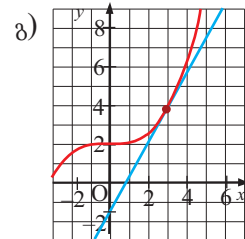
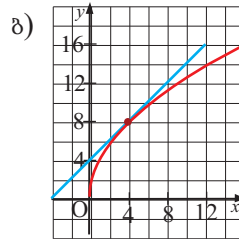
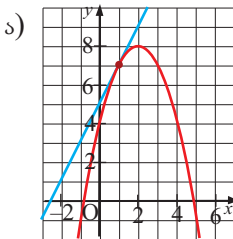
9. იპოვეთ $f(x) = 2^x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისების

ა) $x_1 = 0$ და $x_2 = 1$;

ბ) $x_1 = 1$ და $x_2 = 2$

წერტილებში მკვეთი წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

10. ივარაუდეთ გრაფიკებზე გავლებული მხებების კუთხური კოეფიციენტი. რომელი სიჩქარის მაჩვენებელია ეს: მყისი თუ საშუალო?

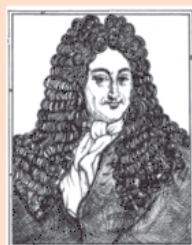


11. წრფივად მოძრავი სხეულის გავლილი გზის დროზე დამოკიდებულება $s(t) = t^2 + 3t + 2$ ფუნქციითაა მოცემული. (s -მეტრობით, t -წამობით იზომება). იპოვეთ სხეულის სიჩქარე მოცემულ მომენტში:

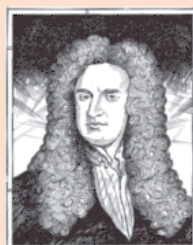
ა) $t = 1$; ბ) $t = 5$.

ფუნქციის წარმოებული

მომენტში ცვლილების სიჩქარის გამოთვლის აუცილებლობამ ისააკ ნიუტონისა (1642-1727) და გოტფრიდ ლაიბნიცის (1646-1716) მიერ გამოთვლების ყველაზე საფუძვლიანი და ძლიერი წესის, დიფერენციალის გამოთვლის ფორმირება გამოიწვია. ამ წესის სრულყოფამ წარმოშვა ისეთი ცნება, როგორცაა „წარმოებული“.



ისააკ ნიუტონი (1642-1727)

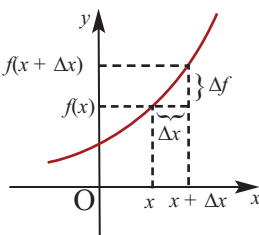


გოტფრიდ ლაიბნიცი (1646-1716)

მყისი სიჩქარე და მრუდისადმი გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტის პოვნის ამოცანები არსით ერთი და იგივეა და განსაზღვრული ფუნქციის მყისი ცვლილების პოვნაზე დაიყვანება. ახლა კი განვაზოგადოთ ეს ცნებები.

ფუნქციის წარმოებული. წარმოებული ფუნქცია

დავუშვათ, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a; b)$ ინტერვალზე. ავღნიშნოთ რაიმე $x \in (a; b)$ წერტილი და არგუმენტს მივანიჭოთ ისეთი Δx ნაზრდი, რომ $x + \Delta x \in (a; b)$ გახდეს. მაშინ, ფუნქცია შესაბამის $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ ნაზრდს მიიღებს.



განსაზღვრება: თუ არგუმენტის ნაზრდის ნულისაკენ მისწრაფებისას ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდებას სასრული ზღვარი გააჩნია, ამ ზღვარს $f(x)$ ფუნქციის x წერტილში წარმოებული ეწოდება და ასე იწერება:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f ფუნქციის წარმოებული ახალი ფუნქციაა და იგი $f'(x)$ -თან ერთად $\frac{df}{dx}$ სახითაც (ლაიბნიცის ჩანაწერი) აღინიშნება.

თუ x წერტილში $f(x)$ ფუნქციას $f'(x)$ წარმოებული აქვს, ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ამ წერტილში **დიფერენცირებადი**ა. ფუნქციას, რომელიც მოცემული ინტერვალის თითოეულ წერტილში არის დიფერენცირებადი, მოცემულ ინტერვალზე დიფერენცირებადი ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციის წარმოებულის პოვნას **გაწარმოების (დიფერენცირების) მოქმედება** ეწოდება.

წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით პოვნისათვის ქვემოთ მოცემული მოქმედებების შესრულებაა საჭირო:

1. გამოითვლება $f(x + \Delta x)$.
2. გამარტივდება სხვაობა: $f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ განაყოფი დაიწერება და გამარტივდება.

4. $\Delta x \rightarrow 0$ პირობით გამოითვლება $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ზღვარი (თუ არსებობს).

ფუნქციის წარმოებული

ნიმუში 1. იპოვეთ $f(x) = kx + b$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული.

ამოხსნა:

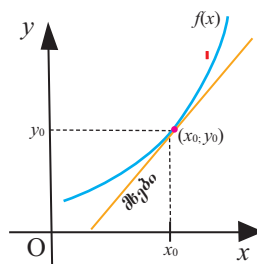
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(x + \Delta x) + b - (kx + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k$$

მაშასადამე, $(kx + b)' = k$. როცა $k = 1$, $b = 0$ მაშინ მივიღებთ: $(x)' = 1$

წარმოებულის გეომეტრიული აზრი. მხედის განტოლება

თუ $y = f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, მისი გრაფიკის $(x_0; f(x_0))$ წერტილზე მხედის გავლება შეიძლება.

ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა x_0 წერტილში, აბსცისის x_0 წერტილში გრაფიკისადმი გავლებული მხედის კუთხური კოეფიციენტის ტოლია: $k_{\text{მხ}} = f'(x_0)$.



$(x_0; y_0)$ წერტილზე გამავალი და k კუთხური კოეფიციენტის მქონე წრფის განტოლება $y - y_0 = k(x - x_0)$ სახისაა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ x_0 აბსცისის მქონე წერტილის ორდინატია $y_0 = f(x_0)$, მხედის კუთხური კოეფიციენტი კი $k = f'(x_0)$ -ია, მაშინ, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის x_0 აბსცისის წერტილში გავლებული მხედის განტოლება

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ იქნება.}$$

ნიმუში 2. $f(x) = x^2$ ფუნქციისათვის დაწერეთ: ა) წარმოებული; ბ) $f'(-3)$ და $f'(4)$ მნიშვნელობები; გ) ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x = -3$ წერტილში გავლებული მხედის განტოლება.

ამოხსნა:

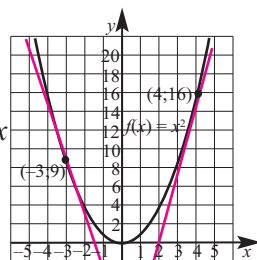
ა) განსაზღვრების თანახმად წარმოებული $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ სახით მოიძებნება.

$$1. f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$2. f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x \Delta x + \Delta x^2) - x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$$

$$3. \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{(2x + \Delta x) \Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$4. f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$



$f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x) = 2x$ ფუნქციაა. როგორც ხედავთ, კვადრატული ფუნქციის წარმოებული წრფივი ფუნქციაა: $(x^2)' = 2x$

ბ) რადგან $f'(x) = 2x$, ამიტომ, $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$; $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$

ფუნქციის წარმოებული

გ) წრფის $y - y_0 = k(x - x_0)$ ფორმულის მიხედვით დავწეროთ მხედის განტოლება.
რადგან $f'(-3) = -6$ ამიტომ აბსცისის $x_0 = -3$ წერტილში მხედის კუთხური კოეფიციენტი $k = -6$ -ია. გრაფიკზე აბსცისის $x_0 = -3$ წერტილის ორდინატი $y_0 = f(-3) = 9$ -ია. თუ ამ მნიშვნელობებს შევითანთ ადგილებზე, აბსცისის $x_0 = -3$ წერტილში მხედის განტოლება: $y - 9 = -6(x + 3)$ ანუ $y = -6x - 9$ იქნება.

წარმოებული გამოთვლების მიხედვით ფუნქციის შესახებ შეიძლება ითქვას:

- $(-3; 9)$ წერტილში მხედის კუთხური კოეფიციენტი $k = -6$.
- $(4; 16)$ წერტილში მხედის კუთხური კოეფიციენტი $k = 8$.
- $x = -3$ მნიშვნელობისათვის ცვლილების მყისი სიჩქარეა -6 .
- $x = 4$ მნიშვნელობისათვის ცვლილების მყისი სიჩქარეა 8 .
- აბსცისა $x_0 = -3$ წერტილში მხედის განტოლება $y = -6x - 9$ წრფეა.

ნიმუში 3. იპოვეთ $f(x) = x^3$ ფუნქციის ა) წარმოებული;

ბ) $f'(-1)$ და $f'(1,5)$ მნიშვნელობები.

ამოხსნა:

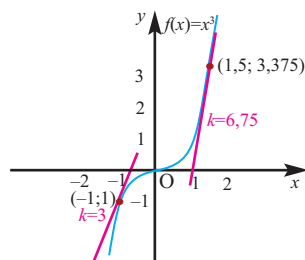
ა) 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$

3. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

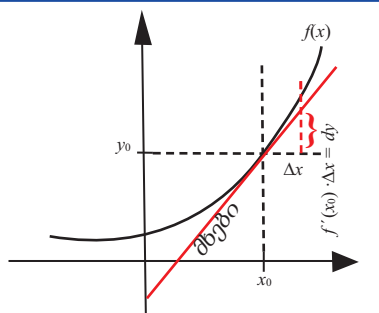
4. $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$

მაშასადამე, $f(x) = x^3$ ფუნქციის წარმოებული კვადრატული ფუნქციაა: $(x^3)' = 3x^2$.



ბ) რადგან $f'(x) = 3x^2$, ამიტომ $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$ და $f'(1,5) = 3 \cdot (1,5)^2 = 6,75$.

$f'(x_0) \cdot \Delta x$ -ს ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება და dy -ით აღინიშნება. როგორც ხედავთ, დიფერენციალი Δx -ზე დამოკიდებული ფუნქციაა. რადგან $y = x$ ფუნქციისათვის $x' = 1$, ამიტომ $dx = \Delta x$ მივიღებთ. ამიტომაც $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი $df = f'(x) dx$ სახით აღინიშნება. დიფერენციალი ფუნქციის ზრდის მთავარ (ძირითად) ნაწილს შეადგენს და $\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$.



ფუნქციის წარმოებული

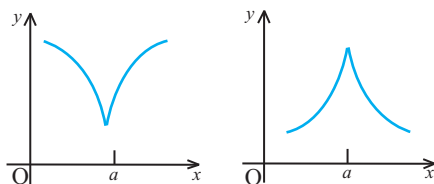
წერტილები, რომლებშიც ფუნქციას წარმოებული არ გააჩნია.

თუ ფუნქცია x_0 წერტილში დიფერენცირებადია (წარმოებადია), რადგან როცა $\Delta x \rightarrow 0$ მაშინ $\Delta f \rightarrow 0$, ამიტომ ფუნქცია ამ წერტილში უწყვეტია. თუმცა ამ დებულების შებრუნებული საერთოდ არ არის მართებული. ზოგჯერ ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრულ წერტილებშიც შეიძლება წარმოებული არ არსებობდეს.

წარმოებული გრაფიკზე გავლებული მხეების კუთხური კოეფიციენტით განისაზღვრება. მრუდს, რომელსაც ყველა წერტილში აქვს მხეები **გლუვი მრუდი** ეწოდება. გრაფიკზე შეიძლება არსებობდეს ისეთი წერტილები, რომ ამ წერტილში მოცემული მრუდისადმი მხეების გავლება არ იყოს შესაძლებელი ან კიდევ მხეები ვერტიკალურია. ასეთ წერტილებში ფუნქციას წარმოებული არა აქვს.

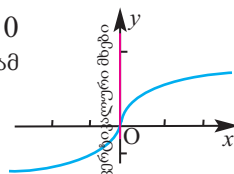
ქვემოთ ასეთი შემთხვევის რამდენიმე ნიმუშია ნაჩვენები.

1) “V” სახის გრაფიკის მქონე ფუნქციებს (ზოგიერთი ნაწილ-ნაწილ ფუნქციები, მოდულიანი ფუნქციები და სხვ.) „გარდატეხის“ წერტილებში წარმოებული არ გააჩნია.



2) როცა გრაფიკის მხეები ვერტიკალურია, (Y ღერძზე დამთხვევისას ან პარალელურობის შემთხვევაში), მხებს აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში ფუნქციას წარმოებული არ გააჩნია.

მაგალითად, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x_0 = 0$ წერტილში გავლებული მხეები ვერტიკალური წრფეა და ამ წერტილში ფუნქციას წარმოებული არ გააჩნია.

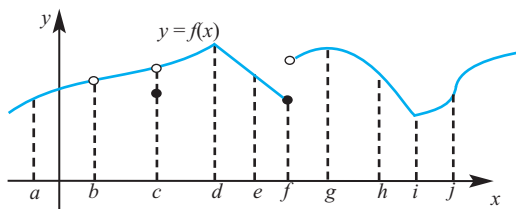


3) ფუნქციას წვეკეტის წერტილებში წარმოებული არ გააჩნია.

ნიშუში 4. სურათზე $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული. არგუმენტის აბსცისთა ღერძზე აღნიშნულ, რომელ წერტილებში ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული?

ამოხსნა: $y = f(x)$ ფუნქციას წარმოებული არ გააჩნია.

* b, c, f წერტილებში - იმის გამო, რომ ამ წერტილებში ფუნქცია წვეკეტადია;



* d და i წერტილებში - იმის გამო, რომ “გარდატეხის” წერტილებია;

* j წერტილში - იმის გამო, რომ მხეები ვერტიკალური წრფეა.

სასწავლო დავალებები

1. თითოეულ შემთხვევაში განსაზღვრეთ რომელი ფუნქციის წარმოებულს ვპოულობთ და დაასრულეთ ზღვრის გამოთვლით.

$$ა) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$ბ) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^3 - 3x^3}{h}$$

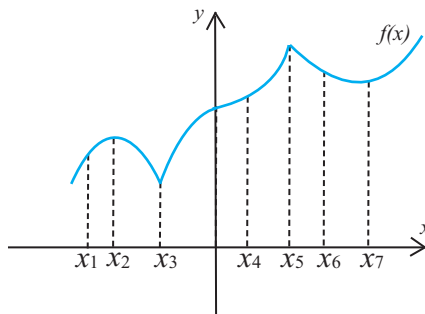
ფუნქციის წარმოებული

2. ა) იპოვეთ $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული. დაწერეთ ფუნქციისა და წარმოებული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.
ბ) იპოვეთ $y = 2x^2$ და $y = -3x^2$ ფუნქციების წარმოებული.

3. 1) $f(x) = 3x^2$ 2) $f(x) = -2x^2$ 3) $f(x) = -2x + 5$ 4) $f(x) = x^3$
ფუნქციებია მოცემული. ამ ფუნქციების მიხედვით შეასრულეთ:
ა) სქემატურად დახაზეთ გრაფიკები.
ბ) გაავლეთ გრაფიკების მხები წერტილებში, რომელთა აბსცისებია $-2; 0; 1$.
გ) განსაზღვრების მიხედვით, ზღვრის დახმარებით იპოვეთ $f'(x)$ წარმოებული.
დ) იპოვეთ წარმოებულის მნიშვნელობა ბ პუნქტში მოცემულ წერტილებში და შეადარეთ მხების კუთხური კოეფიციენტის სავარაუდო მნიშვნელობასთან.

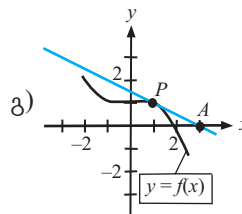
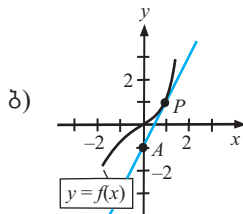
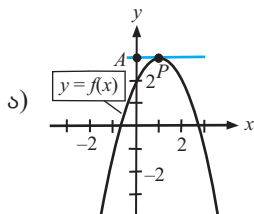
4. არგუმენტის აბსცისთა ღერძზე აღნიშნულ რომელ წერტილებშია ფუნქციის წარმოებული:

- ა) ნულის ტოლი;
ბ) ნულზე მეტი;
გ) ნულზე ნაკლები;
დ) არ არსებობს?



5. ა) დახაზეთ ისეთი გრაფიკი, რომ $x = 5$ წერტილში მხები არ ჰქონდეს.
ბ) დახაზეთ ისეთი გრაფიკი, რომ $x = 2$ წერტილში ჰორიზონტალური მხები ჰქონდეს.
გ) დახაზეთ ისეთი გრაფიკი, რომ აბსცისის $x = 0, x = 3, x = 6$ წერტილებში ჰქონდეს ჰორიზონტალური მხებები, ხოლო აბსცისის $x = 2$ წერტილში მხები არ გააჩნდეს.

6. სურათზე $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x = 1$ მქონე P წერტილში გავლებული მხებია ნაჩვენები. აწერტილი კი მხებზე მდებარე წერტილია. მხების კუთხური კოეფიციენტის მიხედვით იპოვეთ $f'(1)$.

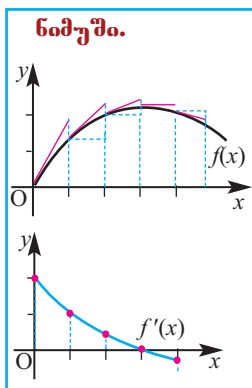


7. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული. დაწერეთ აღნიშნულ წერტილებში მხების განტოლებები.

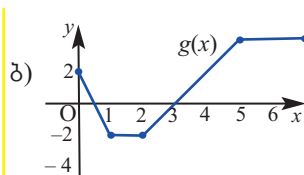
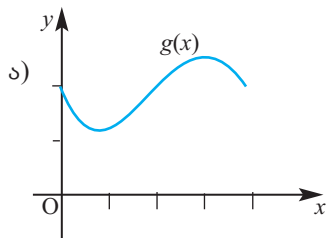
- | | | | |
|-----------------|------------|----------|-------------|
| 1) $f(x) = x^2$ | ა) (2;4) | ბ) (0;0) | გ) (10;100) |
| 2) $f(x) = x^3$ | ა) (-1;-1) | ბ) (2;8) | გ) (-2;-8) |

ფუნქციის წარმოებული

8.

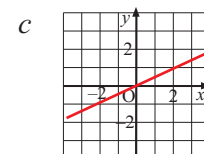
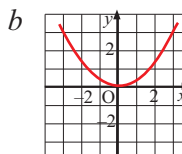
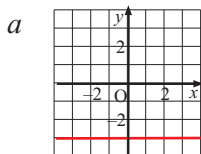
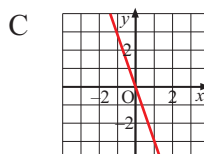
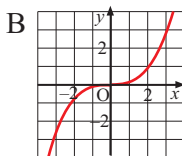
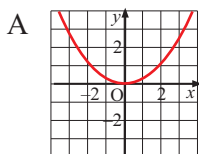


ნიმუშში $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებული მხეხების კუთხური კოეფიციენტების მნიშვნელობების $f'(x)$ მიხედვით წარმოებული ფუნქციის გრაფიკის აგებაა ნაჩვენები. გამოიკვლიეთ ნიმუში, $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით სქემატურად დახაზეთ წარმოებული ფუნქციის გრაფიკი.



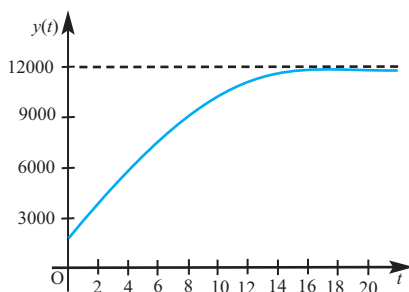
9.

A, B, C ფუნქციის გრაფიკებს, ხოლო a , b , c წარმოებული ფუნქციის გრაფიკებს უჩვენებს. განსაზღვრეთ შესაბამისობა.



10.

ზღვის ერთ-ერთ ცხოველზე დაკვირვების წარმოებისას მათი მატება სურათზე მოცემული გრაფიკის სახით განისაზღვრა. სქემატურად დახაზეთ მათი მატების სიჩქარის მაჩვენებელი გრაფიკი.



11.

ცხოველების ახალი საკვების გამოკვლევისას 6 კვირის განმავლობაში დაკვირვებით საკვებზე დამოკიდებულებით ხზოს მასის კვირულად $m(t) = \sqrt{t} + 40$ ფუნქციით ცვლილება გამოავლინეს.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}$$

ზღვრის გამოთვლით განსაზღვრეთ კვირულის ცვლილების სიჩქარე.



გაწარმოების წესები

ჩვენ, წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით განვსაზღვროთ ზოგიერთი ფუნქციის, მაგალითად, $y = x^2$, $y = x^3$ ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული. მრავალწევრა ფუნქციების წარმოებულის პოვნისათვის ვიყენებთ წარმოებულის მოძებნის ქვემოთ მოცემულ წესებს:

მუდმივის წარმოებული	$C' = 0$
ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული	$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$
მუდმივის ფუნქციაზე ნამრავლის წარმოებული	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
ჯამის (სხვაობის) წარმოებული	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

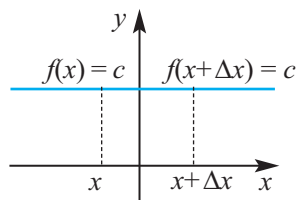
წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით დავამტკიცოთ ეს წესები.

1. თუ $f(x) = c$, მაშინ $f'(x) = 0$, ანუ მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია.

დამტკიცება:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

მუდმივი ფუნქციის გრაფიკიდანაც ჩანს, რომ გრაფიკის ყველა წერტილში კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობა ნულია.



2. თუ $n \in \mathbb{N}$ და $f(x) = x^n$, მაშინ $f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = x^n$ ფუნქციისათვის დავწეროთ $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$ მნიშვნელობის შესაბამისი ბინომიალური შლილები.

$$\begin{aligned} (x+\Delta x)^1 &= x + \Delta x \\ (x+\Delta x)^2 &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \\ (x+\Delta x)^3 &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 \\ (x+\Delta x)^4 &= x^4 + 4x^3\Delta x + 4x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 \end{aligned}$$

როგორც ხედავთ, თითოეულ დანაშაღში პირველი წევრია x^n , მეორე წევრი კი $n \cdot x^{n-1} \Delta x$. სამკუთხა ფორმის ფერად ნაწილში არსებულ თითოეულ წევრს $(\Delta x)^2$ მამრავლი აქვს. $(x+\Delta x)^n$ ბინომის დანაშაღი სიმარტივისათვის ჩავწეროთ ქვემოთ მოცემული სახით

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n$$

დავწეროთ და გავამარტივოთ ფუნქციის მყისი ცვლილების სიჩქარის მაჩვენებელი განაყოფი

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n - x^n}{\Delta x} =$$

გაწარმოების წესები

$$= \frac{\Delta x (nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n)}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n$$

ამ გამოსახულების $\Delta x \rightarrow 0$ პირობით, ზღვარი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულია:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n) = nx^{n-1}$$

მაშასადამე, ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $n = 1, 2, 3$ მივიღებთ $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.

საერთოდ, ნებისმიერი ნამდვილმამკვენებლიანი ფუნქციისათვის $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$

ფორმულა მარჯვენა მხარის აზრის მქონე x -ებისათვის მართებულია.

კერძო შემთხვევაში: $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

ნიმუში 1. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული:

ა) $y = x^4$; ბ) $y = \frac{1}{x^5}$; გ) $y = \sqrt[3]{x}$;

ამოხსნა: ა) $y' = (x^4)' = 4x^3$;

ბ) $y' = (\frac{1}{x^5})' = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -5 \cdot \frac{1}{x^6} = -\frac{5}{x^6}$;

გ) $y' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

3. როცა $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი c მუდმივისათვის

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),$$

ანუ მუდმივი მამრავლის წარმოებულის ნიშნის გარეთ გატანა შეიძლება. მართლაც

$$[c \cdot f(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ მათი ჯამიც (სხვაობაც)

წარმოებადია და

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

დამტკიცება. ფუნქციისათვის ვუჩვენოთ $h(x) = f(x) + g(x)$ ფორმულის მართებულობა:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

გაწარმოების წესები

ნიმუში 2. იპოვეთ $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: $f'(x) = (x^3 - 2x + 3)' = (x^3)' - (2x)' + (3)' = 3x^2 - 2$

ნიმუში 3. იპოვეთ წარმოებული $\frac{d}{dx}(3\sqrt{x} + \frac{2}{x})$

ამოხსნა: $\frac{d}{dx}(3\sqrt{x} + \frac{2}{x}) = \frac{d}{dx}(3\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(\frac{2}{x}) = 3 \frac{d}{dx}(x^{1/2}) + 2 \frac{d}{dx}(x^{-1}) =$
 $= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - 2x^{-2} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

სასწავლო დაფალებები

- 1.** ჯერ შეარჩიეთ ის ფუნქციები, რომელთა წარმოებულიც ნულის ტოლია. შემდეგ იპოვეთ დანარჩენი ფუნქციების წარმოებული.

$$f(x) = \sqrt{11} \quad f(x) = 2x^{-2} \quad f(x) = 4,5\pi \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad f(x) = \frac{5}{x^3}$$

- 2.** იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

$$ა) y = x \quad ბ) y = \frac{1}{4}x^2 \quad გ) y = x^5 \quad დ) y = -3x^4$$

$$ე) y = 1,5x^3 \quad ვ) y = \sqrt[5]{x^3} \quad ზ) y = \frac{5}{x} \quad თ) y = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

- 3.** იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

$$ა) f(x) = 2x^2 + x^3 \quad ბ) y = \frac{4}{5}x^5 - 3x \quad გ) h(t) = -1,1t^4 + 78$$

$$დ) p(x) = \frac{x^2}{4} - 2\sqrt{x} \quad ე) V(r) = \frac{4}{2}\pi r^3 \quad ვ) g(s) = -\frac{1}{s^2} + 7s^2$$

- 4.** იპოვეთ წარმოებულები.

$$1) \frac{d}{dx}(5x^2 - 7x + 3) \quad 2) \frac{d}{dx}(\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x}) \quad 3) \frac{d}{dx}(-\sqrt[4]{x^3}) \quad 4) \frac{d}{dx}(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})$$

- 5.** გაამარტივეთ ფუნქციის მოცემული გამოსახულებები და იპოვეთ წარმოებული.

$$ა) f(x) = (x-3)(x+1) \quad ბ) f(x) = x^2 \cdot (3-x) \quad გ) f(x) = \sqrt{x} \cdot (1-2\sqrt{x})$$

$$დ) y = \frac{x^3 + x + 2}{x} \quad ე) y = \frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^2} \quad ვ) y = \frac{3x^4 - 6x^3}{x-2}$$

- 6.** მოცემულ წერტილებში გამოთვალეთ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა.

$$ა) f(x) = x^3 + 4x, x = 0, x = 2 \quad ბ) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}, x = 1, x = 4$$

- 7.** x - ის რა მნიშვნელობებისათვის არის ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლი?

$$ა) f(x) = x^4 - 4x^2 + 1 \quad ბ) f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2$$

- 8.** ამოხსენით უტოლობა: $f'(x) > 0$

$$ა) f(x) = x + \frac{x^2}{4}; \quad ბ) f(x) = 3x^2 - x^3$$

- 9.** ჯერ გაამარტივეთ $f(x) = (x+1)(x-1)^2$ ფუნქციის გამოსახულება, შემდეგ იპოვეთ წარმოებული.

გაწარმოების წესები

10. მოცემულია $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 2$ ფუნქცია. იპოვეთ a და b , თუ $f(2) = 10$ და $f'(-1) = 14$.

11. ფორმულით დაწერეთ სულ მცირე ერთი ფუნქცია მაინც, რომლის წარმოებულია:

ა) 2; ბ) $2x + 3$; გ) $3x + \frac{2}{\sqrt{x}}$;

გამოყენებითი ამოცანები. მხედის განტოლება, კუთხური კოეფიციენტი.

ნიმუში. ა) $f(x) = -x^3 + 6x^2$ ფუნქციის გრაფიკის რომელ წერტილებში გავლებული მხედებია აბსცისთა ღერძის პარალელური?

ბ) განსაზღვრეთ იმ წერტილის კოორდინატები რომლის ფუნქციის გრაფიკზე მხედის კუთხური კოეფიციენტი 9.

ამოხსნა: ა) თუ მხედი აბსცისთა ღერძის პარალელურია, კუთხური კოეფიციენტი 0-ის ტოლია.

მხედის კუთხური კოეფიციენტის 0-ის ტოლ წერტილებში $f'(x) = 0$ ხდება.

ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x) = (-x^3 + 6x^2)' = -3x^2 + 12x$$

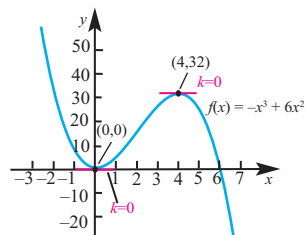
ვიპოვოთ წერტილები, რომლებშიც წარმოებული 0-ის ტოლია.

$$-3x^2 + 12x = 0, \quad -3x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები ამ წერტილებში:



$$f(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0; \quad (0;0) \quad f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = 32; \quad (4;32)$$

გრაფიკულად აგებული გრაფიკიდან ჩანს, რომ, (0;0) და (4;32) წერტილებში გრაფიკის მხედი აბსცისთა ღერძის პარალელურია.

ბ) ვიპოვოთ წერტილები, რომლებშიც კუთხური კოეფიციენტი 9-ის ტოლია:

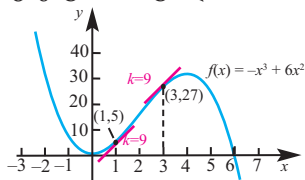
$$-3x^2 + 12x = 9$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1; \quad y_1 = 5; \quad (1; 5)$$

$$x_2 = 3; \quad y_2 = 27 \quad (3; 27)$$



გრაფიკზე მდებარე (1;5) და (3;27) წერტილებში მხედის კუთხური კოეფიციენტი 9-ის ტოლია.

12. უჩვენეთ, რომ $f(x) = 6x^3 + 2x^2$ ფუნქციის გრაფიკისათვის კუთხური კოეფიციენტი $k = -5$ მქონე მხედის გავლება შეუძლებელია.

13. გააჩნიათ თუ არა მოცემულ ფუნქციებს ჰორიზონტალური მხედები?

1) $y = x^2 - 3$

2) $y = -x^2 + 4$

3) $y = -x^3 + 1$

4) $y = x^3 - 2$

5) $y = 3x^2 - 5x + 4$

6) $y = 5x^2 - 3x + 8$

14. იპოვეთ $y = -3x^4 + 2x^3 + 5$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x_0 = 1$ წერტილში გავლებული მხედის კუთხური კოეფიციენტი და დაწერეთ ამ მხედის განტოლება.

გაწარმოების წესები

15. განსაზღვრეთ წერტილები, რომლებშიც მოცემულ ფუნქციათა გრაფიკებზე მხების კუთხური კოეფიციენტი 1-ის ტოლია.

$$1) y = 20 - x^2 \quad 2) y = 6x - x^2 \quad 3) y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x$$

16. ა) $f(x) = 3x^2$ და $g(x) = x^3$ ფუნქციებისათვის იპოვეთ x -ის ისეთი მნიშვნელობები, რომ შესაბამის წერტილებში ორივე გრაფიკისადმი გავლებული მხებების კუთხური კოეფიციენტები ტოლი იყოს.

ბ) დაწერეთ ა პუნქტში თქვენს მიერ ნაპოვნ წერტილებში ორივე ფუნქციის გრაფიკისადმი გავრცელებული მხებების განტოლება.

17. $y = x^2 - x + 1$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომ ამ წერტილში გავლებული მხები $y = 3x + 2$ წრფის პარალელური იყოს. დაწერეთ ამ მხების განტოლება.

18. იპოვეთ $y = 4x - x^2$ პარაბოლის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილებში მხებების კუთხური კოეფიციენტები.

19. დაწერეთ $(1; -5)$ წერტილზე გამავალი და $y = x^2 - 2$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფის განტოლება.

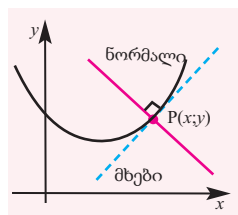
20. ა) იპოვეთ $g(x) = x^3$, $p(x) = x^3 - 3$, $q(x) = x^3 + 2$ ფუნქციების წარმოებული.
ბ) განაზოგადეთ თქვენი მოსაზრებები $f(x) = x^3 + c$ ფუნქციების (აქ c ნებისმიერი მუდმივია) წარმოებულების შესახებ.
გ) ამ ფუნქციებს შორის არსებობს თუ არა ისეთი ფუნქცია, რომ როცა $f'(x) = 3x^2$ მაშინ $f(0) = -2$ პირობა დააკმაყოფილოს? რომელი ფუნქციაა ეს?

21. f და g მრავალწევრა ფუნქციებისათვის სრულდება პირობა $f'(x) = g'(x)$ და $f(0) = 1$, $g(0) = 2$ დაწერეთ მოსაზრებები იმის შესახებ, აქვთ თუ არა ამ ფუნქციებს გადაკვეთის წერტილები.

22. **დაკავშირება.** $(x; y)$ წერტილში გრაფიკზე გავლებული ნორმალი ამ წერტილში გავლებული მხების მართობულ წრფეს ეწოდება.

ა) განსაზღვრეთ $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისა $x_0 = 2$ წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი.

ბ) დაწერეთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისა $x_0 = 2$ წერტილში ნორმალის განტოლება.



23. პარაშუტისტი 2500 მ სიმალიდან თვითმფრინავიდან გადმოხტა. პარაშუტისტის t წამის შემდეგ დედამიწიდან სიმაღლის $h(t) = 2500 - 5t^2$ ფორმულით პოვნა შეიძლება.

ა) იპოვეთ მე-5 წამზე სიმაღლის ცვლილების სიჩქარე.

ბ) სპორტსმენის პარაშუტი 1000 მ სიმაღლეზე გაიხსნა. რამდენი წამის შემდეგ მოხდა ეს?

გ) მ პუნქტით განსაზღვრულ მომენტში, რას უდრიდა სიმაღლის ცვლილების სიჩქარე?



ნამრავლის წარმოებული

$f(x) = (2x - 3)(x^2 + 4)$ სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებულის პოვნისათვის, ჩვენ შეგვიძლია გამოსახულება ალგებრული წესების გამოყენებით გავამარტივოთ, ჩავწეროთ მრავალწევრის სახით და გამოვიყენოთ მრავალწევრა ფუნქციის გაწარმოების წესები. თუმცა ნამრავლის სახით გამოსახული ფუნქციების გაწარმოებისათვის უფრო ეფექტიანი წესი არსებობს. ეს წესი მდგომარეობს შემდეგში:

თუ $f(x)$ და $g(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ მათი ნამრავლიც დიფერენცირებადი და $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

დამტკიცება : დავუშვათ, $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x+\Delta x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &\quad \text{წილადის მრიცხველში } f(x+\Delta x) \cdot g(x) \text{ წევრის დამატებითა} \\ &\quad \text{და გამოკლებით წილადის } f'(x) \text{ და } g'(x) \text{ წევრების} \\ &\quad \text{შემცველი ორი წილადის ჯამის სახით ჩაწერა შეიძლება.} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) g(x) + f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= f(x) g'(x) + f'(x) g(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x). \end{aligned}$$

მაგალიტი. იპოვეთ $p(x) = (2x - 1)(x^2 - 5)$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 1, \quad g(x) = x^2 - 5 && \text{თითოეული მამრავლი ისე იწერება, როგორც ფუნქცია} \\ f'(x) &= 2, \quad g'(x) = 2x && \text{გამოითვლება თითოეული ფუნქციის წარმოებული} \\ p'(x) &= f'(x) g(x) + f(x) g'(x) && \text{გამოიყენება ნამრავლის გაწარმოების წესი} \\ p'(x) &= 2(x^2 - 5) + 2x(2x - 1) = && \text{გაითვალისწინება შესაბამისი გამოსახულებები} \\ &= 2x^2 - 10 + 4x^2 - 2x = && \text{გამარტივდება} \\ &= 6x^2 - 2x - 10 \end{aligned}$$

ამოხსნის სისწორე შევამოწმოთ გამოსახულების გამარტივებისა და წარმოებულის მიღებით:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x - 1)(x^2 - 5) = 2x^3 - 10x - x^2 + 5 = 2x^3 - x^2 - 10x + 5 \\ p'(x) &= (2x^3 - x^2 - 10x + 5)' = 6x^2 - 2x - 10 \end{aligned}$$

გაწარმოების წესები

სასწავლო დაგეგმვები

1. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული.
- ა) $f(x) = (x-4)(2x+1)$ გ) $p(x) = (x^3-1)(3x^2+8)$
ბ) $h(x) = (5x^2+3)(1-2x)$ დ) $g(x) = (2x^2+1)(4+3x^3)$
2. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული ორი ხერხით. ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებითა და ნამრავლის გამარტივების შემდეგ გაწარმოებით. შედეგები შეადარეთ.
- $m(x) = x^3 \cdot x^{-2}$ $y = 5x^2(3x-2)$ $h(x) = (3x+2)(5x^2-2x+3)$
3. დაწერეთ მოცემულ წერტილებში ფუნქციის გრაფიკის მხედის განტოლება.
- $f(x) = (2x-1)(x+4), (1;5)$ $g(x) = (x-1)(x-2), (-1;6)$
4. $f(x) = kg(x)$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნისათვის გამოიყენეთ ნამრავლის გაწარმოების წესი. მიღებული შედეგი მუდმივისა და ფუნქციის ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებით მიღებულ შედეგთან იგივეა?
5. ცნობილია, რომ $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ და $f(3) = 7, f'(3) = 12, g(3) = 8, g'(3) = 5$. იპოვეთ $h'(3)$ -ის მნიშვნელობა.
6. $p(x) = f(x)g(x)$ ფუნქციის წარმოებული $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ სახითაა მოცემული. თითოეული შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ $p(x)$ ფუნქცია.
- ა) $p'(x) = (6x^2+8)(3x^2-4x) + (2x^3-8x)(6x-4)$
ბ) $p'(x) = (6x^2-1)(0,5x^2+x) + (2x^3-x)(x+1)$
7. დაწერეთ თითოეული ფუნქციის გრაფიკისათვის აბსცისის მოცემულ წერტილში გავლებული მხედის განტოლება.
- ა) $f(x) = (x^2-3)(x^2-1), x_0 = -2$ ბ) $g(x) = (2x^2-1)(-x^2+3), x_0 = 2$
გ) $h(x) = (x^4+4)(2x^2-6), x_0 = -1$ დ) $p(x) = (-x^3+2)(4x^2-3), x_0 = 1$
8. განსაზღვრეთ ფუნქციის გრაფიკის რომელ წერტილში გავლებული მხედის კუთხური კოეფიციენტი იქნება მოცემული მნიშვნელობის ტოლი.
- ა) $y = (-4x+3)(x+3), k = 0$ ბ) $y = (5x+7)(2x-9), k = 9$
გ) $y = (2x-1)(-4+x^2), k = -4$ დ) $y = (x^2-2)(2x+1), k = 4$

დამაკავშირებელი დაგეგმვები

9. ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული. შედეგის გაუმარტივებელი მდგომარეობის შესაბამისად, შესაძლებელია რაიმე წესის გამოთქმა?
- ა) $y = (x^2+2x)^2$ ბ) $y = (2x^3-x)^2$ გ) $y = (x^4-3x^2)^2$
10. სადგომზე მდგომი მანქანის ავზიდან საწვავის გაჟონვის დაწყების მომენტიდან t საათის შემდეგ მანქანის ავზში დარჩენილი საწვავის ოდენობის (ლიტრებით)
- $V(t) = 90(1 - \frac{t}{18})^2$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.
- ა) საწვავის დაკარგვის მოხდენის მომენტში, რამდენი ლიტრი ბენზინი იყო ავზში?
ბ) 12 საათის შემდეგ, რა სიჩქარით ხდებოდა საწვავის დაკარგვა ავზიდან?
გ) როგორი სიჩქარით ხდებოდა დაკარგვა, მაშინ როცა ავზში იყო 40 ლ საწვავი?

განაყოფის წარმოებული

თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია და $g(x) \neq 0$, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ განაყოფიც წარმოებადი და

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

დამტკიცება:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} - \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+\Delta x)} \right] \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{g(x)} f'(x) - \frac{f(x)}{[g(x)]^2} g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

კერძო შემთხვევაში, $\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$

მაგ. იპოვეთ $h(x) = \frac{3x-2}{4x+3}$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: $f(x) = 3x-2$, $g(x) = 4x+3$ მრიცხველი და მნიშვნელი იწერება სხვადასხვა ფუნქციის სახით

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3, \quad g'(x) = 4 && \text{მოიძებნება თითოეული ფუნქციის წარმოებული} \\ h'(x) &= \frac{3 \cdot (4x+3) - (3x-2) \cdot 4}{(4x+3)^2} && \text{გამოიყენება განაყოფის გაწარმოების წესი} \\ &= \frac{12x+9-12x+8}{(4x+3)^2} = \frac{17}{(4x+3)^2} && \text{გაითვალისწინება შესაბამისი გამოსახულებები} \end{aligned}$$

სასწავლო დავალებები

1. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

1) $f(x) = \frac{6x+1}{3x+10}$

2) $f(x) = \frac{8x-11}{7x+3}$

3) $y = \frac{5-3t}{4+t}$

4) $y = \frac{x^2-4x}{x+3}$

5) $y = \frac{x^2+x}{x-1}$

6) $f(t) = \frac{4t^2+11}{t^2+3}$

გაწარმოების წესები

- 2.** იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული ჯერ განაყოფის გაწარმოების წესით, შემდეგ კი გამარტივების შედეგად მრავალწევრის გაწარმოების წესის გამოყენებით. მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ შედეგები ერთი და იგივეა.

$$ა) y = \frac{x^4}{x^3}$$

$$ბ) y = \frac{x^6}{x^4}$$

$$გ) y = \frac{t^2 - 16}{t + 4}$$

$$დ) f(x) = \frac{2x^5 + x^2}{x}$$

$$ე) g(x) = \frac{3x^7 - x^3}{x}$$

$$ვ) h(x) = \frac{x^3 + 27}{x + 3}$$

- 3.** $f(x) = \frac{x}{x+1}$ და $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ფუნქციებია მოცემული.

$$ა) იპოვეთ $f'(x)$$$

$$ბ) იპოვეთ $g'(x)$$$

გ) შედეგების მიხედვით დაწერეთ ფუნქციების მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები.

- 4.** 1) $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$ ფუნქციის გრაფიკისათვის დაწერეთ ა) (0;2) და ბ) (-2;1) წერტილებში გავლებული მხების განტოლება.

$$2) g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$$

ფუნქციის გრაფიკისათვის დაწერეთ აბსცისის ა) $x_0 = 1$;

ბ) $x_0 = \frac{1}{4}$ წერტილებში გავლებული მხების განტოლება.

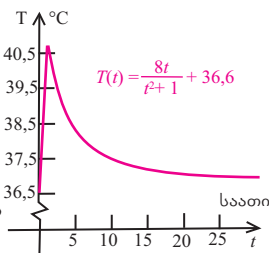
- 5.** ქვემოთ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3}$ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლაში დაშვებულია შეცდომა. იპოვეთ ეს შეცდომა და დაწერეთ სწორი პასუხი.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x^3} \right)' = x^3(2x) - (x^2 - 4)(3x^2) = 2x^4 - 3x^2 + 12x^2$$

- 6.** ავადმყოფის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულების ცვლილების ქვემოთ მოცემული ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.

$$T(t) = \frac{8t}{t^2 + 1} + 36,6$$

იპოვეთ $t = 2$ საათის მომენტისათვის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე.



- 7.** კომპანიაში ჩატარებული გამოკვლევები უჩვენებს, რომ ახალი თანამშრომლის მიერ აწყობილი დეტალების რაოდენობის სამუშაო ადგილზე წვრთნის დღეების რაოდენობაზე დამოკიდებულება ქვემოთ მოცემული ფუნქციით იცვლება:

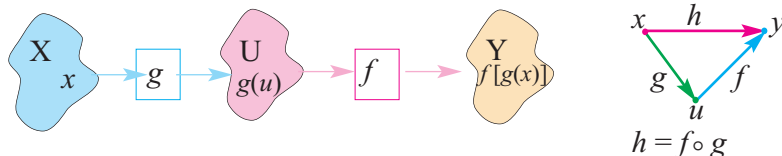
$$N(t) = \frac{100t^2}{3t^2 + 10}$$

ა) დაადგინეთ ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერ დღეს თანამშრომლის მიერ დეტალების აწყობის სიჩქარის განსაზღვრის შესაძლებლობას იძლევა.

ბ) იპოვეთ $N'(2)$ და $N'(10)$ მნიშვნელობები და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

როთული ფუნქციის წარმოებული

ხშირ შემთხვევაში ფუნქციის მოცემისას მისი არგუმენტი თვითონაც სხვა ცვლადზეა დამოკიდებული.



გამოკვლევა

1) $u = g(x) = 3x + 1$, $f(u) = u^2$ პირობით ააგეთ $y = f(g(x))$ როთული ფუნქცია და წარმადგინეთ მრავალწევრის სახით.

$$y = f(g(x)) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

2) იპოვეთ ამ ფუნქციის წარმოებული და დაწერეთ იგი ქვემოთ მოცემული სახით.

$$y' = 18x + 6 = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3$$

3) იმის საფუძველზე, რომ $f'(u) = 2u$ და $g'(x) = 3$ შეამოწმეთ

$$y' = f'(u) \cdot g'(x)$$

ტოლობის ჭეშმარიტობა.

როთული ფუნქციის წარმოებულის პოვნის **ჯაჭვისებრი წესი**:

დავუშვათ, განსაზღვრულ ინტერვალში $y = h(x) = f(g(x))$ მოცემულია როთული ფუნქცია და g ფუნქცია x წერტილში, f ფუნქცია კი $u = g(x)$ წერტილში წარმოებადია. მაშინ, h როთული ფუნქცია x წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებულისათვის

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ფორმულა მართებულია.

მართლაც, თუ g ფუნქცია მოცემულ x წერტილში წარმოებადია, როცა $\Delta x \rightarrow 0$ მაშინ $\Delta u \rightarrow 0$ იქნება.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= f'(u) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

გაითვალისწინება, რომ $\Delta u \neq 0$

ამრიგად, მივიღებთ რომ $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$u = g(x)$, $y = f(u)$ -ის გაითვალისწინებით ბოლო ტოლობის ლაიბნიცის ჩანაწერი

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{სახის იქნება}$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $g(f(x)) = (f(x))^n$ მივიღებთ, რომ

$$((f(x))^n)' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

როცა $f(x) = kx + b$ მაშინ მივიღებთ: $((kx + b)^n)' = n \cdot (kx + b)^{n-1} \cdot k$

გაწარმოების წესები

ნიმუში 1. იპოვეთ $h(x) = (5x^2 + 3)^4$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: თუ $u = 5x^2 + 3$ და $f(u) = u^4$ -ით ავღნიშნავთ, მოცემული ფუნქცია ამ ფუნქციების კომპოზიციით შედგენილი რთული ფუნქცია იქნება და

$$h'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 4u^3 \cdot 10x = 40x \cdot (5x^2 + 3)^3$$

ნიმუში 2. იპოვეთ $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2}$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: თუ ავღნიშნავთ $u = 3x^2 + 2$, $f(u) = \sqrt{u}$, მაშინ, რადგან

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad u'(x) = 6x, \quad \text{ამიტომ } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 2}} \text{ მიიღება.}$$

ნიმუში 3. იპოვეთ $f(x) = 3x(2x - 1)^2$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: როგორც ხედავთ, აქ უნდა გამოყენებული იქნას როგორც ნამრავლის, ისე რთული ფუნქციის გაწარმოების წესები.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x(2x - 1)^2)' = (3x)' \cdot (2x - 1)^2 + 3x \cdot ((2x - 1)^2)' \\ &= 3 \cdot (2x - 1)^2 + 3x \cdot 2 \cdot (2x - 1) \cdot 2 = 3 \cdot (2x - 1)^2 + 12x \cdot (2x - 1) = \\ &= 12x^2 - 12x + 3 + 24x^2 - 12x = 36x^2 - 24x + 3 \end{aligned}$$

სასწავლო დაფალებები

1. დაასრულეთ ცხრილი რვეულში.

$h(x)=f(g(x))$	$u=g(x)$	$f(u)$	$u'(x)$	$f'(u)$	$h'(x)$
ა) $(6x - 1)^2$	$6x - 1$	u^2	6	$2u$	$12 \cdot (6x - 1)$
ბ) $(x^2 + 3)^3$					
გ) $(2 - x^3)^4$					
დ) $(-3x + 4)^{-1}$					

2. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული.

ა) $f(x) = 3 \cdot (4x + 1)^5$ ბ) $f(x) = (3x^2 - 1)^4$ გ) $f(x) = (x^2 - x)^{-3}$

3. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული დადებით ხარისხში გამოსახვით.

ა) $y = \sqrt{5x - 1}$ ბ) $y = \sqrt[3]{2x + 1}$ გ) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

4. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული უარყოფით ხარისხში გამოსახვით.

ა) $y = \frac{5}{(3 - 2x)^2}$ ბ) $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$ გ) $y = \frac{1}{(3x^2 - 2)^2}$

5. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების მიხედვით $h(x) = f(g(x))$ და $z(x) = g(f(x))$

სახით დაწერეთ რთული ფუნქციები და იპოვეთ წარმოებული.

ა) $f(x) = x^3$; $g(x) = 6x - 1$ ბ) $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 1$

გაწარმოების წესები

6. იპოვეთ:
 ა) $f'(2)f(x) = (2x-1)^3$; ბ) $f'(1)$ თუ $f(x) = (4-3x)^4$;
 გ) $f'(-2)$ თუ $f(x) = \sqrt{x^2-3}$
7. გამოთვალეთ $f(x) = x^2 \cdot (5-4x)^3$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 1$ წერტილში.
8. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = x \cdot (2x-1)^4$ ამოხსენით:
 ა) განტოლება) $f'(x) = 0$; ბ) უტოლობა $f'(x) < 0$.
9. 1) იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული ჯერ განაყოფის გაწარმოების წესის გამოყენებით, შემდეგ კი მნიშვნელის უარყოფითმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით ჩაწერით, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით.
 ირთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით.
 ა) $q(x) = \frac{1}{3x+5}$ ბ) $q(x) = \frac{3x}{x+1}$ გ) $g(x) = \frac{6}{7x^2+1}$
 2) რთული ფუნქციის გამოყენებით დაწერეთ განაყოფის გაწარმოების წესის ზოგადი სახე.
10. დაწერეთ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის მოცემულ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.
 ა) $f(x) = \sqrt{x^2+16}$; $x_0 = 3$ ბ) $f(x) = (x^3+7)^{2/3}$; $x_0 = 1$
11. დაწერეთ ფუნქციის გრაფიკზე მხების აბსცისთა ღერძთან პარალელურობისას წერტილების აბსცისები.
 ა) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$ ბ) $f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^4}$

გამოყენებითი დაგალებები

ნიმუში 1. ბანკში წლიური r პროცენტით 10 წლით შეტანილი 1000 მანეთი ანაზრადან მოგება კვარტალში ერთხელ რთული პროცენტის მატებით გამოითვლება. 10 წლის ბოლოს ანგარიშზე არსებული თანხის პროცენტით მატებაზე დამოკიდებულებით ქვემოთ მოცემული სახით, რთული პროცენტის ფორმულით გამოთვლა შეიძლება:

$$S(r) = 500 \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{120}$$

- ა) დაწერეთ ბანკში ფულადი თანხის, S -ის, მოგების პროცენტის ნაზრდის განსაზღვრის შესაძლებლობის მიმცემი $S'(r)$ ფუნქცია.
 ბ) გამოთვალეთ ფულადი სახსრების ნაზრდი, როცა $r = 5$ და $r = 7$.

ამოხსნა: ა) $S'(r) = \left(500 \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{120}\right)' =$

$$= 500 \cdot 120 \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{119} \cdot \frac{1}{1200} =$$

გამოიყენება რთული ფუნქციის
დიფერენცირების წესი

$$= 50 \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{119}$$

გამარტივდება

გაწარმოების წესები

- ბ) როცა $r = 5$ მაშინ 10 წლის შემდეგი მომენტისათვის ფულის ნაზრდი (ყოველთვიურად).

$$S'(5) = 50 \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{119} \approx 82,01 \text{ მანათი}$$

როცა $r = 7$, მაშინ 10 წლის შემდეგი მომენტისათვის ფულის ნაზრდი (ყოველთვიურად)

$$S'(7) = 50 \left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{119} \approx 99,90 \text{ მანათი იქნება.}$$

- 12.** სხეულის მოძრაობის სიჩქარის (მ/წმ) დროზე დამოკიდებულება $v(t) = 2t + 1$ სახისაა. m მასის მქონე სხეულის კინეტიკური ენერგია $E = \frac{mv^2}{2}$ ფორმულით გამოითვლება. იპოვეთ $\frac{dE}{dt}$.

- 13. ბიზნესი.** გასაყიდად შემოსული ახალი ელექტრონული საგნის დროზე დამოკიდებულებით გაყიდვის რაოდენობის ქვემოთ მოცემული ფორმულით გამოთვლა შეიძლება.

$$N(t) = \frac{250\,000t^2}{(2t+1)^2}, \quad t > 0$$



ა) იპოვეთ ამ ფუნქციის წარმოებული და სიტუაციის შესაბამისად განმარტეთ წარმოებული ფუნქციის აზრი.

ბ) იპოვეთ წარმოებული ფუნქციის $N'(100)$ და $N'(500)$ მნიშვნელობები და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

- 14. ფინანსები.** ბანკში წლიური r პროცენტით 5 წლით შეტანილი 1000 მანეთი ანაზრდიდან მოგება კვარტალში ერთხელ რთული პროცენტის მატებით გამოითვლება. 5 წლის ბოლოს ანგარიშზე არსებული თანხის პროცენტით მატებაზე დამოკიდებულებით ქვემოთ მოცემული სახით გამოთვლა შეიძლება:

$$S(r) = 1000 \left(1 + \frac{r}{400}\right)^{20}$$

ა) იპოვეთ $\frac{dS}{dr}$ წარმოებული და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

ბ) განსაზღვრეთ 5 წლის შემდგომი კვარტალური თანხის ცვლილება, როცა $r = 4\%$; $r = 7\%$; $r = 12\%$.

- 15. ნავთობის ჩადვრის გაგრეცელება.** ზღვის ნაპირას სიახლოვეს მდებარე ნავთობის ჭიდან დაწყებული ნავთობის ჩადვრა დროზე დამოკიდებულებით რადიუსის $r(t) = t^2$ კანონით შეცვლით წრიულად ვრცელდება. $S(r) = \pi r^2$ გამოსახავს r რადიუსიანი წრის ფართობს. აქ t წამობით, r დეციმეტრობით იზომება.

ა) დაწერეთ $S[r(t)]$ ფუნქცია და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

ბ) იპოვეთ $S'(t)$ ფუნქცია და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

გ) იპოვეთ $S'(100)$ მნიშვნელობა და განმარტეთ.

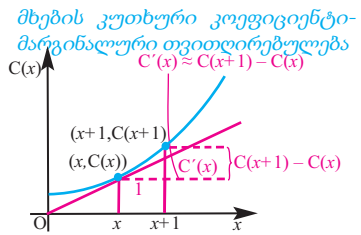
ამოცანების ამოხსნა წარმოებულის გამოყენებით

ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტაში რიგი ეკონომიკური მაჩვენებლების ცვლილების სიჩქარის „მარგინალური“ ტერმინის გამოყენებით ხდება წარმოდგენა.

ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნაში მიღებულია ქვემოთ მოცემული ნიშნების გამოყენება. x - წარმოებული პროდუქციის (ან მომსახურების) რაოდენობა, $C(x)$ - წარმოებული x საქონლის (ან მომსახურების) თვითღირებულების თანხის ფუნქცია, $R(x)$ - x რაოდენობის საქონლის რეალიზაციიდან მიღებული საერთო შემოსავლის ფუნქცია, $P(x)$ - x რაოდენობის საქონლის გაყიდვიდან მიღებული მოგების ფუნქცია: $P(x) = R(x) - C(x)$.

მარგინალური თვითღირებულება წარმოებული საქონლის მიხედვით თვითღირებულების მოცემულ მომენტში ცვლილებაა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მარგინალური თვითღირებულება ყოველი დამატებითი წარმოებული საქონლის (მომსახურების) თვითღირებულებას უჩვენებს.

თუ x რაოდენობის საქონლის თვითღირებულებას $C(x)$ -ით ავლიშნავთ, $x + 1$ საქონლის თვითღირებულება $C(x + 1)$ იქნება. $C(x + 1) - C(x)$ სხვაობა $(x + 1)$ ნომერი საქონლის თვითღირებულებას აღნიშნავს. ეს სხვაობა თვითღირებულებაში არსებულ ნაზრდს უჩვენებს და მარგინალური თვითღირებულება ეწოდება. მარგინალური თვითღირებულება ამასთან $(x; C(x))$ წერტილში გრაფიკისადმი გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობით, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ფუნქციის x წერტილში წარმოებულის პოვნიტაც შეიძლება განისაზღვროს. ანუ $C(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა მე- $x + 1$ -ე საქონლის თვითღირებულებაში ცვლილების, მარგინალური თვითღირებულების ვარაუდით გამოთვლისათვის გამოიყენება.



მარგინალური შემოსავალი - $R'(x)$ გაყიდული საქონლის (ან მომსახურების) რაოდენობაზე დამოკიდებულებით შემოსავლის მოცემულ მომენტში ცვლილებაა, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მარგინალური შემოსავალი თითოეული დამატებითი წარმოებული საქონლიდან (მომსახურებიდან) მიღებული შემოსავალია.

მარგინალური მოგება - $P'(x)$ გაყიდული პროდუქტიიდან (მომსახურებიდან) მიღებული მოგების გაყიდული საქონლის (ან მომსახურების) რაოდენობის მიხედვით ცვლილებაა (სიჩქარეა). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი დამატებითი წარმოებული საქონლიდან (ან მომსახურებიდან) მიღებულ მოგებას უჩვენებს.

ნიმუში. გამათბობელი მოწყობილობების მწარმოებელმა კომპანიამ 8-9 მოწყობილობის წარმოების შემდეგ წარმოებული რაოდენობის მოწყობილობის თვითღირებულება $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ფუნქციით, რაოდენობის მოწყობილობის გაყიდვიდან მიღებული შემოსავალი კი $R(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ ფუნქციით დაამოდელირა.

ა) რა უჯდება კომპანიას ერთი მოწყობილობის თვითღირებულება 10 მოწყობილობის წარმოების შემდეგ?

ბ) იპოვეთ 10 მოწყობილობის გაყიდვის შემდეგ გაყიდული ერთი მოწყობილობიდან მიღებული შემოსავალი.

ამოხსნა: თვითღირებულების დამამოდელირებელი ფუნქცია $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ სახისაა.

$C(x)$ ფუნქციის $C'(x)$ წარმოებული ფუნქცია ნებისმიერ მომენტში (წარმოების რაოდენობაზე დამოკიდებულებით) წარმოებული პროდუქციის თვითღირებულების (მიახლოებით) განსაზღვრის შესაძლებლობას იძლევა.

ამოცანების ამოხსნა წარმოებულის გამოყენებით

ა) $C'(x) = (x^3 - 6x^2 + 15x)' = 3x^2 - 12x + 15$; $C'(10) = 3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10 + 15 = 195$ ანუ მე-10 გამათბობლის წარმოების შემდეგი რადიატორის თვითღირებულება მიახლოებით 195⁰ იქნება.

ბ) $R(x)$ ფუნქციის $R'(x)$ წარმოებული ფუნქცია ნებისმიერ მომენტში (წარმოებულის რაოდენობაზე დამოკიდებულებით) პროდუქციის გაყიდვიდან მიღებული შემოსავლის განსაზღვრის შესაძლებლობას იძლევა. $R(x) = (x^3 - 3x^2 + 12x)' = 3x^2 - 6x + 12$

$$R(10) = 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 12 = 252 \text{ }^0$$

16. თუ $C(x) = 4x + 10$, $R(x) = 50x - 0,5x^2$ დაწერეთ:

- ა) $P(x)$ მოგების ფუნქცია;
- ბ) $C(40)$, $R(40)$, $P(40)$ მნიშვნელობები;
- გ) $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$ გაწარმოებული ფუნქციები;
- დ) $C'(40)$, $R'(40)$, $P'(40)$ მნიშვნელობები.

17. მარგინალური თვითღირებულება. დავუშვათ კომპანია x რაოდენობის სარეცხი მანქანის წარმოებისას თვითღირებულებას $C(x) = 2000 + 100x - 0,1x^2$ ფუნქციით ანგარიშობს.

- ა) რამდენი მანათი იქნება ერთი სარეცხი მანქანის საშუალო ფასი ($C(x)/x$) 100 მანქანის წარმოებისას?
- ბ) 100 სარეცხი მანქანის წარმოებისას, რამდენი მანათი იქნება ერთი სარეცხი მანქანის მარგინალური ფასი (თვითღირებულება)?
- გ) უჩვენეთ, რომ 100 სარეცხი მანქანის წარმოებისას მარგინალური თვითღირებულება (წარმოების ფასი) 101-ე სარეცხი მანქანის წარმოების ფასის ტოლია.

18. მარგინალური შემოსავალი. კომპანიას x ცალი დასაკეც-გასაშლელი მაგიდის გაყიდვიდან მიღებული საერთო შემოსავლის

$$R(x) = 20x - \frac{x^2}{500} \quad \text{ფუნქციით მოდელირება შეუძლია.}$$

- ა) განსაზღვრეთ მარგინალური შემოსავალი 1000 მაგიდის გაყიდვიდან.
- ბ) განსაზღვრეთ 1001-ე მაგიდისათვის მარგინალური შემოსავალი $R(1001) - R(1000)$ გამოსახულების მნიშვნელობის მიხედვით.
- გ) შეადარეთ ა) და ბ) პასუხები.

19. მარგინალური მოგება. კომპანიის მიერ ყოველკვირეულად x დაზგის წარმოებით და რეალიზაციით მიღებული მოგება $P(x) = -0,004x^3 - 0,3x^2 + 600x - 800$ სახით შეიძლება განისაზღვროს. ამჟამად კომპანია ყოველკვირეულად 9 დაზგას ყიდის.

- ა) გამოთვალეთ კომპანიის კოველკვირეული მოგება.
- ბ) რამდენით შემცირდება კვირეული მოგება, თუ კომპანიის მიერ კვირეული გაყიდვა 8 დაზგაზე ჩამოვა?
- გ) გამოთვალეთ მარგინალური მოგება 9 დაზგის გაყიდვის შემთხვევაში.
- დ) ა) და გ) პუნქტების შედეგების გამოყენებით ივარაუდეთ მოგება 10 დაზგის გაყიდვის შემთხვევაში.

მეორე რიგის წარმოებული. გავლილი მანძილი, სიჩქარე, აჩქარება

დავუშვათ, მოცემულ შუალედში $y = f(x)$ ფუნქციას $f'(x)$ წარმოებული აქვს. თუ $f'(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, მის წარმოებულს $f''(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ეწოდება და $f''(x)$ სახით აღინიშნება.

ცნობილია, რომ წარმოებული მყის ცვლილებას გვიჩვენებს. გავლილი მანძილის დროის მიხედვით მომენტში ცვლილება სიჩქარეს გვიჩვენებს. აქედან წარმოებულის ფიზიკური აზრი ნათელი ხდება. $s(t)$ კანონით წრფივი მოძრაობისას მყისი სიჩქარე $s(t)$ ფუნქციის წარმოებულის ტოლია:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

სიჩქარე თვითონაც დროზე დამოკიდებულებით შეიძლება შეიცვალოს. სიჩქარის ცვლილება კი აჩქარებად წოდებული ახალი სიდიდით გამოისახება. საერთოდ, გავლილი მანძილის დროზე დამოკიდებული ფუნქციის წარმოებულის პოვნით სიჩქარის ფუნქციის, ხელახლა სიჩქარის ფუნქციის წარმოებულის პოვნით კი აჩქარება მოიძებნება. ასე რომ, გავლილი მანძილის მაჩვენებელი ფუნქციის ორჯერ მიმდევრობით გაწარმოებით აჩქარების პოვნა შეიძლება.

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$$

ფიზიკიდან ცნობილია, რომ როგორც სიჩქარე, ისე აჩქარება ვექტორული სიდიდეებია. თუ აჩქარებისა და სიჩქარის ნიშნები ერთი და იგივე იქნება, მაშასადამე მოძრაობა ჩქარდება, ხოლო თუ სხვადასხვაა - ნელდება.

მეორე რიგის წარმოებული ბევრი ეკონომიკური საკითხის, ამასთან რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციების შესახებ საკითხების გადაწყვეტაში გამოიყენება. ვარაუდი იმისა, ცვლილება დადებითი იქნება თუ უარყოფითი დიდ პრაქტიკულ მნიშვნელობას იძენს.

მაგალიტი 1. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების y'' მეორე რიგის წარმოებული.

$$a) y = x^4 + 3x^2 - 5x$$

$$b) y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$$

ამოხსნა:

$$a) y' = (x^4 + 3x^2 - 5x)' = 4x^3 + 6x - 5$$

გამოითვლება პირველი რიგის წარმოებული

$$y'' = (4x^3 + 6x - 5)' = 12x^2 + 6$$

გამოითვლება მეორე რიგის წარმოებული

$$b) y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$$

$$y' = (2,5(x^2 - 2x)^2)' = 5(x^2 - 2x)(x^2 - 2x)' = 5(x^2 - 2x)(2x - 2) = 10x^3 - 30x^2 + 20x$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გამოითვლება პირველი რიგის წარმოებული

$$y'' = (10x^3 - 30x^2 + 20x)' = 30x^2 + 60x + 20$$

გამოითვლება მეორე რიგის წარმოებული.

მეორე რიგის წარმოებული

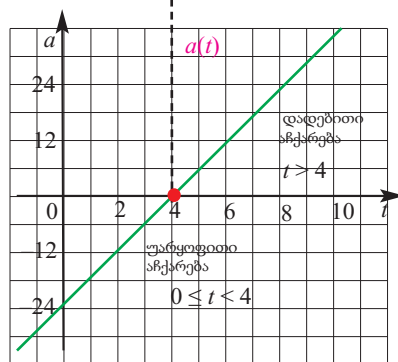
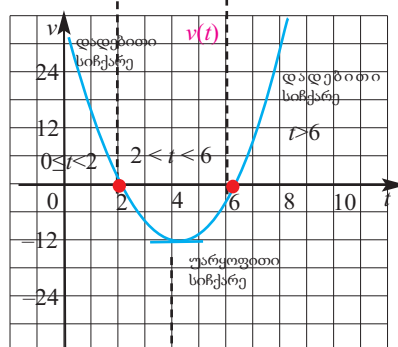
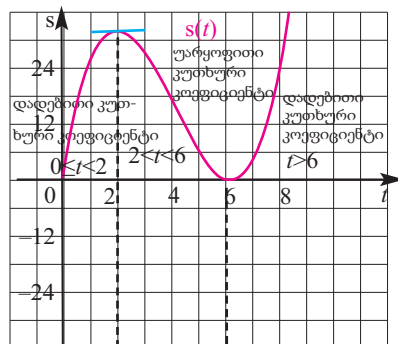
მაგალიტი 2. t დროზე დამოკიდებულებით გავლილი მანძილის $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ ($t \geq 0$) დრო წამოებით, s მანძილი მეტროებით, $t \geq 0$) ფუნქციის მიხედვით გამოიკვლიეთ კავშირი მანძილის, სიჩქარისა და აჩქარების ფუნქციებს შორის.

ამოხსნა:

როგორც $s(t)$ -ს გრაფიკიდან ჩანს, როცა $t = 2$ და $t = 6$ მხების კუთხური კოეფიციენტი ნულია. მაშასადამე, ეს წერტილები შესაბამისი წარმოებული ფუნქციების ნულებია.

$(0; 2)$ და $(6; 8)$ ინტერვალებში $s(t)$ ფუნქციისადმი გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტები დადებითია და $v(t)$ ფუნქცია დადებითია (t ღერძის ზევით მდებარეობს). $(2; 6)$ ინტერვალში მხების კუთხური კოეფიციენტი უარყოფითია, $v(t)$ ფუნქცია უარყოფითია (t ღერძის ქვევით მდებარეობს).

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t + 36$ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს, რომ როცა $t = 4$ მხების კუთხური კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ეს წერტილი, $a(t)$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილია. რადგან $v(t)$ ფუნქციის გრაფიკის $[0; 4)$ ინტერვალში მხების კუთხური კოეფიციენტი არის უარყოფითი, $(4; 8)$ ინტერვალში კი მხების კუთხური კოეფიციენტი დადებითია, ამიტომ $a(t) = v'(t) = 6t - 24$ ფუნქცია $[0; 4)$ შუალედში უარყოფით, ხოლო $(4; 8)$ შუალედში დადებით მნიშვნელობებს იღებს.



სასწავლო დაგეგმვები

1. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებული.

1) $y = 7x + 2$

2) $y = 6x - 3$

3) $y = 4x^2 + 3x - 1$

4) $y = 4x^2 - 5x + 7$

5) $y = 5x^3 + 4x$

6) $y = 2x^4 - 5x$

7) $y = x^4 - 7$

8) $y = 7x + 2$

9) $y = \frac{1}{x^2}$

10) $y = \frac{1}{x^3}$

11) $y = \sqrt{x}$

12) $y = \sqrt[4]{x}$

მეორე რიგის წარმოებული

2. მოცემული ფუნქციებისათვის იპოვეთ $f''(2)$.

1) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5$

3) $f(x) = (3x^2 + 2)(1 - x)$

2) $f(x) = 4x^3 - 5x + 6$

4) $f(x) = (6x - 5)(x^2 + 4)$

3. მოცემული ფუნქციებისათვის იპოვეთ y'' .

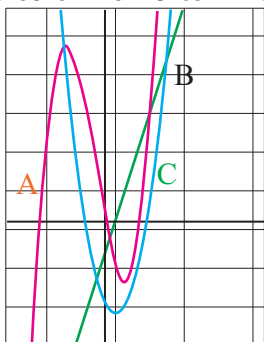
1) $y = (x^2 + 3)(4x - 1)$

2) $y = \frac{3x+1}{2x-3}$

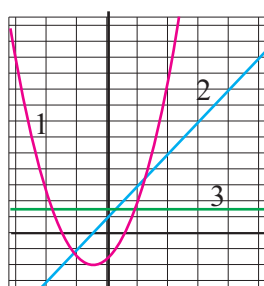
3) $y = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

4. სურათის მიხედვით განსაზღვრეთ მანძილის $s(t)$, სიჩქარის $v(t)$, აჩქარების $a(t)$ ფუნქციების გრაფიკების შესაბამისი ხაზები.

ა)



ბ)



5. მაღლა ასროლილი სხეულის ნებისმიერი მომენტისათვის სიმაღლის $h(t) = -0,5gt^2 + v_0t + h_0$ ფუნქციით გამოსახვა შეიძლება. სადაც $g \approx 9,8$ მ/წმ² თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა, v_0 -საწყისი სიჩქარე მ/წმ-ობით, h_0 -სხეულის ასროლის სიმაღლე მეტრობით.

ა) $h(t)$ ფუნქციის მიხედვით განსაზღვრეთ სიჩქარის $v(t)$ და აჩქარების $a(t)$ ფუნქციები.

ბ) ღერძი 18 მ/წმ საწყისი სიჩქარით 3 მ სიმაღლის ზევიდან ასროლილი. დაწერეთ ღერძის მოძრაობის ამსახველი $s(t)$, $v(t)$ და $a(t)$ ფუნქციები.

6. სხეული $s(t) = -8t^2 + 2t + 3$ კანონით წრფივად მოძრაობს. სადაც, s მეტრობით, t წამოებითაა მოცემული. გავლილი მანძილის ფუნქციის მიხედვით განსაზღვრეთ სიჩქარისა და აჩქარების ფუნქციები. იპოვეთ $v(t)$ და $a(t)$, როცა $t = 2$ წმ.

7. 2 კგ მასის სხეული $x(t) = t^2 + t + 1$ (გადანაცვლება სანტიმეტრობით, t დრო წამოებით იზომება) კანონით წრფივად მოძრაობს. იპოვეთ სხეულის კინეტიკური ენერგია მოძრაობის დაწყებიდან 3 წამის შემდეგ.

8. 3 კგ მასის სხეული $s(t) = t^2 - 4t$ (ადგილმონაცვლეობა მეტრობით, t დრო წამოებით იზომება) კანონით წრფივად მოძრაობს. იპოვეთ ამ სხეულზე მოქმედი F ძალის მნიშვნელობა.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული

ჩვენთვის ექსპონენციალური ზრდითა და კლებით შესაძლო დასამოდელოებელი ბევრი რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესახებ მაგალითებია ცნობილი. მაგალითად, მოსახლეობის ზრდა, ბანკის ანგარიშზე არსებული თანხის ზრდა, რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლა, ცოცხალი ორგანიზმების, ბაქტერიების გამრავლება და სხვ. ამ სიტუაციებში ნებისმიერ მომენტში მატების სიჩქარის განსაზღვრა დიდ მნიშვნელობას იძენს. ამ ზრდის სიჩქარის განსაზღვრა კი წარმოებულის გამოყენებით შეიძლება.



მაჩვენებლიანი ფუნქცია რიცხვითი ღერძის თითოეულ წერტილში დიფერენცირებადი.

1. $y = e^x$ ფუნქციის წარმოებული: $(e^x)' = e^x$

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} && \text{წარმოებულის განსაზღვრება} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} && e^x \text{ მამრავლი გაიტანება ფრჩხილებს გარეთ} \\ &= e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} && \text{რადგან } e^x \text{ მამრავლი } h\text{-ზე არ არის დამოკიდებული ზღვრის ნიშნის წინ გაიტანება} \\ &= e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 && \text{მხედველობაში მიიღება} \\ &= e^x \end{aligned}$$

2. $y = e^{u(x)}$ რთული ფუნქციის წარმოებული.

თუ $u(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

კერძო შემთხვევაში $(e^{kx+b})' = k \cdot e^{kx+b}$

3. $y = a^x$ ფუნქციის წარმოებული: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$$\begin{aligned} y' &= (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \text{ლოგარიტმის ძირითადი თვისება} \\ &= e^{x \ln a} \ln a = \text{რთული ფუნქციის წარმოებული} \\ (a^x)' &= a^x \cdot \ln a && \text{ლოგარიტმის ძირითადი თვისება} \end{aligned}$$

4. $y = a^{u(x)}$ რთული ფუნქციის წარმოებული.

თუ $u(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$

მაგალითი 1. $y = e^{x^2+2x}$; $u = x^2 + 2x$

$$y' = (e^{x^2+2x})' = e^{x^2+2x} (x^2 + 2x)' = (2x + 2) e^{x^2+2x}$$

მაგალითი 2. $y = 4 \cdot 10^{1/x}$

$$y' = (4 \cdot 10^{1/x})' = 4 \cdot \ln 10 \cdot 10^{1/x} (1/x)' = 4 \cdot \ln 10 \cdot 10^{1/x} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{-4 \cdot \ln 10 \cdot 10^{1/x}}{x^2}$$

მაჩვენებელი და ლოგარითული ფუნქციების წარმოებული

სასწავლო დაგვლებები

1. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული.

ა) $y = 3e^x + 2$

ბ) $y = 2x - e^{-x}$

გ) $y = e^{x+2}$

დ) $y = e^{3x+2}$

ე) $y = 2x \cdot 4e^x$

ვ) $y = x^3 \cdot e^{2x}$

ზ) $y = x^2 \cdot e^x$

თ) $y' = \frac{5}{e^x}$

2. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული.

ა) $y = 7^{3x+2}$

ბ) $y = 4^{-5x+2}$

გ) $y = 3 \cdot 4^{x+2}$

დ) $y = -10^{3x-4}$

ე) $s = 2 \cdot 3^{\sqrt{t}}$

ვ) $s = 5 \cdot 2^{\sqrt{t-2}}$

3.

ა) იპოვეთ $y = e^x$ ფუნქციის გრაფიკის $(0;1)$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი და დაწერეთ ამ მხების განტოლება.

ბ) დაწერეთ $y = e^{2x}$ ფუნქციის გრაფიკის $(0;1)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

გ) დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც არის $y = e^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკის მხები და გადის კოორდინატთა სათავეზე.

4.

იპოვეთ ა) $f'(0)$, როცა $f(x) = 2e^x + 2$; ბ) $f'(1)$, როცა $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$.

5.

ამოხსენით უტოლობა $f'(x) > 0$.

ა) $f(x) = x \cdot \ln 3 - 3^x$

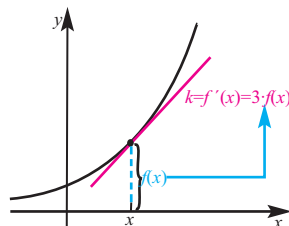
ბ) $f(x) = 2^x + 4 \cdot 2^{-x}$

გამოყენებითი დაგვლებები

$f(x) = 2e^{3x}$ ფუნქციის გაწარმოებისათვის, რადგან

$$f'(x) = (2e^{3x})' = (2e^{3x})(3x)' = 3(2e^{3x}) = 3f(x)$$

ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე აბსცისის x წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობა ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობაზე 3-ჯერ მეტია.



ეს იმის მაჩვენებელია, რომ ექსპონენციალური ცვლილებისას ზრდის ცვლილების სიჩქარე ზრდის ოდენობის პროპორციულად იცვლება.

ნამუშა. ფულის ნაზრდი (რთული პროცენტით ზრდისას). ბანკში შეტანილია P_0 თანხის წლიური ანაზარი 9% რთული პროცენტის მატებით.

ნებისმიერი t წლისათვის თანხის განმსაზღვრელი რთული პროცენტით მატების ფორმულაა $P(t) = P_0 e^{0,09t}$.

ა) რამდენი მანათი იქნება ბანკში არსებული თანხა მე-4 წელს, თუ ბანკში შეტანილია 1000 მანათი?

ბ) რამდენი მანათი იქნება ფულის მატება 3 წლის მომდევნო წელს, თუ ბანკში

ამოხსნა:

ა) გამოვთვალოთ $P = 1000e^{0,09t}$ -ის მნიშვნელობა, როცა $t = 3$.

$$P = 1000e^{0,09 \cdot 3} \approx 1000 \cdot 1,310 = 1310 \text{ ო}$$

ბ) $t = 3$ მნიშვნელობისათვის $P(t)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა ანაზარის მე-4 წლის ფულის მატებას შეესაბამება. ეს მატება $\Delta P \approx P'(3) \cdot \Delta t = P'(3) \cdot 1 = P'(3)$ იქნება. რადგან $P'(t) = 1000 \cdot 0,09 \cdot e^{0,09t}$ ამიტომ, $\Delta P \approx P'(3) = 90 \cdot e^{0,27} \approx$

$$\approx 117,9 \text{ ო იქნება.}$$

- 6.** გრაფიკალულად გრაფიკურად შესასრულებელი სამუშაო. ა) დახაზეთ $f(x) = 4^x$ ფუნქციის გრაფიკი.
ბ) დახაზეთ $f'(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

გ) ივარაუდეთ $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ფუნქციის გრაფიკი და დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები.

დ) გრაფკალკულატორით ააგეთ $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, შეამოწმეთ თქვენი ვარაუდი.

ე) თუ $y = 4^x$ ფუნქციის ნაცვლად იქნება ნებისმიერი $y = a^x$ ფუნქცია, მაშინ შეიცვლება თუ არა $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი? კერძო შემთხვევაში, დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები გრაფიკის შესახებ, თუ $a = e$.

7. მოსახლეობის მატება. გაერო-ს მოცემული ინფორმაციების თანახმად 1960 წლიდან დაწყებული მოსახლეობის მატების (მილიონ კაცობით) წლების მიხედვით $N(t) = 3100e^{0,0166t}$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. განსაზღვრეთ მოსახლეობის მატების მოცემული წლისათვის მატების სიჩქარე (მომენტში მატების სიჩქარე):
- ა) 1980; ბ) 2002; გ) 2015

- 8. გაყიდვის მატება.** ახლად სარეალიზაციოდ გამოტანილი კომპიუტერების გაყიდვის დროზე (წლობით) დამოკიდებულების $S(t) = 100 - 90e^{-0.3t}$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.

განსაზღვრეთ გაყიდვის მატიების სიჩქარე

ა) 3 წლის შემდეგ; ბ) 5 წლის შემდეგ.

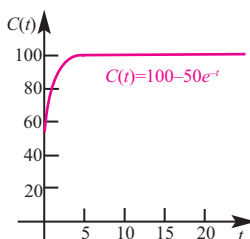
9. რადიოაქტიური დაშლა. ტყვია - 214 ნივთიერების t წლის შემდეგ ნარჩენის (გრამობით) ოდენობის $A(t) = 500e^{-0.31t}$ ფორმულით განსაზღვრა შეიძლება. 1) რამდენი გრამით შემცირდება (მომენტში ცვლილება) ნივთიერების ოდენობა მოცემული წლების მომდევნო წელს?

ა) 4 წლის შემდეგ; ბ) 7 წლის შემდეგ; გ) 10 წლის შემდეგ.

2) დაწერეთ თქვენი მოსაზრება ნივთიერების ოდენობის ცვლილების სიჩქარის შესახებ.

3) ნივთიერება საბოლოოდ სრულად გაქრება?

- 10. ზიზნესი.** პოლიმერული პროდუქციის მწარმოებელ ქარხანაში წარმოების დაწყების დროიდან A პროდუქციის თვითღირებულების მილიონ მანეთობით $C(t) = 100 - 50e^{-t}$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.



იპოვეთ ზემდეგი:

ა) მარგინალური თვითღირებულება;

ბ) $C'(0)$ მნიშვნელობა;

გ) $C'(4)$ მნიშვნელობა (მეასედეზამდე სიზუსტით);

დ) იპოვეთ $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ და $\lim_{t \rightarrow \infty} C'(t)$ მნიშვნელობები. პროდუქციის თვითღირებულების ცვლილების თანდათანობით 0-თან მიახლოება განმარტეთ რეალური სიტუაციის შესაბამისად.

ლოგარიტმული ფუნქციის წარმომადგენელი

$y = \ln x$ ფუნქცია $(0; +\infty)$ შუალედში დიფერენცირებადი და $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$e^y = x$ იცვლება ეკვივალენტური ჩანაწერით

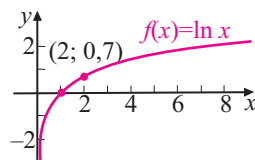
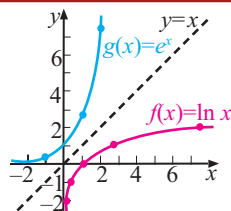
$(e^y)' = (x)'$ მიიღება წარმომადგენელი

$$(e^y)' = 1 \quad y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad \text{ხდება ჩანაცვლება}$$

$$y' = \frac{1}{x} \quad \text{ანუ} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$y = \ln x$ ფუნქციის წარმომადგენლის გეომეტრიულად წარმოდგენას შეიძლება.

გრაფიკზე მარცხნიდან დაწყებით, რაიმე წერტილზე გავავლოთ მხები. ამ მხეზე მოათავსეთ სახაზავი და სახაზავით მხების მარჯვენა მიმართულებით გადანაცვლება დაამოძღვრეთ. ყოველი მოძღვრვა მხები მოითხოვს სახაზავის მდგომარეობის ცოტა უფრო ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში მოყვანას და კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობა 0-ს უახლოვდება.



თუ $u(x) > 0$ და დიფერენცირებადი ფუნქციაა $(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

$$\text{კერძოდ, } (\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b}$$

ნიმუში. იპოვეთ ფუნქციის წარმომადგენელი ა) $y = \ln 5x$; ბ) $y = \ln(x^3 + 2)$

ამოხსნა: ა) $y' = (\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

ბ) $y' = (\ln(x^3 + 2))' = \frac{1}{x^3 + 2} \cdot (x^3 + 2)' = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$

$y = \log_a x$ ფუნქციის წარმომადგენელი: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

მართლაც, რადგან $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ამიტომ

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \text{მიიღება.}$$

წარმომადგენელი მიიღება

გამოიყენება გაწარმოების წესი

თუ $u(x) > 0$ და დიფერენცირებადი ფუნქციაა, $(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)$

ნიმუში. იპოვეთ ფუნქციის წარმომადგენელი ა) $y = \log_5 x$; ბ) $y = \log_3(x^2 + 1)$.

ამოხსნა: ა) $y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 5}$

ბ) $y' = (\log_3(x^2 + 1))' = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln 3} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 3}$

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების წარმოებული

სასწავლო დაგეგმვა

1. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების წარმოებული.
ა) $y = 4 \ln x$ ბ) $y = 3 \ln(2x)$ გ) $y = \ln(2x + 1)$ დ) $y = \ln(x^2 + 1)$
2. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.
ა) $y = x^2 \cdot \ln x$ ბ) $y = \frac{\ln x}{x}$ გ) $y = \ln^3 x$ დ) $y = \sqrt{\ln x}$
3. იპოვეთ $y = \ln x$ ფუნქციის წარმოებული ლოგარითმული ფუნქციის ეკვივალენტური მაჩვენებლიანი ფუნქციის ჩანაწერის გამოყენებით.
4. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული.
ა) $y = \log(x^2 + x + 3)$ ბ) $y = \log_3 \frac{x-2}{x+1}$ გ) $y = \lg \sqrt{x^2 + 3}$
5. გამოთვალეთ მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა მოცემულ წერტილში.
ა) $f(x) = \log_2(4 + 3x)$, $x_0 = -1$ ბ) $f(x) = x^3 \cdot \ln(3 + 2x)$, $x_0 = -1$
6. 1) ამოხსენით $f'(x) > 0$ უტოლობა, თუ $f(x) = x - \ln x$.
2) x -ის რა მნიშვნელობებისათვის არის მოცემული ფუნქციების წარმოებული ნულის ტოლი?
ა) $f(x) = \ln(x + 2) - 2x + 2$ ბ) $f(x) = x^3 - \ln x$
7. ა) დაწერეთ $y = x \ln x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x_0 = e$ მქონე წერტილში გავლებული მხების განტოლება.
ბ) დაწერეთ $y = x^2 \ln \frac{2}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x_0 = 2$ მქონე წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

გამოყენებითი დაგეგმვა

8. **ბაქტერიების გამრავლება.** გამოკვლევებით განსაზღვრული იქნა, რომ 32°C ტემპერატურაზე ძეხვში არსებული ბაქტერიების t დროის მომენტში $N(t)$ რაოდენობა

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = 0,2t$$

დამოკიდებულებას აკმაყოფილებს. სადაც N_0 არის ბაქტერიების საწყისი რაოდენობა. t დრო საათობით იზომება.

- ა) ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით დაწერეთ $N(t)$ ფუნქცია. ჩათვალით, რომ $N_0 = 100$.
- ბ) იპოვეთ $N(t)$ ფუნქციის წარმოებული და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.
- გ) იპოვეთ $N'(t)$, როცა $t = 12$.

- 9. მარგინალური თვითღირებულება.** დავუშვათ, რომ x ცალი ჩასაბერი მუსიკალური ინსტრუმენტის დამზადების თვითღირებულების (მანათობით) $C(x) = 5 \log_2 x + 10$ ფუნქციით მოდელირება ხდება. იპოვეთ მარგინალური თვითღირებულება ა) 10; ბ) 20 ჩასაბერი ინსტრუმენტის დამზადებისას.

- 10. მიწისძვრის ამპლიტუდა.** მიწისძვრის სიმძლავრე (მაგნიტუდა)

$$M = \lg \frac{A}{A_0} \quad \text{სახით განისაზღვრება.}$$

სადაც A_0 საგრძნობი მიწისქვეშა ბიძგის უმცირესი ამპლიტუდაა, A - მომხდარი მიწისქვეშა ბიძგის ამპლიტუდა.

ა) იპოვეთ dM/dA ცვლილება;

ბ) განმარტეთ dM/dA ცვლილება სიტუაციის შესაბამისად. როგორ შეიცვლება dM/dA -ს მნიშვნელობა A -ს ზრდის კვალობაზე?

- 11. ფუტკრების გამრავლება.** დავუშვათ, ფუტკრების გამრავლების t დროზე დამოკიდებულებით $N(t) = (t+200) \ln(t+2)$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. სადაც t არის დრო საათობით. განსაზღვრეთ გამრავლების მატების სიჩქარე: ა) მე-5; ბ) მე-10 დღეს.

- 12. ანაბრის მატება.** შემოსავლის რთული პროცენტით მატების ფორმულით გაანგარიშებული ფულადი ანაბარი $r\%$ -ით იყო შეტანილი. ამ ფულის საწყისი თანხის გაორმაგების დროის მაჩვენებელი ფორმულა ქვემოთ მოცემული სახისაა:

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}$$

იპოვეთ dT/dr , როცა $r = 5$ და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

- 13. ლემანი ამბობს, რომ $y = \ln 5x$ და $y = \ln x$ ფუნქციებიდან ორივეს წარმოებულია $\frac{1}{x}$.** მაშასადამე, ეს ფუნქციები იგივეური ფუნქციებია. თქვენ როგორ

განმარტავდით ამ მოსაზრების მცდარობას?

- 14. ორაგულის ჯიშის თევზის გამრავლება.** ტბაში, გამრავლებისათვის 400 ორაგული გაუშვეს. ტბაში არსებული პირობები მათი 2500-მდე მატების შესაძლებლობას იძლევა. ორაგულის სავარაუდო რაოდენობის t დროზე (თვეობით) დამოკიდებულებით ცვლილების

$$P(t) = \frac{2500}{1 + 5,25 e^{-0,32t}} \quad \text{ფუნქციით გამოსახვა შეიძლება.}$$

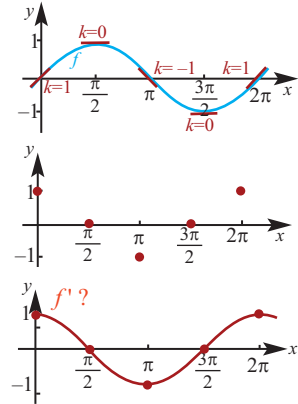
ა) გამოთვალეთ ორაგულის რაოდენობა: 3 თვის შემდეგ; 5 თვის შემდეგ.

ბ) იპოვეთ $P'(t)$ ფუნქცია და განმარტეთ აზრი სიტუაციის შესაბამისად.

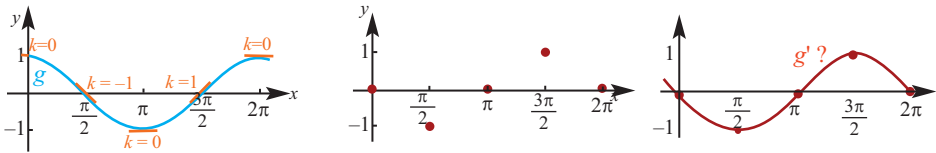
ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

გამოკვლევა. $y = \sin x$ ფუნქციის წარმოებული

1. რეულში ჩაიხაზეთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკზე აღნიშნეთ მოცემულ წერტილებში მხედების კუთხური კოეფიციენტები.
2. დახაზეთ ახალი კოორდინატა სისტემა და მხედის აღნიშნულ წერტილებში არსებული კუთხური კოეფიციენტების შესაბამისი წერტილები აღნიშნეთ.
3. შეაერთეთ თქვენს მიერ აღნიშნული წერტილები. იმის გათვალისწინებით, რომ კუთხური კოეფიციენტების მნიშვნელობები ამავე წერტილებში წარმოებული ფუნქციის მნიშვნელობებია, წარმოადგინეთ თქვენი მოსაზრებები წარმოებული ფუნქციის შესახებ.



4. იმავე ნაბიჯებით შეასრულეთ მოქმედებები $y = \cos x$ ფუნქციისათვისაც და წარმოადგინეთ თქვენი მოსაზრებები მისი წარმოებული ფუნქციის შესახებ.



ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განსაზღვრის არეზე დიფერენცირებადები არიან.

$y = \sin x$ ფუნქციის წარმოებული: $(\sin x)' = \cos x$

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} && \text{წარმოებულის განსაზღვრების თანახმად} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} && \text{ტრიგონომეტრიული იგივეობა} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} && \text{საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right] && \text{წილადის თვისება} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} && \text{ზღვრის თვისება} \\
 &= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} && \text{იმიტომ რომ } \sin x \text{ და } \cos x \text{ } x \text{ არ არის დამოკიდებული } \Delta x\text{-ზე} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x && \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \\
 &&& \text{მხედველობაში იქნა მიღებული.}
 \end{aligned}$$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

$y = \sin u(x)$ როგორი ფუნქციის წარმოებული:

თუ $u(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ $(\sin u(x))' = u'(x) \cdot \cos u(x)$

კერძო შემთხვევაში, $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx + b)$

ნიმუში. იპოვეთ $y = \sin 2x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: აქ, $u = 2x$, $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$

$y = \cos x$ ფუნქციის წარმოებული: $(\cos x)' = -\sin x$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ იგივეობის გამოყენებით $y = \cos x$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნა შეიძლება.

$$y' = (\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}_{\sin x} \cdot \underbrace{(\frac{\pi}{2} - x)'}_{-1} = -\sin x$$

$y = \cos u(x)$ როგორი ფუნქციის წარმოებული:

თუ $u(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ $(\cos u(x))' = -u'(x) \cdot \sin u(x)$

კერძო შემთხვევაში, $(\cos(kx + b))' = -k \cdot \sin(kx + b)$

ნიმუში. იპოვეთ $y = \cos 4x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: აქ, $u = 4x$, $y' = (\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot (4x)' = -4 \sin 4x$

$y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის წარმოებული: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ იგივეობის გამოყენებით $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნა შეიძლება.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$y = \operatorname{tg} u(x)$ როგორი ფუნქციის წარმოებული:

თუ $u(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ, $(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$

კერძო შემთხვევაში, $(\operatorname{tg}(kx + b))' = \frac{k}{\cos^2(kx + b)}$

მსგავსი წესით შეიძლება იმის ჩვენება, რომ

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x),$$

კერძო შემთხვევაში, $(\operatorname{ctg}(kx + b))' = -\frac{k}{\sin^2(kx + b)}$

ნიმუში 1. იპოვეთ $y = 3 \sin 2x - 4 \cos 3x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: $y' = (3 \sin 2x - 4 \cos 3x)' = (3 \sin 2x)' - (4 \cos 3x)' =$
 $= 3 \cos 2x (2x)' + 4 \sin 3x (3x)' = 6 \cos 2x + 12 \sin 3x$

ნიმუში 2. იპოვეთ $y = 4 \sin^3 2x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: $y' = (4 \sin^3 2x)' = 4 \cdot 3 \cdot \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' = 12 \cdot \sin^2 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x =$
 $= 24 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

სასწავლო დაგეგმვები

1. სურათზე $y = -2\cos x$ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული.

1) გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ ფუნქციის მოცემულ წერტილებში მხედების კუთხური კოეფიციენტები:

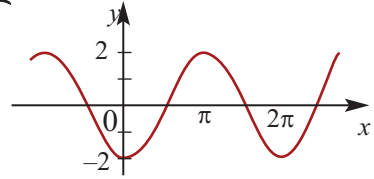
ა) ფუნქციის ნულებში;

ბ) მაქსიმუმის წერტილებში;

გ) მინიმუმის წერტილებში;

2) დახაზეთ წარმოებული ფუნქციის გრაფიკი.

იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული.



2.

ა) $y = 2\sin x$

ბ) $y = 3\cos x$

გ) $y = 2 \operatorname{ctg} x$

დ) $y = 3 \sin 2x$

ე) $y = 2 \cos 3x$

ვ) $y = 4 \operatorname{tg} 2x$

ზ) $y = x^2 \cdot \sin x$

თ) $y = x \cdot \sin 2x$

ი) $y = x^2 \cdot \cos 2x$

3.

გამოთვალეთ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა მოცემულ წერტილში.

ა) $f(x) = 4x - 2\operatorname{tg} x$, $f'(\frac{\pi}{4})$

ბ) $f(x) = x \cdot \cos 2x$, $f'(\pi)$

4.

იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული და $x = \frac{\pi}{3}$ წერტილში გამოთვალეთ მხედების კუთხური კოეფიციენტი.

ა) $y = \cos x$

ბ) $y = 2\sin x$

გ) $y = \cos x - \sin x$

დ) $y = -\sin 3x$

ე) $y = \cos(\pi - 2x)$

ვ) $y = \cos(3x + 2\pi)$

5.

იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

ა) $y = \sin x \cos x$

ბ) $y = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x$

გ) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$

დ) $y = \cos 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x$

6.

უჩვენეთ, რომ $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია.

7.

იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

1) $y = \sin^2 x$

2) $y = \cos^2 x$

3) $g(t) = \frac{\cos t}{t}$

4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

5) $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

6) $y = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}$

7) $y = e^{2x} \cdot \sin 2x$

8) $y = e^{-x} \cdot \cos \frac{1}{x}$

9) $y = 3\sin^2 2x$

8.

ამოხსენით განტოლება $f'(x) = 0$.

ა) $f'(x) = x - \cos x$

ბ) $f'(x) = \sin x + \frac{x}{2}$

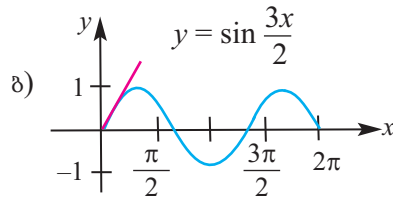
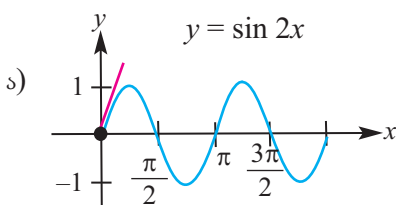
გ) $f'(x) = x + \cos 2x$

9.

ფორმულით დაწერეთ სულ მცირე თითო $f(x)$ ფუნქცია მაინც, რომლის წარმოებულია: ა) $f'(x) = 2 + \sin x$; ბ) $f'(x) = \cos 2x$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებული

- 10.** ღია ტიპის შეკითხვა. დაწერეთ $y = \sin^n u(x)$ სახის რაიმე რთული ფუნქცია და იპოვეთ მისი წარმოებული.
- 11.** ა) განსაზღვრეთ $y = \sin^2 x$ ფუნქციის გრაფიკის ყველა იმ წერტილის აბსცისა, რომლებშიც მხედის კუთხური კოეფიციენტი ნულის ტოლია.
 ბ) განსაზღვრეთ $f(x) = 2\sin x - \sin^2 x$ ფუნქციის გრაფიკის რომელ წერტილებში არიან მხედები ჰორიზონტალური.
 გ) დაწერეთ $y = \sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x_0 = \frac{\pi}{3}$ წერტილში გავლებული მხედის განტოლება.
- 12.** იპოვეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკისადმი კოორდინატა სათავეში გავლებული მხედის კუთხური კოეფიციენტი. შეადარეთ ეს მნიშვნელობა $x = 2\pi$ წერტილში გავლებული მხედის კუთხურ კოეფიციენტთან.



- 13.** იპოვეთ $y = x^2 \sin 2x$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული.
- 14.** თუ $P(x) = 1 - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x + \dots$, და $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ მაშინ რომელია $P'(x)$ ფუნქცია?
 ა) $\sin 2x$ ბ) $\cos 2x$ გ) $-\operatorname{tg} 2x$ დ) $-\sin 2x$ ე) $-\cos 2x$
- 15.** ზღვაში მოქცევისა და მიქცევის გამო სანაპიროზე წყლის სიღრმის (მეტრობით) $D(t) = 0,5 + 1,5 \cos \frac{\pi t}{6}$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.
 ა) დაწერეთ dD/dt ფუნქცია.
 ბ) იპოვეთ dD/dt მნიშვნელობა, როცა $t = 5$ და $t = 10$. განმარტეთ ეს მნიშვნელობები სიტუაციის შესაბამისად.
 გ) როდის იქნება სანაპიროს სიახლოვეს წყალი ყველაზე ღრმა?

- 16.** იპოვეთ $y = 2\cos x \sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x = \frac{\pi}{2}$ წერტილში გავლებული მხედის კუთხური კოეფიციენტი.
- 17.** იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული θ -ს მიხედვით.

ა) $f(\theta) = -3\cos\theta - 2\sin\theta$

ბ) $f(\theta) = 15\cos 3\theta + \theta - 6$

გ) $f(\theta) = \frac{\pi}{2} \sin\theta - \pi\cos\theta + 2\pi$

დ) $f(\theta) = \frac{\pi}{4} \cos 4\theta - \frac{\pi}{3} \sin 3\theta$

განმაზოგადებელი დაფალებები

1. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

$$\text{ა) } h(t) = t^3 - 2t^2 + \frac{1}{t^2} \quad \text{ბ) } p(n) = -n^5 + 5n^3 + \sqrt[3]{n^2} \quad \text{გ) } p(r) = r^6 - \frac{2}{5\sqrt{r}} + r - 1$$

2. ბუშტის ჰაერით ტუმბავენ, ბუშტის მოცულობის $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ სახით განსაზღვრა შეიძლება, r უჩვენებს რადიუსს (სანტიმეტრებით).

განსაზღვრეთ ბუშტის რადიუსის $r = 1, 5; 6; 9$ მომენტში მოცულობის ცვლილება.

3. ა) ააგეთ $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი. აბსცისის $x_0 = 1$ მქონე წერტილში გაავლეთ მხები და დაწერეთ ამ მხების განტოლება.

ბ) დაწერეთ $y = (6x - 3)(-x^2 + 2)$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისის $x_0 = 1$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

4. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = (4 - x^2)(3x + 1)$. იპოვეთ $f''(x)$ მნიშვნელობა.

5. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა მოცემულ წერტილში.

$$\begin{array}{ccc} \text{ა) } g(x) = \frac{2-7x}{(4x+3)^3} & \text{ბ) } f(x) = \frac{8x^3}{\sqrt{3x-2}} & \text{გ) } m(x) = \frac{(-x+2)^2}{(5+2x)^4} \\ x_0 = -1 & x_0 = 1 & x_0 = -2 \end{array}$$

6. იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის მნიშვნელობა x_0 წერტილში.

$$\text{ა) } y = u^2 + 3u; u = \sqrt{x-1}; x_0 = 5 \quad \text{ბ) } y = \sqrt{2u}; u = 6-x; x_0 = -3$$

7. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) & \text{ბ) } y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) & \text{გ) } f(x) = -\frac{\pi}{2} \cos^2 x \\ \text{დ) } y = \sin^4 \theta & \text{ე) } y = \sin^3 4\theta & \text{ვ) } y = 3\cos^2 2\theta \end{array}$$

8. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

$$\text{ა) } y = -2e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{ბ) } f(x) = x^3 e^{2x} - x^2 e^{-2x} \quad \text{გ) } g(x) = 2x e^{\sin x} \quad \text{დ) } y = e^x \cos(2x)$$

9. დღეს ყველაზე თანამედროვედ მიჩნეულ კომპიუტერს თუ შეიძენთ, გარკვეული დროის გასვლის შემდეგ დაინახავთ, რომ იგი გაიაფდა. კომპიუტერის ფასის დროზე დამოკიდებულებით ცვლილების $A(t) = 900e^{-t/3}$ ფუნქციის სახით გამოსახვა შეიძლება.

ა) იპოვეთ კომპიუტერის საწყისი ფასი.

ბ) რამდენი მანეთი იქნება კომპიუტერის ფასი ერთი წლის შემდეგ?

გ) რამდენი წლის შემდეგ იქნება კომპიუტერის ფასი საწყისი ფასის ნახევრის ტოლი? რისი ტოლია ამ დროს ფასის შემცირების სიჩქარე?

- ცილინდრის მოცულობა
- კონუსის მოცულობა
- წაკვეთილი კონუსის მოცულობა
- ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა
- მსგავსი ფიგურების მოცულობა

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|----------------------|------------------------------|
| ◆ კონუსის მოცულობა | ◆ ნახევარბირთვის მოცულობა |
| ◆ ცილინდრის მოცულობა | ◆ ბირთვის სეგმენტის მოცულობა |
| ◆ ბირთვის მოცულობა | ◆ ბირთვის ფენის მოცულობა |
| | ◆ ბირთვის სექტორის მოცულობა |

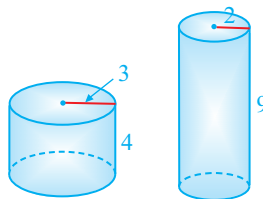
ეს საინტერესოა!

ხალიჩის მუზეუმის შენობას თავისებური ადგილი უკავია ბაქოს თანამედროვე არქიტექტურულ ნიმუშებს შორის. დახვეული ხალიჩის სახის ფორმის მქონე შენობაში ხალიჩებისა და ხალიჩისებრი ნაწარმების, მეტალის ნაწარმების, სამოსისა და კერვის, კერამიკის, საიუველირო ნაწარმის, წიგნებისა და ფოტოსურათებისაგან შემდგარი იშვიათი კოლექციაა დაცული. მუზეუმის საგამოფენო კონცეფცია განსხვავებულია ჩვეულებრივი გამოფენებისაგან. ძირითადი ექსპონატები - ხალიჩები რკალისებრი ფორმის კედლებზე ჩამოკიდებული და მათი გამოსახულება ზედა სართულების უმრავლესი ადგილებიდან ჩანს. ამის საშუალებით შესაძლებელია გამოფენის დიდი ნაწილის სხვადასხვა რაკურსიდან დანახვა.



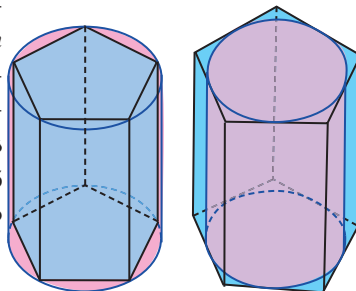
ცილინდრის მოცულობა

მოცულობაზე საუბრისას სივრცითი ფიგურების ტევადობა იგულისხმება. როგორ ფიქრობთ, ქვემოთ მოცემული ორი ცილინდრიდან რომლის მოცულობა იქნება უფრო მეტი?



ცილინდრის მოცულობა

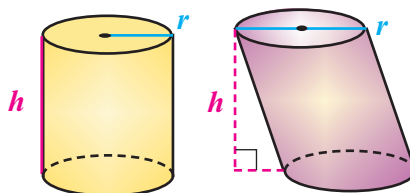
პრიზმას, რომლის ფუძეები ცილინდრის ფუძეებში არის ჩახაზული (ფუძეებზეა შემოხაზული) ცილინდრში ჩახაზული (ცილინდრზე შემოხაზული) პრიზმა ეწოდება. დავუშვათ, ცილინდრში და ცილინდრზე, რომლის რადიუსია r , და სიმაღლეა h შესაბამისად ჩახაზულია და შემოხაზულია წესიერი n -კუთხა პრიზმები. რაც უფრო n უსასრულოდ გაიზრდება, ამ პრიზმების ფუძეების ფართობების ცილინდრის ფუძის ფართობთან ($S_{\text{ფძ}}$) მიახლოების გამო მათი მოცულობები $S_{\text{ფძ}} \cdot h$ -ს მიუახლოვდება.



ცილინდრის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

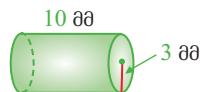
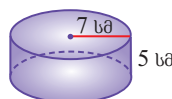
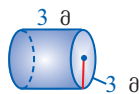
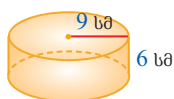
$$V = S_{\text{ფძ}} h, \quad S_{\text{ფძ}} = \pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

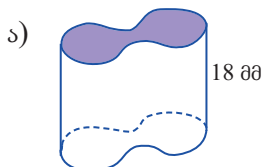


სასწავლო დაფალებები

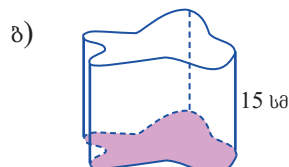
1. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცილინდრების მოცულობა.



2. მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ ფიგურების მოცულობა.



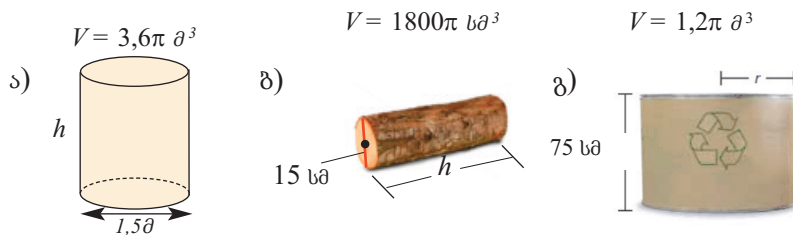
ფუძის ფართობი: 25 მ^2



ფუძის ფართობი: 35 მ^2

ცილინდრის მოცულობა

3. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობი სიდიდეები.

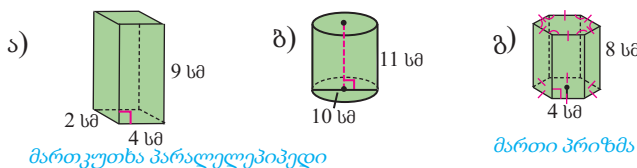


4. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 20π , სიმაღლე კი 10 ერთეული.

5. ცილინდრის სიმაღლე 5 სმ, სრული ზედაპირის ფართობი $72\pi \text{ სმ}^2$ -ია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

6. ცილინდრის სიმაღლე 25 სმ, ფუძის დიამეტრი 8 სმ-ია. როგორ შეიცვლება მისი მოცულობა, თუ სიმაღლეს 5 სმ-ით შევამცირებთ, ხოლო ფუძის რადიუსს 1 სმ-ით გავზრდით?

7. იპოვეთ ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

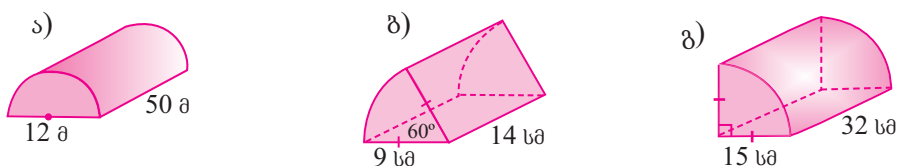


8. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი S -ის, ფუძის წრეწირის სიგრძე C -ს ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

9. ცილინდრის ღერძული კვეთი არის კვადრეტი, რომლის დიაგონალი 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

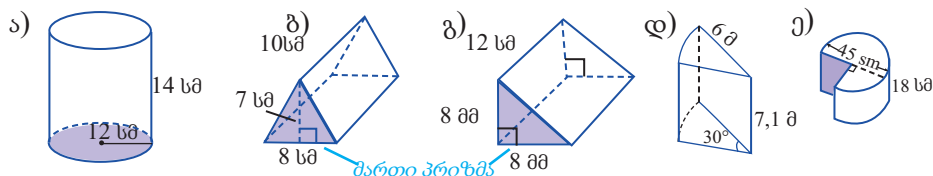
10. ცილინდრში წესიერი სამკუთხა პრიზმა და ამ პრიზმაში ცილინდრია ჩახაზული. იპოვეთ ამ ცილინდრების მოცულობების შეფარდება.

11. სურათზე ცილინდრის სიბრტყითი კვეთებით გამოყოფილი ნაწილებია გამოსახული. მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ ამ ნაწილების მოცულობა.



ცილინდრის მოცულობა

12. მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ ფიგურების მოცულობა.



13. ა) ცილინდრის მოცულობის ორჯერ გაზრდისათვის, ფუძის შეუცვლელად სიმაღლის რამდენჯერ გაზრდაა საჭირო?
 ბ) ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი (კვადრატულ ერთეულებში) და მოცულობა (კუბურ ერთეულებში) ერთი და იგივე რიცხვით გამოისახება. იპოვეთ დიამეტრი.

გამოყენებითი დაგვლებები

14. წვენი ჩასხმული იყო 15 სმ ფუძის რადიუსისა და 20 სმ სიმაღლის ჭურჭლებში. წვენი იყიდება 6 სმ სიმაღლისა და 3 სმ ფუძის რადიუსის მქონე ჭიქებით. რა თანხის მიღება შეიძლება ერთი ჭურჭლის წვენის ჭიქებით გაყიდვისას, თუ ერთი ჭიქა წვენის ფასი 3 მანათია?



15. მილის შიგა დიამეტრი 24 სმ, გარე დიამეტრი 28 სმ, ხოლო სიგრძე 35 სმ-ია. იპოვეთ მილის მასა, თუ მისი დამზადებისათვის მასალის სიმკვრივე 0,6 გრ/სმ³-ია.

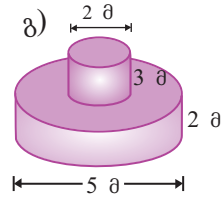
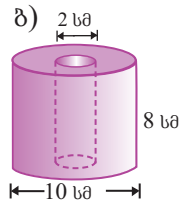
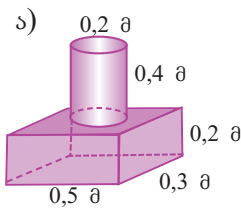
16. თივა შესანახად მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმით იწნეხება. ამ პარალელეპიპედის ზომები როგორც წესი 40 სმ × 40 სმ × 90 სმ-ია. თუმცა ზოგჯერ იგი ცილინდრის ფორმითაც იწნეხება (პრესი). სურათზე მოცემული ზომის დამრგვალებული წნეხიდან რამდენი ასეთი პარალელეპიპედის დამზადება შეიძლება?



17. ფანქარი 7 მმ რადიუსის მქონე ცილინდრის ფორმის ხის ნაწილისაგან და 1 მმ რადიუსიანი გრაფიტის ნაწილისაგან შედგება. იპოვეთ 14 სმ სიგრძის ფანქრის ხის ნაწილის მოცულობა.

ცილინდრის მოცულობა

18. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ რთული ფიგურების მოცულობა.



19. გულგაზი ამბობს, რომ ფუძის რადიუსი 0,75 მ და სიმაღლე 0,50 მ-ის მქონე წყლის ავზის ორჯერ გაზრდისათვის მისი მოცემული ზომების ორჯერ გაზრდაა საჭირო. სწორი გამოთვლების წარმოების შემდეგ გამოთქვით დამოკიდებულება გულგაზის მოსაზრებისადმი.

ა) რამდენ ლიტრ წყალს იტევს მოცემულ ზომებიანი ავზი?

ბ) რომელ ზომებიანი ავზის მოცულობა იქნება მოცემულთან შედარებით ორჯერ მეტი?

20. სურათზე ორი სხვადასხვა- ცილინდრული და მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის მარილის ყუთია მოცემული.

ა) რომელი ჭურჭლის ტევადობა არის უფრო მეტი?

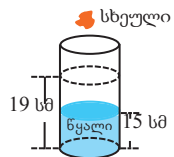
ბ) თქვენი აზრით, რომელ ჭურჭელში მოთავსება, ერთმანეთზე დაწყობის და გადაზიდვის თვალსაზრისით არის უფრო ხელსაყრელი? დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება.



21. $20\text{ სმ} \times 15\text{ სმ} \times 6\text{ სმ}$ ზომებიანი პარალელებიპედის ფორმის ცომის მასისაგან 1 სმ რადიუსისა და 5 სმ სიმაღლის ცილინდრის ფორმის კექსები უნდა დამზადდეს. რამდენი ასეთი კექსის დამზადება შესაძლებელი?

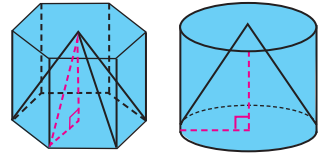
22. 10 სმ სიმაღლის წყლით სავსე ჭურჭლიდან 25 სმ^3 წყლის გადმოსხმის შემდეგ ჭურჭელში წყლის დონე 2 სმ-ით შემცირდა. რა ტევადობისაა ჭურჭელი?

23. 4 სმ რადიუსიანი ფუძის მქონე ჭურჭელი 15 სმ სიმაღლემდე არის წყლით სავსე. ჭურჭელში წყალში უხსნადი სხეულის ჩაგდებისას წყლის მოცულობა 19 სმ-მდე აიწევს. იპოვეთ წყალში ჩაგდებული სხეულის მოცულობა.

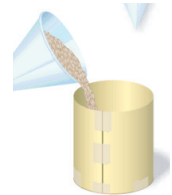
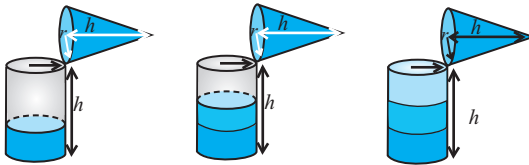
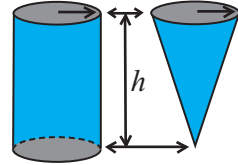


24. წყალსაქაჩი ტუმბოს ცილინდრული დეგუმის დიამეტრი 60 მმ, მოძრაობის მანძილი 150 მმ-ია. დეგუმი 1 წუთში 40-ჯერ ასრულებს მოძრაობას. იპოვეთ 1 საათში შესაძლო მისაწოდებელი წყლის ოდენობა.

პრაქტიკული მეცადინეობა. რა კავშირი არსებობს ტოლისმაღლიანი და ტოლფუძიანი პრიზმისა და პირამიდის მოცულობებს შორის? შეიძლება თუ არა ეს კავშირი მივაკუთვნოთ ცილინდრისა და კონუსის მოცულობებს შორის კავშირს?



მუყაოსაგან დაამზადეთ ფუძის ტოლი რადიუსებისა და ტოლი სიმაღლეების მქონე ცილინდრისა და კონუსის ფორმის მოდელები. კონუსისებრი ჭურჭლით (ქვიშა, ბრინჯი და სხვ.) გაავსეთ ცილინდრული ჭურჭელი. რამდენი კონუსური ჭურჭლით გაივსო ცილინდრული ჭურჭელი. მართალია თუ არა მოსაზრება, რომ სამი კონუსისებრი ჭურჭლით ივსება ცილინდრული ჭურჭელი?



პრიზმის, ცილინდრის, პირამიდისა და კონუსის მოცულობის გამოთვლის წესი განაზოგადეთ ფერად უჯრებში შესაბამისი ინფორმაციების ჩაწერით.

პრიზმისა და ცილინდრის მოცულობა:

მოცულობა = ფუძეების ფართობი ×

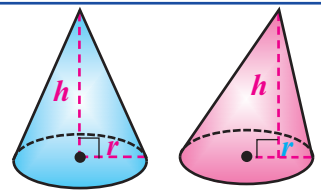
პირამიდისა და კონუსის მოცულობა:

მოცულობა = · იგივე ფუძიანი და სიმაღლიანი პრიზმისა და ცილინდრის მოცულობა.

კონუსის მოცულობა

კონუსის მოცულობა მისი ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{ფძ}} h, \quad S_{\text{ფძ}} = \pi r^2 \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

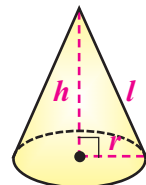


ნიმუში. კონუსის მსახველი 9 სმ-ია, სიმაღლე კი 6 სმ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ამოხსნა: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h;$ $l = 9 \text{ სმ};$ $h = 6 \text{ სმ}.$

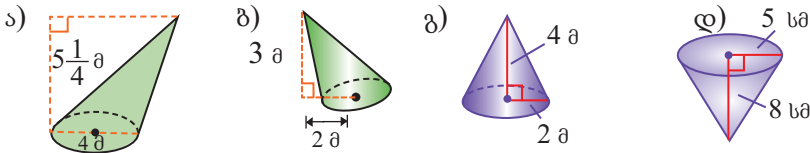
$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 45 \cdot 6 = 90\pi \text{ (სმ}^3\text{)}$$

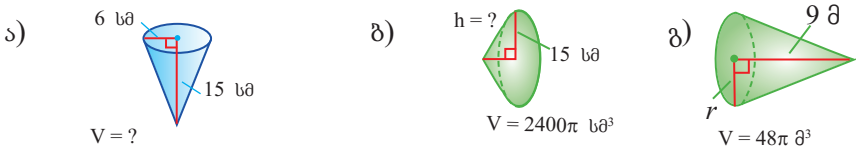


კონუსის მოცულობა

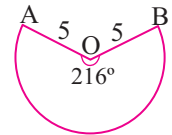
1. იპოვეთ კონუსების მოცულობა.



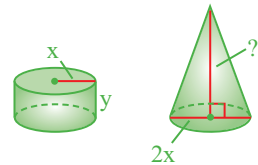
2. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობები.



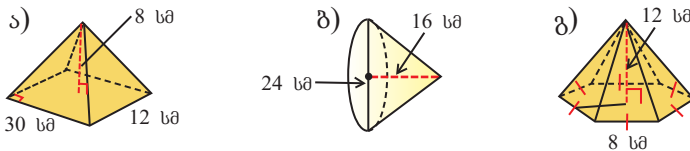
3. სურათზე გაშლილი კონუსის გვერდითი ზედაპირია მოცემული. სურათის მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ კონუსის მოცულობა.



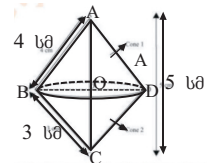
4. ცილინდრისა და კონუსის მოცულობა ტოლია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.



5. იპოვეთ ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



6. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 3 სმ და 4 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



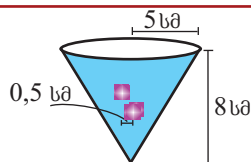
7. 96π მოცულობის მქონე კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება მსახველს, როგორც 4:5. იპოვეთ ამ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი.

8. კონუსის სიმაღლე 6 სმ, გვერდითი ზედაპირი 80π სმ²-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

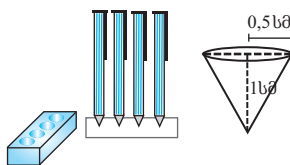
9. კონუსის l სიგრძის მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

კონუსის მოცულობა

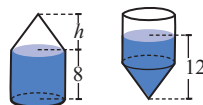
- 10.** 5 სმ რადიუსიან 8 სმ სიმაღლის წყლით სავსე ამოტრიალებული კონუსის ფორმის ჭურჭელში ჩაყარეს 0,5 სმ წიბოს მქონე კუბები. კუბების ჩაყრით ჭურჭელში არსებული წყლის ერთი მეოთხედი ნაწილი ჭურჭლიდან გადმოიღვარა. რამდენი კუბი ჩააგდეს ჭურჭელში



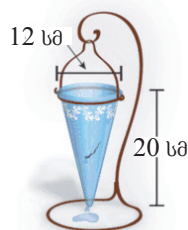
- 11.** ხისაგან პარალელეპიპედის ფორმის კალმების ჩასაწყობი არის დამზადებული, მისი ზომებია $15 \text{ სმ} \times 5 \text{ სმ} \times 2,5 \text{ სმ}$. მასში კალამის კონუსისებრი წვეროს მოსათავსებლად 0,5 სმ რადიუსისა და 1 სმ სიღრმის მქონე კონუსის სახის 8 ნახვრეტია გახსნილი. იპოვეთ კალმების ჩასაწყობის მოცულობა.



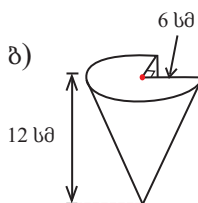
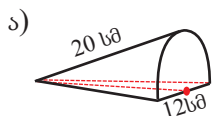
- 12.** 8 სმ სიმაღლის ცილინდრული ფორმის ჭურჭელი, h სიმაღლის კონუსის ფორმის მქონე ჭურჭელთან სურათზე ნაჩვენები სახითაა შეერთებული. რისი ტოლია კონუსის h სიმაღლე, თუ ჭურჭლის ამოტრიალებისას წყლის დონე 12 სმ-ია?



- 13.** სურათზე ნაჩვენებ ზომებიანი კონუსის ფორმის ჭურჭლიდან წუთში 4 სმ³ წყალი წვეთებად ჩამოედინება. რა დროში დაიცლება სავსე ჭურჭლის 80%-ი იმის გათვალისწინებით, რომ $1 \text{ სმ}^3 = 0,001 \text{ ლ}$ -ს, ლიტრებში გამოსახეთ ჭურჭლის ტევადობა.



- 14.** მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ სურათზე მოცემული ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



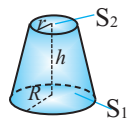
- 15.** 12 სმ ფუძის დიამეტრისა და 15 სმ სიმაღლის მქონე კონუსი ფუძიდან 9 სმ-ის მანძილზე ფუძის პარალელური სიბრტყითაა გადაკვეთილი. იპოვეთ სხვაობა მოცემული კონუსისა და ჩამოკვეთილი პატარა კონუსის მოცულობებს შორის.

- 16.** წაკვეთილი კონუსის მოცულობა 52 სმ^3 -ია. მისი ერთი ფუძის ფართობი 9-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის შევსებით მიღებული სრული კონუსის მოცულობა.

წაკვეთილი კონუსის მოცულობა

17. წაკვეთილი კონუსის მოცულობის ფორმულა დაამტკიცეთ ქვემოთ მოცემული თანმიმდევრობით.

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$



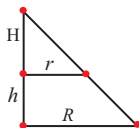
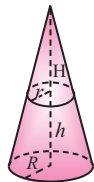
1. წაკვეთილი კონუსი შეავსეთ სრულ კონუსამდე. შემავსებელი მცირე კონუსის სიმაღლე აღნიშნეთ H -ით.

2. დაწერეთ შევსებული და მცირე კონუსის მოცულობები.

3. დაწერეთ ამ მოცულობების სხვაობა $V = \frac{\pi}{3} (R^2 h + H (R-r)(R+r))$ სახით.

4. ფუძის რადიუსებისა და სიმაღლეების შემქმნელი სამკუთხედების მსგავსებიდან უჩვენეთ, რომ $H (R-r) = hr$.

5. მე-4 პუნქტში მიღებული ტოლობა შეიტანეთ მე-3 პუნქტში არსებულ ტოლობაში. უჩვენეთ, რომ წაკვეთილი კონუსის მოცულობის ფორმულაა



$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2) \text{ ანუ}$$

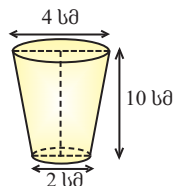
$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

სადაც S_1 და S_2 ფუძეების ფართობებია.

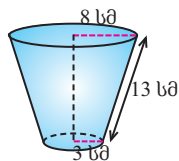
18. წაკვეთილი კონუსის ფორმის ჭიქის ზომები სურათზეა ნაჩვენები.

ა) გამოთვალეთ ჭიქაში წყლის ტევადობა კუბური სანტიმეტრებით.

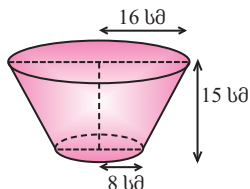
ბ) იმის გათვალისწინებით, რომ $1\text{ მ}^3 = 1000\text{ ლ}$, გამოთვალეთ ჭიქის ტევადობა მილილიტრებით.



19. წაკვეთილი კონუსის მსახველი 13 სმ, ფუძეების რადიუსები შესაბამისად 8 სმ და 3 სმ-ია. გამოთვალეთ მისი სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



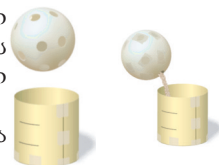
20. რკინისაგან დამზადებული პირღია რძის ჭურჭელი წაკვეთილი კონუსის ფორმისაა. მისი სიმაღლე 15 სმ, ფუძეების რადიუსები 8 სმ და 16 სმ-ია. 1 ლიტრი რძის ფასი 1,35 მანათია. რა თანხას მიიღებენ სავსე ჭურჭლით მთელი რძის გაყიდვისას? ჭურჭელზე გამოყენებული მასალის ყოველი 100 სმ^2 -ის ფასი 0,95 მანათია. რა თანხა იქნა დახარჯული ერთი ჭურჭლის მასალაზე?



ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა

პრაქტიკული შეცადინება.

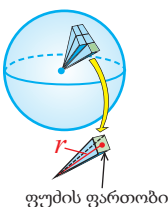
1. აიღეთ ნებისმიერი ბურთი. ივარაუდეთ მისი დიამეტრი.
2. ქაღალდზე დახატეთ ისეთი ცილინდრის შლილი რომლის დიამეტრი და სიმაღლე ბურთის დიამეტრის ტოლია.
3. ქაღალდი ამოჭერით, გადაკვეთ და წებოვანი ლენტით დამაგრებით დაამზადეთ პირლია ცილინდრი. ცილინდრის სიმაღლის გასწვრივ 3 ტოლ ნაწილად დაყოფით მასზე გააკეთეთ აღნიშვნები.
4. ბურთს გარსემო შემოუჭირეთ ან მტკიცე ქსოვილის ნაჭერი და სფერული ნაჭრის პარკი დაამზადეთ. პარკი ქვიშით გაავსეთ.
5. ქვიშა მოვალეთ თქვენს მიერ დამზადებულ ცილინდრის ჭურჭელში. ცილინდრის რა ნაწილი შეივსო ქვიშით?



თუ ბირთვის ზედაპირს ჰორიზონტალურად და ვერტიკალურად დავქსელავთ და ქსელის შემადგენელ თითოეულ პატარა „მართკუთხედის“ წვეროებს სფეროს ცენტრთან შევადრებთ, შეიძლება იმის წარმოდგენა, რომ ბირთვი უსასრულო რაოდენობის მცირე „პირამიდებისაგან“ შედგება.



ბირთვის მოცულობა შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც ამ ბირთვის რადიუსის ტოლი სიმაღლის მქონე ამ „პატარა პირამიდების“ მოცულობების ($\frac{1}{3} S_{\text{ფ}} r$) ჯამი. ფუძეების ზომების უსასრულო შემცირებით პირამიდების რაოდენობა უსასრულოდ გაიზრდება. პირამიდების ფუძეების ფართობების ჯამი ბირთვის ფართობის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ბირთვის ზედაპირის ფართობი $4\pi r^2$ -ია, ბირთვის მოცულობისათვის მივიღებთ ფორმულას:

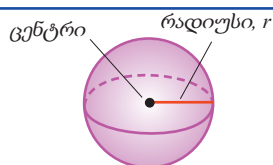


$$V = \frac{1}{3} S \cdot r = \frac{1}{3} 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ბირთვის მოცულობა

ბირთვის მოცულობა $\frac{4}{3} \pi$ -სა და რადიუსის კუბის ნამრავლის ტოლია.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



ნიმუში. იპოვეთ:

ა) ბირთვის მოცულობა, რომლის რადიუსი 3 სმ-ია.

ბ) ბირთვის რადიუსი, რომლის მოცულობა 288 სმ³-ია.

ამოხსნა: ა) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$r = 3 \text{ სმ}$$

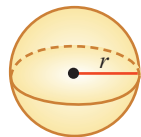
$$V = \frac{4}{3} \pi (3)^3 = 36\pi \text{ (სმ}^3\text{)}$$



ბ) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

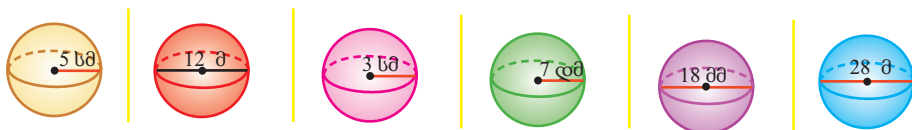
$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 288$$

$$r^3 = \frac{288 \cdot 3}{4\pi} = \frac{216}{\pi}, r = \sqrt[3]{\frac{216}{\pi}} \text{ (სმ)}.$$

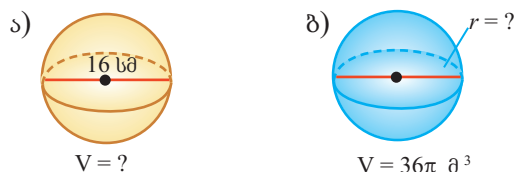


ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა

1. გამოთვალეთ ბირთვის მოცულობა.



2. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობი სიდიდე.



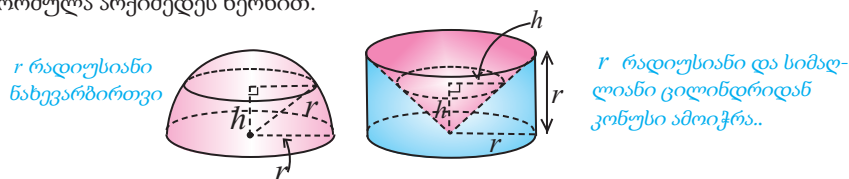
3. ა) იმისათვის, რომ 3 სმ რადიუსის მქონე ბირთვი მოთავსდეს კუბის ფორმის ყუთში, სულ მცირე რამდენი კუბური სანტიმეტრი უნდა იყოს კუბის მოცულობა?

ბ) 2,4 სმ რადიუსის მქონე ბირთვს გადნობის შემდეგ 4 სმ რადიუსიანი ცილინდრის ფორმა მიეცა. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე.

გ) 3 სმ, 5 სმ და 6 სმ რადიუსის მქონე მეტალის ბირთვები გადაადნეს და ერთი დიდი ბირთვი მიიღეს. იპოვეთ მიღებული ბირთვის რადიუსი. ეს ბირთვი გადაადნეს და 4 სმ რადიუსიანი ცილინდრის ფორმა მისცეს. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე.

დ) 22 სმ დიამეტრიანი ფეხბურთის ბურთი მოათავსეს კუბური ფორმის ყუთში, რომლის წიბო 24 სმ-ია. იპოვეთ ყუთის მოცულობის რამდენი კუბური სანტიმეტრი დარჩა ცარიელი?

4. ქვემოთ მოცემული თანმიმდევრობის დაცვით განსაზღვრეთ ბირთვის მოცულობის ფორმულა არქიმედეს ხერხით.



1. უჩვენეთ, რომ ნახევარბირთვის h სიმაღლეზე არსებული წრიული კვეთის ფართობია: $\pi(r^2 - h^2)$.

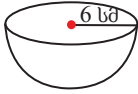
2. უჩვენეთ, რომ კონუს ამოჭრილ-ამოღებული ცილინდრის h სიმაღლეზე არსებული წრიული კვეთის ფართობია: $\pi(r^2 - h^2)$.

3. კავალიერის პრინციპის მიხედვით განმარტეთ, რომ ამ ფიგურების მოცულობები ტოლია და გამოსახეთ მოცულობის ფორმულა.

ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა

5. 1) დაწერეთ ნახევარბირთვის მოცულობის ფორმულა.
2) გამოთვალეთ ნახევარბირთვის მოცულობა.

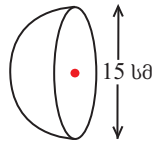
ა)



ბ)



გ)



6.

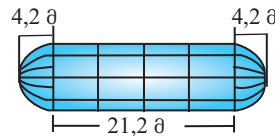
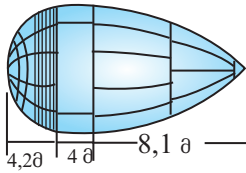
კოსმოსური ხომალდების საწვავით უზრუნველყოფისათვის შატლად წოდებული ორბიტული ხომალდები გამოიყენება. ეს ხომალდები დედამიწის გარშემო ორბიტაზე მყოფი ხომალდებისათვის საჭირო ტვირთის მისატანად გამოიყენება. შატლებს სხვა კოსმოსური ხომალდებისაგან განსხვავებით მრავალჯერ ორბიტაზე გასვლა და დაბრუნება შეუძლიათ. შატლებს თხევადი ჟანგბადისა და თხევადი წყალბადის ავზები აქვთ.



თხევადი ჟანგბადის ავზი ფორმით ნახევარსფეროს, ცილინდრისა და კონუსის შეერთებითაა მიღებული. თხევადი წყალბადის ავზი კი ბოლოებში ნახევარსფეროს მქონე ცილინდრია. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით გამოთვალეთ ავზების მოცულობა.

თხევადი ჟანგბადის ავზი

თხევადი წყალბადის ავზი



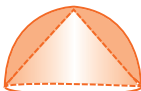
7.

A სურათზე 8 სმ რადიუსიანი ნახევარბირთვიდან კონუსისებრი ფორმაა ამოკვეთილი. იპოვეთ მიღებული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

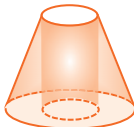
B სურათზე 10 სმ და 4 სმ ფუძეების დიამეტრებიანი წაკვეთილი კონუსიდან სიმაღლეების გასწვრივ ცილინდრია ამოკვეთილი. ცილინდრის ფუძე კონუსის მცირე ფუძეს ემთხვევა. იპოვეთ მიღებული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა, თუ წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე 4 სმ-ია.

C სურათზე 6 სმ დიამეტრიანი ნახევარბირთვიდან 4 სმ დიამეტრიანი ნახევარბირთვია ამოკვეთილი. იპოვეთ მიღებული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

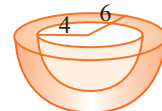
A.



B.



C.



8.

a სიგრძის წიბოს მქონე კუბში ბირთვი ისეა მოთავსებული, რომ მის ზედაპირს ეხება. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან კუბის წახნაგამდე და ბირთვის მოცულობა. დახაზეთ შესაბამისი სურათი.

ბირთვული სექტორი და ბირთვული სეგმენტი

კონიკური ზედაპირის ბირთვისაგან გამოყოფილ ნაწილს, რომლის წვეროც ბირთვის ცენტრშია ბირთვული სექტორი ეწოდება. ბირთვული სექტორი წვეროს ბირთვის ცენტრში მქონე კონუსისა და ბირთვული სეგმენტის გაერთიანებაა. ვინაიდან შესაძლებელია ბირთვის სექტორის მოცულობა განვიხილოთ როგორც წვეროების ბირთვის ცენტრში, ფუძეები შესაბამისი ბირთვის სეგმენტის მხები მცირე პირამიდების მოცულობების ჯამის ზღვარი.

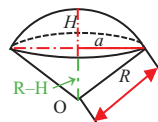
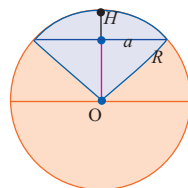
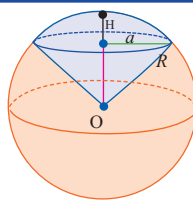
$$V_{\text{სექ}} = \frac{1}{3} S_{\text{სეგმ}} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R H \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^2 H \quad \text{იქნება.}$$

მეორეს მხრივ, რადგან

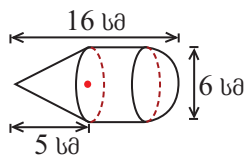
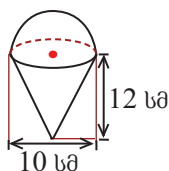
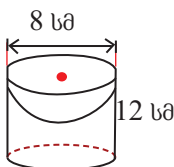
$$a^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2 \quad \text{და}$$

$$V_{\text{კონ}} = \frac{1}{3} \pi a^2 (R - H) = \frac{1}{3} \pi (2RH - H^2)(R - H), \quad \text{ამიტომ}$$

$$V_{\text{სეგმ}} = V_{\text{სექ}} - V_{\text{კონ}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi (2RH - H^2)(R - H) = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right)$$



9. ბირთვის დიამეტრი 10 სმ-ია. იპოვეთ 1 სმ სიმაღლის მქონე ბირთვის სეგმენტის ფუძის ფართობი და შესაბამისი ბირთვული სექტორის მოცულობა.
10. ბირთვის დიამეტრის მართობული სიბრტყე დიამეტრს 3 სმ-იან და 9 სმ-იან 2 ნაწილად ყოფს. რა ნაწილებად დაიყოფა ბირთვის მოცულობა?
11. ბირთვის სექტორის შესაბამისი სეგმენტის ფუძის წრეწირის რადიუსი 60 სმ-ია, ბირთვის რადიუსი 75 სმ. იპოვეთ ამ სექტორის მოცულობა.
12. ბირთვის ფენის ფუძეების რადიუსებია 3 მ და 4 მ, ბირთვის რადიუსი 5 მ-ია. იპოვეთ ბირთვის ფენის მოცულობა (განიხილეთ ორი შემთხვევა).
13. გამოთვალეთ ფიგურების მოცულობა.



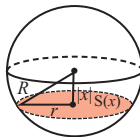
ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა

საპროექტო სამუშაო. ცილინდრის, კონუსისა და ბირთვის მოცულობებს შორის არქიმედეს აღმოჩენილი თანაფარდობა.

არქიმედემ გამოიკვლია კავშირი r რადიუსიანი ბირთვის მომცველ ცილინდრის მოცულობასა და ცილინდრში მდებარე კონუსის მოცულობას შორის და განსაზღვრა ბირთვის მოცულობის ფორმულა. ჩვენც ვცადოთ ამ სამუშაოს შესრულება.



რადიუსი $R = 5$ მქონე ბირთვის ცენტრიდან x მანძილზე მდებარე სიბრტყითი კვეთის ფართობის x -ზე დამოკიდებულებით ცვლილება წარმოადგინეთ ქვემოთ მოცემულ ნაბიჯებად შესრულებით.



ა) გამოთვალეთ $S(x)$ ფუნქციის ქვემოთ მოცემული მნიშვნელობები.

$$S(0); S(1); S(3); S(4); S(5)$$

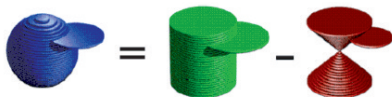
ნიმუშისათვის გამოთვლილია $S(1)$ მნიშვნელობა:

$$S(1) = \pi r^2 = \pi(R^2 - 1^2) = \pi(5^2 - 1^2) = 24\pi$$

ბ) წარმოადგინეთ თქვენი მოსაზრებები სიბრტყითი კვეთის $S(0)$ და $S(5)$ მნიშვნელობების შესახებ.

გ) დაწერეთ R რადიუსიანი ბირთვის ცენტრიდან x მანძილზე მყოფი სიბრტყითი კვეთის ფართობის განმსაზღვრელი საერთო ფორმულა.

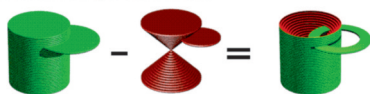
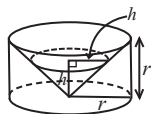
დ) გ პუნქტში თქვენს მიერ დაწერილი ფორმულა დააკავშირეთ ქვემოთ მოცემულ სურათთან.



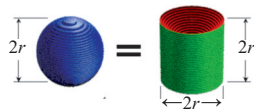
ე) არქიმედეს მოსაზრებების გააზრებისათვის კვლავ დავუბრუნდეთ წინა სურათს.



“შიგნიდან” კონუსამოკვეთილი ცილინდრის ფუძის პარალელურად სიბრტყეებთან წაკვეთილი რგოლები იქნება. იმავე დონეზე ბირთვის სიბრტყითი კვეთა წრე იქნება. სამკუთხედების მსგავსების მიხედვითაც შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ ნაჭრების ფართობები $\pi(r^2 - h^2)$ -ის ტოლია. ამ სიბრტყითი კვეთების ფართობები ტოლობიდან გამომდინარე კავალიერის პრინციპის თანახმად ამ სხეულების მოცულობები ტოლია.



$$\pi r^2 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 r = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

მსგავსი ფიგურების მოცულობა

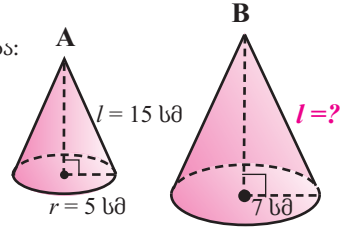
მსგავსი სივრცითი სხეულების შესაბამისი წრფივი ზომების შეფარდება ტოლი უნდა იყოს. მსგავსი სივრცითი ფიგურების მოცემული შესაბამისი ზომების მიხედვით უცნობი ზომების პოვნა შეიძლება.

ნიმუში. A და B კონუსები მსგავსი კონუსებია. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ B კონუსის მსახველი.

ამოხსნა: დავწეროთ წრფივი ზომების შეფარდება:

$$\frac{\text{რადიუსი A}}{\text{რადიუსი B}} = \frac{\text{მსახველი A}}{\text{მსახველი B}}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{l} \quad l = 21 \text{ სმ}$$



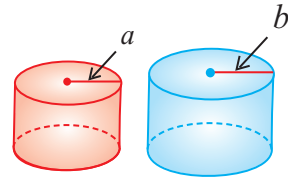
ორი მსგავსი სივრცითი ფიგურის ზედაპირების ფართობების შეფარდება მათი შესაბამისი წრფივი ზომების შეფარდების კვადრატის ან კიდევ მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია:

$$A \sim B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$$

მსგავსი სივრცითი ფიგურების მოცულობები

მსგავსი A და B სივრცითი ფიგურების მოცულობების შეფარდება მათი შესაბამისი წრფივი ზომების შეფარდების კუბის ან კიდევ მსგავსების კოეფიციენტის კუბის ტოლია:

$$A \sim B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = k^3$$



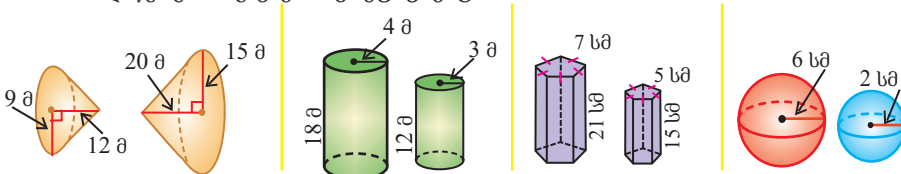
ნიმუში. ორი მსგავსი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 4:9. ცნობილია, რომ მოცულობების სხვაობა 38π კუბური ერთეულია. იპოვეთ ცილინდრების მოცულობები.

ამოხსნა: რადგანაც $\frac{S_A}{S_B} = k^2 = \frac{4}{9}$, ამიტომ $k = \frac{2}{3}$ მაშინ $\frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

სადაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $V_B - V_A = 38\pi$, ვიპოვიტ: $V_A = 16\pi$; $V_B = 54\pi$.

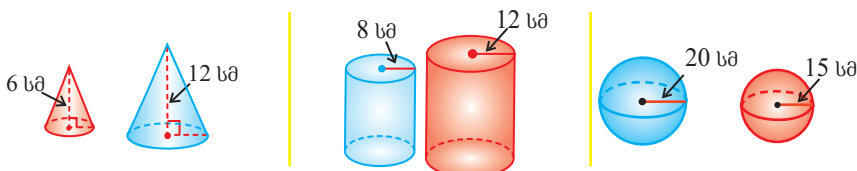
სასწავლო დავალებები.

- განსაზღვრეთ, მსგავსია თუ არა მოცემული ორი ფიგურა? თუ ფიგურები მსგავსია, მაშინ დაწერეთ მსგავსების კოეფიციენტი.



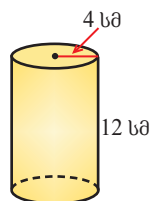
მსგავსი ფიგურების მოცულობა

2. მოცემული ორი ფიგურა მსგავსია. დაწერეთ ამ ფიგურების მოცულობების შეფარდება.

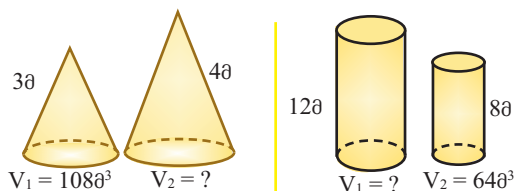


3. ცილინდრის რადიუსი 4 სმ, სიმაღლე 12 სმ-ია. რამდენჯერ გაიზრდება ცილინდრის მოცულობა, თუ მისი ზომები გაიზრდება: ა) 2-ჯერ; ბ) 3-ჯერ?

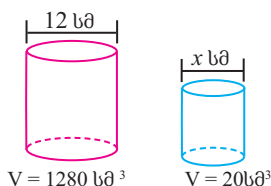
დახაზეთ გაზრდილი ცილინდრები და ზედ დაწერეთ ახალი ზომები. იქნებიათ თუ არა ეს ცილინდრები მოცემული ცილინდრების მსგავსი?



4. მოცემული ფიგურები მსგავსია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობები.

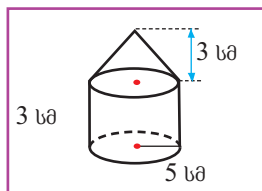


5. ცნობილია, რომ ეს ცილინდრები მსგავსია. იპოვეთ მცირე ცილინდრის დიამეტრი.



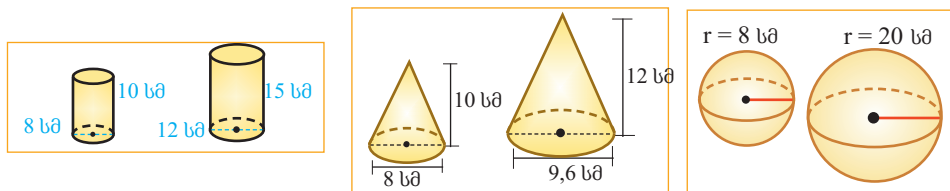
6. კონუსის წრფივი ზომები ორჯერ გაიზარდა.
ა) რამდენჯერ გაიზარდა კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი?
ბ) რამდენჯერ გაიზარდა კონუსის მოცულობა?
გ) მსგავს ორი კონუსის სრული ზედაპირების თანაფარდობა 9:16. იპოვეთ ამ ორი კონუსის მოცულობების შეფარდება.

7. სურათზე ხორბლის საცავის 1:100 მასშტაბით გადაღებული გეგმა მოცემული. გამოთვალეთ მარცვლეულის საცავის რეალური მოცულობა.



მსგავსი ფიგურების მოცულობა

8. მცირე ფიგურის წრფივი ზომების გარკვეულჯერ გაზრდით დიდი ფიგურის შესაბამისი ზომების მიღება შეიძლება. გამოთვალეთ ამ ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობები. განსაზღვრეთ რამდენჯერ არის გაზრდილი დიდი ფიგურის ზომები, სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



9. ფიგურების მსგავსებისა და სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მცირე სივრცითი ფიგურის მოცულობა.



10. ორი ბირთვიდან ერთის რადიუსი მეორის დიამეტრის ტოლია. დაწერეთ ბირთვების ა) მოცულობების შეფარდება; ბ) სრული ზედაპირების ფართობების შეფარდება.

125 სმ³ სითხის ტევადობის ცილინდრული კონტეინერის დამზადებისათვის 240

11. სმ² მასალა გამოიყენება. კომპანიას სურს, რომ ამ კონტეინერების რადიუსისა და სიმაღლის ერთი და იმავე ჯერ გაზრდით მიაღწიოს ტევადობის 1ლ-მდე (1000 სმ³) გაზრდას. რამდენი მასალა დასჭირდება ახალი კონტეინერის დამზადებას?

12. 1) მოცემულია ორი მსგავსი კონუსის ზედაპირის ფართობი და დიდი კონუსის მოცულობა. იპოვეთ მცირე კონუსის მოცულობა.

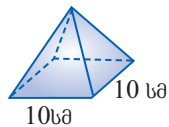
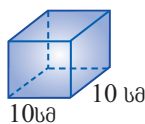
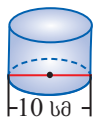
ა) $S_1 = 24 \text{ სმ}^2$	ბ) $S_1 = 36 \text{ დმ}^2$
$S_2 = 96 \text{ სმ}^2$	$S_2 = 324 \text{ დმ}^2$
$V_2 = 96 \text{ სმ}^3$	$V_2 = 432 \text{ დმ}^3$

2) მოცემულია ორი მსგავსი ცილინდრის მოცულობა და მცირე ცილინდრის ზედაპირის ფართობი. იპოვეთ დიდი ცილინდრის ზედაპირის ფართობი.

ა) $V_1 = 36 \text{ სმ}^3$	ბ) $V_1 = 18 \text{ მ}^3$
$V_2 = 288 \text{ სმ}^3$	$V_2 = 488 \text{ მ}^3$
$S_1 = 20 \text{ სმ}^2$	$S_1 = 36 \text{ მ}^2$

განმაზოგადებელი დავალებები

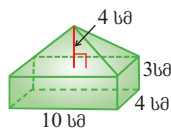
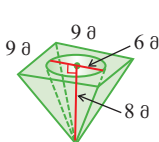
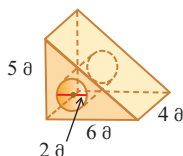
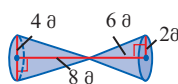
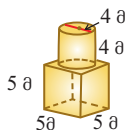
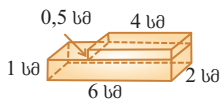
1. ქვემოთ მოცემული ფიგურების სიმაღლეები 8 სმ-ის ტოლია. რომელი ფიგურის მოცულობაა უფრო მეტი?



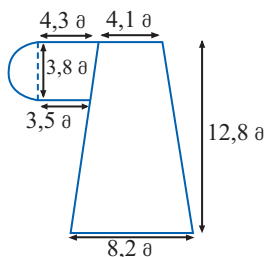
წესიერი პრიზმა

წესიერი პირამიდა

2. იპოვეთ ფიგურების მოცულობა.



3. რამდენი კუბური მეტრი ბეტონია საჭირო ნაჩვენები ფართობის 10 სმ სისქის ბეტონით დაფარვისათვის?



4. ასფალტსატკეპნი მანქანების ცილინდრული ფორმის სატკეპნი ნაწილის კიდეზე უფრო დამძიმებისათვის მას წყლით ავსებენ. რამდენი ტონა იქნება წყლის ტევადობა, თუ მისი სიმაღლე 1,85 მ, ხოლო რადიუსი 0,45 მ-ია?

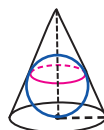


5. რკინის მილის შიგა და გარე დიამეტრი შესაბამისად 15 სმ და 17 სმ, ხოლო სიგრძე კი 10 მ-ია. იპოვეთ მილის მასა, თუ რკინის სიმკვრივე 7,8 ტ/მ³-ია.

6. 169,56 კუბური ერთეული მოცულობის მქონე ცილინდრის ღერძზე გამავალი სიბრტყითი კვეთი კვადრატის ფორმისაა. იპოვეთ ცილინდრის ფუძის რადიუსი.

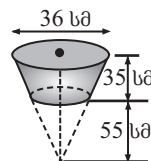
7. ა) იპოვეთ 6 სმ რადიუსიანი ფუძისა და 8 სმ სიმაღლის კონუსისებრ ჭურჭელში მოთავსებული უდიდესრადიუსიანი ბირთვის მოცულობა.

ბ) იპოვეთ r რადიუსიანი, h სიმაღლის კონუსისმაგვარ ჭურჭელში მოთავსებული უდიდესი მოცულობის მქონე ბირთვის რადიუსი.

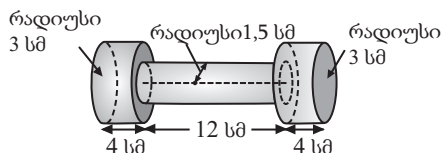


განმაზოგადებელი დაგვარებები

8. სურათზე ნაჩვენები ზომებისა და ფორმის ჭურჭელი წყლით არის სავსე. თუმცა ჭურჭელში არის ნახვრეტი და აქედან წუთში 1, 2 მლ წყალი იცლება. რამდენი წყალი იქნება ჭურჭელში 3 საათის შემდეგ?



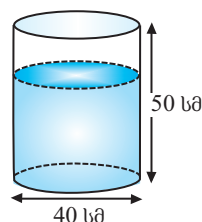
9. სპორტული ინსტრუმენტი განტელი ცილინდრული ნაწილების შეერთებით, მეტალისაგან არის დამზადებული. მთავარი ცილინდრის რადიუსი 3 სმ, სიმაღლე 4 სმ-ია, შემაერთებული ცილინდრის რადიუსი 1,5 სმ, სიმაღლე 12 სმ-ია. იპოვეთ განტელის მოცულობა.



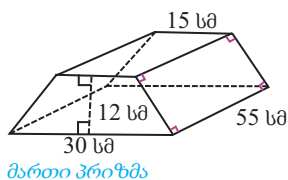
10. სურათზე ნაჩვენები ზომების ცილინდრული ფორმის აკვარიუმში 55 ლ წყალი იყო ჩასხმული.

ა) რა სიმაღლეზე იქნება წყლის დონე ჭურჭელში?

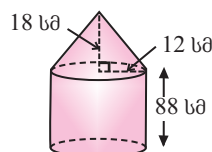
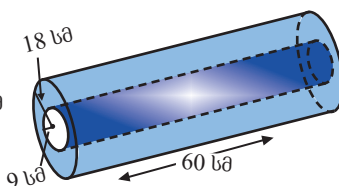
ბ) აკვარიუმში 12 მმ დიამეტრის ფერადი ბირთვების ჩაყრას თუ მოისურვებენ, მაქსიმუმ წყალში რამდენი ბურთულის ჩაგდებაა შესაძლებელი, რომ ჭურჭლიდან წყალი არ გადმოიღვაროს?



11. იპოვეთ ფიგურების მოცულობა.



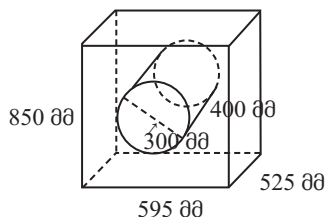
მართი პრიზმა



12. ტანსაცმლის სარეცხი მანქანის ზომებია 850 მმ × 595 მმ × 525 მმ. მანქანა ტანსაცმელს შიგნით არსებული უჟანგავი მეტალისაგან დამზადებული გორგოლაჭის საშუალებით რეცხავს.

ა) გამოთვალეთ ამ გორგოლაჭის წყლის ტევადობა.

ბ) განსაზღვრეთ მანქანის მოცულობა გორგოლაჭის მოცულობის გამოკლებით.



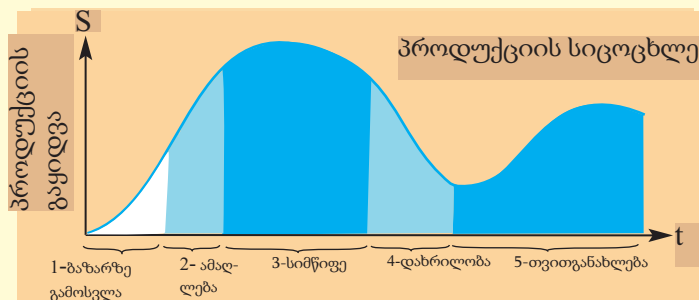
- ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების პოვნა
- ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმები
- ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის მეშვეობით და გრაფიკის აგება
- ამოცანები ექსტრემუმის პოვნის შესახებ. ოპტიმიზაცია

მათემატიკური ლექსიკონი

- ◆ ზრდისა და კლების შუალედები
- ◆ ლოკალური მაქსიმუმი
- ◆ კრიტიკული წერტილები
- ◆ ლოკალური მინიმუმი
- ◆ სტაციონარული წერტილები
- ◆ ფუნქციის ექსტრემუმები
- ◆ ექსტრემუმის წერტილები

ეს საინტერესოა!

პროდუქციის მარკეტინგის დროს რომელიმე პროდუქციის შესახებ ინფორმაციის მისი “პროდუქციის სიცოცხლის” გრაფიკით წარმოდგენა ხდება. არსებობს პერიოდი ხუთ ფაზას: 1- ბაზარზე გამოსვლა; 2- ამაღლების, 3- სიმწიფის 4- დახრილობის, 5- თვით-განახლების ფაზებს მოიცავს და ქვემოთ მოცემულის მსგავსი გრაფიკის ფორმას იძენს.



ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების პოვნა

პრაქტიკული მეცადინეობა. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა.

გრაფიკულად ფუნქციის დახმარებით ერთსა და იმავე კოორდინატა სისტემაში თქვენც ააგეთ $f(x) = x^3 - 4x$ და $f'(x) = 3x^2 - 4$ ფუნქციების გრაფიკები.

• რომელ ინტერვალში იზრდება $f(x)$ ფუნქცია?

• რომელ ინტერვალში კლებულობს $f(x)$ ფუნქცია?

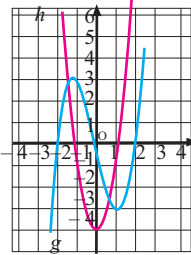
• განსაზღვრეთ $f(x)$ ფუნქციის ზრდის ინტერვალში მხედის აბსცისთა ღერძთან შექმნილი კუთხის სახე.

• განსაზღვრეთ $f(x)$ ფუნქციის კლების ინტერვალში მხედის აბსცისთა ღერძთან შექმნილი კუთხის სახე.

<https://www.geogebra.org/graphing>

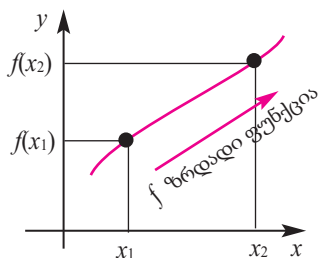
● $f(x) = x^3 - 4x$

● $f'(x) = 3x^2 - 4$



ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები

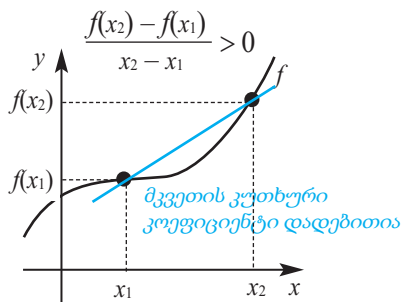
ზრდადი ფუნქცია



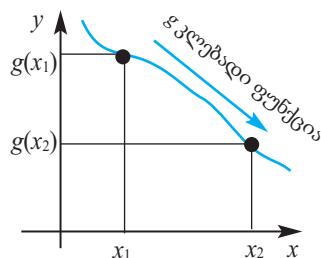
თუ განსაზღვრის არის განსაზღვრული შუალედიდან აღებული $x_2 > x_1$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ნებისმიერი x_1 და x_2 -სათვის $f(x_2) > f(x_1)$, მაშინ ფუნქცია ამ შუალედში ზრდადაა.

ფუნქციის ზრდისა და კლების ინტერვალში ფუნქციის გრაფიკის მკვეთის კუთხურ კოეფიციენტთან დაკავშირებით ქვემოთ მოცემული სახითაც შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

თუ მოცემულ შუალედში ნებისმიერი მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი დადებითია, მაშინ f ფუნქცია ამ შუალედში ზრდადაა.

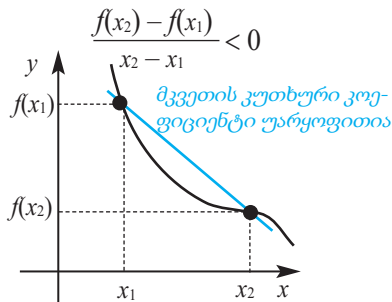


კლებადი ფუნქცია



თუ განსაზღვრის არის განსაზღვრული შუალედიდან აღებული $x_2 > x_1$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ნებისმიერი x_1 და x_2 -სათვის $g(x_2) < g(x_1)$, მაშინ ფუნქცია ამ შუალედში კლებადია.

თუ მოცემულ შუალედში ნებისმიერი მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი უარყოფითია, მაშინ f ფუნქცია ამ შუალედში კლებადია.



ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები

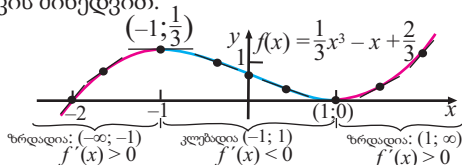
დავუშვათ, რომ განსაზღვრულ შუალედში $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებული დადებითია, ანუ $f'(x) > 0$. ვინაიდან მხების კუთხური კოეფიციენტი $\text{tg} \alpha = f'(x)$, ამიტომ იგი დადებითია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მხები აბსცისითა ღერძის დადებით მიმართულებასთან მახვილ კუთხეს ქმნის და მოცემულ შუალედში გრაფიკი „ზევით იწევს“, ანუ ფუნქცია ზრდადია. თუ $f'(x) < 0$ იქნება, მაშინ მხები აბსცისითა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ზღაგვ კუთხეს ადგენს. გრაფიკი „ქვევით იხრება“, ანუ ფუნქცია კლებადაა.

თეორემა: თუ ფუნქცია მოცემულ შუალედში წარმოებადია და ამ შუალედის თითოეულ წერტილში:

- $f'(x) > 0$ მაშინ, f ფუნქცია ამ შუალედში ზრდადია.
- $f'(x) < 0$ მაშინ, f ფუნქცია ამ შუალედში კლებადაა.
- $f'(x) = 0$ მაშინ, f ფუნქცია ამ შუალედში მუდმივია.

შენიშვნა: თუ f ფუნქცია უწყვეტია ზრდადობის ან კლებადობის შუალედის რომელიმე ბოლოზე, მაშინ ეს წერტილი მოცემულ შუალედს მიეკუთვნება.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ გამოვიკვლიოთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით.



$(-\infty; -1)$ და $(1; +\infty)$ შუალედებში მხების კუთხური კოეფიციენტი დადებითია,

f ფუნქცია $(-\infty; -1]$ და $[1; +\infty)$ შუალედებიდან თითოეულში ზრდადია.

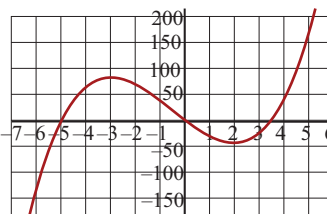
$(-1; 1)$ შუალედში მხების კუთხური კოეფიციენტი უარყოფითია და ფუნქცია $[-1; 1]$ შუალედში კლებადაა.

ნიმუში 1. წარმოებულის მეშვეობით

<https://www.desmos.com/calculator>

განსაზღვრეთ $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$$



ნიმუში: 1. ალგებრული ხერხი. ვიპოვოთ $f(x) =$

$4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ ფუნქციის წარმოებული.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 + 6x^2 - 72x + 1)' = \\ &= 12x^2 + 12x - 72 \end{aligned}$$

როცა $f'(x) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია $12x^2 + 12x - 72 > 0$ უტოლობის მართებულ შუალედში ზრდადია.

უტოლობის ამოხსნისათვის ჯერ ამოვხსნათ შესაბამისი განტოლება.

$$12x^2 + 12x - 72 = 0 \quad x^2 + x - 6 = 0 \quad x_1 = 2, x_2 = -3,$$

მაშასადამე, როცა $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ მაშინ $f'(x) = 0$ იქნება. $x_1 = 2$ და $x_2 = -3$ მნიშვნელობების შესაბამისი წერტილები ფუნქციის განსაზღვრის არეს სამ ინტერვალად ყოფს: $x < -3$, $-3 < x < 2$ და $x > 2$. თითოეული ამ ინტერვალადან საცდელი წერტილის შერჩევით შეგვიძლია განვსაზღვროთ წარმოებულის ნიშანი.

ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების პოვნა

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
საცდელი წერტილი	$x = -5$	$x = -3$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$
$f'(x)$	$f'(-4) = 72$ დადებითი	0	$f'(0) = -72$ უარყოფითი	0	$f'(-4) = 72$ დადებითი
$f(x)$	იზრდება		კლებულობს		იზრდება

ცხრილისა და $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის თანახმად მოცემული ფუნქცია $x \leq -3$ და $x \geq 2$ შუალედებში იზრდება, $-3 \leq x \leq 2$ შუალედში კი კლებულობს. ფუნქციის გრაფიკიდანაც ჩანს, რომ ამოცანის ამოხსნა სწორია.

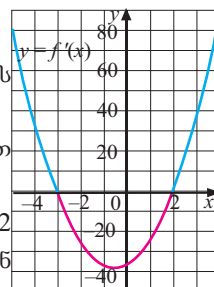
2. გაწარმოებული ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებითაც შეიძლება მოცემული ფუნქციის ზრდისა და კლების ინტერვალების განსაზღვრა.

$f'(x) = 12x^2 + 12x - 72$ ფუნქციის გრაფიკი სურათზე ნაჩვენებია სახისაა.

$f'(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $x < -3$ და $x > 2$ მაშინ x ღერძის ზევით მდებარეობს, მაშასადამე $f'(x) > 0$ იქნება.

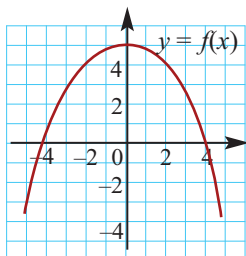
როცა $-3 < x < 2$ მაშინ ფუნქციის გრაფიკი x ღერძის ქვევით მდებარეობს, მაშასადამე, $f'(x) < 0$ იქნება.

ვინაიდან $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ ფუნქცია $x = -3$ და $x = 2$ წერტილებში უწყვეტია, $(-\infty; -3]$ და $[2; +\infty)$ შუალედებიდან თითოეულში იზრდება, $[-3; 2]$ შუალედში კი კლებულობს.

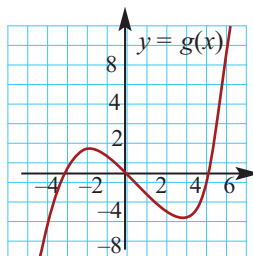


ნიმუში 2. მოცემული პირობების მიხედვით სქემატურად ააგეთ უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკი. ა) როცა $x < 0$ მაშინ, $f'(x) > 0$, როცა $x > 0$ მაშინ, $f'(x) < 0$, $f(0) = 5$; ბ) როცა $x < -2$ და $x > 3$ მაშინ, $f'(x) > 0$, როცა $-2 < x < 3$ მაშინ, $f'(x) < 0$, $f(0) = 0$.

ამოხსნა: ა) როცა $x < 0$, მაშინ წარმოებულის ნიშანი დადებითია: $f'(x) > 0$, მაშასადამე ფუნქცია ზრდადია. როცა $x > 0$, წარმოებულის ნიშანი უარყოფითია, მაშასადამე, $f'(x) < 0$, ფუნქცია კლებადია. როცა $x = 0$, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა 5-ის ტოლია.



ბ) როცა $x < -2$ და $x > 3$, მაშინ წარმოებულის ნიშანი დადებითია: $f'(x) > 0$ მაშასადამე, ფუნქცია ზრდადია. როცა $-2 < x < 3$, მაშინ წარმოებულის ნიშანი უარყოფითია: $f'(x) < 0$. ეს ნიშნავს ფუნქცია კლებადია. როცა $x = 0$, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა 0-ის ტოლია.



ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების პოვნა

სასწავლო დაგეგმვები

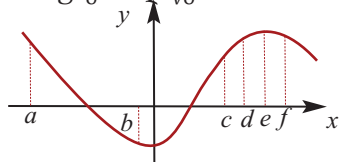
1. ა) ფუნქცია $0 < x < 12$ ინტერვალში კლებადაა. რომელი მეტია $f(3)$ თუ $f(10)$? დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება.

ბ) ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებით, როგორ შეიძლება მისი ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალის განსაზღვრა?

გ) ყოველთვის მართებულია თუ არა მოსაზრება “წრფივი ფუნქცია ან ზრდადია ან კიდეც კლებადა”? დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება ნიმუშების დაწერით.

2. არგუმენტის სურათზე ნაჩვენებ რომელ მნიშვნელობებში არის ამ ფუნქციის წარმოებული:

ა) ნულის ტოლი; ბ) ნულზე მეტი; გ) ნულზე ნაკლები?



3. ფუნქციის წარმოებულის მიხედვით, საცდელი წერტილების შერჩევით განსაზღვრეთ ზრდისა და კლების ინტერვალები.

ა) $f(x) = 4x + 3$

ბ) $f(x) = (2x - 3)^2$

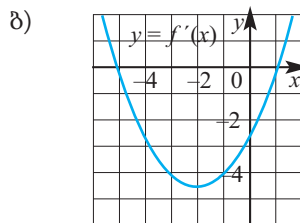
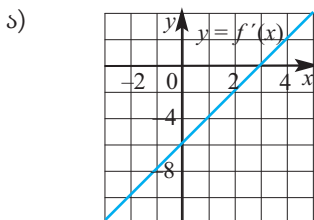
გ) $f(x) = 2x - x^2$

დ) $f(x) = 6x^2 - x^3 + 2$

ე) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

ვ) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

4. $f'(x)$ -ის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ $f(x)$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები.



5. ააგეთ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ფუნქციის გრაფიკი და ამ გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციის ზრდისა და კლების შუალედები.

ა) $f(x) = -2x + 1$

ბ) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$

გ) $f(x) = (x - 4)^2$

დ) $f(x) = x^2 - 4x$

ე) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

ვ) $f(x) = x^3 - 1,5x^2 + 6$

6. ა) $f'(x)$ ფუნქციის გრაფიკის აგებით დაასაბუთეთ, რომ $f(x) = x^3 + x$ ფუნქცია ზრდადია მთელ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = -x - x^5$ ფუნქცია კლებადაა მთელ რიცხვით ღერძზე.

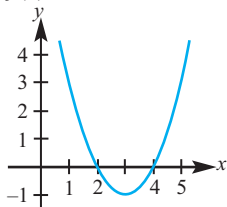
7. ნამდვილ ღერძზე უწყვეტობისა და გაწარმოებული ფუნქციის ცხრილში მოცემული ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების მიხედვით სქემატურად გამოსახეთ გრაფიკი.

	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f'(x)$	უარყოფითი	0	დადებითი	0	უარყოფითი
$f(x)$		2		6	

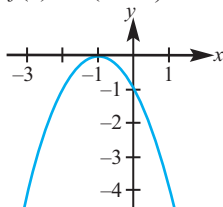
ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების პოვნა

- 8.** ა) ფუნქციის მოცემული გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.

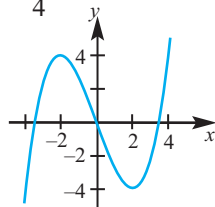
1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$



2) $f(x) = -(x + 1)^2$



3) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$



ბ) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები განსაზღვრეთ ფუნქციის წარმოებულის მიხედვით.

- 9.** ა) იპოვეთ არგუმენტის რა მნიშვნელობებისათვის არის ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლი.

ბ) იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.

1) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

2) $g(x) = 2 - 3x - 2x^2$

3) $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

4) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

5) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$

6) $g(x) = 8x^2 - x^4$

7) $f(x) = xe^x$

8) $g(x) = x \ln x$

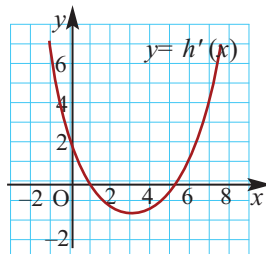
- 10.** სურათზე $h'(x)$ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული. გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ $h(x)$ ფუნქციის მოცემულ მნიშვნელობათა წყვილიდან რომელია მეტი.

ა) $h(3), h(4)$

ბ) $h(-1), h(0)$

გ) $h(6), h(8)$

დ) $h(2), h(4)$



- 11.** ა) არსებობს თუ არა a -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ $f(x) = ax^2 + 2x + 5$ ფუნქცია მთელ რიცხვით ღერძზე კლებადი იყოს?

ბ) იპოვეთ b -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ ფუნქცია მთელ რიცხვით ღერძზე ზრდადი იყოს.

მითითება: დაწერეთ წარმოებული ფუნქციის სრული კვადრატის დანაშალის სახე.

- 12. ღია ტიპის დაფალება.** მოცემული პირობების მიხედვით დახაზეთ სქემატური გრაფიკები.

ა) $f(x)$ ფუნქცია $(-\infty; 2]$ შუალედში იზრდება, $[2; +\infty)$ შუალედში კლებადა.

ბ) $g(x)$ ფუნქცია $(-\infty; -3]$ შუალედში კლებადა, $[-3; +\infty)$ შუალედში იზრდება.

გ) $h(x)$ ფუნქცია $(-\infty; 3]$ და $[8; +\infty)$ შუალედში კლებადა, $[3; 8]$ შუალედში იზრდება.

დ) უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციის წარმოებული $(-\infty; -2)$ შუალედში დადებითია, $(-2; +\infty)$ შუალედში კი უარყოფითია.

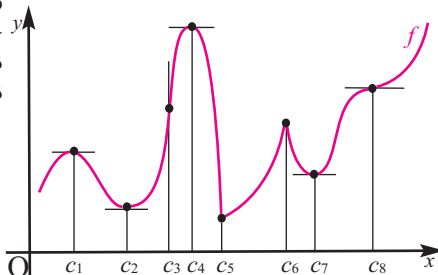
ე) $m(x)$ ფუნქციის წარმოებული $(-\infty; 1)$ შუალედში უარყოფითია, $(1; +\infty)$ შუალედში დადებითია.

ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმები

ფუნქციის განსაზღვრის არის ზოგიერთ შიგა წერტილში შეიძლება ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლი იყოს ან წარმოებული არ არსებობდეს. განსაზღვრის არის ასეთ წერტილებს **კრიტიკული წერტილები** ეწოდება.

ვუჩვენოთ სურათზე გრაფიკმოცემული ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.

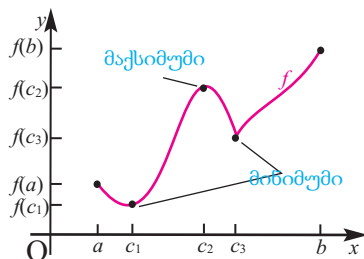
1. x -ის c_1, c_2, c_4, c_7, c_8 მნიშვნელობებში გრაფიკის მხედის კუთხური კოეფიციენტი 0-ის ტოლია. ანუ ამ წერტილებში $f'(x) = 0$. ეს წერტილები მოცემული ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია.



2. c_3, c_5, c_6 წერტილებში კი ფუნქციის წარმოებული არ არსებობს. ეს წერტილებიც ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია.

3. ჩვენს მიერ განხილულ ფუნქციას მისი $c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7$ კრიტიკული წერტილები ფუნქციის ზრდისა და კლების მონაცვლეობით ინტერვალებად ყოფს, ხოლო c_3, c_8 წერტილები კი კლებისა და ზრდის (ან პირიქით) არაცვლადი კრიტიკული წერტილებია.

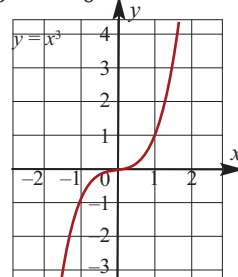
სურათიდან ჩანს გრაფიკზე მოცემული ფუნქციის, შიგა ექსტრემუმები მისი წარმოებულის ნულის ტოლ (c_1 და c_2) წარმოებულის არარსებულ (c_3) წერტილებშია. წერტილებს, რომლებშიც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია **სტაციონარული წერტილები**ც ეწოდება.



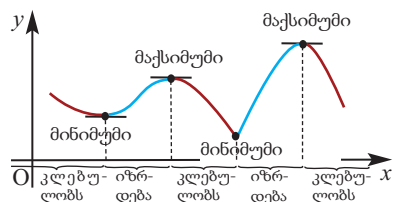
ფერმას თეორემა. (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა). შიგა ექსტრემუმის წერტილში ფუნქციის წარმოებული ან ნულის ტოლია, ან კიდევ არ არსებობს.

შენიშვნა: წერტილი, რომელშიც წარმოებული ნულის ტოლია, შეიძლება არ იყოს ექსტრემუმის წერტილი.

მაგალითად, $y = x^3$ ფუნქციის წარმოებული როცა $x = 0$ არის ნულის ტოლი, თუმცა ეს წერტილი მისი არც მინიმუმისა და არც მაქსიმუმის წერტილს არ წარმოადგენს.



ფუნქციას უწყვეტ მონაკვეთზე რამდენიმე კრიტიკული წერტილი, მაქსიმუმი, მინიმუმი შეიძლება ჰქონდეს. მოცემულ წერტილში ექსტრემუმის არსებობა ფუნქციის ამ წერტილში და წერტილის მიდამოში არსებულ მნიშვნელობებზეა დამოკიდებული ანუ ლოკალურ არსს ატარებს. ამიტომაც ზოგჯერ ლოკალური მაქსიმუმისა და ლოკალური მინიმუმის ტერმინები გამოიყენება.



ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმი

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა.

დავუშვათ, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია $(a; b)$ შუალედში უწყვეტია და $x_0 \in (a; b)$.

თუ x_0 წერტილი კრიტიკული წერტილია და მის რაიმე მიდამოში ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ ამ მიდამოში.

1) თუ x_0 -დან მარცხნივ $f'(x)$ დადებითია, ხოლო მარჯვნივ უარყოფითია, მაშინ x_0 წერტილი მაქსიმუმის წერტილია.

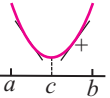
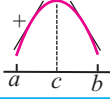
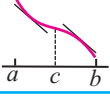
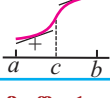
2) თუ x_0 -დან მარცხნივ $f'(x)$ უარყოფითია, ხოლო მარჯვნივ დადებითია, მაშინ x_0 წერტილი მინიმუმის წერტილია.

3) თუ x_0 -ის ორივე მხარეს $f'(x)$ -ს ერთი და იგივე ნიშანი აქვს, მაშინ x_0 ექსტრემუმის წერტილი არაა.

მონაკვეთზე სასრული რაოდენობის კრიტიკული წერტილების მქონე ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის (აბსოლუტური მაქსიმუმი) და უმცირესი მნიშვნელობის (აბსოლუტური მინიმუმი) პოვნისათვის საჭიროა გამოითვალოს მნიშვნელობები ფუნქციის მოცემულ მონაკვეთზე მდებარე ყველა კრიტიკულ წერტილში და მონაკვეთის ბოლოებზე, შემდეგ კი მიღებული რიცხვებიდან საჭიროა უდიდესისა და უმცირესის შერჩევა.

$[a; b]$ მონაკვეთზე $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, შესაბამისად $\max_{[a; b]} f(x)$ და $\min_{[a; b]} f(x)$ სახით იწერება.

ქვემოთ მოცემულია ნიმუშები ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულის მიხედვით მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების განსაზღვრის შესახებ.

$[a; b]$ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი	$f(c)$	$(a; c)$ ინტერვალში $f'(x)$ -ის ნიშანი	$(c; b)$ ინტერვალში $f'(x)$ -ის ნიშანი	ზრდადობა ან კლება
	/ მინიმუმი	—	+	$[a, c]$ -ზე კლება $[c, b]$ -ზე ზრდა
	მაქსიმუმი	+	—	$[a, c]$ -ზე ზრდა $[c, b]$ -ზე კლება
	არც მინიმუმი და არც მაქსიმუმი	—	—	$[a, c]$ -ზე კლება $[c, b]$ -ზე კლება
	არც მინიმუმი და არც მაქსიმუმი	+	+	$[a, c]$ -ზე ზრდა $[c, b]$ -ზე ზრდა

ნიმუში 1. განსაზღვრეთ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ფუნქციის მაქსიმუმები და მინიმუმები და გამოსახეთ გრაფიკი სქემატურად.

ამოხსნა: დავალების ამოხსნისათვის ჯერ უნდა ვიპოვოთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. ეს არის წერტილები, რომლებშიც მოცემული ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია (სტაციონალური) წერტილები.

ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმი

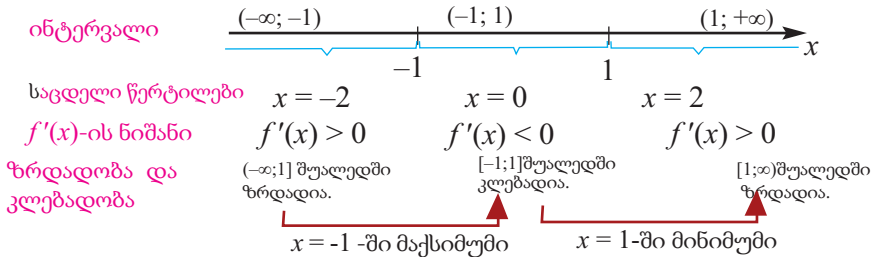
1. ფუნქციის წარმოებული: $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$
2. ფუნქციის კრიტიკული წერტილები: $3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$
3. $x = -1$ და $x = 1$ წერტილები ფუნქციის განსაზღვრის არეს სამ შუალედად ყოფს.

ამ შუალედებიდან საცდელი წერტილების შერჩევით შევამოწმოთ $f'(x)$ -ის ნიშნები:

$(-\infty; -1)$ შუალედიდან $x = -2; f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$

$(-1; 1)$ შუალედიდან $x = 0; f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$

$(1; +\infty)$ შუალედიდან $x = 2; f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$

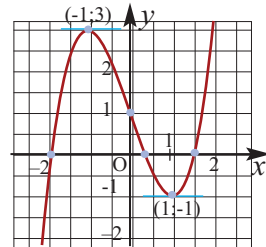


როცა $x = -1$, მაშინ $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ $(-1; 3)$ მაქსიმუმი

როცა $x = 1$, მაშინ $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$ $(1; -1)$ მინიმუმი

ხელთ არსებული ინფორმაციებისათვის რამდენიმე დამატებითი წერტილის კოორდინატების დამატებით გამოვსახოთ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ფუნქციის გრაფიკი.

x	-1	-0,5	0	1	1,5	2
$f(x)$	3	1,2	1	-1	-0,125	3



ნიმუში 2: ვიპოვოთ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ ფუნქციის $[-1; 2]$ მონაკვეთზე უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

ამოხსნა: ჯერ ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები. რადგან $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$, ამიტომ $3x^2 + 6x - 9 = 0$ განტოლებიდან ვპოულობთ კრიტიკულ წერტილებს $x_1 = 1$ და $x_2 = -3$. მათ შორის $x = -3$ კრიტიკული წერტილი მოცემულ $[-1; 2]$ მონაკვეთს არ ეკუთვნის. გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები $x = 1$ კრიტიკულ წერტილსა და მონაკვეთის ბოლოებზე:

$$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 1 = -4,$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 1 = 12,$$

$$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 1 = 3.$$

ამ მნიშვნელობებიდან უმცირესია -4, უდიდესია 12. მაშასადამე:

$$\max_{[-1; 2]} f(x) = 12, \quad \min_{[-1; 2]} f(x) = -4.$$

ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმი

ნიმუში 3. იპოვეთ $f(x) = 2x^3 - x^4$ ფუნქციის ექსტრემუმი..

ამოხსნა: 1. ფუნქციის წარმოებული: $f'(x) = (2x^3 - x^4)' = 6x^2 - 4x^3$

2. ფუნქციის კრიტიკული წერტილები: $6x^2 - 4x^3 = 0$,

$2x^2(3 - 2x) = 0$, $x_1 = 0$ და $x_2 = 1,5$.

3. კრიტიკული წერტილებით განსაზღვრის არის დაყოფილი შუალედები:

$(-\infty; 0)$, $(0; 1,5)$ და $(1,5; \infty)$

ინტერვალებიდან საცდელი წერტილების შერჩევით $f(x)$ -ის შუალედებში ნიშნები:

$(-\infty; 0)$ შუალედიდან $x = -1$: $f'(-1) = 6(-1)^2 - 4(-1)^3 = 10 > 0$

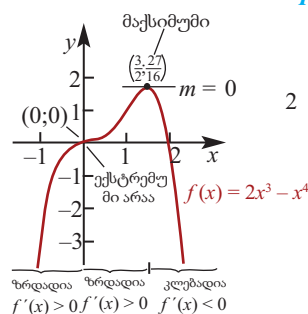
$(0; 1,5)$ შუალედიდან $x = 1$: $f'(1) = 6(1)^2 - 4(1)^3 = 2 > 0$

$(1,5; +\infty)$ შუალედიდან $x = 2$: $f'(2) = 6(2)^2 - 4(2)^3 = -8 < 0$

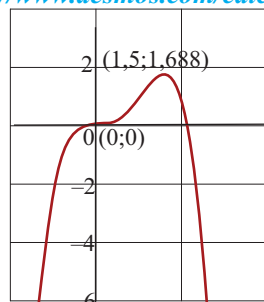
ინტერვალი	$(-\infty; 0)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
საცდელი წერტილები	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
$f'(x)$ -ის ნიშანი	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
ზრდადობა- კლებადობა	$(-\infty; 0]$ -ში ზრდადია,	$[0; 1,5]$ -ში ზრდადია,	$[1,5; \infty)$ -ში კლებადია
	არ იცვლება		$x = 1,5$ -ში მაქსიმუმი

$f(x) = 2x^3 - x^4$ ფუნქციის გრაფიკი შეგვიძლია ავაგოთ ხელთ არსებული ინფორმაციებისათვის რამდენიმე დამატებითი წერტილის კოორდინატების დამატებით. გრაფიკის დახაზვისას საჭიროა იმის გათვალისწინება, რომ $x = 0$ და $x = 1,5$ წერტილებში მხები ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში უნდა იყოს. გრაფიკის აგების სისწორის შემოწმება გრაფკალკულატორის დახმარებით შეგვიძლია.

x	$f(x)$, მიახლოებით
-1	-3
-0,5	-0,31
0	0
0,5	0,19
1	1
1,25	1,46
1,5	1,69
2	0



<https://www.desmos.com/calculator>



- f ფუნქცია $(-\infty; 0]$ შუალედში ზრდადია.
- $x = 0$ წერტილი f ფუნქციის კრიტიკული წერტილია, თუმცა ექსტრემუმის წერტილი არაა.
- f ფუნქცია $[0; 1,5]$ შუალედში ზრდადია.
- f ფუნქცია $[1,5; \infty)$ შუალედში კლებადია.
- $x_{\max} = 1,5$; $f_{\max} = f(1,5) \approx 1,688$

ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმები

მაგალიტი 3. განსაზღვრეთ $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ამოხსნა: 1. ფუნქციის წარმოებული $f'(x) = (\sqrt[3]{(x-2)^2})' = ((x-2)^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$
 $x \neq 2$.

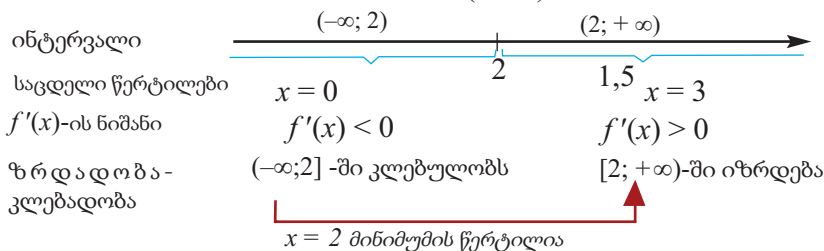
2. კრიტიკული წერტილები: კრიტიკული წერტილების პოვნისათვის უნდა ამოვხსნათ $f'(x) = 0$ განტოლება ან უნდა ვიპოვოთ წერტილები, რომლებშიც წარმოებული არ არსებობს. $x = 2$ წერტილში ფუნქციას სასრული წარმოებული არ გააჩნია. თუმცა $x = 2$ წერტილი შედის განსაზღვრის არეში. მაშასადამე, $x = 2$ წერტილი კრიტიკული წერტილია.

3. კრიტიკული წერტილით ფუნქციის განსაზღვრის არეში გამოყოფილი შუალედები: $(-\infty; 2)$ და $(2; +\infty)$

ინტერვალებიდან საცდელი წერტილების შერჩევით $f'(x)$ -ის ნიშნები ამ შუალედებში იქნება:

$$(-\infty; 2) \text{ შუალედში } x = 0: f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{0-2}} < 0$$

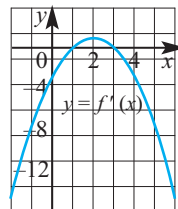
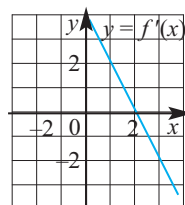
$$(2; +\infty) \text{ შუალედში } x = 3: f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{3-2}} > 0$$



- f ფუნქცია $(-\infty; 2]$ შუალედში კლებადია.
- f ფუნქცია $[2; +\infty)$ შუალედში ზრდადია.
- $x_{\min} = 2$ და $f_{\min} = f(2) = 0$

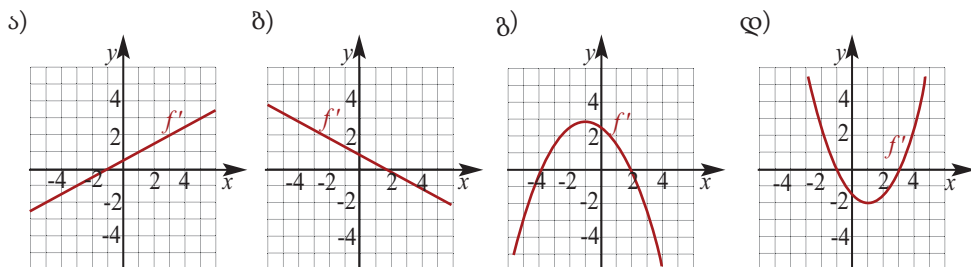
მაგალიტი 4. გაწარმოებული $f'(x)$ ფუნქციის მოცემული გრაფიკის მიხედვით სქემატურად გამოსახეთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა: $f'(x)$ წარმოებული, როცა $x = 2$, მაშინ ნულის ტოლია. როცა $x > 2$, მაშინ უარყოფითია, მაშასადამე, ფუნქცია $[2; +\infty)$ ინტერვალში კლებადია. როცა $x < 2$, მაშინ კი წარმოებული დადებითია, ეს კი ფუნქციის $(-\infty; 2]$ შუალედში ზრდადობას ნიშნავს. ზრდადობის კლებადობაზე გადასვლის გამო $(2; f(2))$ წერტილი ამ ფუნქციის მაქსიმუმს შეესაბამება. შესაბამისი სქემატური გრაფიკი სურათზე მოცემული სახისა იქნება.



ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმები

- 8.** ფუნქციის წარმოებულის გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები და ექსტრემუმის წერტილების აბსცისები. სქემატურად გამოსახეთ ფუნქციის გრაფიკი.



- 9.** f ფუნქცია გაწარმოებადი ფუნქციაა. ცხრილში x -ის განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის $f'(x)$ -ის მნიშვნელობებია მოცემული.

x	-1	-0,75	-0,50	-0,25	0	0,25	0,50	0,75	1
$f'(x)$	-10	-3,2	-0,5	0,8	5,6	3,6	-0,2	-6,7	-20,1

მნიშვნელობათა ცხრილის მიხედვით: ა) სქემატურად ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი; ბ) ივარაუდეთ ექსტრემუმის წერტილების აბსცისები.

- 10.** იპოვეთ მოცემული ფუნქციების კრიტიკული წერტილები. გამოიკვლიეთ ამ წერტილებიდან რომელია მაქსიმუმის და რომელია მინიმუმის წერტილი, გამოთვალეთ ფუნქციის ექსტრემუმები.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

5) $f(x) = (x - 2)^3$

6) $f(x) = x^5 - 5x$

7) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

8) $f(x) = (x - 2)^4$

9) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

10) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

- 11.** იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმები, გრაფიკი სქემატურად გამოსახეთ. გრაფიკის გამოსახულების მიხედვით განსაზღვრეთ, რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს $f(x) = 0$ განტოლებას.

ა) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

ბ) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$

- 12.** იპოვეთ ფუნქციების კრიტიკული წერტილები.

ა) $f(x) = x - \sin 2x$

ბ) $f(x) = \cos x - x$

ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმები

13. $f(x)$ ფუნქციის მოცემულ მონაკვეთზე იპოვეთ: ა) ლოკალური ექსტრემუმების; ბ) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

1) $f(x) = 3 - 2x$, $[-1; 2]$

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[-1; 3]$

3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $[-1; 1]$

4) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $[0; 4]$

5) $f(x) = x^3 - 6x$, $[-1; 2]$

6) $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$, $[0; 1]$

7) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, $[-1; 1]$

8) $f(x) = x - \ln x$, $[\frac{1}{e}; e]$

14. ა) წარმოებულის დახმარებით დაამტკიცეთ, რომ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ფუნქციის ექსტრემუმი აბსცისის $x_0 = -\frac{b}{2a}$ წერტილშია. იპოვეთ ექსტრემუმი.

ბ) რამდენი ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება ჰქონდეს $y = x^3 + px + q$ ფუნქციას?

გამოყენებითი დავალებები

15. ყოველკვირეულად წარმოებული x ერთეული პროდუქციის თვითღირებულების $C(x) = 0,3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$ ფუნქციით გამოსახვა შეიძლება.

დაწერეთ მარგინალური თვითღირებულების გამომსახველი $MC(x) = C'(x)$ ფუნქცია. გრაფიკალურად ააგეთ ამ ფუნქციების გრაფიკები ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში.

16. x და $\frac{100}{x}$ ზომების მქონე მართკუთხედის პერიმეტრის მის x გვერდზე დამოკიდებულების $P(x) = 2x + \frac{200}{x}$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება.

ა) იპოვეთ $P(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ბ) დაწერეთ ა) პუნქტში მოძებნილი პასუხის სიტუაციის შესაბამისი განმარტება.

17. ა) იპოვეთ დადებითი რიცხვი, რომლის ჯამიც მისსავე შებრუნებულ რიცხვთან არის უმცირესი

ბ) იპოვეთ დადებითი რიცხვი, რომლის სხვაობა მისსავე კუბთან არის უდიდესი

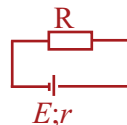
გ) იპოვეთ რიცხვი, რომლის ჯამი მისსავე კვადრატთან არის უმცირესი.

დ) რიცხვი 18 წარმოადგინეთ ისეთი სამი დადებითი რიცხვის ჯამის სახით, რომ მეორე რიცხვი პირველზე ორჯერ მეტი იყოს და ამ სამი რიცხვის ნამრავლი იყოს უდიდესი.

18. r შიგა წინააღობისა და E ელექტრონული მამოძრავებელი ძალის მქონე შეკრულ ელექტროწრედში გამოყოფილი სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$P = \frac{E^2 \cdot R}{(R + r)^2}$$

სადაც R გარე წინააღობაა. R -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება წრედის გარე ნაწილზე გამოყოფილი სიმძლავრე მაქსიმალური?



19. დაკვირვებებით ავადმყოფის T ტემპერატურის (ფარენგეიტებში) t დღეში ცვლილება $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$; $0 \leq t \leq 12$, ფუნქციით განისაზღვრა. ამ ფუნქციის მიხედვით იპოვეთ ტემპერატურის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

ფუნქციის გრაფიკის აგება წარმოებულის გამოყენებით

მრავალწევრა ფუნქცია მთელ ნამდვილ რიცხვით ღერძზე არის განსაზღვრული და უწყვეტი.

მრავალწევრა ფუნქციის გრაფიკის აგებისათვის შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

- განსაზღვრეთ საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.
- განსაზღვრეთ კრიტიკული წერტილები.
- განსაზღვრეთ ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები.
- განსაზღვრეთ მაქსიმუმები და მინიმუმები.
- ააგეთ გრაფიკი.

მაგალიტი 1. ააგეთ $f(x) = x^4 - 2x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

• საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები:
 $x^4 - 2x^2 = 0$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$

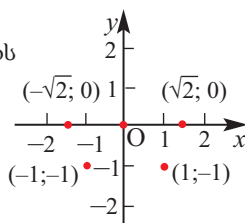
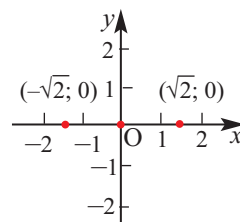
• კრიტიკული წერტილები (წერტილები, რომლებშიც წარმოებული ნულის ტოლია): $f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x$
 $4x^3 - 4x = 0$ $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 1$

$f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, და $f(1) = -1$,

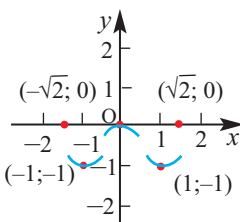
მაშასადამე, $(0; 0)$, $(-1; -1)$ და $(1; -1)$ წერტილები ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობენ.

• ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები და ექსტრემუმები.

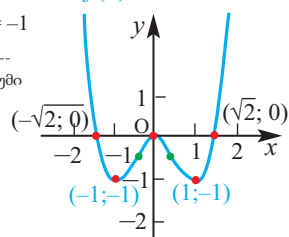
$x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ კრიტიკული წერტილები ფუნქციის განსაზღვრის არეს ოთხ ინტერვალად ყოფს. შევამოწმოთ $f'(x) = 4x^3 - 4x$ წარმოებული ფუნქციის ნიშნები.



	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
საგდელი წერტილი	-2	-1	0,1	2
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$				
ექსტრემუმები	კლებადობიდან ზრდადობაზე გადადის	ზრდადობიდან კლებადობაზე გადადის	კლებადობიდან ზრდადობაზე გადადის	
	$x_{\min} = -1$	$x_{\max} = 0$	$x_{\min} = 1$	
	$f_{\min} = f(-1) = -1$	$f_{\max} = f(0) = 0$	$f_{\min} = f(1) = -1$	
	$(-1; -1)$ ლოკალური მინიმუმი	$(0; 0)$ ლოკალური მაქსიმუმი	$(1; -1)$ ლოკალური მინიმუმი	



$f(x) = x^4 - 2x^2$



• აღნიშნული ინფორმაციების საფუძველზე ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

► ააგეთ $g(x) = x^4 - 8x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

კლებადობა იზრდება კლებადობა იზრდება

ფუნქციის გრაფიკის აგება წარმოებულის გამოყენებით

რაციონალური ფუნქციის გრაფიკის აგებისათვის შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული მოქმედებები:

- დაადგინეთ განსაზღვრის არე.
- განსაზღვრეთ ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები (თუ არსებობს).
- განსაზღვრეთ საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.
- განსაზღვრეთ კრიტიკული წერტილები.
- განსაზღვრეთ ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები და ექსტრემუმები.
- ააგეთ გრაფიკი.

ნიმუში 5. ააგეთ $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ ფუნქციის გრაფიკი.

- ფუნქციის განსაზღვრის არე: $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
- ასიმპტოტები: რადგან $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ამიტომ $x = 3$ წრფე ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია.

ვინაიდან მრიცხველის ხარისხი მნიშვნელის მრავალწევრის ხარისხზე მაღალია, რაციონალურ ფუნქციას ჰორიზონტალური ასიმპტოტი არა აქვს. თუმცა, თუ

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3} = x + 3 + \frac{9}{x-3} \text{ სახით ჩავწერთ და } x \rightarrow \infty, \text{ მაშინ } \frac{9}{x-3} \rightarrow 0$$

ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი $y = x + 3$ წრფეს უსასრულოდ უახლოვდება. ამ შემთხვევაში ამოზოგნ, რომ $y = x + 3$ წრფე $f(x)$ ფუნქციის **დახრილი ასიმპტოტია**. საერთოდ, როცა $P(x)$ მრავალწევრის ხარისხი $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე

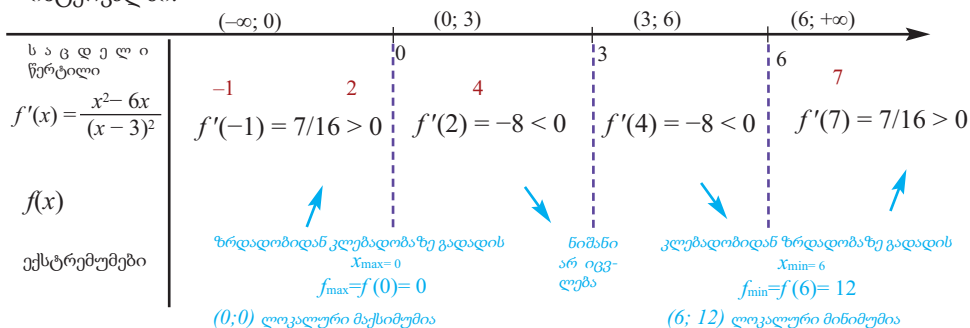
ერთი ერთეულით მეტია, მაშინ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ რაციონალურ ფუნქციას დახრილი ასიმპტოტი აქვს.

- საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები: $\frac{x^2}{x-3} = 0, x = 0, (0;0)$

- კრიტიკული წერტილები $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-3}\right)' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}, \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0$

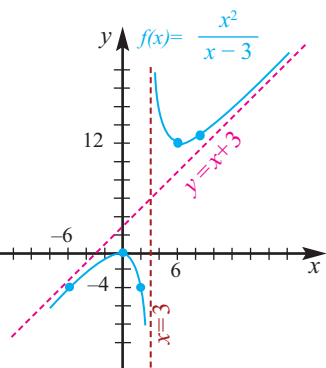
$$x^2 - 6x = 0, x(x-6) = 0, x = 0, x = 6 \quad f(0) = 0, f(6) = 12 \quad (0;0) \text{ და } (6;12)$$

- ზრდადობა-კლებადობის ინტერვალები. $x = 3$ წერტილში ფუნქცია არ არის განსაზღვრული. $x = 0$ და $x = 6$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია. განვსაზღვროთ წარმოებულის ნიშანი განსაზღვრის არის ამ წერტილებით გამოყოფილ თითოეულ ინტერვალში.



ფუნქციის გრაფიკის აგება წარმოებულის გამოყენებით

● ავსგოთ გრაფიკი. საკოორდინატო სიბრტყეზე ავლნიშნოთ გრაფიკზე მიკუთვნებული $(-6; -4)$, $(0; 0)$, $(6; 12)$, $(9; 13,5)$ წერტილები. გავავლოთ $x = 3$ ასიმპტოტი. მოპოვებული შედეგების მხედველობაში მიღებით ასიმპტოტისაგან მარცხენა და მარჯვენა მხარეს გავავლოთ ფუნქციის გრაფიკის მაჩვენებელი მრუდები.



მიაქციეთ ყურადღება! ფუნქციის გრაფიკი $x = 0$ წერტილზე

ლის ახლო მიდამოში $y = -\frac{x^2}{3}$ პარაბოლის ქცევას იძენს.

სასწავლო დავალებები

1. მონაცემების მიხედვით გამოსახეთ მრავალწევრა ფუნქციის გრაფიკი.

ა) $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -5$, $f'(7) = 0$, $f(7) = 10$ და $f(3) = 2$

ბ) $f'(-3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f'(9) = 0$, $f(9) = -6$; $f(2) = 1$

2. ფუნქციის შესახებ ცხრილში მოცემული ინფორმაციების მიხედვით ააგეთ მისი გრაფიკი.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
ცდა	$x = -4$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$f'(x)$	უარყოფითი	0	დადებითი	0	უარყოფითი	0	დადებითი
$f(x)$	კლებულობს	მინ.	იზრდება	მაქს.	კლებულობს	მინ.	იზრდება

3. ააგეთ ფუნქციების გრაფიკი.

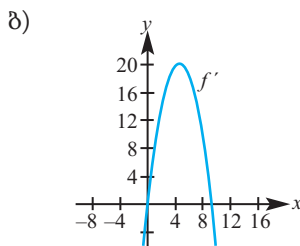
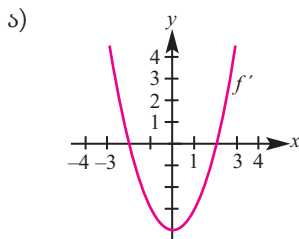
ა) $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$

ბ) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

ბ) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

დ) $g(x) = -x^4 + 2x^2$

4. წარმოებულის გრაფიკის მიხედვით ააგეთ რაიმე ფუნქციის გრაფიკი.



ფუნქციის გრაფიკის აგება წარმოებულის გამოყენებით

5. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 7$.

- ა) მაქსიმუმ რამდენი ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს ამ ფუნქციას?
 ბ) იპოვეთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები, მოახდინეთ ექსტრემუმების მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებად კლასიფიკაცია. განსაზღვრეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები.
 გ) დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკები. დააკავშირეთ ა) და ბ) პუნქტების შედეგები. დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები.

6. გამოიკვლიეთ ფუნქცია წარმოებულის გამოყენებით და ააგეთ გრაფიკი.

ა) $f(x) = x^3 - 3x^2$

ბ) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

ბ) $f(x) = x^3 - 3x + 6$

დ) $l(x) = 4x^5 - 5x^4$

7. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

ა) $f(x) = 2x^2 - x^4$

დ) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

ბ) $f(x) = x^3 + 1,5x^2$

ე) $f(x) = x^4 - 2x^3$

გ) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

ვ) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

8. შესაბამისი გარდაქმნების ჩაწერით უჩვენეთ, როგორ განსხვავდება $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ ფუნქციის გრაფიკი $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ფუნქციის გრაფიკისაგან და ააგეთ გრაფიკი. $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ასევე ააგეთ წარმოებულის მეშვეობითაც.

9. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი წარმოებულის მეშვეობით.

ა) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

ბ) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

გ) $y = \frac{x^2}{x - 2}$

დ) $y = x + \frac{1}{x}$

10. ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $C(x) = 4x + 10$ თვითღირებულების, $R(x) = 50x^2 - 0,5x$ საერთო შემოსავლის ფუნქციებისა და ასევე ამ ფუნქციების შესაბამისი მოგების ფუნქციის გრაფიკი.

11. ჯგუფური სამუშაო. ღია ტიპის დავალება
 მოცემული ინფორმაციების მიხედვით შეასრულეთ დავალებები $f(x)$ ფუნქციის შესახებ.

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	არა აქვს	-3

- ა) ააგეთ მოცემული პირობების დამაკმაყოფილებელი რაიმე ფუნქციის გრაფიკი;
 ბ) იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ამოცანების ამოხსნა ექსტრემუმის პოვნის შესახებ. ოპტიმიზაცია

რეალურ ცხოვრებისეულ სიტუაციებში ხელსაყრელია ფუნქციის ექსტრემუმების წარმოებულის მეშვეობით პოვნა. ჩვენ, ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად სხვადასხვა სფეროების შესახებ პრობლემების გადაწყვეტის დროს ვხდებით ისეთი ტერმინების გამოყენების მოწმე, როგორიცაა: ყველაზე მაღალი შემოსავალი, ყველაზე დაბალი თვითღირებულება, უმაღლესი ძაბვა. უდიდესი მოცულობა, უდიდესი ფართობი და სხვ. მრეწველობაში შეფუთვის (ჭურჭელში მოთავსებისათვის) უფრო ნაკლები მასალის გამოყენებით მაქსიმალური ტევადობის ყუთის ზომების განსაზღვრით დიზაინის დადგენა და სხვა დიდ ეკონომიკურ მნიშვნელობას იძენს. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტა სიდიდეების მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობების პოვნას უკავშირდება. სიდიდეების მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობების პოვნის ამოცანების წარმოებულის მეშვეობით ამოხსნა არის ხელსაყრელი.

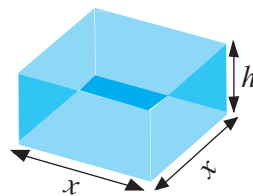
ასეთი ამოცანების გადაწყვეტა განსაზღვრულ შუალედში უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის პოვნაზე დაიყვანება.

შენიშვნა 1: $(a;b)$ ინტერვალში ფუნქციის წვეროებზეც ზღვრის მნიშვნელობები უნდა გამოთვლილ და გათვალისწინებულ იქნას.

შენიშვნა 2: შეიძლება განხილულ შუალედში ფუნქციას ერთი სტაციონარული წერტილი ჰქონდეს: ან მაქსიმუმი, ან მინიმუმი. ასეთ შემთხვევაში მაქსიმუმის წერტილში ფუნქცია იღებს უდიდეს მნიშვნელობას, ხოლო მინიმუმის წერტილში უმცირეს მნიშვნელობას.

ნამუში 1. მაქსიმალური მოცულობა. კომპანია

გეგმავს 192სმ^2 ზედაპირის ფართობის მქონე ისეთი პირღია ყუთების წარმოებას, რომლის ფუძეც კვადრატია. მისი რა ზომების შემთხვევაში იქნება მოცულობა მაქსიმალური?



ამოხსნა: ვინაიდან ყუთის ფუძე კვადრატია, მისი მოცულობის $V = x^2h$ სახით გამოთვლა შეიძლება. ამოცანაში მოცემული სხვა ინფორმაციის გამოყენებით მოცულობა გამოვსახოთ მხოლოდ ერთ ცვლადზე, x -ზე დამოკიდებულებით: ყუთის ზედაპირის ფართობი $= 4$ გვერდითი წახნაგის ფართობი $+$ ფუძის ფართობი.

$$S_{\text{ზედაპ}} = 4xh + x^2 = 192, \text{ აქედან } h = \frac{192 - x^2}{4x} \text{ თუ ამას } V = x^2h \text{ ფორმულაში}$$

შევიტანთ, ყუთის მოცულობის x ცვლადზე დამოკიდებულების

$$V(x) = x^2 \left(\frac{192 - x^2}{4x} \right) = 48x - \frac{x^3}{4} \text{ სახით გამოვსახვა შეიძლება.}$$

ახლა კი ამოცანის პირობის მონაცემების მიხედვით გამოვიკვლიოთ $V(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

გასაგებია, რომ სიგრძე არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ანუ $x > 0$. ყუთის კვადრატის ფორმის ფუძის ფართობი 192სმ^2 -ზე ნაკლები უნდა იყოს, ე.ი. $x^2 < 192$ ანუ $x < \sqrt{192}$. მაშასადამე, $0 < x < \sqrt{192}$. უნდა ვიპოვოთ $V(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა $(0; \sqrt{192})$ ინტერვალში. ამისათვის გამოვთვალოთ ფუნქციის წარმოებული:

ამოცანების ამოხსნა ექსტრემუმის პოვნის შესახებ. ოპტიმიზაცია

$$V'(x) = \left(48x - \frac{x^3}{4} \right)' = 48 - \frac{3x^2}{4} = \frac{3}{4} (8-x)(8+x)$$

თუ $x = 8$ და $x = -8$, მაშინ $V'(x) = 0$ იქნება.

თუმცა $-8 \notin (0; \sqrt{192})$. მაშასადამე, განხილულ ინტერვალში კრიტიკული წერტილი $x = 8$ იქნება.

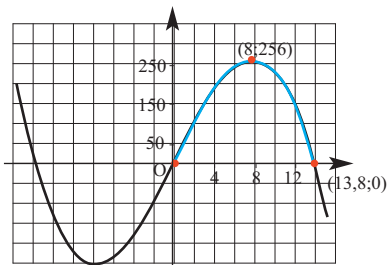
როცა $0 < x < 8$, მაშინ $V'(x) > 0$. ვინაიდან როცა $8 < x < \sqrt{192}$ მაშინ $V'(x) < 0$ ამიტომ, $V(x)$ ფუნქცია როცა $x = 8$ იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

თუ ყუთის ფუძის გვერდი 8 სმ იქნება, მაშინ მისი სიმაღლე

$$h = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4 \text{ სმ იქნება.}$$

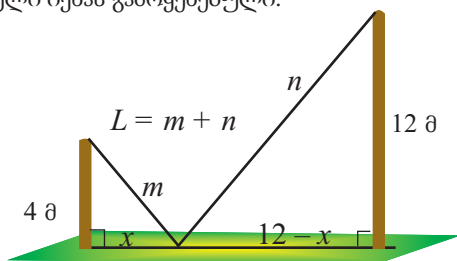
8 სმ $\times$ 8 სმ $\times$ 4 სმ ზომების მქონე ყუთის მოცულობა იქნება მაქსიმალური.

$V(x) = 48x - \frac{x^3}{4}$ ფუნქციის გრაფიკის გრაფიკალ-კულატორით აგებითაც შეიძლება იმის დანახვა, რომ მოცულობა მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს როცა $x = 8$ ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი წარმოებულის მეშვეობითაც და პასუხი შეამოწმეთ.



ნიმუში 2. მინიმალური დანახარჯი. 4 მ და 12 სმ სიმაღლის ბოძები ერთმანეთისაგან 12 მ მანძილზე მდებარეობენ. ამ ბოძების უმაღლესი წერტილები მავთულით მიწაში დამაგრებით არის შეერთებული. მავთულის მიწაზე დამაგრების წერტილი ისე შეარჩიეთ, რომ რაც შეიძლება ნაკლები მავთული იქნას გამოყენებული.

ამოხსნა:1) ამოცანის პირობის შესაბამისად დავხაზოთ სურათი და ამოცანაში მოცემული ინფორმაციები გარკვეული აღნიშვნების შემოტანით ავლნიშნოთ სურათზე.



2) გამოვსახოთ ცვლადებს შორის დამოკიდებულება ანალიტიკური სახით.

• თუ მავთულის სიგრძე ავლნიშნავთ L -ით, ხოლო თითოეული ბოძისათვის გამოყენებული ნაწილს კი ავლნიშნავთ m -ით და n -ით. მაშინ მივიღებთ: $L = m + n$.

• L სიდიდე, მავთულების დედამიწის ზედაპირზე დამაგრების წერტილის თითოეული ბოძიდან მანძილზე დამოკიდებულებით იცვლება. თუ ამ მანძილებიდან ერთი იქნება x , მაშინ მეორე იქნება $12 - x$. გამოვსახოთ m და n

სიდიდეები x ცვლადით. პითაგორას თეორემის თანახმად: $x^2 + 4^2 = m^2$,

$$(12 - x)^2 + 12^2 = n^2 \quad m = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$n = \sqrt{x^2 - 24x + 288}$$

$$L = m + n = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}$$

$L(x)$ ფუნქციის x ცვლადზე დამოკიდებულება

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288} \quad , \quad 0 \leq x \leq 12 \quad \text{სახისაა.}$$

$L(x)$ ფუნქციის წარმოებული:

$$L'(x) = (\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}}$$

ვიპოვოთ $L(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}} = 0$$

$$x(\sqrt{x^2 - 24x + 288} = (12 - x)\sqrt{x^2 + 16}$$

$$x^2(x^2 - 24x + 288) = (12 - x)^2(x^2 + 16)$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = (144 - 20x + x^2)(x^2 + 16)$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = 144x^2 - 24x^3 + x^4 + 16 \cdot 144 - 16 \cdot 24x + 16x^2$$

$$128x^2 - 16 \cdot 24x - 16 \cdot 144 = 0$$

$$x^2 - 3x + 18 = 0 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -6$$

$L(x)$ ფუნქციის $x = 0$, $x = 12$, $x = 3$, წერტილებში არსებული მნიშვნელობების შედარებით (ეს თქვენ თვითონ შეამოწმეთ) მიიღება, რომ როცა $x = 3$, მაშინ ყველაზე ნაკლები მავთული გამოიყენება: $L(3) = 20$ (მეტრი).

ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნისას ქვემოთ მოცემულებს მიაქციეთ ყურადღება!

1. საკითხი ყურადღებით წაიკითხეთ. დახაზეთ შესაბამისი სურათი.
2. შეადგინეთ შესაბამისი ცვლადებისა და მუდმივების, ასევე რა იცვლება, რა რჩება მუდმივი და რომელი ერთეულები უნდა გამოიყენოთ იმის სია.
თუ თქვენს მიერ შესრულებულ ნახაზზე არის საზომი ერთეულები, აღნიშნეთ ისინი.
3. შეარჩიეთ შესაბამისი x პარამეტრი და საძიებელი სიდიდე გამოსახეთ როგორც ფუნქცია. იპოვეთ ამ ფუნქციის ექსტრემუმები.
4. განმარტეთ რა პრაქტიკული აზრი აქვს მიღებულ შედეგს.

სასწავლო დაფალებები

1. რიცხვი 24 წარმოადგინეთ ორი ისეთი არაუარყოფითი შესაკრების ჯამის სახით, რომ ამ რიცხვების კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.
2. 60 მ მავთულისაგან მართკუთხედის მოდელი მიიღება. რა ზომებისა უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ მივიღოთ უდიდესი ფართობი?
3. მართკუთხედის ფართობი 64 სმ^2 -ია. რა სიგრძისა უნდა იყოს მისი გვერდები, რომ პერიმეტრი აღმოჩნდეს უმცირესი?

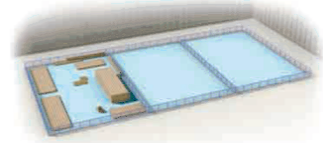
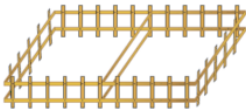
- 4. მაქსიმალური ფართობი.** ტურისტები წყალში ფრენბურთში შეჯიბრების ჩატარებას გეგმავდნენ. მათ ზღვაში სათამაშო ფართობის განსაზღვრისათვის სპეციალური პლასტიკური ფანარებით მოწყობილი 200 მ სიგრძის თოკები აქვთ. ერთ მხარედ სანაპირო ზოლის მიღების პირობით, თოკს მხოლოდ მართკუთხა ფორმის ფართობის სამ მხარეს თუ გამოიყენებენ, შემდეგებისდაგვარად დიდი ფართობის დაკავებისათვის, როგორ დაადგინონ მათ ოთხკუთხედის გვერდების სიგრძეები?



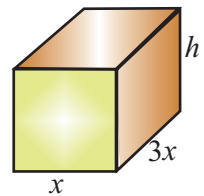
- 5.** კვადრატული ფუძის მქონე, მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის პირღია ავზი 108 ლ სითხეს უნდა იტევდეს. რა ზომები უნდა ავიღოთ ავზისათვის, რომ მის დასამზადებლად უმცირესი რაოდენობის მასალა დაიხარჯოს?

- 6. მაქსიმალური ფართობი.** ფერმერი მოსავლის სახეების გაცალკევებისათვის ფართობის პარალელურ მართკუთხა ნაკვეთებად დაყოფას გეგმავს. მაქსიმუმ რამდენი კვადრატული მეტრი ფართობის შემოღობვა შეუძლია მას, საწყობში არსებული შემოსაღობი მასალით?

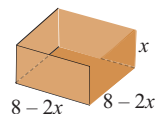
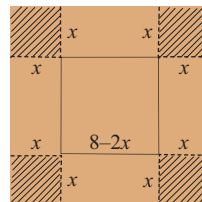
ა) ორი ერთნაირი სიდიდის ბ) სამი ერთნაირი სიდიდის ნაწილად მართკუთხა ნაწილად დაყოფა სურს დაყოფა სურს და 1200 მ შემოსაღობი მასალა და 1000 მეტრი შემოსაღობი მასალა აქვს.



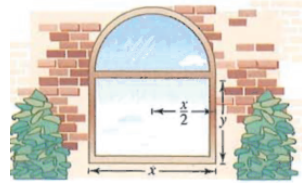
- 7. თვითღირებულების მინიმუმამდე შემცირება.** 60 სმ^3 მოცულობაზე გათვალისწინებული ყუთის ფუძის სიგრძე სიგანეზე სამჯერ მეტი უნდა იყოს. ყუთის ფუძისათვის გამოყენებული მასალის 1 სმ^2 - ის ფასი 10 მანათია, ხოლო გვერდით წახნაგებზე გამოყენებული მასალის 1 სმ^2 - ისა კი - 6 მანათი. ყუთის როგორი ზომების შერჩევისას იქნება მის მასალებზე დანახარჯები მინიმალური?



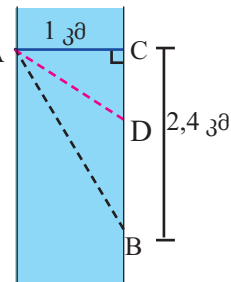
- 8. მაქსიმალური მოცულობა.** 8 სმ გვერდის მქონე კვადრატის მუყაოსაგან კუთხეებიდან ტოლზომიანი კვადრატების ამოჭრითა და სურათზე ნაჩვენები სახით დაწებებით ყუთი დაამზადეს. რამდენი სანტიმეტრი უნდა იყოს მოცემული ზომის მუყაოსაგან დამზადებული ყუთის სიმაღლე, რომ ყუთის მოცულობა მიიღონ მაქსიმალური?



- 9. მაქსიმალური ფართობი.** ფანჯრის ფორმა მართკუთხედისა და ნახევარწრისაგან სურათზე ნაჩვენებია კონსტრუქციით მიიღება. როგორ შეარჩევდით ფანჯრის ზომებს მაქსიმალური განათებისათვის (ფანჯრის მაქსიმალური ფართობისათვის), თუ სულ 12 მ ჩარჩოს მასალა არსებობს?



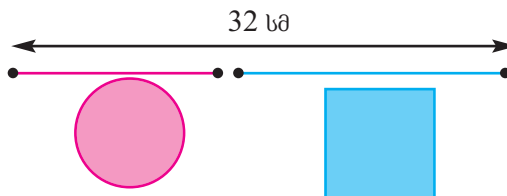
- 10. მინიმალური დროის ნახარჯი.** რესულმა ნავით 1 კმ სიგანის წყლის აუზის ერთ მხარეს მდებარე A წერტილიდან, მეორე ნაპირას მდებარე B წერტილში უნდა მიაღწიოს. ამისათვის მას შეუძლია ქვემოთ მოცემული გზებიდან ერთ-ერთი შეარჩიოს.



- 1) A წერტილიდან C წერტილში ნავით გადავიდეს და შემდეგ ქვეითად B წერტილში მივიდეს.
 - 2) A წერტილიდან ნავით პირდაპირ მივიდეს B წერტილში.
 - 3) A წერტილიდან B და C წერტილებს შორის მდებარე რაიმე D წერტილამდე ნავით გაცუროს. D-დან B -ში კვლავ ფეხით სიარულით მივიდეს.
- რომელი გზის არჩევისას მივა რესული B წერტილში უფრო სწრაფად, თუ მას ნავით საათში 3 კმ-ის ხოლო ქვეითად საათში 5 კმ მანძილის გავლა შეუძლია?

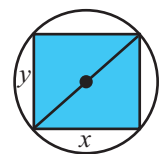
კონსტრუირების ამოცანები

- 11.** მოსწავლეებმა 32 სმ მავთულისაგან წრე და კვადრეტი უნდა დაამოდელონ. რომელ ადგილას უნდა გადაჭრან მათ მავთული ორ ნაწილად, რათა ფიგურების ფართობის ჯამი: ა) იყოს მაქსიმალური; ბ) იყოს მინიმალური.

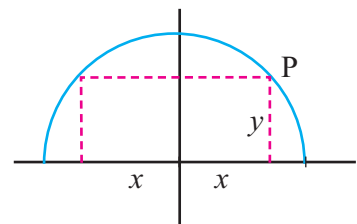


- 12.** ამოხსენით ამოცანები მოცემული სურათების გამოყენებით.

ა) განსაზღვრეთ 4 სმ რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული უდიდეს-ფართობიანი მართკუთხედის ზომები.



ბ) 6 სმ რადიუსის მქონე ნახევარწრეში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ერთი გვერდი დიამეტრზე მდებარეობს. რა უდიდესი ფართობისა შეიძლება იყოს ეს მართკუთხედი?



ამოცანების ამოხსნა ექსტრემუმის პოვნის შესახებ. ოპტიმიზაცია

ნამუშაო. მინიმალური მატერიალური დანახარჯი. იგეგმება საქონლის ხორცის 250 სმ³-ის ტევადობის ცილინდრის ფორმის ყუთებში დაკონსერვება.

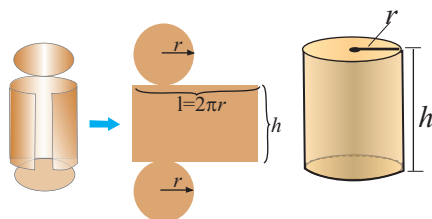
- ა) რა ზომებისა უნდა იყოს ყუთი, რომ ყველაზე ნაკლები მასალა დაიხარჯოს?
 ბ) ყუთის წრიული ფორმის ფუძისათვის გამოყენებული მასალის 1 სმ²-ის ფასი 0,05 კაპიკი, გვერდითი ზედაპირისათვის გამოყენებული მასალის 1 სმ²-ის ფასი 0,12 კაპიკია. რა ზომებისა უნდა იყოს ყუთი, რომ მასალაზე დაიხარჯოს უმცირესი თანხა?

ამოხსნა: ა) ამოცანაში მოცემულია, რომ მოცულობა 250 სმ³-ია. ეს ინფორმაცია შესაძლებლობას გვაძლევს, განვსაზღვროთ კავშირი r და h შორის.

$$\pi r^2 h = 250, \quad h = \frac{250}{\pi r^2}$$

$$S_{\text{ზედაპ}} = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{ფუძეები}} + \underbrace{2\pi r h}_{\substack{\text{მართკუთხა ფორმის} \\ \text{გვერდითი ზედაპირის} \\ \text{მსგავსი}}}$$

$$S_{\text{ზედაპ}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$$



ზედაპირის ფართობის მაჩვენებელი ფუნქციის განსაზღვრის არისათვის შეკრული ინტერვალი არ იყო მოცემული და უნდა ვიპოვოთ როცა $r > 0$ მაშინ ფუნქცია r -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება მინიმალური. ვიპოვოთ $S_{\text{ზედაპ}}$ ფუნქციის წარმოებულის.

$$S'_{\text{ზედაპ}} = (2\pi r^2 + \frac{500}{r})' = 4\pi r - \frac{500}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2} (r^3 - \frac{125}{\pi})$$

$$\text{ფუნქციის კრიტიკული წერტილი } r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \approx 3,4$$

ადვილად შევამოწმებთ: როცა, $0 < r < \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}$ მაშინ $S'_{\text{ზედაპ}}(r) < 0$, თუ $r > \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}$

მაშინ კი $S'_{\text{ზედაპ}}(r) > 0$. მაშასადამე, $r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}$.

$$h = \frac{250}{\pi r^2} \text{ ტოლობაში } r = 3,4 \text{ ჩაწერით მივიღებთ, რომ ამ შემთხვევაში ცილინდრის}$$

სიმაღლე $h \approx 6,9$ იქნება.

ამრიგად, $r \approx 3,4$ სმ, $h \approx 6,9$ სმ ზომების შემთხვევაში ცილინდრის ფორმის ყუთის დამზადებას დასჭირდება ყველაზე ნაკლები მატერიალური დანახარჯი.

ამოცანების ამოხსნა ექსტრემუმის პოვნის შესახებ. ოპტიმიზაცია

$$b) C(r) = 0,1\pi r^2 + 0,12 \frac{500}{r} = 0,1\pi r^2 + \frac{60}{r} \quad r > 0$$

$$C'(r) = (0,1\pi r^2 - \frac{60}{r^2})' = 0,2\pi r - \frac{60}{r^2}$$

$$0,2\pi r - \frac{60}{r^2} = 0 \quad 0,2\pi r = \frac{60}{r^2} \quad 0,2\pi r^3 = 60$$

$$0,2\pi r^3 = 60 \quad r \approx 4,57 \quad h = \frac{250}{\pi r^2} = \frac{250}{\pi(4,57)^2} \approx 3,8$$

მასალაზე ყველაზე ნაკლები ფულადი დანახარჯის მომთხოვნი ზომებია $r \approx 4,57$ სმ, $h \approx 3,8$ სმ.

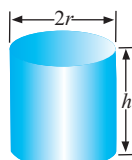
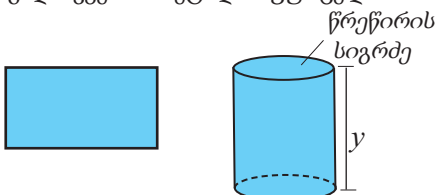
ამოცანის ა) პუნქტის შედეგი და ბ) პუნქტის შედეგი უნდა ემთხვეოდეს ერთმანეთს? განიხილეთ.

13. ა) 24π სმ² სრული ზედაპირის მქონე ცილინდრებს შორის იპოვეთ უდიდესი მოცულობის მქონე ცილინდრის სიმაღლე.

ბ) 54π სმ³ მოცულობის მქონე ცილინდრებიდან იპოვეთ უმცირესი სრული ზედაპირის ფართობის მქონე ცილინდრის რადიუსი.

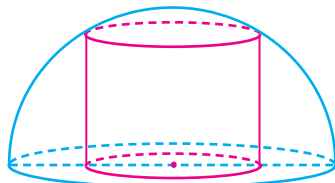
14. ა) 36 სმ პერიმეტრის მქონე მართკუთხა ფორმის მეტალის ფურცლისაგან დახვევით მიღებული ცილინდრის მოცულობის მაქსიმუმის მიღწევისათვის, რომელ x და y ზომებში უნდა გადაიკვეთოს მეტალის ფურცელი?

ბ) რომელი ზომის h და r უნდა შეირჩეს 1 ლ მოცულობის მქონე ჭურჭლისათვის უმცირესი მასალების დანახარჯების მიღწევისათვის?



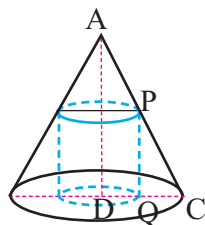
15. იპოვეთ 15 სმ მსახველის მქონე კონუსის მოცულობის უდიდესი მნიშვნელობა.

16. იპოვეთ 4 სმ რადიუსის მქონე ნახევარბირთვში ჩახაზული ცილინდრის მოცულობის უდიდესი მნიშვნელობა.



17. $AD = a$ სიმაღლისა და $DC = b$ რადიუსის მქონე კონუსში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის განსაზღვრეთ იმ ცილინდრის რადიუსი და სიმაღლე, რომლის მოცულობაც არის უდიდესი.

მითითება: დაუშვით, რომ ცილინდრის რადიუსი $DQ = x$, სიმაღლე კი $PQ = y$. გამოიყენეთ $\triangle ADC$ და $\triangle PQC$ -ის მსგავსება.



განმაზოგადებელი დავალებები

1. ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები.

1) $f(x) = 4 - 3x - x^2$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

4) $f(x) = \frac{2}{3}x(x-2)^3$

5) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 8$

6) $f(x) = 3x^{2/3} - x$

7) $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

8) $f(x) = \frac{-8x}{x^2 + 1}$

2. იპოვეთ მოცემულ მონაკვეთზე ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

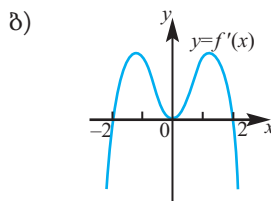
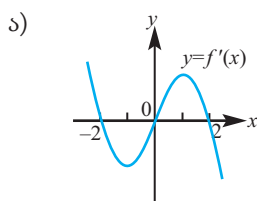
ა) $y = -2x + 7, \quad -3 \leq x \leq 4$

ბ) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7, \quad 0 \leq x \leq 3$

გ) $f(x) = x^3 - 3x, \quad -2 \leq x \leq 0$

დ) $y = \sqrt{x} - 0,5x, \quad 0 \leq x \leq 4$

3. $f'(x)$ ფუნქციის წარმოებულის გრაფიკის გამოყენებით $f(x)$ ფუნქციისათვის ივარაუდეთ: ა) ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები; ბ) ექსტრემუმის წერტილები.



4. სქემატურად გამოსახეთ მოცემული პირობების დამაკმაყოფილებელი უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკი.

ა) როცა $x < 2$, მაშინ $f'(x) > 0$, როცა $x > 2$, მაშინ $f'(x) < 0$ და $f(2) = 5$;

ბ) როცა $-1 < x < 4$, მაშინ $f'(x) > 0$, როცა $x < -1$ ან $x > 4$, მაშინ $f'(x) < 0$ და $f(-1) = 0, f(4) = 6$;

გ) როცა $x \neq 1$, მაშინ $f'(x) > 0$ და $f(1) = 2$;

დ) როცა $x > -3$, მაშინ $f'(x) = 2$, როცა $x < -3$, მაშინ $f'(x) = -2$ და $f(-3) = 1$.

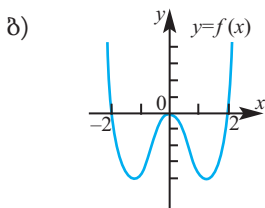
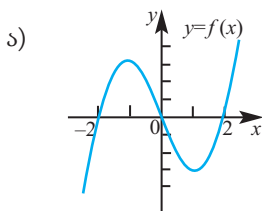
5. $f(x) = x^4 + x - \sqrt{3}$ და $g(x) = 8x^2 + x + \sqrt{3}$ შემთხვევაში ამოხსენით $f'(x) < g'(x)$ უტოლობა.

6. იპოვეთ წერტილები, რომლებშიც $f(x) = x \cdot e^{x^2-3x}$ ფუნქციის წარმოებული ნულად იქცევა.

7. $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ ფუნქციის გრაფიკის მხები $y = 2x$ წრფის პარალელურია. დაწერეთ ამ მხების განტოლება.

განმაზოგადებელი დაფალებები

8. $y = x^2$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც $M(2; \frac{1}{2})$ წერტილამდე მანძილი იქნება უმცირესი.
9. ცნობილია, რომ არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_6 = 3$. არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობის რა მნიშვნელობისათვის მიიღებს $a_1 \cdot a_4 \cdot a_5$ ნამრავლი უდიდეს მნიშვნელობას?
10. ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ივარაუდეთ წარმოებულის ნიშნის დადებითი ან კიდევ უარყოფითი ინტერვალები.

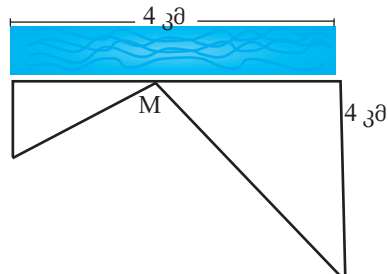


11. იმ მართკუთხედებს შორის, რომელთა წვეროები კოორდინატთა სათავეში, Ox და Oy დადებით ნახევარღერძებზე და $y = 4 - x^2$ პარაბოლაზეა, იპოვეთ მართკუთხედი, რომლის ფართობიც უდიდესია.
12. 128π სმ³ მოცულობის მქონე ცილინდრებს შორის იპოვეთ უმცირესი ზედაპირის ფართობის მქონე ცილინდრის სიმაღლე.
13. მედიცინა. მაქსიმალური კონცენტრაცია. $C(t) = \frac{0,08t}{t^2 + 2t + 2}$ ფუნქცია მიღებული წამლის t დროში სისხლში არსებული კონცენტრაციის ცვლილებას გამოსახავს. t უზვენებს წამლის მიღების მომენტიდან დაწყებულ დროს საათობით. t დროის რა მნიშვნელობისათვის იქნება პრეპარატის სისხლში კონცენტრაცია მაქსიმალური?
14. განსაზღვრეთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ექსტრემუმები.

$$1) y = x^{2/3}(x^2 - 4) \quad 2) y = x^2\sqrt{3-x} \quad 3) y = \begin{cases} 4-2x, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$$4) y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases} \quad 5) y = \begin{cases} 3-x, & x < 0 \\ 3+2x-x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

15. მდინარის სანაპიროზე მდებარე ორი შენობის წყლით მომარაგებისათვის მდინარეში უნდა მოეწყოს სპეციალური ტუმბოები. შენობებს შორის მანძილი 4 კმ-ია. ერთი შენობიდან მდინარემდე 1 კმ-ია, ხოლო მეორე შენობიდან მდინარემდე მანძილი 4 კმ-ია. მდინარის გასწვრივ, რომელ წერტილში უნდა განთავსდეს ტუმბოს დანადგარები, რათა წყლის შენობებამდე მიყვანისათვის რაც შეიძლება ნაკლები მიწები იქნას გამოყენებული?



- პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი
- მრუდით მოცული ფართობი
- განსაზღვრული ინტეგრალი
- ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა
- განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები
- განსაზღვრული ინტეგრალი და ბრუნვით მიღებული ფიგურების მოცულობა

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|---------------------------|---|
| ◆ პირველადი ფუნქცია | ◆ ინტეგრების მუდმივი |
| ◆ განუსაზღვრელი ინტეგრალი | ◆ განსაზღვრული ინტეგრალი |
| ◆ ინტეგრალის ნიშანი | ◆ ინტეგრების საზღვრები |
| ◆ ინტეგრება | ◆ ინტეგრალის გამოთვლის ძირითადი თეორემა |

ეს საინტერესოა!

ჰეიდარ ალიევის ცენტრი არქიტექტურული სტილის მიხედვით მსოფლიოში სახელგანთქმული და არის არაჩვეულებრივი არქიტექტურული ნაწარმოები. კომპლექსის არქიტექტურული სილამაზე ბევრი სისტემური მათემატიკური პრობლემის გადაწყვეტის შედეგად იქნა მიღწეული. ვინაიდან შენობა ტალღობრივად არის ნაგები, პროექტში შეიძლება ითქვას, რომ წრფეები არ არის გამოყენებული. ასეთი აგებულებით შენობის სახურავი მიწასთან მეხებით წესიერ და ჰარმონიულ შესახედაობას ქმნის. ასეთი არქიტექტურული ნაგებობა პოსტმოდერნისტული არქიტექტურის წარმოჩენასთან ერთად ახდენს უსასრულობის ეფექტის ფორმირებას. შენობის ხაზები თითქოს და წარსულისა და მომავლის გაერთიანების სიმბოლიზებას ახდენს. შენობის აშენებისას 90 კმ საერთო სიგრძის რკინის კონსტრუქციების ქსელი იქნა გამოყენებული. სახურავის მოწყობის დროს 4 ჰა საერთო ფართობის მქონე 12027 ცალი განსაკუთრებული შემადგენლობის სხვადასხვა ზომის სამკუთხედის, მართკუთხედის, ტრაპეციისა და პარალელოგრამის ფორმის პანელები იქნა გამოყენებული. სახურავის ფართობის ან კიდევ შენობის რომელიმე ტალღისებური ნაწილის სიგრძის გამოთვლისათვის ინტეგრების ხერხების გამოყენება გვჭირდება.



პირველადი ფუნქცია. განსაზღვრელი ინტეგრალი

გამოკვლევა. თავისუფალი ვარდნისას დროის t მომენტში გავლილი მანძილი

$s(t) = \frac{gt^2}{2}$ ფორმულით გამოითვლება. ეს ფორმულა გალილეოს მიერ ცდების გზით იქ-

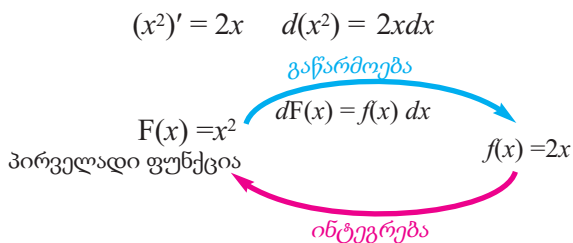
ნა აღმოჩენილი. ამ ფორმულით გაწარმოებით ვპოულობთ დროის ნებისმიერ t მომენტში სიჩქარესა და აჩქარებას: $v(t) = s'(t) = gt$; $a(t) = v'(t) = g$.

როგორ არის შესაძლებელი შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა? ანუ, თუ აჩქარება ცნობილია, მაშინ სიჩქარის $v(t)$ ცვლილების კანონის, ამასთან მოძრაობის $s(t)$ კანონის პოვნა როგორ არის შესაძლებელი?

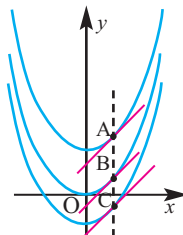
დიფერენცირება მოცემული ფუნქციის წარმოებულის პოვნაა, წარმოებულის მომცემი ფუნქციის პოვნა კი დიფერენცირების მოქმედების შებრუნებული მოქმედებაა. ამ დროს წარმოებულის ანუ დიფერენციალის მიხედვით თვით ფუნქციის პოვნა ხდება საჭირო, ანუ განსაზღვრულ შუალედში $f(x)$ მოცემული ფუნქციის პირობებში მოითხოვება ისეთი $F(x)$ ფუნქციის პოვნა, რომ ამ შუალედში $F'(x) = f(x)$ ანუ $dF(x) = f(x) dx$ დაკმაყოფილებული იყოს.

განსაზღვრება. მოცემული შუალედის ყველა წერტილში $F'(x) = f(x)$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელ $F(x)$ ფუნქციას, ამ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის **პირველადი ფუნქცია** ეწოდება.

მაგალითად, $F(x) = x^2$ ფუნქცია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში $f(x) = 2x$ -ის პირველადი ფუნქციაა, რადგან ამ შუალედის ყველა წერტილში $(x^2)' = 2x$.



მეორის მხრივ, $(x^2)' = (x^2 + 3)' = (x^2 - 2)' = 2x$ და საერთოდ, ნებისმიერი C მუდმივისათვის ვინაიდან $(x^2 + C)' = 2x$ ამიტომ $x^2, x^2 + 3, x^2 - 2, x^2 + C$ ფუნქციებიდან თითოეული ასევე არის $f(x) = 2x$ -ის პირველადი ფუნქცია. მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის პირველადი ფუნქცია ერთადერთი არ არის.



თუ $F_1(x)$ და $F_2(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულ შუალედში $f(x)$ -ის პირველადი ფუნქციებია, $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$ ფუნქციისათვის იმავე შუალედში $g'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ ტოლობა იგივეობისნაირად მიიღება. მაშინ $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკის თითოეული წერტილის მხები აბსცისთა ღერძის პარალელური იქნება. მაშასადამე, $y = g(x)$ ფუნქციის გრაფიკიც აბსცისთა ღერძის პარალელურია, ანუ ამ შუალედში $g(x) = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. აქედან, $F_1(x) = F_2(x) + C$. ამრიგად, მივიღებთ რომ, თუ $F(x)$ ფუნქცია მოცემულ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი C მუდმივისათვის:

- $F(x) + C$ ფუნქციაც იმავე შუალედში $f(x)$ -ის პირველადი ფუნქციაა.
- $f(x)$ -ის მოცემულ შუალედში არსებული ნებისმიერი პირველადი ფუნქცია $F(x) + C$ სახისაა.

$F(x) + C$ -ს პირველადი ფუნქციის ზოგად სახესაც უწოდებენ და სინამდვილეში ეს განსაზღვრულ ფუნქციასთან სიმრავლეა.

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

განსაზღვრება: განსაზღვრულ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველადი ფუნქციების სიმრავლეს მისი **განუსაზღვრელი ინტეგრალი** ეწოდება. იგი ასე აღინიშნება:

$\int f(x)dx$ და იკითხება ასე: „**ინტეგრალი ეფ იქს დე იქსიდან**“.

თუ $f(x)$ -ის პირველადი ფუნქციებიდან ერთი $F(x)$ იქნება, მაშინ განსაზღვრების თანახმად

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

სადაც $\int$ **ინტეგრალის** ნიშანია, $f(x)$ -ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, x -ინტეგრალქვეშა ცვლადი, C -ს კი ინტეგრების მუდმივი ეწოდება. ინტეგრების ცვლადად ნებისმიერი ცვლადი შეიძლება იქნას მიღებული. წარმოებულის მიხედვით ფუნქციის პოვნას **ინტეგრების** მოქმედება ეწოდება.

ნიმუში 1. ა) $\int 5dx$ ბ) $\int 3x^2 dx$ გ) $\int \cos x dx$

$$\int 5dx = 5x + C \qquad \int 3x^2 dx = x^3 + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

რადგან : $(5x + C)' = 5$ $(x^3 + C)' = 3x^2$ $(\sin x + C)' = \cos x$

ნიმუში 2. $\int x^3 dx$ გამოთვალეთ ინტეგრალი განსაზღვრების მიხედვით.

ამოხსნა: ვიფიქროთ იმაზე, თუ რომელი ფუნქციის წარმოებული შეიძლება იყოს x^3 . მაგალითად, ცნობილია, რომ x^4 ფუნქციის წარმოებულია $4x^3$. მაშასადამე, ჩვენს მიერ საძიებელ ფუნქციას მამრავლი $\frac{1}{4}$ უნდა ჰქონდეს, რათა კოეფიციენტ 4-თან შეკვეცის

შემდეგ მივიღოთ x^3 . ეს $F(x) = \frac{1}{4} x^4$ ფუნქციაა.

მაშასადამე,
$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

სასწავლო დაფალებები

1. დაამტკიცეთ, რომ $F(x)$ ფუნქცია მოცემულ შუალედში არის $f(x)$ -ის პირველადი ფუნქცია.

ა) $F(x) = \frac{1}{6} x^4$, $f(x) = \frac{2}{3} x^3$, $x \in (-\infty; +\infty)$

ბ) $F(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$

გ) $F(x) = (2x - 1)^3$, $f(x) = 6 \cdot (2x - 1)^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$

დ) $F(x) = 3x - \cos x$, $f(x) = 3 + \sin x$, $x \in (-\infty; +\infty)$

2. რიცხვით ღერძზე იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია.

ა) $f(x) = 3$ ბ) $f(x) = 3x^2$ გ) $f(x) = 8x^3$ დ) $f(x) = 5x^4$

3. მოცემული ფუნქციებიდან უჩვენეთ ისეთი, რომ დანარჩენი ორი ფუნქცია, მისი შესაბამისად წარმოებული და პირველადი ფუნქციები იყვნენ.

$f(x) = 2$ $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = x^2 + x$

4. გამოიყენეთ განსაზღვრება და იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

ა) $\int 4 dx$ ბ) $\int 2x dx$ გ) $\int 4x^3 dx$ დ) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

მუდმივისა და ხარისხიანი ფუნქციის ინტეგრალი

მუდმივის ინტეგრალი:

$$\int k dx = kx + C$$

**ხარისხიანი ფუნქციის ინტეგრა-
ლი:**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int kx^n dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

ამ ფორმულების კეშმა-
რიტობა განსაზღვრების
მიხედვით თვითონ შეა-
მოწმეთ!

$$\int (kx + b)^n dx = \frac{1}{k(n+1)} (kx + b)^{n+1} + C, n \neq -1$$

ნიმუში 1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int 5\sqrt{x} dx$

ამოხსნა: $\int 5\sqrt{x} dx = \int 5x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{5}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{5}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{10}{3} \sqrt{x^3} + C$

ნიმუში 2. დაწერეთ $f(x) = 3 \cdot (2x + 1)^4$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციების ზოგადი სახე.

ამოხსნა: ვინაიდან x^4 -ის პირველადი ფუნქციებიდან ერთ-ერთი $\frac{x^5}{5}$ -ია, ამიტომ $f(x) = 3 \cdot (2x + 1)^4$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{4+1}}{4+1} = \frac{3}{10} (2x+1)^5 \text{ იქნება. პირველადი ფუნქციების ზოგადი სახე კი}$$

$$F(x) = \frac{3}{10} (2x+1)^5 + C \text{ იქნება. მაშასადამე, } \int 3 \cdot (2x + 1)^4 dx = \frac{3}{10} (2x+1)^5 + C$$

5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int (-4) dx$ ბ) $\int 6 dx$ გ) $\int (-4x) dx$ დ) $\int \frac{2}{3} x dx$

6. იპოვეთ ფუნქციების პირველადი ფუნქციები.

ა) $f(x) = 4x^2$ ბ) $f(x) = 7x^5$ გ) $f(x) = 9x^8$ დ) $f(x) = \frac{1}{2} x^3$

7. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები ინტეგრალქვეშა ფუნქციის x^m სახეზე დაყვანით.

ა) $\int \frac{1}{x^3} dx$ ბ) $\int \frac{1}{x^5} dx$ გ) $\int \frac{dx}{x^2}$ დ) $\int 8\sqrt{x} dx$

ე) $\int \sqrt[3]{x} dx$ ვ) $\int 5x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} dx$ ზ) $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} dx$ თ) $\int \left(-\frac{3x}{\sqrt{x}} \right) dx$

8. ა) უჩვენეთ, რომ $((2x + 3)^4)' = 8(2x + 3)^3$ და იპოვეთ $\int 8(2x+3)^3 dx$ განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

ბ) უჩვენეთ, რომ $\frac{d}{dx} \sqrt{4x+1} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$ და იპოვეთ $\int \frac{3}{\sqrt{4x+1}} dx$ განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

9. იპოვეთ ფუნქციების პირველადი ფუნქციები.

ა) $f(x) = (2x + 3)^5$

ბ) $f(x) = (7 - 3x)^8$

გ) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$

დ) $f(x) = (5x + 2)^{-6}$

ე) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$

ვ) $f(x) = (x + 3)^{-3}$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები

1. $\int f'(x) dx = f(x) + C$

2. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$

3. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

4. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

5. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (k \neq 0)$

მაგალიტი 1. იპოვეთ ინტეგრალი. $\int (3x^5 + 9x^2 - 5) dx$

ამოხსნა: $\int (3x^5 + 9x^2 - 5) dx = \int 3x^5 dx + \int 9x^2 dx - \int 5 dx =$

$$= 3 \frac{x^{5+1}}{5+1} + 9 \frac{x^{2+1}}{2+1} - 5x + C = \frac{1}{2} x^6 + 3x^3 - 5x + C$$

10. $f(x)$ ფუნქციისათვის იპოვეთ პირველადი ფუნქციების ზოგადი სახე.

ა) $f(x) = 7 - 4x$

ბ) $f(x) = 5 + 6x - 9x^2$

გ) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$

დ) $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

11. იპოვეთ.

ა) $(\int 3x^2 dx)'$

ბ) $\int (x^3)' dx$

გ) $(\int \sqrt{x} dx)'$

12. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int \frac{3}{4} x^7 dx$

ბ) $\int (1 - x) dx$

გ) $\int (2 + x^2) dx$

დ) $\int (2x - 3x^2) dx$

ე) $\int (x^3 - 9) dx$

ვ) $\int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx$

ზ) $\int (3x^2 - x^{-3}) dx$

თ) $\int (8x^2 + 3x^{-4}) dx$

ი) $\int (4x^{-2} - x^{-3}) dx$

კ) $\int (\frac{2}{5} + \frac{1}{3} x^2) dx$

ლ) $\int (\frac{3}{4} \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}) dx$

მ) $\int (\frac{5}{2} \sqrt{x^3} + 8x) dx$

წარმოებულისაგან განსხვავებით ნამრავლისა და განაყოფის ინტეგრალისათვის ფორმულები არ არსებობს. ამიტომაც, თუ შესაძლებელია, პირველად ფუნქცია ცნობილ ფუნქციათა ჯამის ან სხვაობის სახით იწერება და შემდეგ ხდება პირველადი ფუნქციის პოვნა.

ნიმუში იპოვეთ $f(x) = \frac{3x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია.

ამოხსნა: $f(x) = \frac{3x^2}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = 3x - 2x^{-\frac{1}{2}}$ სახით თუ ჩავწერთ,

მაშინ $F(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^2 - 4\sqrt{x} + C$ მივიღებთ.

13. გაამარტივეთ ფუნქციის მოცემული გამოსახულებები. ინტეგრების წესების გამოყენებით იპოვეთ პირველადი ფუნქციები.

- ა) $f(x) = (x+2)(x-3)$ ბ) $f(x) = (x^2-3x)(x+1)$ გ) $f(x) = (x-3)^3$
 დ) $f(x) = (x+2x^3)(x+1)$ ე) $f(x) = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ ვ) $f(x) = (x+1)^2 - 2$

14. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

- ა) $\int \frac{x^2-3x}{x} dx$ ბ) $\int \frac{4u^3+5u^2-1}{u^2} du$ გ) $\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx$
 დ) $\int \frac{x^2+5x+6}{x+2} dx$ ე) $\int \frac{x^2-6x+8}{x-2} dx$ ვ) $\int \frac{(t^2+t)^2}{t} dt$

15. გაამარტივეთ და იპოვეთ პირველადი ფუნქციები.

- ა) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 5)$ ბ) $f(x) = (\sqrt[4]{x} - 2x)(\sqrt[4]{x} + 2x)$

16. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების პირველადი ფუნქციები.

- ა) $f(x) = (3x+2)^4$ ბ) $f(x) = (2x-1)^3$
 გ) $f(x) = \frac{3}{(1-2x)^2}$ დ) $f(x) = \frac{2}{(3x+1)^3}$
 ე) $f(x) = (x-2)(x+1)$ ვ) $f(x) = \frac{2x^3-x}{x}$

17. გაამარტივეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

- ა) $\int (x + \sqrt{x}) dx$ ბ) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x}} dx$ გ) $\int \frac{x^2+x-6}{x-2} dx$

მაჩვენებლიანი ფუნქციისა და $1/x$ ფუნქციის ინტეგრალები

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ინტეგრალი: $\int e^x dx = e^x + C$ $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k \ln a} a^{kx} + C$

$1/x$ ფუნქციის ინტეგრალი:

როცა $x > 0$, მაშინ

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

როცა $x < 0$, მაშინ

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$$

ნებისმიერ შუალედში, სადაც $x \neq 0$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

ზოგადი სახით:

$$\int \frac{1}{kx + b} dx = \frac{1}{k} \ln|kx + b| + C$$

ამ ფორმულების კეშმარიტობა განსაზღვრების მიხედვით თვითონ შეამოწმეთ!

ნიმუში . იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი. ა) $\int e^{4x} dx$; ბ) $\int \frac{2}{3x+4} dx$

ამოხსნა : ა) $\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$

$$\text{ბ) } \int \frac{2}{3x+4} dx = 2 \int \frac{1}{3x+4} dx = \frac{2}{3} \ln|3x+4| + C$$

18. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int 3e^{2x} dx$	ბ) $\int (-12)e^{3x} dx$	გ) $\int \frac{2}{3} e^{-3x} dx$	დ) $\int 4 \cdot 2^x dx$
ე) $\int \frac{5}{x} dx$	ვ) $\int \frac{5}{x \ln 3} dx$	ზ) $\int \frac{1}{5x+4} dx$	თ) $\int \frac{-2}{2x+1} dx$

19. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების პირველადი ფუნქციები.

ა) $f(x) = \frac{2}{x}$ ბ) $f(x) = \frac{4}{2x-3}$ გ) $f(x) = 4 \cdot e^{3-2x}$ დ) $f(x) = 6 \cdot 2^{3x+1}$

20. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int (e^x - ex) dx$ ბ) $\int (2^x - \frac{2}{x}) dx$ გ) $\int (e^x + 2x) dx$ დ) $\int (e^{-2x} - \frac{5}{x \ln 2}) dx$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრალები

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 kx} \, dx = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 kx} \, dx = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C$$

ამ ფორმულების კემმარტობა განსაზღვრების მიხედვით თვითონ შეამოწმეთ!

ნამუშაო 1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int 2\sin \frac{x}{2} \, dx$

ამოხსნა: $\int 2\sin \frac{x}{2} \, dx = -2 \cdot \frac{\cos(x/2)}{1/2} + C = -4\cos \frac{x}{2} + C$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრების დროს ხელსაყრელია ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენება.

ნამუშაო 2. ვიპოვოთ $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია.

ამოხსნა: $f(x) \frac{1}{2} \sin 2x$. ამიტომ $F(x) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cos 2x\right) + C =$
 $= -\frac{1}{4} \cos 2x + C$ მიიღება.

ნამუშაო 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \sin^2 x \, dx$

ამოხსნა: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$. იგივეობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C.$$

ნამუშაო 4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx$

ამოხსნა: $\sin ax \cdot \cos bx \frac{1}{2} (\sin(a-b)x + \sin(a+b)x)$ ფორმულის მიხედვით:
 $\int \sin 5x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 8x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx =$
 $= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$

21. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების პირველადი ფუნქციები.

ა) $f(x) = \frac{1}{2} \sin x - \cos x$ ბ) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ გ) $f(x) = \frac{6}{\sin^2 x}$

22. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int (3\sin x + 2\cos x) \, dx$ ბ) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ გ) $\int \frac{4}{\cos^2 2x} \, dx$

პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

23. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების პირველადი ფუნქციები.

ა) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ბ) $f(x) = \sin^2 3x$ გ) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$

24. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int \sin^2 x \, dx$ ბ) $\int \cos^2 x \, dx$ გ) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

დ) $\int \sin 3x \sin x \, dx$ ე) $\int \sin x \cos 3x \, dx$ ვ) $\int \cos 3x \cos 5x \, dx$

25. იპოვეთ ინტეგრალები ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენებით.

ა) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \, d\theta$ ბ) $\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx$ გ) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

26. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები.

ა) $\int (\sin 2x + 3x) \, dx$ ბ) $\int (\cos 3x - 2x + 1) \, dx$
 გ) $\int (e^{-x} + 2 \cos x + 5x^2) \, dx$ დ) $\int (e^{3x} - 8 \sin 2x + x^{-4}) \, dx$

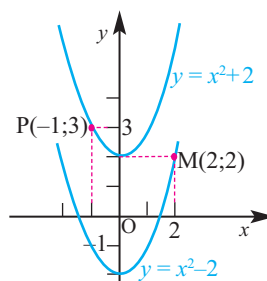
გამოყენებითი დავალებები

ამოცანები ინტეგრების მუდმივის პოვნის შესახებ

ნიმუში . ვიპოვოთ $f(x) = 2x$ ფუნქციის ის პირველადი ფუნქცია, რომლის გრაფიკი გადის: ა) $M(2;2)$; ბ) $P(-1;3)$ წერტილზე.

ამოხსნა : ჯერ დავწეროთ $f(x) = 2x$ ფუნქციის $(-\infty; +\infty)$ შუალედში პირველადი ფუნქციის ზოგადი სახე: $F(x) = x^2 + C$.

ა) პირობის თანახმად უნდა იყოს: $F(2) = 2$. მაშინ $4 + C = 2$, აქედან $C = -2$. მაშასადამე, $f(x) = 2x$ ფუნქციის გრაფიკის $M(2;2)$ წერტილზე გამავალი პირველადი ფუნქცია იქნება: $F(x) = x^2 - 2$.



ბ) პირობის თანახმად უნდა იყოს: $F(-1) = 3$ მაშინ $1 + C = 3$, აქედან $C = 2$. მაშასადამე, $f(x) = 2x$ ფუნქციის გრაფიკის $P(-1;3)$ წერტილზე გამავალი პირველადი ფუნქცია იქნება: $F(x) = x^2 + 2$.

27. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის მოცემული პირობის დამაკმაყოფილებელი პირველადი ფუნქცია.

ა) $f(x) = x^2, F(3) = 0$ ბ) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, F(4) = -2$

28. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მოცემულ წერტილზე გამავალი პირველადი ფუნქცია.

ა) $f(x) = x, M(-1;2)$ ბ) $f(x) = 4x^3, M(-1;3)$

29. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის მოცემული პირობის დამაკმაყოფილებელი პირველადი ფუნქცია.

ა) $f(x) = e^{2x}, F(0) = 1$ ბ) $f(x) = 3e^{x-2}, F(2) = 0$ გ) $f(x) = \frac{4}{x}, F(e) = 5$
 დ) $f(x) = 2 \sin 2x, F(\frac{\pi}{2}) = 0$ ე) $f(x) = 2 \cos x, F(\frac{\pi}{6}) = 3$

პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

- 30.** იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის მოცემულ M წერტილზე გამავალი პირველადი ფუნქცია.

ა) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $M(1; \frac{1}{6})$

ბ) $f(x) = (2x-1)^3$, $M(2;4)$

- 31.** დაწერეთ ფუნქციები მოცემული პირობების შესაბამისად.

ა) $f'(x) = 2x + 1$; $f(1) = -2$

ბ) $f'(x) = x^2 - 4$; $f(0) = 7$

გ) $f'(x) = 8x^2 + 4x - 2$; $f(0) = 6$

დ) $f'(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $f(1) = 3,5$

- 32.** $F(x)$ ფუნქცია $f(x) = 2x + 1$ ფუნქციის გრაფიკის $M(1;0)$ წერტილზე გამავალი პირველადი ფუნქციაა. x -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება:

ა) $F(x) > 0$; ბ) $F(x) < 0$?

- 33.** განსაზღვრეთ აბსცისის x წერტილში მხების კუთხური კოეფიციენტი $2x - 2$ -ის მქონე და გრაფიკის $(3;4)$ წერტილზე გამავალი ფუნქციის ანალიტიკური გამოსახულება და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოცანები რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესახებ

ნიმუში 1. მოძრაობა. 1 მ სიმალიდან ზევით ასროლილი ბურთის სიჩქარის t დროზე დამოკიდებულების $v(t) = -9,8t + 12$ სახით გამოსახვა შეიძლება, სადაც t უჩვენებს დროს წამებით. დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც უჩვენებს რა სიმაღლეზე იქნება ბურთი t წამის მომენტში. რა სიმაღლეზე იქნება ბურთი 2 წამის მომენტში?

ამოხსნა: თუ t მომენტში ბურთის $h(t)$ სიმაღლეზე ყოფნას წარმოვიდგენთ, $h'(t) = v(t)$ იქნება. მაშასადამე, $h(t)$ ფუნქცია $v(t)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა:

$$h(t) = (\int (-9,8t + 12)dt = -4,9t^2 + 12t + C$$

ახლა ამოცანის მონაცემების მიხედვით ვიპოვოთ C მუდმივი.

საწყის ანუ $t = 0$ მომენტში ბურთი დედამიწიდან 1 მ სიმაღლეზე იყო.

რადგან, როცა $t = 0$ მაშინ $h(0) = 1$, ამიტომ:

$$1 = -4,9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + C$$

აქედან $C = 1$. მაშასადამე, t მომენტში ბურთის დედამიწიდან სიმაღლის მაჩვენებელი ფუნქცია $h(t) = -4,9t^2 + 12t + 1$ ფორმულით განისაზღვრება. როცა $t = 2$ მაშინ $h(2) = -4,9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 1 = 5,4$ იქნება. ანუ, $t = 2$ წამის მომენტში ბურთი დედამიწიდან 5,4 მ სიმაღლეზე იქნება.

- 34.** წერტილი $v(t)$ სიჩქარით წრფივად მოძრაობს. t_0 საწყის მომენტში მისი x_0 კოორდინატა მოცემულია. იპოვეთ $x(t)$ კოორდინატი, როგორც დროის ფუნქცია:

ა) $v(t) = 4$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$

ბ) $v(t) = 6$, $t_0 = 0$, $x_0 = 2$

გ) $v(t) = 2t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 3$

- 35. მოძრაობა.** წრფივად მოძრავი მატერიალური წერტილის სიჩქარე $v(t) = 2t - 3$ ფორმულითაა მოცემული. ცნობილია, რომ საწყის $t = 0$ მომენტში წერტილი კოორდინატა სათავეში იყო. იპოვეთ მისი x კოორდინატი, როგორც t დროის ფუნქცია.

ნამუშაო 2. მოსახლეობის მატება. სტატისტიკურმა გამოკვლევებმა გამოავლინა, რომ ქალაქებში არსებული მოსახლეობის რაოდენობის წლიური ცვლილება $P'(t) = 11,7e^{0,026t}$ დამოკიდებულებით შეიძლება განისაზღვროს, სადაც t არის 1960 წლის შემდგომი წლების რაოდენობა, $P(t)$ უჩვენებს მოცემულ წელს მოსახლეობის რაოდენობას ასიათას კაცობით. თუ 1990 წელს მოსახლეობის რაოდენობა იყო 820 ათასი კაცი, მაშინ სავარაუდოდ რამდენი კაცი იქნება ამ ქალაქის მოსახლეობა 2020 წელს?

ამოხსნა : $P'(t) = 11,7e^{0,026t}$ ფუნქციის შესაბამისი პირველადი ფუნქციის პოვნით შეგვიძლია განვსაზღვროთ მოსახლეობის რაოდენობის მაჩვენებელი $P(t)$ ფუნქცია:

$$P(t) = \int 11,7e^{0,026t} dt = \frac{11,7}{0,026} e^{0,026t} + C = 450e^{0,026t} + C,$$

$$P(t) = 450e^{0,026t} + C$$

ახლა კი უნდა განვსაზღვროთ C მუდმივი.

პირობის თანახმად, როცა $t = 30$, მაშინ (1960-1990) მოსახლეობის რაოდენობა გახდა 820 ათასი კაცი.

$$820 = 450e^{0,026 \cdot 30} + C$$

$$\text{მაშინ } C \approx -161,7 \text{ და } P(t) = 450e^{0,026t} - 161,7.$$

2020 წელს მოსახლეობის რაოდენობა $P(t)$ ფუნქციის $t = 60$ მნიშვნელობის შესაბამისია:

$$P(60) = 450e^{0,026 \cdot 60} - 161,7 \approx 1979,8$$

ანუ, 2020 წელს ამ ქალაქში არსებული მოსახლეობის რაოდენობა სავარაუდოდ 1979800 კაცი იქნება.

ბაქტერიების გამრავლება. დაკვირვებით განისაზღვრა, რომ ბაქტერიების $P(t)$

- 36.** რაოდენობის მატების სიჩქარის

$$\frac{dP}{dt} = 200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$$

სახით მოცემა შეიძლება. სადაც t დროს (საათობით) გვიჩვენებს. რას უდრის მათი რაოდენობა 12 საათის შემდეგ, თუ მათი რაოდენობა დაკვირვების დასაწყისში იყო 200 000?

- 37. ეკოლოგია.** ირმების მატებაზე დაკვირვების მწარმოებელი, გამომკვლევია ჯგუფის ანგარიშგებაში ირმების რაოდენობის ცვლილება ქვემოთ მოცემული განტოლებით იყო გამოსახული:

$$\frac{dN}{dt} = 3t^3 + 2t, \quad 0 \leq t \leq 5,$$

სადაც N ირმების რაოდენობას, ხოლო t დროს (წლობით) გვიჩვენებს..

რამდენი ირემი იქნებოდა აქ დაკვირვების ბოლოს, თუ დაკვირვების დასაწყისში იყო 200 ირემი?

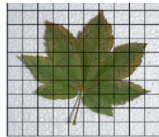
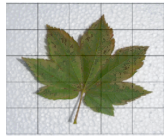
- 38. თვითღირებულება.** x ცალი პროდუქციის მარგინალური თვითღირებულება $C'(x) = 50 - 0,05x$ ფუნქციითაა მოცემული. იპოვეთ 150 ნაწარმის თვითღირებულება, თუ ერთი ერთეულის თვითღირებულება 40 მანათია.

მრუდით მოცული ფართობი

წარმოადგინეთ, რომ თქვენ აწარმოებთ მცენარეებზე დაკვირვებას და მცენარის მიერ მიღებული მზის ენერგიის განსაზღვრისათვის საჭირო ხდება ფოთლის ფართობის განსაზღვრა. შეიძლება ფოთლი მოვათავსოთ უჯრიან რვეულზე და უჯრების დათვლით მიახლოებით ვიპოვოთ მისი ფართობი.



1 უჯრა 1 კვ. სმ.
სრული უჯრა 1 ცალი
არასრული უჯრა 18 ცალი
 $1 \leq \text{უჯრების რაოდენობა} \leq 19$
1 კვ. სმ. $\leq$ ფოთლის ფართობი ≤ 19 კვ. სმ.

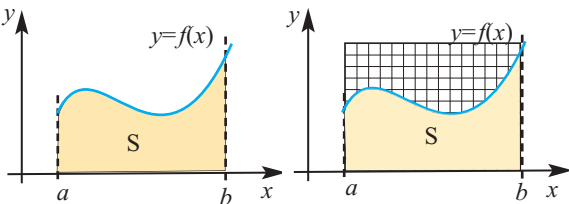


1 უჯრა 1/4 კვ. სმ.
სრული უჯრა 16 ცალი
არასრული უჯრა 34 ცალი
 $16 \leq \text{უჯრების რაოდენობა} \leq 50$
4 კვ. სმ. $\leq$ ფოთლის ფართობი $\leq 12,5$ კვ. სმ.

თუ უჯრების დაწვრილებას გავაგრძელებთ, ფოთლის ფართობს უფრო მცირე კვადრატების ჯამის სახით დავთვლით, ფართობის გამოთვლაში შემცირდება მიახლოებითობა და მოხდება მისი ფართობის ნამდვილ ფართობთან უფრო მიახლოებული გამოთვლა.

იგივე ხერხის გამოყენებით შეგვიძლია სხვადასხვა ფორმის ფართობების გამოთვლა.

მაგალითად, $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტი, არაუარყოფითი მნიშვნელობის მიმდები $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით და x აბსცისთა ღერძით, $x = a$ და $x = b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფართობის განგარიშებაც ამ ხერხით შეიძლება.

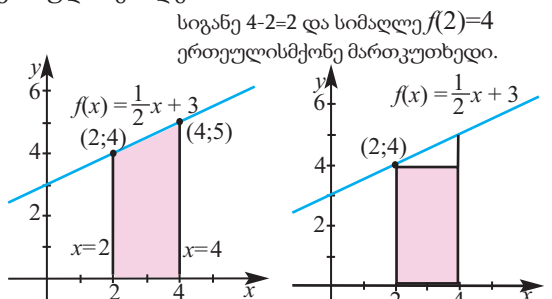


ნიმუში 1. მიახლოებით გამოთვალეთ $y = \frac{1}{2}x + 3$ ფუნქციის გრაფიკით, აბსცისთა ღერძით, $x = 2$ და $x = 4$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა: სურათზე $y = \frac{1}{2}x + 3$ ფუნქციის გრაფიკით, აბსცისთა ღერძით, $x = 2$

და $x = 4$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურაა გამოსახული.

ნაჩვენები ფართობის სიმაღლის $f(2) = 4$ და $f(4) = 5$ მქონე მართკუთხედების მიხედვით ვარაუდი შეიძლება.



სიგანე $4-2=2$ და სიმაღლე $f(2)=4$
ერთეულისმქონე მართკუთხედი.

ფართობი $2 \cdot 4 = 8$ კვ. ერთ. ეს
ნამდვილ ფართობზე ნაკლებია.

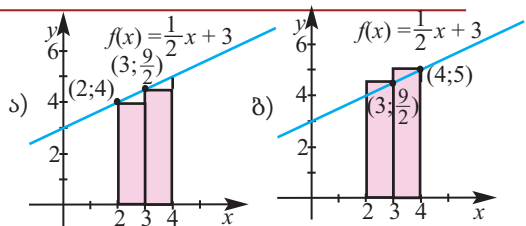
ფართობი: $8 < S < 10$

სიგანე $4-2=2$ და სიმაღლე $f(4)=5$
ერთეულისმქონე მართკუთხედი

ფართობი $2 \cdot 5 = 10$ კვ. ერთ.
ეს ნამდვილ ფართობზე მეტია.

მრუდით მოცული ფართობი

ნაჩვენები ფართობის უფრო მცირე მართკუთხედებად დაყოფით, მიღებული მართკუთხედების ფართობების შეჯამების გზით გაანგარიშებით მიახლოებითობა შემცირდება და შეფასება ნამდვილ მნიშვნელობასთან უფრო ახლოს იქნება.



$[2; 4]$ მონაკვეთის ორ ნაწილად ($[2;3]$ და $[3;4]$) დაყოფით (სურათი ა და სურათი ბ) მოძებნილი ფართობი შეიძლება მიახლოებით გამოვთვალოთ, როგორც ორი მართკუთხედის ფართობების ჯამი. ა) ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიგანე 1, სიმაღლე $f(2) = 4$ და სიგანე 1, სიმაღლე $f(3) = 4,5$ მქონე მართკუთხედების ფართობების ჯამის ტოლია: $1 \cdot 4 + 1 \cdot 4,5 = 8,5$.

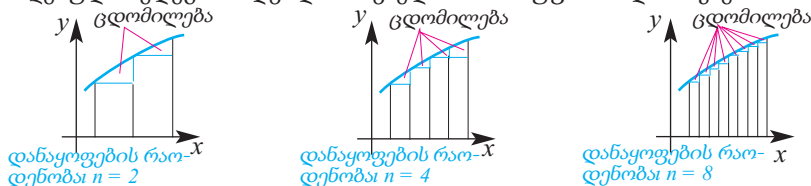
ბ) ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიგანე 1, სიმაღლე $f(3) = 4,5$ და სიგანე 1, სიმაღლე $f(4) = 5$ მქონე ორი მართკუთხედის ფართობების ჯამის ტოლია: $1 \cdot 4,5 + 1 \cdot 5 = 9,5$.

მაშასადამე, რეალური ფართობი $8,5 < S < 9,5$ დამოკიდებულებას აკმაყოფილებს. განხილულ შემთხვევაში ფართობის ტრაპეციის ფართობის ფორმულის მიხედვით ზუსტი გაანგარიშებით შეგვიძლია შევაფასოთ ჩატარებული გამოთვლების ცდომილობა:

$$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2(4+5) = 9$$

მაშასადამე, როცა ინტერვალის რაოდენობაა $n = 1$, მაშინ გამოთვლები რეალური ფართობიდან 1 კვ ერთეულით განსხვავდება, როცა $n = 2$, მაშინ კი ეს სხვაობა შემცირდა და 0,5 ერთეული გახდა.

მოცემული მონაკვეთის კიდევ უფრო მეტი რაოდენობის მცირე შუალედებად დაყოფით, ფართობს კიდევ უფრო მცირე მართკუთხედების ჯამის სახით გამოვთვლით, ჩვენს მიერ მიღებული შედეგი ნამდვილ მნიშვნელობასთან უფრო ახლოს იქნება.



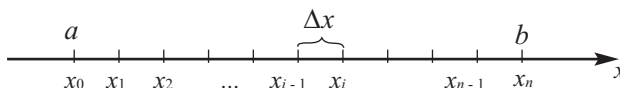
როდესაც ვსაუბრობთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიერ $[a; b]$ მონაკვეთზე მოცული ფართობის შესახებ, იგულისხმება f ფუნქციის გრაფიკით, აბსცისთა ღერძით, $x = a$ და $x = b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (მას მრუდწირულ ტრაპეციასაც უწოდებენ). დავალებებში ამ ფართობს ჩვენ მოკლედ „მრუდით მოცულ ფართობს“ ვუწოდებთ.

აქ f ფუნქცია ქვემოთ მოცემულ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს:

- f ფუნქცია მოცემულ $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტია;
- f ფუნქცია $[a; b]$ მონაკვეთზე არაუარყოფით მნიშვნელობებს იღებს.

$[a; b]$ მონაკვეთი თითოეულის $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ სიგრძის მქონე n მონაკვეთად

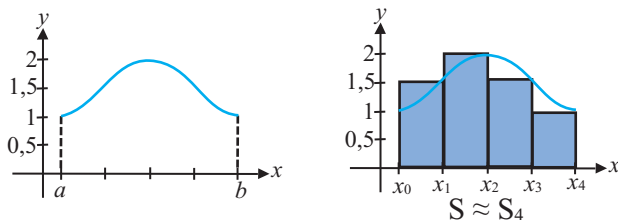
იყოფა: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{n-1}; x_n]$



განსაზღვრული ინტეგრალი და ფართობი

$f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით მოცული ფართობი მიახლოებით, Δx სიგანისა და $f(x_i)$ სიმაღლის მართკუთხედების ფართობების ჯამის სახით გამოითვლება.

ნიმუში 2. სურათზე მოცემული მრუდით მოცული ფართობი მიახლოებით მოცემული მონაკვეთის $n = 4$ ტოლ ნაწილად დაყოფით მიღებული 4 მართკუთხედის ფართობების ჯამის ტოლია.



$$S \approx f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + f(x_3) \Delta x + f(x_4) \Delta x = S_4$$

გეომეტრიულად ეს ჯამი სურათზე მოცემული ფილისებრი ფიგურის ფართობია და $f(x)$ ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე ინტეგრალური ჯამი ეწოდება.

დანაყოფების წერტილების რაოდენობის გაზრდით

$S \approx f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + f(x_3) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x = S_n$ სახით ჩაწერა შეიძლება. ეს ჩანაწერი $\sum$ “სიგმა” ნიშნის დახმარებით მოკლედ ქვემოთ მოცემული სახით ჩავეწეროთ:

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = S_n$$

ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია, საკმაოდ დიდი რაოდენობის n -ებისათვის (ანუ Δx საკმაოდ მცირეა) აგებული მართკუთხედების შეერთების ფართობი, ჩვენთვის საინტერესო ფართობთან „შეიძლება ითქვას, რომ ტოლია“, ანუ როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ $S_n \rightarrow S$.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

ავლნიშნოთ, რომ ინტეგრალურ ჯამში $f(x_i)$ მნიშვნელობების ნაცვლად $[x_{i-1}; x_i]$ შუალედის ნებისმიერ c_i წერტილში არსებული $f(c_i)$ მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს

განსაზღვრული ინტეგრალი

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $[a; b]$ მონაკვეთზე ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ S_n ინტეგრალური ჯამების მიმდევრობა განსაზღვრული რიცხვისკენ მიისწრაფვის. ამ რიცხვს f ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ინტეგრალი ეწოდება და

$\int_a^b f(x) dx$ სახით აღინიშნება. ანუ

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

a და b რიცხვებს ეწოდება ინტეგრების საზღვრები: a -ს ქვედა საზღვარი, b -ს ზედა საზღვარი. ნიშანი $\int$ - ინტეგრალის ნიშანია. f ფუნქციას ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ხოლო x ცვლადს ინტეგრების ცვლადი ეწოდება.

ამრიგად, როცა $f(x) \geq 0$, მაშინ ფუნქციის გრაფიკის $[a; b]$ მონაკვეთზე

მოცული ფართობი $S = \int_a^b f(x) dx$ ფორმულით გამოისახება.

განსაზღვრული ინტეგრალი და ფართობი

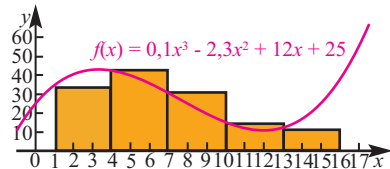
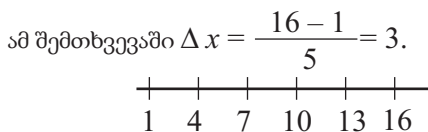
მრუდით მოცული ფართობის გამოთვლისას ქვემოთ მოცემულ თანმიმდევრობას მიაქცეით ყურადღება.

1. დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი სქემატურად.
2. მოცემული $[a; b]$ მონაკვეთი, თითოეული სიგრძით $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, n რაოდენობის მონაკვეთად იყოფა.
3. გადაწყვიტეთ გამოთვლისას $f(x_i)$ მნიშვნელობად გაყოფილი მონაკვეთების მარცხენა თუ მარჯვენა წვეროში არსებულ მნიშვნელობას აირჩევთ.
4. გამოთვლები შეგიძლიათ აწარმოოთ მართკუთხედების მრუდის ქვევით მდებარეობის შემთხვევისათვის ან მართკუთხედების ნაწილის მრუდის ზევით მდებარეობის შემთხვევისათვის.

ნიმუში 3. [1;16] მონაკვეთის 5 ტოლ ნაწილად დაყოფით იპოვეთ

$f(x) = 0,1x^3 - 2,3x^2 + 12x + 25$ ფუნქციის გრაფიკის ქვეშ არსებული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ამოხსნა: სურათზე მოცემული ფუნქციის გრაფკალკულატორით აგებული გრაფიკია ნაჩვენები.



$f(x_i)$ მნიშვნელობად გაყოფილი მონაკვეთების მარცხენა წვეროში არსებული მნიშვნელობა ავირჩიოთ. სიგანით 3 ერთეულისა და სიმაღლით კი $f(x_i)$ ერთეულის 5 მართკუთხედის ფართობების ჯამი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობაა:

$$S \approx \sum_{i=1}^5 f(x_i) \Delta x = f(1) \cdot 3 + f(4) \cdot 3 + f(7) \cdot 3 + f(10) \cdot 3 + f(13) \cdot 3 = 34,8 \cdot 3 + 42,6 \cdot 3 + 30,6 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 12 \cdot 3 = 405$$

$$f(1) = 0,1 \cdot 1^3 - 2,3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 25 = 34,8$$

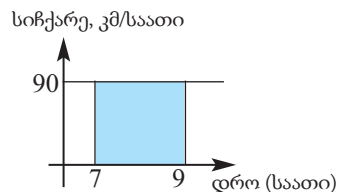
$$S \approx 405 \text{ (კვ. ერთეული)}$$

ნიმუში 4. მატარებელი 07:00 საათიდან 09:00 -მდე 90 კმ/საათი სიჩქარით მოძრაობდა.

- ა) განსაზღვრული ინტეგრალით გამოსახეთ მატარებლის მოძრაობის გზის სიგრძე.
- ბ) იპოვეთ განსაზღვრული ინტეგრალი, როგორც შესაბამისი ფართობის მნიშვნელობა.

ამოხსნა: ა) საძიებელი გზის სიგრძე რიცხვითი მნიშვნელობით სურათზე მოცემული ფერადი ფართობის ტოლია.

ეს ფართობი $\int_7^9 90 dt$ ინტეგრალით გამოისახება.



ბ) მატარებლის დროის მოცემულ ინტერვალში გავლილი მანძილი მნიშვნელობით მუდმივი $f(x) = 90$ ფუნქციის გრაფიკის $[7;9]$ მონაკვეთზე მოცული მართკუთხედის ფართობის ტოლია. რადგან ამ მართკუთხედის სიმაღლე 90, სიგანე კი $\Delta x = 9 - 7 = 2$ - ია, ამიტომ ფართობი $90 \cdot 2 = 180$ იქნება. მაშასადამე,

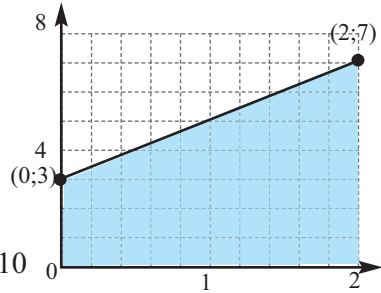
$$\int_7^9 90 dt = 180.$$

განსაზღვრული ინტეგრალი და ფართობი

ნიმუში 5. $\int_0^2 (2x + 3) dx$ გამოთვალეთ ინტეგრალი.

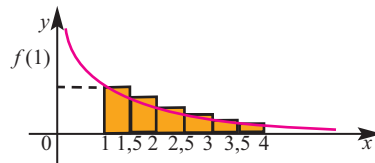
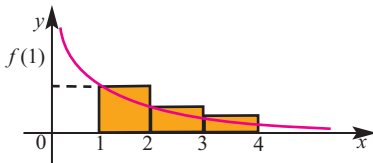
ამოხსნა: მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x) = 2x + 3$ ფუნქციის $[0;2]$ მონაკვეთზე მოცული ფართობის რიცხვითი მნიშვნელობის ტოლია. ეს ფართობი კი განხილულ შემთხვევაში ტრაპეციის ფართობის ფორმულით შეიძლება იქნას გამოთვლილი:

$$S = \frac{3 + 7}{2} \cdot 2 = 10, \text{ ანუ } \int_0^2 (2x + 3) dx = 10$$



სასწავლო დაგეგმვები

1. იპოვეთ $y = \frac{1}{x}$ ჰიპერბოლის $[1;4]$ მონაკვეთზე ფუნქციის გრაფიკის ფართობი სურათზე მოცემული მართკუთხედების ფართობების ჯამის სახით. გამოთვლები აწარმოეთ მესაქედამდე. შედეგები შეადარეთ.



2. ააგეთ $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ წრფეებით შემოსაზღვრული ტრაპეცია.
- იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი ცნობილი ფორმულის მიხედვით.
 - დაყავით $[1;2]$ მონაკვეთი 5 ტოლ ნაწილად. ტრაპეციაში ჩახაზული საფეხუროვანი ფიგურის ფართობის გამოთვლით იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა და მიღებული მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება.
3. გამოსახეთ $[0; 4]$ მონაკვეთზე $y = \frac{1}{4}x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.
- მოცემული მონაკვეთის ჯერ $n = 4$, შემდეგ კი $n = 8$ ტოლი სიგრძის მონაკვეთებად დაყოფით, იპოვეთ მრუდით მოცემულ შუალედში მოცული ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა:
 - როგორც მრუდის ქვევით დარჩენილი მართკუთხედების ფართობების ჯამი;
 - როგორც მრუდზე ნაწილობრივ ზევით მყოფი მართკუთხედების ფართობების ჯამი.
 - შესაბამისი ფართობი გამოსახეთ ინტეგრალით.

4. მოცემულ მონაკვეთზე ფუნქციის გრაფიკით მოცული ფართობის გამოთვლით, იპოვეთ განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა.

ა) $\int_0^5 3 dx$

ბ) $\int_0^4 2x dx$

გ) $\int_0^5 \frac{1}{2} x dx$

დ) $\int_0^3 (2x + 3) dx$

ე) $\int_2^5 (10 - 2x) dx$

ვ) $\int_{-1}^2 |x| dx$

ზ) $\int_0^3 |x-1| dx$

თ) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

განსაზღვრული ინტეგრალი და ფართობი

5. დახაზეთ ქვემოთ მოცემული სიტუაციების შესაბამისი გეომეტრილი გამოსახულებები და საძიებელი სიდიდეები გამოსახეთ განსაზღვრული ინტეგრალის სახით:

ა) 11:00 საათიდან 14:00 საათამდე 75 კმ/ სთ მუდმივი სიჩქარით მოძრავი ავტომობილის გავლილი მანძილი;

ბ) წუთში 5 ლიტრი წყლის მიმწოდებელი ტუმბოს მიერ პირველი ერთი საათის განმავლობაში მიწოდებული წყლის ოდენობა.

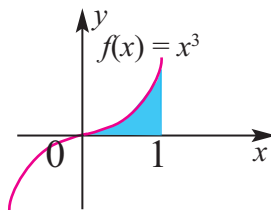
6. $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ და კუბური პარაბოლის მოცემულ

მონაკვეთზე მოცული ფართობი სურათზე სქემატურად არის გამოსახული. შესაბამისი ფართობების სქემატური გამოსახვით იპოვეთ ქვემოთ მოცემული თითოეული ინტეგრალის მნიშვნელობა.

მითითება: გამოიყენეთ პარალელური გადატანის, განსაზღვრული ინტეგრალისა და ფართობების შესახებ არსებული ცოდნა.

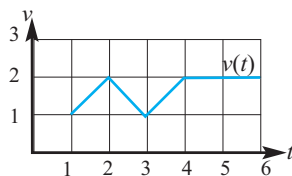
ა) $\int_0^1 (x^3 + 3) dx$

ბ) $\int_0^1 (x-1)^3 dx$



გამოყენებითი დაფალებები

7. გრაფიკზე წერტილის მოძრაობის სიჩქარეა (მ/წმ) მოცემული. დროის $[1; 6]$ მონაკვეთში წერტილის მიერ გავლილი მანძილის პოვნისათვის გამოთვალეთ $\int_1^6 v(t) dt$ განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა, როგორც შესაბამისი ფართობის მნიშვნელობა. იპოვეთ წერტილის საშუალო სიჩქარე.

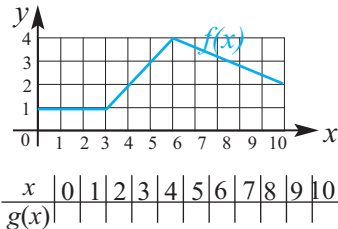


8. $f(x)$ ფუნქცია გრაფიკით მოცემული და $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ სახით განსაზღვრული ფუნქციაა.

ა) $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით $g(x)$ ფუნქციისათვის შეავსეთ ცხრილი;

ბ) მნიშვნელობათა ცხრილის მიხედვით ააგეთ $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი;

გ) რომელ წერტილში იღებს g ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას?



9. **სიჩქარე და გავლილი მანძილი.** უსუფმა ძაღლის გაქცევის დროს 4 წამის განმავლობაში თითოეულ წამში არსებული სიჩქარე ცხრილში აღნიშნა.

t	0	1	2	3	4
v (მ/წმ)	0	8	12	17	18

ა) ცხრილის მიხედვით ააგეთ გრაფიკი; ბ) $[0; 4]$ მონაკვეთზე გრაფიკით მოცული ფართობის გამოთვლით იპოვეთ ძაღლის გავლილი მანძილის სიგრძე. **მითითება:** გამოთვლისათვის ჯერ დროის შუალედების მარცხენა წვეროს წერტილის მნიშვნელობა (რეალურ მანძილზე ნაკლები), შემდეგ მარჯვენა წვეროს წერტილის მნიშვნელობა (რეალურ მანძილზე მეტი) გამოიყენეთ.



განსაზღვრული ინტეგრალი და ფართობი

10. მარგინალური თვითღირებულების მიხედვით საერთო თვითღირებულების გამოთვლა. განსაზღვრული იქნა, რომ $MC(x) = 0,5x^2 - 5x + 600$ ფუნქცია x კმ მანძილზე ასფალტის დაგების მარგინალურ თვითღირებულებას უჩვენებს. გამოთვალეთ 40 კმ გზაზე დაგებული ასფალტის თვითღირებულება.

მითითება: $[0;40]$ მონაკვეთის 4 ტოლ მონაკვეთად დაყოფით გამოთვალეთ $MC(x)$ ფუნქციის გრაფიკით მოცული ფართობი მიახლოებითი მნიშვნელობა.

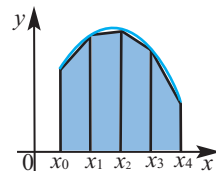
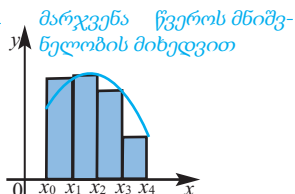
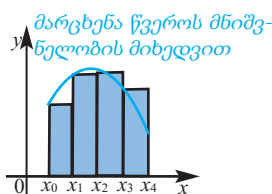
11. გრძელგადიანი დაგება. ფართობის მიახლოებითი გამოთვლის სხვადასხვა ხერხი არსებობს.

მართკუთხედის ხერხი.

ფართობი გამოისახება, როგორც მცირე მართკუთხედების ფართობების ჯამი.

ტრაპეციის ხერხი.

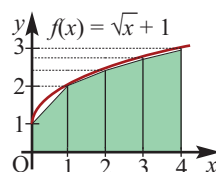
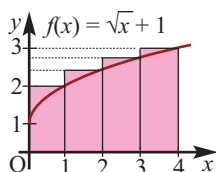
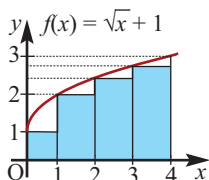
ფართობი მცირე ტრაპეციების ჯამის სახით გამოისახება.



1. იპოვეთ $[0;4]$ მონაკვეთის $n = 4$ ტოლ მონაკვეთად დაყოფით $f(x) = \sqrt{x} + 1$

ფუნქციის $[0;4]$ მონაკვეთზე მოცული ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა:

- სიმაღლის მარცხენა წვეროს მნიშვნელობის მიხედვით განსაზღვრით, როგორც მცირე მართკუთხედების ფართობების ჯამი;
- სიმაღლის მარჯვენა წვეროს მნიშვნელობის მიხედვით განსაზღვრით, როგორც მცირე მართკუთხედების ფართობების ჯამი;
- როგორც მცირე ტრაპეციების ფართობების ჯამი;



$\int_0^4 (\sqrt{x} + 1) dx = 5\frac{1}{3}$ მოცემულობის პირობებში, თითოეული ხერხით მიღებული

შედეგი როგორ განსხვავდება რეალური ფართობის მნიშვნელობისაგან? (დაწერეთ მოსაზრება). რომელი ხერხით მიღებული შედეგი არის მნიშვნელოვან ნამდვილ მნიშვნელობასთან უფრო ახლოს?

2. გამოსახეთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი $[a;b]$ მონაკვეთზე. $n = 6$ პირობით შესაბამისი

მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის:

ა) მართკუთხედის ხერხით;

ბ) ტრაპეციის ხერხით გამოთვლით იპოვეთ განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

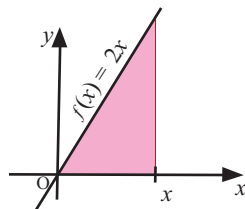
$$1) \int_0^6 2^x dx$$

$$2) \int_1^4 \ln x dx$$

პრაქტიკული მეცადინეობა

1) რვეულში ააგეთ $f(x) = 2x$ ფუნქციის გრაფიკი და სურათზე ნაჩვენები დამტრიახული ფართობი დაწერეთ როგორც x -ზე დამოკიდებული ფუნქცია.

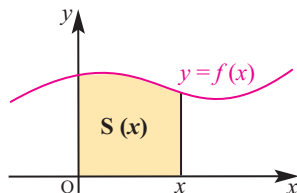
2) უჩვენეთ, რომ $S'(x) = f(x)$.



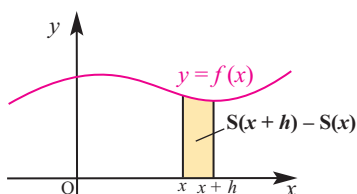
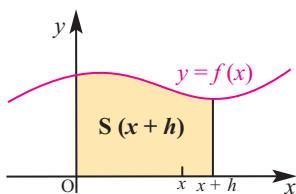
თუ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციის $[0; x]$ მონაკვეთზე აგებული მრუდის ფართობი იქნება $S(x)$, მაშინ ვუჩვენოთ, რომ: $S'(x) = f(x)$

$S(x)$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნისათვის გამოვიყენოთ წარმოებულის განსაზღვრება.

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$



თუ $S(x+h)$ ფართობი f ფუნქციის $[0; x+h]$ მონაკვეთზე აგებული გრაფიკის ქვეშ არსებული ფართობია, მაშინ $S(x+h) - S(x)$ ფართობი f ფუნქციის $[x; x+h]$ მონაკვეთზე აგებული გრაფიკის შესაბამისი ფართობია.



რაც უფრო h ნულისაკენ მიისწრაფვის, მით უფრო $S(x+h) - S(x)$ ფართობი h სიგანისა და $f(x)$ სიმაღლის მქონე მართკუთხედის ფართობისაკენ მიისწრაფვის.

$S(x+h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$ აქედან $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$ და

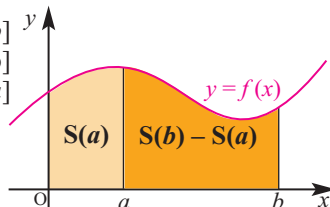
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) = f(x),$$

ანუ $S'(x) = f(x)$.

მაშასადამე, თუ, $F(x)$ ფუნქცია არის $f(x)$ -ის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია, მაშინ $S(x) = F(x) + C$.

როგორც გრაფიკის გამოსახულებიდან ჩანს $[a; b]$ მონაკვეთის შესაბამისი ფართობი ტოლია $[0; b]$ მონაკვეთის შესაბამისი ფართობს მინუს $[0; a]$ მონაკვეთის შესაბამისი ფართობი.

მაშასადამე, $[a; b]$ მონაკვეთის შესაბამისი ფართობი = $S(b) - S(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.



განსაზღვრული ინტეგრალი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

მაგალიტი 1. იპოვეთ $[2;5]$ მონაკვეთზე $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$ ფუნქციის გრაფიკით მოცული ფართობი.

ამოხსნა: ჩვენ უკვე ვიცით, რომ $S'(x) = f(x)$. მაშასადამე,
 $S'(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$. ვიპოვოთ $S'(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციის ზოგადი სახე:

$$S(x) = \frac{1}{15}x^3 + 3x + C.$$

ვნახეთ, რომ ფუნქციის მნიშვნელობების სხვაობაზე C მუდმივი არ ახდენს გავლენას. მაშინ საძიებელი ფართობი იქნება

$$S = S(5) - S(2) = \frac{125}{15} + 15 - \left(\frac{8}{15} + 6\right) = 16 \frac{4}{5}$$

კვ. ერთეული.

$S = F(b) - F(a)$ და $S = \int_a^b f(x) dx$ ფართობის ფორმულების შედარებით მივიღივართ შემდეგ დასკვნამდე: $[a; b]$ მონაკვეთზე არაუარყოფითი, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

მიღებული ეს ფორმულა ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვისაც მართებულია.

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

ინტეგრალის გამოთვლის ძირითადი თეორემა. თუ f ფუნქცია $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტია და F ფუნქცია არის f -ის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

ამ ფორმულას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება და

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ სახითაც იწერება.}$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ინტეგრალი მისი რომელიმე პირველადი ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე ნაზრდის ტოლია.

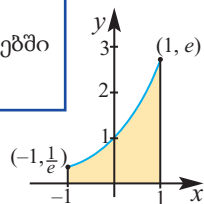
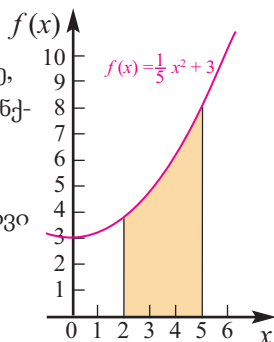
კერძო შემთხვევაში, თუ განსაზღვრული ინტეგრალის ზედა და ქვედა საზღვრების მნიშვნელობები ტოლი იქნება, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალის $\int_a^a f(x) dx = 0$ მნიშვნელობა ნულის ტოლია:

$\int_a^b f(x) dx$ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლისათვის:

1. გამოითვლება $f(x)$ -ის ნებისმიერი $F(x)$ პირველადი ფუნქცია.
2. გამოითვლება $F(x)$ -ის მნიშვნელობები $x = a$ და $x = b$ წერტილებში
3. გამოითვლება $F(b) - F(a)$ სხვაობა.

მაგალიტი 2. იპოვეთ $[-1; 1]$ მონაკვეთზე $y = e^x$ ფუნქციის გრაფიკის მიერ მოცული ფართობი.

ამოხსნა: $S = \int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e^1 - \frac{1}{e} \approx 2,35$ (კვ. ერთ.)



განსაზღვრული ინტეგრალი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

ნიმუში 3. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი: ა) $\int_{-2}^1 x^2 dx$; ბ) $\int_0^{\pi/3} \cos x dx$

ამოხსნა: ა) $\int_{-2}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$

ბ) $\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/6} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

ნიმუში 4. სიტუაციის შესაბამისად განმარტეთ განსაზღვრული ინტეგრალის არსი. $P = P(t)$ ფუნქცია t წელზე დამოკიდებულებით უჩვენებს მოსახლეობას (მილიონობით).

$\int_0^8 P(t) dt = 2$ რა ინფორმაციას გამოსახავს ინტეგრალის მნიშვნელობა?

ამოხსნა: $\int_0^8 P(t) dt = 2$ ინტეგრალის მნიშვნელობა უჩვენებს, რომ მოსახლეობის რაოდენობა 8 წლის განმავლობაში გაიზარდა 2 მილიონი კაცით.

სასწავლო დაფალებები

1. იპოვეთ განსაზღვრული ინტეგრალები.

1) $\int_{-1}^3 dx$

2) $\int_0^2 2 dx$

3) $\int_{-2}^4 x dx$

4) $\int_0^1 x^2 dx$

5) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

6) $\int_2^5 \frac{1}{x^2} dx$

7) $\int_2^8 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

8) $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx$

9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

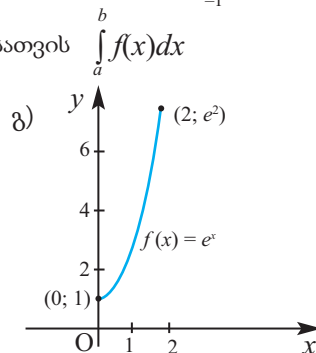
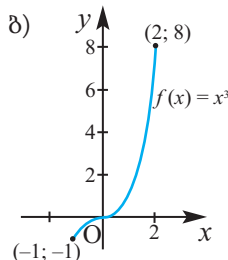
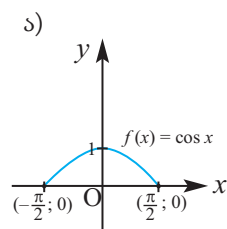
13) $\int_0^2 e^x dx$

14) $\int_{-1}^0 e^{-x} dx$

15) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

16) $\int_{-1}^8 x^{\frac{2}{3}} dx$

2. $[a; b]$ მონაკვეთზე გრაფიკმოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის $\int_a^b f(x) dx$ გამოთვალეთ ინტეგრალი:



განსაზღვრული ინტეგრალი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

3. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები.

$$\text{ა) } \int_1^3 (1-2x) dx \quad \text{ბ) } \int_0^2 (2+3x) dx \quad \text{გ) } \int_{-1}^2 (3x^2-2x+1) dx$$

$$\text{დ) } \int_{-2}^1 (x-x^3) dx \quad \text{ე) } \int_0^1 x^3(x+1) dx \quad \text{ვ) } \int_1^3 \left(x^2 - \frac{3}{x^4}\right) dx$$

$$\text{ზ) } \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad \text{თ) } \int_1^2 \frac{6x^3 + 2x}{x} dx \quad \text{ი) } \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{კ) } \int_0^4 (\sqrt{x}-1)^2 dx \quad \text{ლ) } \int_{-1}^1 (x+1)(x^2-1) dx \quad \text{მ) } \int_0^1 (2x-1)^3 dx$$

$$\text{ნ) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \quad \text{ო) } \int_0^{\ln 3} e^{2x} dx \quad \text{პ) } \int_0^1 \frac{1}{3x+1} dx$$

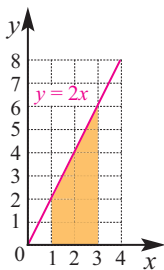
4. იპოვეთ :

ა) $y = x^2 + 2x$ მრუდით $[0; 2]$ მონაკვეთზე მოცული ფართობი;

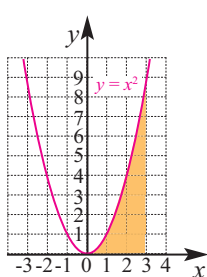
ბ) $y = x^3 - 1$ მრუდით $[1; 3]$ მონაკვეთზე მოცული ფართობი.

5. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით გამოთვალეთ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული ფერადი ფართობი.

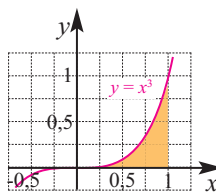
$y = 2x; [1, 3]$



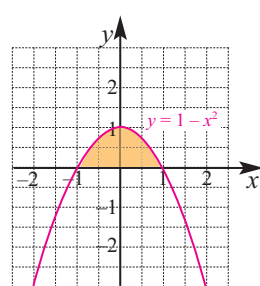
$y = x^2; [0, 3]$



$y = x^3; [0, 1]$



$y = 1 - x^2; [-1, 1]$



6. განსაზღვრული ინტეგრალის დახმარებით გამოთვალეთ მოცემული წრფეებით შემოსაზღვრული ფართობები.

ა) $y = x^2 + 1, y = 0, x = 2, x = 3$

ბ) $y = 9 - x^2, y = 0, x = 2, x = 3$

გ) $y = \sin 2x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

დ) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$

განსაზღვრული ინტეგრალი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

გამოყენებითი დავალბები

ცვლადი ძალის მუშაობა. თუ F ძალა მუდმივია და წრფის გასწვრივია მიმართული, ამ მოძრაობაში s გზაზე გაწეული მუშაობა $A = F \cdot s$ ფორმულით გამოითვლება.

თუ მივიღებთ ცვლადი ძალის $[x; x+dx]$ მონაკვეთზე მუდმივად დარჩენისა და $F(x)$ -ის ტოლად ყოფნას, dx სიგრძის მონაკვეთზე შესრულებული მუშაობა $dA = F(x) dx$ იქნება.

მაშინ $[a;b]$ გზაზე (მონაკვეთზე) $F(x)$ ძალის მუშაობა $A = \int_a^b F(x) dx$ ფორმულით გამოითვლება.

ნიმუში. ჰუკის კანონის თანახმად ზამბარის x -მდე წამგრძელებული F ძალა $F = kx$ ფორმულით გამოითვლება. სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია. 5 სმ გაჭიმული ზამბარის დრეკადობის ძალა 3 ნ-ს ტოლია. რა სიდიდის მუშაობის შესრულება არის საჭირო ზამბარის ამ 5 სმ-ით გასაჭიმად?

ამოხსნა: პირობის თანახმად, $3 = k \cdot 0,05$. მაშასადამე, $k = 60$, $F = 60 x$ და

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 30 \cdot 0,05^2 = 0,075 \text{ (ჯოული)}$$

7. დაწერეთ განსაზღვრული ინტეგრალით რომელი ინფორმაციაა გამოსახული.

ა) $R(t)$ ფუნქცია კომპანიის გაყიდვის მოცულობის დროზე (წლობით) დამოკიდებულებით ცვლილებას (ასი ათას მანეთობით) გამოსახავს. რას გამოსახავს განსაზღვრული ინტეგრალი?

$$\int_0^2 R(t) dt = 12$$

ბ) $v(t)$ ფუნქცია t წამის მომენტში სიჩქარეს (მეტრ/წამი) უჩვენებს. რას გამოსახავს

$$\int_0^{10} v(t) dt = 4,5 \text{ განსაზღვრული ინტეგრალი?}$$

8. ფიზიკა. ცდის დროს წერტილის სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება $v(t) = -0,3t^2 + 9t$ ფუნქციით განისაზღვრა. ($v(t)$ მ/წმ-ობით იზომება).

ა) რა მანძილს გაივლის წერტილი პირველი 5 წამის განმავლობაში?

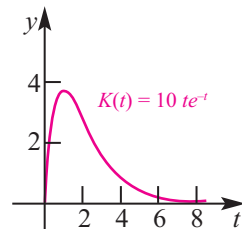
ბ) რა მანძილს გაივლის წერტილი მომდევნო 5 წამის განმავლობაში?

9. ელექტროენერგიის გამოყენება. მცირე საწარმოს მიერ დღის განმავლობაში მოხმარებული ელექტროენერგიის სიმძლავრის (კილოვატი) t დროზე დამოკიდებულების $K(t) = 10 te^{-t}$ ფუნქციით დამოდელირება შეიძლება. აქ t არის დრო საათობით და $[0;24]$ შუალედშია.

ა) რამდენ კილოვატ ელექტროენერგიას იყენებს საწარმო დღის პირველი T საათის ($0 \leq t \leq T$) განმავლობაში?

ბ) რამდენი კილოვატი ელექტროენერგია იქნა მოხმარებული დღის პირველი 4 საათის განმავლობაში?

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ $10(t+1)e^{-t}$ არის $K(t) = 10 te^{-t}$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია.



- 10. რეალიზაციის მოცულობა.** კომპანიის მარკეტინგის პროგნოზების თანახმად, პროდუქციის გაყიდვის მოცულობა უწყვეტად $S'(t) = 20e^{0.2t}$ ფუნქციით უნდა შეიცვალოს.
 $S'(t)$ გვიჩვენებს რიგით მე- t დღეს გაყიდვის მოცულობის მატებას მანათობით.
ა) დაახლოებით რამდენი იქნება პირველ 5 დღეში გაყიდვის მოცულობა?
ბ) განსაზღვროთ გაყიდვის მოცულობა მე-2 დღიდან მე-5 დღემდე.
მითითება: ამ შემთხვევაში განსაზღვრული ინტეგრალის საზღვრები 1-დან 5-მდე იქნება.
- 11.** ა) წერტილი $v(t) = 4 - 2t$ მეტრ/წამი სიჩქარით წრფივად მოძრაობს, სადაც $0 \leq t \leq 2$ მ/წმ. იპოვეთ წერტილის 2 წამის განმავლობაში გავლილი მანძილი.
ბ) წერტილი $v(t) = t^2 + 2t$ მეტრ/წამი სიჩქარით წრფივად მოძრაობს. იპოვეთ პირველი 3 წამის განმავლობაში გავლილი მანძილი.
გ) წერტილი $v(t) = |2t - 6|$ მეტრ/წამი სიჩქარით წრფივად მოძრაობს, სადაც $0 \leq t \leq 6$. იპოვეთ პირველი 6 წამის განმავლობაში გავლილი მანძილი.
- 12.** წერტილი $v(t) = 100 - 10t$ სიჩქარით მოძრაობს წრფეზე. გამოთვალეთ წერტილის მიერ პირველი 15 წამის განმავლობაში გავლილი მანძილი.
მითითება: გავლილი მანძილი ჩაწერეთ 0-დან 10 წამამდე და 10 წამის მომენტიდან 15 წამამდე გავლილი გზების ჯამის სახით.
- 13. მოცულობის ცვლილება.** ავზში წყალი $r(t) = 200 - 10t$ ლ/წთ სიჩქარით ივსება. განსაზღვრული ინტეგრალით გამოსახეთ და გამოთვალეთ ავზში არსებული წყლის მოცულობის მატება პირველი 10 წუთის განმავლობაში.
- 14. რაოდენობის ცვლილება.** გადახდის აპარატის მომსახურებით მოსარგებლეთა დროზე დამოკიდებულებით ცვლილების სიჩქარის $F(t) = 12 + 6 \cos\left(\frac{t}{\pi}\right)$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. აქ t დროს (წუთობით) უჩვენებს. იპოვეთ 60 წუთის განმავლობაში აპარატის მიერ მომსახურებაგაწეული ადამიანების რაოდენობა (მთელ რიცხვამდე დამრგვალებით).
- 15. ტბის გასუფთავება.** $y = 20 e^{-0.5t}$ ფუნქციით ტბიდან ამოღებული ნარჩენების მოცულობის ცვლილების (ტონა/წელიწადში) მოდელირება შეიძლება. აქ t , 2000 წლიდან დაწყებული წლების რაოდენობას უჩვენებს. განსაზღვრეთ 2000 წლიდან 2010 წლამდე ტბიდან გასუფთავებისას ამოღებული ნარჩენების მოცულობა.
- 16. ფიზიკა. ჰუკის კანონი.** ა) რა სამუშაოს შესრულება არის საჭირო ზამბარის 2 სმ-ით შესაკუმშავად, თუ 2 ნ ძალით ზამბარა 1 სმ-ით იკუმშება?
ბ) 3 ნ ძალით ზამბარა 1 სმ-ით იჭიმება. გამოთვალეთ ზამბარის 4 სმ-ით გასაჭიმავად შესასრულებელი სამუშაო.

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

ავლნიშნოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება.

თვისება 1. განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა ინტეგრების ცვლადზე არ არის დამოკიდებული:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

თვისება 2. ნებისმიერი k რიცხვისათვის

$$\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad \text{ტოლობა მართებულია.}$$

ნიმუში.
$$\int_1^2 3x^3 dx = 3 \int_1^2 x^3 dx = 3 \left. \frac{x^4}{4} \right|_1^2 = 3 \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{45}{4}$$

თვისება 3. თუ f და g ფუნქციები $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტებია, მაშინ

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

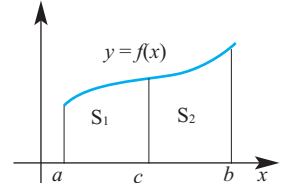
ტოლობა მართებულია.

ნიმუში.
$$\int_0^1 (e^x + x^2) dx = \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 x^2 dx = e \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = (e^1 - e^0) + \frac{1}{3} = e - \frac{2}{3}$$

თვისება 4. თუ $a \leq c \leq b$ და $f(x)$ ფუნქცია $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტია, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ტოლობა მართებულია.



$f(x)$ ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე მოცული ფართობი ორი ფართობის ჯამის ტოლია. $S = S_1 + S_2$

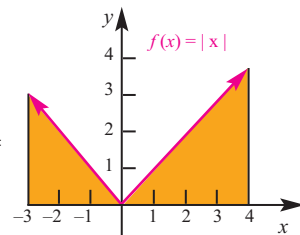
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ნიმუში. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_{-3}^4 |x| dx$

ამოხსნა: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ამიტომ

$$\int_{-3}^4 |x| dx = \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 =$$

$$= -\frac{1}{2}(0^2 - (-3)^2) + \frac{1}{2}(4^2 - 0^2) = \frac{9}{2} + 8 = 12,5$$



განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

თვისება 5. განსაზღვრული ინტეგრალის საზღვრების ადგილების შეცვლისას ინტეგრალის ნიშანი მოპირდაპირე ნიშნით იცვლება.

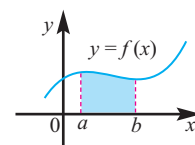
$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

მართლაც, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = - (F(b) - F(a)) = - \int_b^a f(x)dx$

ჩვენ აქამდე ფუნქციის გრაფიკით მოცულ ფართობზე საუბრისას ავლენიშნავდით პირობას, რომ ფუნქცია დადებითი უნდა ყოფილიყო. მაგრამ, თუ ფუნქციის მოცემულ ინტერვალში მოცული ფართობი მდებარეობს ღერძის როგორც ზევით, ისე ქვევით, მაშინ როგორ გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალის დახმარებით საერთო ფართობი? ამ შემთხვევაში განსაზღვრული ინტეგრალის ზემოთ აღნიშნული თვისების გამოყენება შეიძლება.

ფართობი x ღერძის ზევით მდებარეობს!

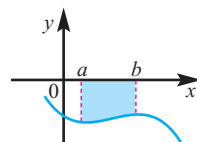
$b > a$ პირობით $a \leq x \leq b$ შუალედში თუ, $f(x) \geq 0$ მაშინ, f ფუნქციის გრაფიკი x ღერძის ზემოთ მდებარეობს და ფართობის ამსახველი ინტეგრალის მნიშვნელობა დადებითია.



$$S = \int_a^b f(x)dx > 0$$

ფართობი x ღერძის ქვევით მდებარეობს!

$b > a$ პირობით $a \leq x \leq b$ შუალედში თუ, $f(x) \leq 0$ მაშინ, f ფუნქციის გრაფიკი x ღერძის ქვემოთ მდებარეობს და ფართობის გამომსახველი ინტეგრალის მნიშვნელობა უარყოფითია.



$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

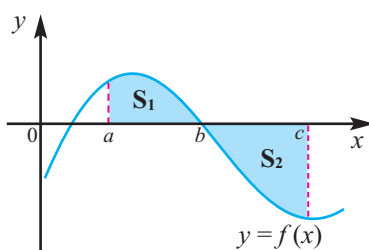
გასაგებია, რომ ფართობი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი რიცხვი, ამიტომაც, ასეთ შემთხვევაში საერთო ფართობის გამოსათვლელად განსაზღვრული ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა გამოიყენება.

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = - \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

დავუშვათ, რომ $[a;c]$ მონაკვეთზე $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით მოცული ფართობი ორი ნაწილისაგან:

$[a;b]$ მონაკვეთშიმცველი S_1 და $[b;c]$ მონაკვეთის მომცველი S_2 ფართობებისაგან შედგება.რადგან

$$[a;b] \text{ მონაკვეთზე } \int_a^b f(x)dx > 0 \text{ და } [b;c]$$



მონაკვეთზე $\int_b^c f(x)dx < 0$, ამიტომ საერთო

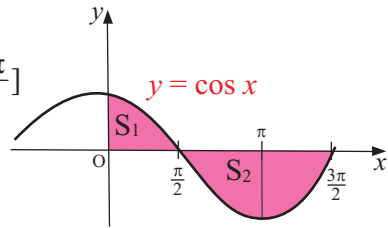
$$\begin{aligned} \text{ფართობი : } S &= S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx + \left| \int_b^c f(x)dx \right| \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ იქნება.} \end{aligned}$$

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

ნიმუში. იპოვეთ დაშტრიხული ფართობი.

ამოხსნა: $[0; \frac{\pi}{2}]$ მონაკვეთზე $\cos x \geq 0$, $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

მონაკვეთზე $\cos x \leq 0$. ამიტომ მივიღებთ:



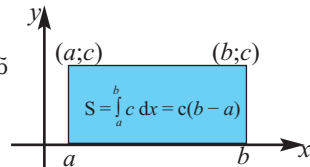
$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$$

$$= (1 - 0) - (-1 - 1) = 3 \text{ (კვ. ერთეული)}$$

თვისება 6. თუ $[a; b]$ მონაკვეთზე $f(x) = c$, მაშინ ქვემოთ მოცემული ტოლობა მართებულია.

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$



სასწავლო დავალებები

1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებების გამოყენებით.

$$\text{ა) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \cos x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin x \, dx \quad \text{ბ) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \sin x \, dx$$

$$\text{გ) } \int_1^2 (\ln x - 2x) \, dx - \int_2^1 (3t^2 - \ln t) \, dt \quad \text{დ) } \int_1^e (xe^x - \frac{1}{x}) \, dx + \int_e^1 (1 + te^t) \, dt$$

2. გამოთვალეთ.

$$\text{ა) } \int_0^5 |2x-5| \, dx \quad \text{ბ) } \int_1^4 (3-|x-3|) \, dx \quad \text{გ) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| \, dx$$

3. 2) იპოვეთ მოცემული წრფეებით შემოსაზღვრული ფართობი.

$$\text{ა) } y = x^2 - 5x + 4 \text{ და } y = 0 \quad \text{ბ) } y = 4x - x^2 \text{ და } y = 0$$

4. 1) გამოთვალეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკისა და აბსცისთა ღერძს შორის დარჩენილი ფართობი.

$$\text{ა) } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 3 \\ 8 - x, & x > 3 \end{cases} \quad \text{ბ) } g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ 8 - x, & x > 0 \end{cases}$$

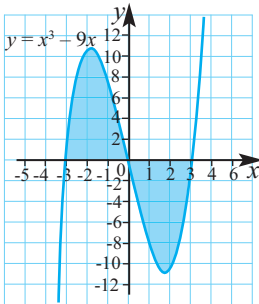
განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

5. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებების გამოყენებით უჩვენეთ ქვემოთ მოცემული ტოლობების მართებულობა.

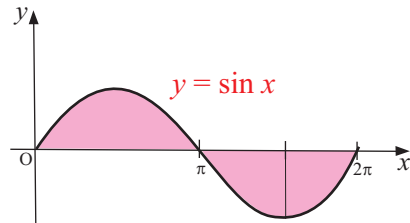
$$ა) \int_3^{11} f(x) dx - \int_7^{11} f(x) dx = \int_3^7 f(x) dx$$

$$ბ) \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_5^3 f(x) dx = \int_{-1}^5 f(x) dx$$

6. ა) განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით იპოვეთ $y = x^3 - 9x$ ფუნქციის გრაფიკსა და აბსცისთა ღერძს შორის დარჩენილი ფართობი.

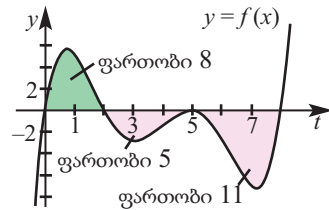


- ბ) იპოვეთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკითა და აბსცისთა ღერძით შემოსაზღვრული ფერადი ნაწილის ფართობი.



7. თუ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ მაშინ სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ:

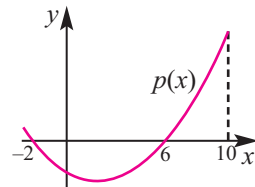
ა) $F(2)$ ბ) $F(5)$ გ) $F(8)$



8. ა) სურათზე $p(x)$ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული.

$$\int_{-2}^6 p(x) dx = -10 \quad \text{და} \quad \int_{-2}^{10} p(x) dx = 2. \quad \text{ამ პირობით იპოვეთ}$$

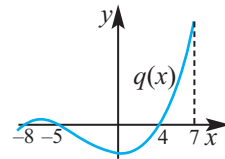
$$\int_6^{10} p(x) dx \quad \text{ინტეგრალი.}$$



- ბ) სურათზე $q(x)$ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული.

$$\int_{-8}^7 q(x) dx = -3, \quad \int_4^7 q(x) dx = 5 \quad \text{და} \quad \int_{-5}^7 q(x) dx = -11$$

პირობით იპოვეთ $\int_{-8}^{-5} q(x) dx$ განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა.



9. C -ს რა დადებითი მნიშვნელობისათვის არის:

ა) $y = 2x$, $y = 0$ და $x = c$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურების ფართობი 4-ის ტოლი?

ბ) $y = x^2 + c$, $y = 0$, $x = 0$ და $x = 3$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურების ფართობი 15-ის ტოლი?

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

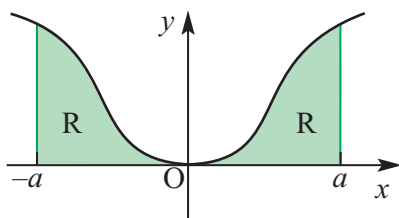
10. გრძელვადიანი დავალება. განსაზღვრული ინტეგრალი ლუწი და კენტი ფუნქციის სიმეტრიულ მონაკვეთზე.

ცნობილია, რომ ლუწი ფუნქცია აკმაყოფილებს $f(-x) = f(x)$ ტოლობას და მისი გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. მაგალითად, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^n$ ($n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$) ფუნქციები ლუწია.

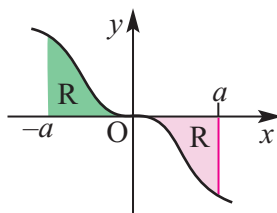
კენტი ფუნქციაზე კი ცნობილია, რომ $f(x) = -f(x)$ ტოლობას აკმაყოფილებს და მისი გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულია. მაგალითად, $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^n$, ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$) ფუნქციები კენტია.

როცა ინტეგრების საზღვრები კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულია, ლუწი და კენტი ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალისათვის მართებულია ქვემოთ მოცემული ტოლობები:

ლუწი ფუნქცია: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



კენტი ფუნქცია: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



გამოთვალეთ ლუწი ან კენტი ფუნქციის ინტეგრების თვისების გამოყენებით.

ა) $\int_{-2}^2 (x^4 - 2x^3) dx$

ბ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - 4 \sin^3 x) dx$

ა) $\int_{-2}^2 (x^4 - 2x^3) dx = \int_{-2}^2 x^4 dx - 2 \int_{-2}^2 x^3 dx = 2 \int_0^2 x^4 dx - 2 \underbrace{\int_{-2}^2 x^3 dx}_0 = 2 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{64}{5}$

ბ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - 4 \sin^3 x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx - 4 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x dx}_0 = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx =$
 $= 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 2(1 - 0) = 2$

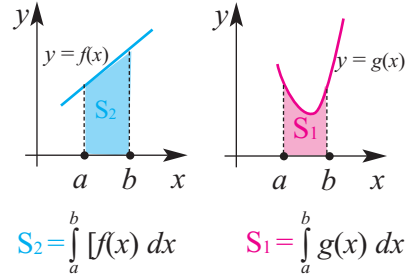
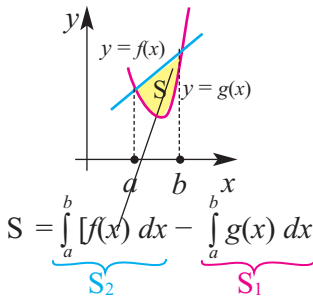
შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული დავალებები.

- დაწერეთ კენტი და ლუწი ფუნქციების წარმოებულის კენტობის ან ლუწობის შესახებ.
- ფუნქციის კენტობისა და ლუწობის გათვალისწინებით გამოთვალეთ ინტეგრალები.

ა) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$ ბ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ გ) $\int_{-2}^2 x^3 dx$ დ) $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

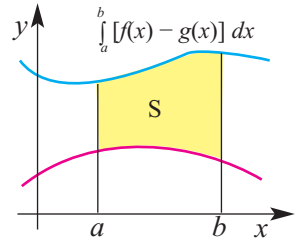
მრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

დავუშვათ, რომ f და g ფუნქციების გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის პოვნა მოითხოვება. სურათზე ნაჩვენებია S_2 ფართობიდან S_1 ფართობის გამოკლებით მოთხოვნილი S ფართობი შეგვიძლია ვიპოვოთ. თითოეული ფართობი კი შეგვიძლია გავიანგარიშოთ, როგორც მოცემულ შუალედში განსაზღვრული ინტეგრალი.



ეს მოსაზრებები შეიძლება განვაზოგადოთ ქვემოთ მოცემული სახით.

როცა f და g ფუნქციები $[a; b]$ მონაკვეთზე უწყვეტია და ამ მონაკვეთზე სრულდება $f(x) \geq g(x)$ პირობა (ანუ $f(x)$ -ის გრაფიკი მთლიანად $g(x)$ -ის გრაფიკის ზევით მდებარეობს), $f(x)$, $g(x)$ ფუნქციების გრაფიკებითა და $x = a$, $x = b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფართობი განსაზღვრული ინტეგრალით



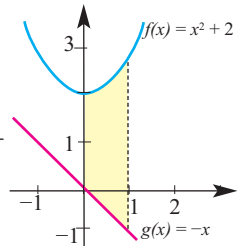
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \text{ სახით შეიძლება გამოვსახოთ.}$$

ფუნქციის გრაფიკებს საერთო წერტილი არა აქვთ.

მაგალიტი 1. იპოვეთ $f(x) = x^2 + 2$ და $g(x) = -x$ ფუნქციების გრაფიკებითა და $x = 0$, $x = 1$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა: $S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)] dx =$

$$= \int_0^1 (x^2 + x + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$$



ფუნქციის გრაფიკები ორ წერტილში იკვეთება.

მაგალიტი 2. გამოთვალეთ $y = 2x - 1$ და $y = x^2 - 4$

ფუნქციების გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფართობი.

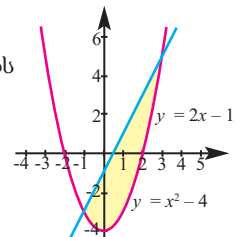
ამოხსნა: ვიპოვოთ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

$$2x - 1 = x^2 - 4, \quad x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x = -1 \text{ და } x = 3.$$

x -ის ეს მნიშვნელობები განსაზღვრული ინტეგრალის საზღვრებს გვიჩვენებს.

$$S = \int_{-1}^3 [(2x - 1) - (x^2 - 4)] dx = \int_{-1}^3 (2x - x^2 + 3) dx =$$

$$= x^2 \Big|_{-1}^3 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 + 3x \Big|_{-1}^3 = 10 \frac{2}{3}$$



მრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

ფუნქციის გრაფიკებს ორზე მეტი გადაკვეთის წერტილი აქვთ.

მაგალიტი 3. გამოთვალეთ $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ და $g(x) = -x^2 + 2x$ ფუნქციების გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფართობი.

ამოხსნა: ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები:

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

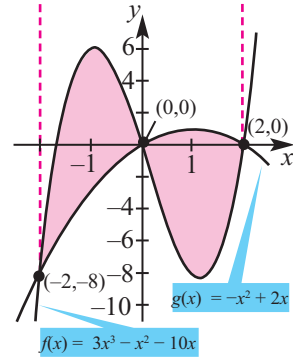
$$3x^3 - x^2 - 10x + x^2 - 2x = 0$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, x = 2, x = -2,$$

მაშასადამე, გრაფიკები იკვეთება იმ წერტილებში, რომელთა აბსცისებია $-2; 0; 2$.



როგორც ფუნქციის გრაფიკებიდანაც ჩანს, საძიებელი ფართობი $[-2; 0]$ მონაკვეთზე გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფართობისა და $[0; 2]$ მონაკვეთზე გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფართობების ჯამის ტოლია.

$[-2; 0]$ შუალედში $f(x) \geq g(x)$, ხოლო $[0; 2]$ შუალედში კი სრულდება პირობა $g(x) \geq f(x)$ (ფუნქციების სხვაობის ინტეგრალის ჩაწერისას ესენი მხედველობაში მიიღება).

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \\ &= \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x) dx + \int_0^2 (-3x^3 + 12x) dx = \\ &= \left(\frac{3x^4}{4} - 6x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{3x^4}{4} + 6x^2 \right) \Big|_0^2 = -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24 \end{aligned}$$

! საძიებელი ფართობი $\int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx$ ინტეგრალის მიხედვითაც გამოთვალეთ. რა შედეგი მიიღეთ?

მაგალიტი 4. სკოლის ახალგაზრდა კონსტრუქტორთა კლუბის წევრები ავტომობილის ძრავის სრულყოფით ატმოსფეროში უფრო ნაკლები გამონაბოლქვით დაბინძურებისათვის ახალი ძრავის დამზადებაზე ფიქრობენ. ახალი ძრავით მე- t წელს ატმოსფეროში მოსროლილი ბინძური ნაწილაკების რაოდენობის ცვლილების (მილიარდობით) $E(t) = 2t^2$ სახით გამოსახვა შეიძლება. წინა ძრავის მიერ მოსროლილი ბინძური ნაწილაკების რაოდენობისა კი $C(t) = 9 + t^2$ სახით.

ა) მერამდენე წელს მოისვრიან ეს ძრავები ატმოსფეროში ერთსა და იმავე რაოდენობის დაბინძურებულ ნაწილაკებს?

ბ) ამ დროის განმავლობაში ატმოსფეროში მოსროლილი საზიანო ნივთიერებების საერთო რაოდენობებს შორის, რამდენი იქნება სხვაობა?

მრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

ამოხსნა: ა) ნარჩენების ნაწილაკების რაოდენობა $E(t) = C(t)$ დამაკმაყოფილებელ წელს ტოლი იქნება.

$$2t^2 = 9 + t^2$$

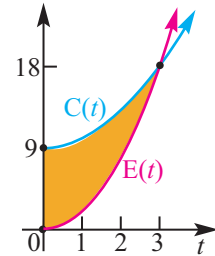
$$t^2 = 9 \quad t = 3 \quad t = -3$$

$t = -3$ ამონახსენი ამოცანის შინაარსს არ შეესაბამება. მაშასადამე, გამოყენებიდან მე-3 წელს ახალი ძრავა წინას ტოლი ოდენობით მოისვრის ატმოსფეროში ნარჩენებს.

ბ) ნარჩენების საერთო რაოდენობაში სხვაობა ამ ფუნქციების $[0;3]$ შუალედში მოცული ფართობების სხვაობის ტოლია.

$$\int_0^3 [C(t) - E(t)] dx = \int_0^3 (9 + t^2) - 2t^2 dx =$$

$$= \int_0^3 (9 - t^2) dx = \left(9t - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^3 = 27 - 9 = 18 \text{ (მილიარდი ნაწილაკი).}$$



სასწავლო დაგეგმვები

1. გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფართობი. გამოსახეთ გრაფიკი.

ა) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $x = -1$, $x = 2$

ბ) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x + 2$, $x = -2$, $x = 2$

გ) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $x = 2$, $x = 3$

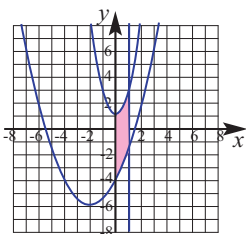
დ) $f(x) = 4$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$

2. გამოთვალეთ ფერადი ფართობი.

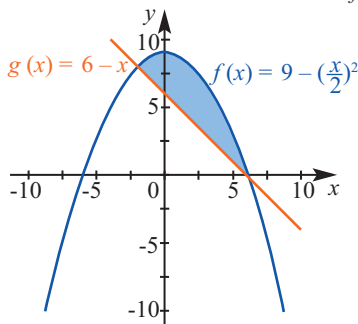
ა)

$$y = 2x^2 + 1 \quad y = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$$

$$x = 0, x = 1$$

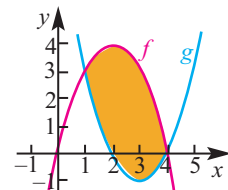


ბ)



გ)

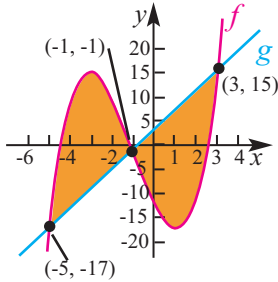
$$f(x) = 4x - x^2, \quad g(x) = x^2 - 6x - 8$$



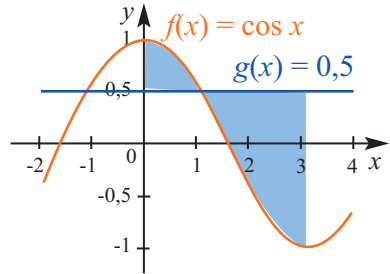
პრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

3. გამოთვალეთ ფერადი ფართობი.

ა) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$
 $g(x) = 4x + 3$



ბ) $f(x) = \cos x$ და $y = 0,5$, $0 \leq x \leq \pi$



4. გამოსახეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფართობის გრაფიკი და გამოთვალეთ.

ა) $y = x^2 + 1$, $y = 2x$, $x = -1$

ბ) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

გ) $y = x^3$, $y = -x$, $x = 2$

დ) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$

5. ფუნქციების გრაფიკებით გამოთვალეთ შემოსაზღვრული ფართობი.

ა) $y = x^2 - 2$ და $y = 2$

ბ) $y = 2x - x^2$ და $y = -3$

გ) $y = 2x - x^2$ და $y = x$

დ) $y = -x^3 + 6x$ და $y = -x^2$

6. ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები მოცემულ მონაკვეთზე და გამოთვალეთ შემოსაზღვრული ფართობი.

ა) $y = x^3$ და $y = x^2 - 2x$, $x \in [-1; 1]$

ბ) $y = x^2 + 1$ და $y = x + 3$, $x \in [-1; 3]$

გ) $y = \sqrt{x}$ და $y = 1$, $x \in [0; 4]$

დ) $y = \sin x$ და $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$

7. ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები. გამოთვალეთ შემოსაზღვრული ფართობი.

ა) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$

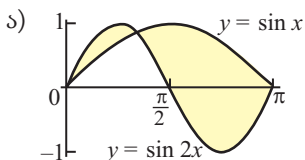
გ) $y = e$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$

ბ) $y = x^3$, $y = 2 - x$, $y = 0$

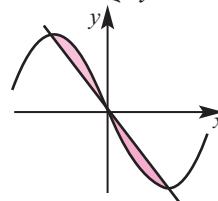
დ) $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = e$

8. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით გამოთვალეთ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები $(2; -3)$, $(4; 6)$ და $(6; 1)$ წერტილებშია.

9. გამოთვალეთ ფერადი ფართობი.



ბ) $y = x^3 - 3x$ და $y + 2x = 0$



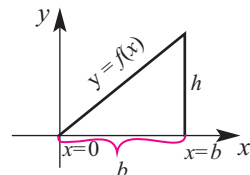
მრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

- 10.** ორმა სხეულმა ერთსა და იმავე მომენტში, ერთი და იგივე წერტილიდან, ერთსა და იმავე მიმართულებით დაიწყო მოძრაობა, ერთი სხეული $v_1(t) = 9t^2 + 2t$ (მ/წმ), მეორე კი $v_2(t) = 2t$ (მ/წმ) სიჩქარით მოძრაობს.
 ა) იპოვეთ სხეულებს შორის არსებული მანძილი მოძრაობის დაწყებიდან 4 წამის შემდეგ.
 ბ) მოძრაობის დაწყებიდან რამდენი წამის შემდეგ იქნება სხეულებს შორის მანძილი 81 მ-ის ტოლი?
- 11.** კომპანიის მიერ x ცალი ტელეფონის წარმოებაზე გაწეული დანახარჯები $C(x) = 0,01x^2 - 3x + 229$, შემოსავალი კი $R(x) = 429 - 2x$ ფუნქციებით მოდელირდება. გამოთვალეთ ამ ფუნქციების გრაფიკებსა და $x = 0$ წრფეს შორის დარჩენილი ფართობი. განმარტეთ ამ ფართობის მნიშვნელობა რეალური სიტუაციის შესაბამისად.
- 12. საპროექტო სამუშაო. განსაზღვრული ინტეგრალი და სიბრტყითი ფიგურების ფართობი**

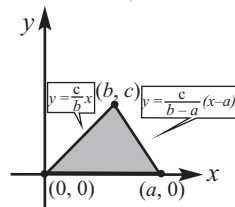
- ამოხსენით ამოცანები განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.
- დაწერეთ და უჩვენეთ დამტკიცებები გეომეტრიული ხერხების გამოყენებით.
- მოიფიქრეთ კიდევ ორი ამოცანა, რომლებიც ინტეგრების საშუალებით შეიძლება დამტკიცდეს.

1) მოცემული სამკუთხედების მიხედვით სამკუთხედის ფართობის ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლობა დაამტკიცეთ ორ წრფეს შორის დარჩენილი ფართობის განსაზღვრის წესის გამოყენებით.

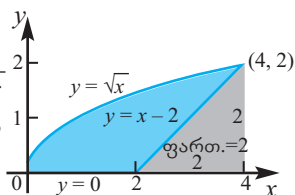
ა) **მართკუთხა სამკუთხედი. მითითება:** იმის გათვალისწინებით, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია $y = kx + b$ წრფის განტოლებით გამოისახება, განსაზღვრეთ f ფუნქცია.



ბ) **ნებისმიერი სამკუთხედი.** დაწერეთ და განმარტეთ, როგორ მიიღება სამკუთხედის გვერდების შემცველი წრფეების განტოლებები



2) იპოვეთ ცისფერი ნაწილის ფართობი $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის მოცემულ ინტერვალში მოცემული ფართობიდან სამკუთხედის ფართობის გამოკლებით.



განსაზღვრული ინტეგრალი და ბრუნვითი მდებარეობის ფიგურების მოცულობა

როგორც ვიცით, ფართობი სიბრტყითი ფიგურების რიცხვითი საზომია. მოცულობა კი სივრცითი სხეულების რიცხვითი საზომია. გარკვეული ფიგურების მოცულობის გამოთვლისათვის გეომეტრიული ფორმულები არის განსაზღვრული. მაგალითად, ვიცით რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა სამი განზომილების ნამრავლით $V=abc$, პირამიდის მოცულობა

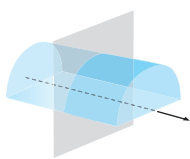


$$V = \frac{1}{3} S_{\text{ფ}} h, \text{ ცილინდრის მოცულობა } V = \pi r^2 h$$

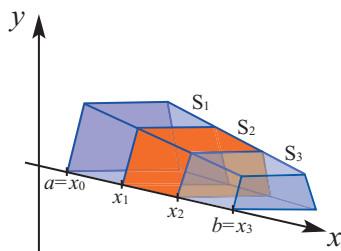
ბირთვის მოცულობა $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, კონუსის მოცულობა

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ ფორმულებით გამოითვლება.}$$

სხეულების მოცულობის გამოთვლის სხვადასხვა ხერხი არსებობს. ერთ-ერთი მათგანია ნაჭრებად დაყოფის ხერხი (ნაჭრების შეკრება), ამ ხერხს ჩვენ კავალიერის პრინციპში გავცანით. ამ ხერხით როგორც არაცვლად ნაჭრებიანი, მაგალითად ცილინდრის, ისე ცვლადნაჭრებიანი, მაგალითად პირამიდის მოცულობის პოვნა შეიძლება.



ერთი და იგივე ნაჭრები



სხვადასხვა ნაჭრები

თითოეული ნაჭრის მოცულობის პოვნითა და მათი შეკრებით ფიგურის მოცულობის პოვნა შეიძლება. დავუშვათ, რომ $S(x_i)$, არის x_i წერტილზე გამავალი ნაჭრის ფართობი. მაგალითად, სურათზე მოცემული ფიგურა 3 ნაკვეთისაგან შედგება. მაშასადამე, თუ ფიგურა $i = 1, 2, 3, \dots$ რაოდენობის კვეთისაგან შედგება და თითოეული კვეთის სიმაღლეა Δx , ფუძის ფართობი $S(x_i)$ იქნება, მაშინ ფიგურის მოცულობა იქნება ამ კვეთების მოცულობების ჯამი (V_i) და მისი ქვემოთ მოცემული სახით ჩაწერა შეიძლება.

$$V \approx \sum S(x_i) \Delta x$$

ინტეგრალის განსაზღვრების თანახმად სივრცითი ფიგურის მოცულობა ქვემოთ მოცემული სახით გამოითვლება:

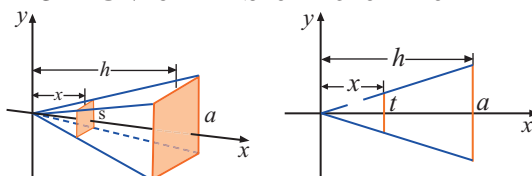
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x = \int_a^b S(x) dx,$$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

ნაკვეთებად დაჭრის ხერხით ფიგურების მოცულობის გამოთვლისათვის საჭიროა ქვემოთ მოცემული მოქმედებების შესრულება.

1. დაიხაზება შესაბამისი სურათი. განისაზღვრება განივი კვეთის (ნაჭრის) ფორმა.
2. განივი კვეთის ფართობი დაიწერება როგორც განსაზღვრული ცვლადის ფუნქცია. ნაჭრის ფართობის გამოთვლისათვის განისაზღვრება ფორმულა.
3. დაიწერება და გამოითვლება ამ ფუნქციის მოცემულ მონაკვეთზე განსაზღვრული ინტეგრალი და გამოითვლება მოცულობა.

ნიმუში 1. a ფუძის გვერდისა და h სიმაღლის მქონე წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობის ფორმულა განსაზღვრეთ ნაჭრების ხერხით.



- 1) მოცემული პირამიდის ფუძის პარალელური ნებისმიერი სიბრტყითი კვეთაც კვადრატია.
- 2) წვეროდან x მანძილზე გავლებული სიბრტყითი კვეთის ფართობი აღვნიშნოთ $S(x)$ -ით.

მიღებული პირამიდების მსგავსებიდან

$$\frac{S(x)}{a^2} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad \text{დამოკიდებულება მიიღება.}$$

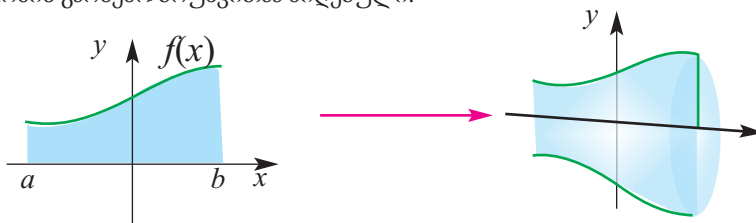
აქედან: $S(x) = \left(\frac{ax}{h}\right)^2$

3) პირამიდის მოცულობა:

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{a^2}{3} h$$

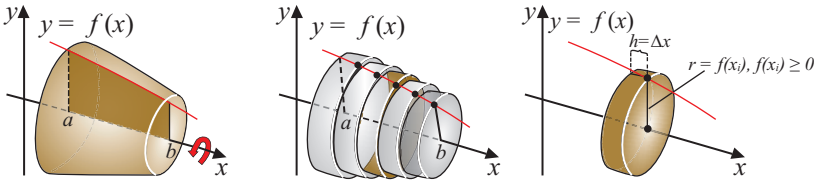
ბრუნვით მიღებული წრიული განივკვეთიანი სივრცითი ფიგურები და მათი მოცულობა

სურათზე მოცემული ფიგურა $f(x)$ ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე მოცული სიბრტყის ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვითაა მიღებული.



განსაზღვრული ინტეგრალი და ბრუნვითი მიღებული ფიგურების მოცულობა

ბრუნვითი მიღებული ფიგურის მოცულობის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ სხვა მაგალითი.



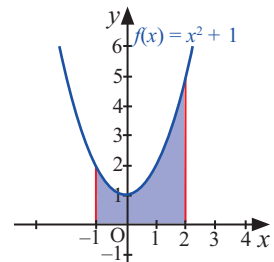
სურათზე მოცემული ბრუნვითი სხეული $f(x)$ ფუნქციის $[a; b]$ მონაკვეთზე შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვითაა მიღებული. თუ $[a; b]$ მონაკვეთს ტოლი სიგრძის მცირე Δx მონაკვეთებად დავყოთ ფიგურის მოცულობა უსასრულო რაოდენობის მცირე ცილინდრების მოცულობების ჯამის სახით შეიძლება წარმოვიდგინოთ. რადგან შესაძლებელია თითოეული პატარა ცილინდრის მოცულობის $\pi [f(x)]^2 \Delta x$ -ით გამოსახვა, ამიტომ ბრუნვითი მიღებული ფიგურის მოცულობა

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

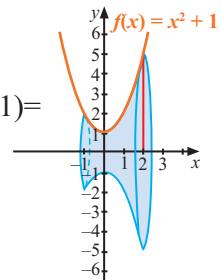
ფორმულით გამოითვლება.

მაგალიტი 2. გამოთვალეთ $f(x) = x^2 + 1$ ფუნქციის $[-1; 2]$ მონაკვეთზე მოცული ფიგურის x ღერძის გარშემო ბრუნვითი მიღებული სხეულის მოცულობა.

ბრუნვითი ფიგურის მოცულობის ფორმულის მიხედვით საძიებელი ფიგურის მოცულობა იქნება



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - \pi \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \\ &= \pi \left(\frac{33}{5} + \frac{18}{3} + 3 \right) = \frac{234\pi}{15} = \frac{78\pi}{5} \text{ კუბ. ერთ.} \end{aligned}$$



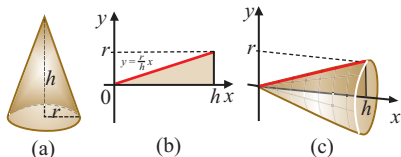
გამსაზღვრელი ინტეგრალი და ბრუნვით მიღებული ფიგურების მოცულობა

ნიმუში 3. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი რადიუსია r , ხოლო სიმაღლეა h .

$$f(x) = \frac{r}{h} x, \text{ ამიტომ}$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx =$$

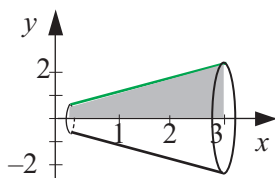
$$= \pi \frac{r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ იქნება. კონუსის მოცულობა : } V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



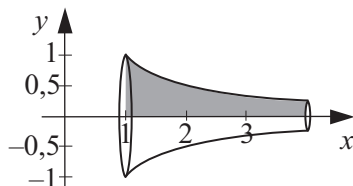
სასწავლო დაგვლებები

- 1.** გამოთვალეთ ფუნქციების გრაფიკების მოცემულ მონაკვეთზე მოცული სიბრტყის ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვისაგან მიღებული სხეულის მოცულობა.

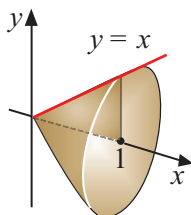
ა) $f(x) = x + 1, [0;3]$



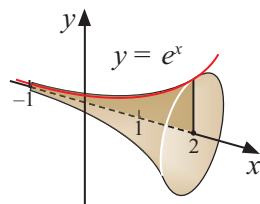
ბ) $f(x) = \frac{1}{x}, [1;4]$



გ) $f(x) = x, [0;1]$

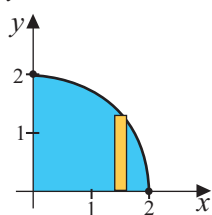


დ) $f(x) = e^x, [-1; 2]$

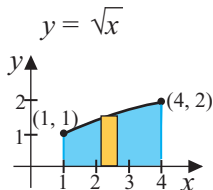
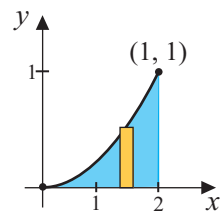


- 2.** გამოსახეთ ფერადი ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სივრცითი ფიგურა და გამოთვალეთ მისი მოცულობა.

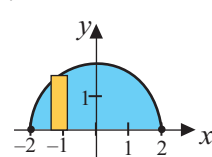
$y = \sqrt{4 - x^2}$



$y = x^2$



$y = \sqrt{4 - x^2}$



3. გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

1) $y = 5, y = 0, x = 1, x = 3$

6) $y = e^x, y = 0, x = -2, x = 5$

2) $y = x, y = 0, x = 0, x = 2$

7) $y = \sqrt{x}, y = x$

3) $y = x + 1, y = 0, x = 0, x = 2$

8) $y = 2 - x^2, y = 1$

4) $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 3$

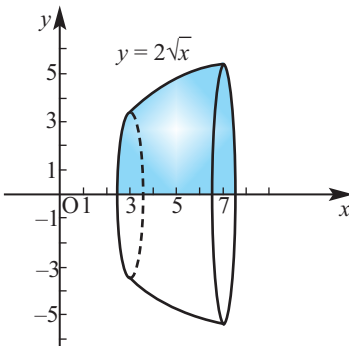
9) $y = x^2, y = x$

5) $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$

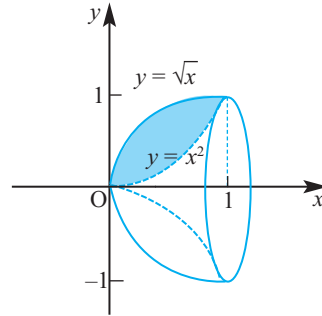
10) $y = x + 3, y = 2, x = 0, x = 4$

4. იპოვეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული სიბრტყითი ფიგურის ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

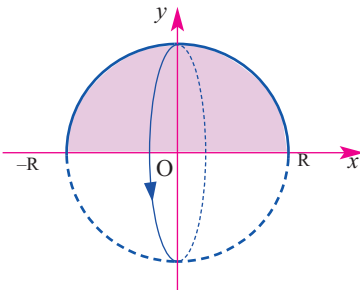
ა) $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 3, x = 7$



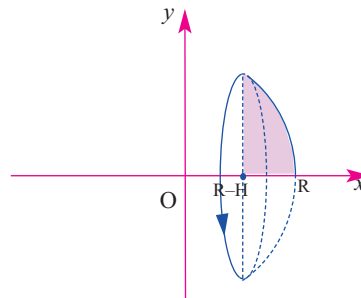
ბ) $y = \sqrt{x}, y = x^2$



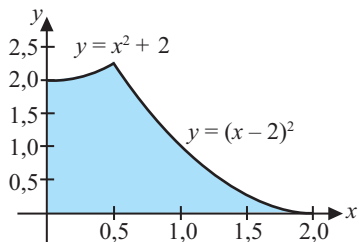
5. ა) გამოიყვანეთ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, და $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული სიბრტყითი ფიგურის x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ბირთვის მოცულობის ფორმულა.



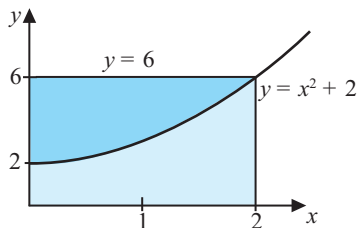
- ბ) გამოიყვანეთ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R-H \leq x \leq R$, $y=0$ და $x=R-H$ ($0 < H < R$) წირებით შემოსაზღვრული სიბრტყითი ფიგურის x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ბირთვული სეგმენტის მოცულობის ფორმულა.



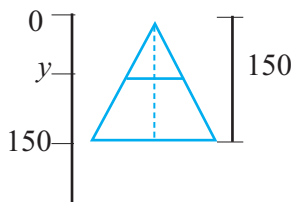
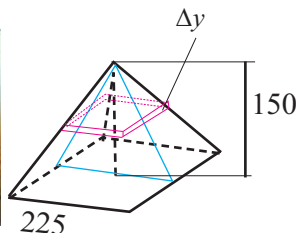
6. ა) იპოვეთ $y = x^2 + 2$ და $y = (x - 2)^2$ ფუნქციების გრაფიკებით მოცული სიბრტყის ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სივცითი ფიგურის მოცულობა. **მითითება:** გამოთვალეთ მოცულობა $[0; 0,5]$ და $[0,5; 2]$ შუალედების მიხედვით ორი ინტეგრალის ჯამის სახით



- ბ) იპოვეთ $y = 6$ და $y = x^2 + 2$ ფუნქციების გრაფიკებითა და ორდინატთა ღერძით მოცული სიბრტყის ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სივცითი ფიგურის მოცულობა. **მითითება:** გამოთვალეთ მოცულობა როგორც ორი ინტეგრალის სხვაობა.



7. **გრძელვადიანი დავალება.** 1) ეგვიპტეში მდებარე დიდი გიზის პირამიდის ზომები ფუტებში (feet) სურათზეა ნაჩვენები. ამ მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ პირამიდის მოცულობა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.



დავალების შესრულება დაიწყეთ გვ. 253-ზე მოცემული ნიმუში 1-ის დავალების ხელახლა დაწერითა და ამოხსნით.

2) წესიერი პირამიდის ფუძის გვერდი 5 მ, სიმაღლე 3 მ -ია. როგორ განსხვავდება ამ ზომების ნახევარი ზომების მქონე პირამიდის მოცულობა მოცემული პირამიდისაგან?

3) სახლის სახურავის დედამიწის ზედაპირის პარალელური კვეთები მართკუთხა სახის, ხოლო დედამიწის ზედაპირის მართობული კვეთები კი სამკუთხედის სახისაა. სახურავის ფუძეში არსებული მართკუთხედის ზომები $1\text{მ} \times 2\text{მ}$ -ია, სამკუთხედის ფუძე 1მ , სიმაღლე კი $0,5\text{მ}$ -ია.

განმაზოგადებელი დავალებები

1. იპოვეთ პირველადი ფუნქცია ინტეგრების წესების გამოყენებით.

ა) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$

ბ) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$

გ) $f(x) = \frac{9}{3 - 6x}$

2. იპოვეთ ინტეგრალები.

ა) $\int (x + \sqrt{x})^2 dx$

ბ) $\int \frac{x-5}{\sqrt[4]{x}} dx$

გ) $\int (\cos \theta + \sin \theta) d\theta$

3. $\int_1^3 f(x) dx = 5$, $\int_1^3 g(x) dx = -2$, $\int_3^5 f(x) dx = 2$, $\int_3^5 g(x) dx = 1$ არის ცნობილი ინფორ-

მაცია. ამ მონაცემების მიხედვით იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები.

ა) $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$

ბ) $\int_1^3 [5f(x) - 3g(x)] dx$

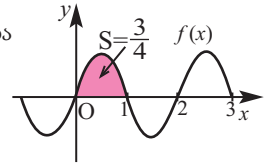
გ) $\int_1^5 [2f(x) - 3g(x)] dx$

4. $f(x)$ ძირითადი პერიოდი 2-ის ტოლი კენტი ფუნქციაა და

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4}$.

ამის მიხედვით განსაზღვრეთ ქვემოთ

ჩამოთვლილები.



ა) $\int_0^{-1} f(x) dx$

ბ) $\int_{-1}^1 f(x) dx$

გ) $\int_0^3 f(x) dx$

დ) $\int_0^{21} f(x) dx$

5. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები.

ა) $\int_{-1}^2 (x^3 - x^2 + 4x) dx$

ბ) $\int_0^1 (x^{99} + 1) dx$

გ) $\int_1^4 (x - \sqrt{x}) dx$

6. გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

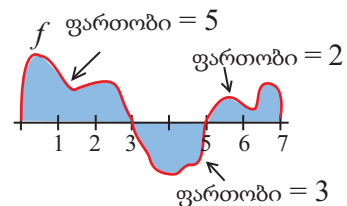
ბ) $y = 3 - |x|$, $y = 0$

7. გამოთვალეთ f ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით.

ა) $\int_0^3 f(x) dx$

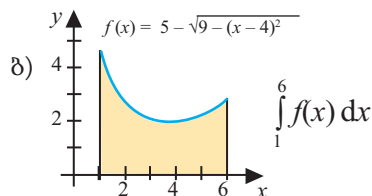
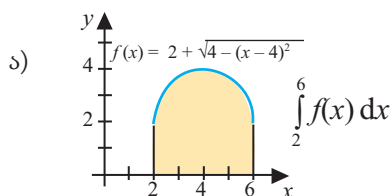
ბ) $\int_0^5 f(x) dx$

გ) $\int_3^7 f(x) dx$

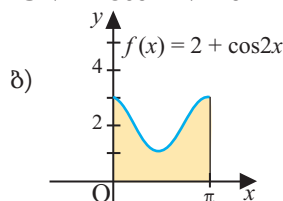
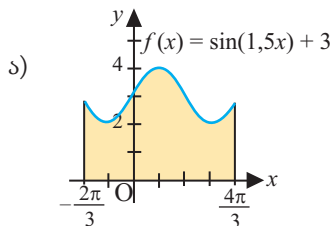


განმაზოგადებელი დავალებები

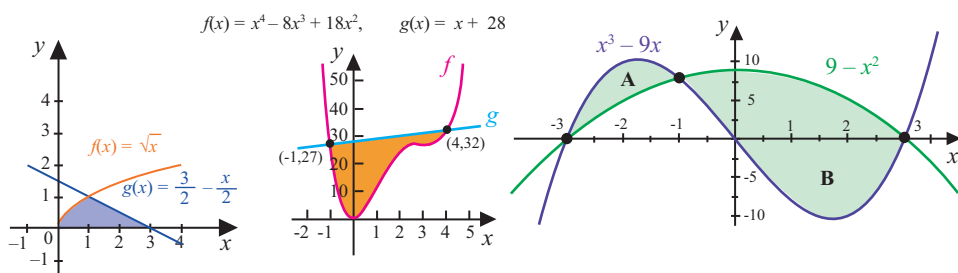
8. გამოთვალეთ მოცემული ინტეგრალები გეომეტრიულ აზრზე დაყრდნობით.



9. გამოთვალეთ ფერადი ფართობები განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.



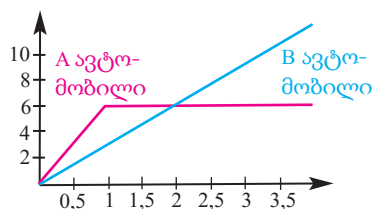
10. გამოთვალეთ გრაფიკებს შორის დარჩენილი ფერადი ფართობი.



11. ავტომობილების მოძრაობა. გრაფიკზე შეუქნიშნის მინიშნებით მოძრაობის დამწყები ავტომობილების სიჩქარეების (მ/წმ) დროზე დამოკიდებულებაა მოცემული. A ავტომობილი მოძრაობას უფრო დიდი სისწრაფით იწყებს.

ა) რა მანძილი გაიარა A ავტომობილმა პირველი 2 წამის განმავლობაში? მითითება: გამოიყენეთ გეომეტრიული ფორმულები.

ბ) დაახლოებით რა დროს დაეწევა B ავტომობილი A ავტომობილს?



12. m მასის სხეული Ox ღერძის გასწვრივ ამ ღერძის მიმართულებით მიმართული ძალის გავლენით $x(t)$ კანონით მოძრაობს. ცნობილია, რომ $t = t_0$ მომენტში სიჩქარეა v_0 , ხოლო კოორდინატი x_0 -ის ტოლია. დაწერეთ $x(t)$ -ს ფორმულა. აქ $F(t)$ ნიუტონობით, t წამებით, v მ/წმ-ობით, m კი კილოგრამებით იზომება.

ა) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$

ბ) $F(t) = 14 \sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$

- სტატისტიკური მაჩვენებლები
- ინფორმაციების განაწილების ფორმები
- ნორმალი განაწილება
- ყუთი-სახელურის დიაგრამა
- შემთხვევითი ხდომილობა და ალბათობა
- პირობითი ალბათობა

მათემატიკური ლექსიკონი

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| ♦ ერთობლიობა | ♦ ხდომილობა |
| ♦ შერჩევა | ♦ შემთხვევითი ხდომილობა |
| ♦ არითმეტიკული საშუალო | ♦ ცდა |
| ♦ მოდა | ♦ ელემენტარული ხდომილობა |
| ♦ მედიანა | ♦ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე |
| ♦ უდიდესი სხვაობა | ♦ დამოუკიდებელი ხდომილობა |
| ♦ გადახრა | ♦ დამოკიდებული ხდომილობა |
| ♦ საშუალო კვადრატული გადახრა | ♦ პირობითი ხდომილობა |
| ♦ დისპერსია | |
| ♦ ყუთი-სახელურის დიაგრამა | |



სტატისტიკური მაჩვენებლები

დისპერსია. სტანდარტული გადახრა

ჩვენ აქამდე სტატისტიკური ინფორმაციის გაანალიზებისათვის ვიყენებდით ისეთ მაჩვენებლებს, როგორიცაა არითმეტიკული საშუალო მოდა და მედიანა.

- არითმეტიკული საშუალო ყველა ინფორმაციის მნიშვნელობის გამოყენებით გამოითვლება.

- მკვეთრად განსხვავებულმა განაპირა რიცხვებმა მის მნიშვნელობაზე გავლენის მოხდენით შეიძლება ერთობლიობის შესახებ მცდარ შედეგებამდე მიგვიყვანოს.

- მედიანა ზრდის რიგით დალაგებული ინფორმაციის შუაში მდებარე მნიშვნელობაა.

- მედიანური ინფორმაცია ორ ნახევარნაწილად - ქვედა და ზედა ნახევარნაწილებად იყოფა.

- მკვეთრად განსხვავებული მნიშვნელობის მქონე სიმრავლეში უფრო სანდო სტატისტიკური მაჩვენებელია

- შემოსაზღვრული რაოდენობის ინფორმაციის ანალიზისათვის გამოსადეგია.

- მოდა განსაზღვრავს ერთობლიობის მახასიათებელ ინფორმაციას.

- იძლევა არითმეტიკული საშუალოს შესახებ მოსაზრების გამოთქმის საშუალებას.

- კატეგორიული ინფორმაციის (გენდერი, ფერი და სხვა) ანალიზისათვის უფრო ხელსაყრელია.

- ინფორმაციას შეიძლება გააჩნდეს ერთზე მეტი მოდა, ან მოდა საერთოდ არ გააჩნდეს.

სტატისტიკური ინფორმაციების უფრო ზუსტად წარმოდგენისა და დასკვნების გამოტანისათვის გამოიყენება მათი მახასიათებლები ისეთი მაჩვენებლები, როგორიცაა **გადახრა, დისპერსია, სტანდარტული გადახრა**.

გადახრა ეწოდება სხვაობას არითმეტიკული საშუალოსა და რაიმე ინფორმაციას შორის:

$x_{\text{გადახრა}} = x - \bar{x}$, სადაც x მოცემული ინფორმაციის რიცხვითი მნიშვნელობა, $\bar{x}$ არითმეტიკულ საშუალოს გამოსახვა.

დისპერსია გადახრების კვადრატების ჯამის ინფორმაციის რაოდენობასთან შეფარ-

დება ეწოდება. $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$, სადაც n ინფორმაციის რაოდენობას უჩვენებს.

სტანდარტული გადახრა დისპერსიიდან კვადრატულ ფესვს ეწოდება და როგორც წესი σ “სიგმა” ასოთი აღინიშნება:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

სტანდარტული გადახრა განაწილების მახასიათებელი მნიშვნელოვანი სტატისტიკური მაჩვენებელია.

- ✓ სტანდარტული გადახრა მოცემული ინფორმაციების არითმეტიკული საშუალოს მიხედვით განაწილებას გვიჩვენებს.

- ✓ ინფორმაციები ერთმანეთისაგან რამდენადაც დაშორებით (შორს) იქნებიან განაწილებული, სტანდარტული გადახრა მით უფრო დიდი იქნება.

- ✓ ინფორმაციები რაც უფრო ერთმანეთთან ახლოს იქნებიან, სტანდარტული გადახრა მით უფრო ნაკლები იქნება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რაც უფრო ინფორმაცია არითმეტიკული საშუალოს გარშემო შემჭიდროვებული იქნება, სტანდარტული გადახრა იმდენად ნაკლები იქნება.

ნამუშაო. კომპანიაში შემთხვევითი შერჩევით 10 თანამშრომლის კვირული ხელფასი შემდეგია: 120^ლ, 160^ლ, 90^ლ, 175^ლ, 110^ლ, 80^ლ, 220^ლ, 150^ლ, 300^ლ, 95^ლ. ამ ინფორმაციისათვის გამოთვალეთ გადახრა, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.

ამოხსნა: 1. შევადგინოთ ხელფასების შესაბამისი ცხრილი.

2. გამოვთვალოთ არითმეტიკული საშუალო: $\bar{x} = 1400 : 10 = 140$

სტატისტიკური მანკებლები

3. თითოეული ხელფასიდან არითმეტიკული საშუალოს გამოკლებით მისი არითმეტიკული საშუალოდან გადახრა გამოითვლება.

მაგალითად, $120 - 140 = -20$, ამ პიროვნების ხელფასი საშუალო კვირულ ხელფასზე 20⁻-ით ნაკლებია. ცხრილს თითოეული ხელფასისათვის გადახრის $(x - \bar{x})$ მაჩვენებელი სვეტი დავუმატოთ. სხვადასხვა ინფორმაციების გადახრების ჯამი ნულის ტოლია. ეს ყოველთვის ასეა და ახალ ინფორმაციას არ იძლევა. ამიტომაც გადახრების კვადრატების ჯამი გამოიყენება.

4. თითოეული $(x_i - \bar{x})^2$ გამოვთვალოთ, ცხრილში, ახალ სვეტში ავლენიშნოთ და ვიპოვოთ $\sum (x_i - \bar{x})^2$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 43150.$$

ხელფასებისათვის დისპერსიის გამოსათვლელად მოძებნილი ჯამის ინფორმაციის n რაოდენობაზე ($n = 10$) გაყოფა საჭირო.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{43150}{10} = 4315$$

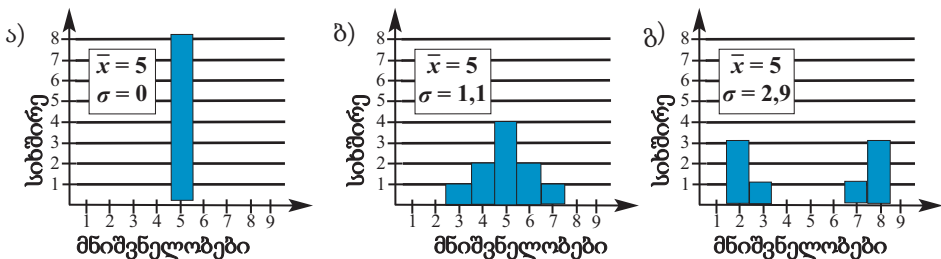
5. ხელფასების სტანდარტული გადახრის პოვნისათვის დისპერსიიდან კვადრატული ამოფესვა არის საჭირო. დისპერსია და სტანდარტული გადახრა ერთი და იგივე ასოთი, როგორც წესი σ - „სიგმა“ ასოთი აღინიშნება.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4315} \approx 65,69$$

განმარტება: სტანდარტული გადახრის მიხედვით ხელფასების ცვლილების შეფასება შეიძლება. მაგალითად, 300 მანათი ხელფასის ამღები პიროვნება კვირულად საშუალო ხელფასიდან (140 მანათი) 2 სტანდარტული გადახრით (2×65) და უფრო მეტ ხელფასს იღებს. 90 მანათი კვირული ხელფასის ამღები პიროვნება კი კვირული საშუალო ხელფასზე დაახლოებით ერთი სტანდარტული გადახრით (65) ნაკლებ ხელფასს იღებს.

ინფორმაციის პისტოგრამით, სიხშირეთა პოლიგონით წარდგენის ფორმების მიხედვით შეიძლება მოსაზრების გამოთქმა სტანდარტული გადახრის შესახებ.

განვიხილოთ ქვემოთ მოცემული ნიმუშები.



მიუხედავად იმისა, რომ სამივე დიაგრამაზე არითმეტიკული საშუალო ტოლია, სტანდარტული გადახრა სხვადასხვაა. პირველ სურათზე სტანდარტული გადახრა 0-ია. ყველა 8-ვე ინფორმაციის მნიშვნელობა 5-ია. მე-2 გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციის მიხედვით სტანდარტული გადახრა მე-3 გრაფიკზე მოცემულთან შედარებით უფრო ნაკლებია, რადგან ინფორმაციები არითმეტიკული საშუალოს გარშემო შემჭიდროებულია.

სტატისტიკური მაჩვენებლები

ნიმუში. დაჯგუფებული ინფორმაციის სტანდარტული გადახრის პოვნა. ცხრილში 50 დღის განმავლობაში ერთ კლასში დღიურად გაკვეთილების გამცდენი მოსწავლეების რაოდენობაა მოცემული. გამოთვალეთ სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა:

1. ჯერ დავაჯგუფოთ ინფორმაცია მოსწავლეების მიერ სასწავლო დღეების გაცდენების რაოდენობის მიხედვით და ავღნიშნოთ სიხშირეთა ცხრილში. მაგალითად, საერთოდ არგაცდენილების რაოდენობა 10, 1 მოსწავლის მიერ გაცდენილი დღეების რაოდენობა 19 და ა.შ. იქნება.

50 დღის განმავლობაში ერთ კლასში დღიურად გაკვეთილების გამცდენი მოსწავლეების რაოდენობა

1	3	1	1	1	1
5	0	1	2	2	1
0	1	1	0	0	0
3	6	2	3	0	1
1	3	0	3	1	1
1	1	6	0	1	3
4	1	1	6	6	1
2	2	2	0	3	0
2	4				

2. ცხრილიდან მიღებული ინფორმაციის მიხედვით ვიპოვოთ არითმეტიკული საშუალო.

$$1. \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{91}{50} \approx 1,8$$

3. თითოეული ინფორმაციისათვის

ა) გამოითვლება გადახრა არითმეტიკული საშუალოს მნიშვნელობიდან: $(x - \bar{x})$

ბ) აიყვანება კვადრატში: $(x - \bar{x})^2$

გ) მიღებული შედეგი რაოდენობაზე გამრავლდება, დაჯამდება და n -ზე გაყოფის შემდეგ მოხდება კვადრატული ამოფესვა.

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	10	0
1	19	19
2	7	14
3	7	21
4	2	8
5	1	5
6	4	24
	$\Sigma = 50$	$\Sigma = 91$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}} = \sqrt{\frac{145,4}{50}} \approx 1,71$$

როგორც ხედავთ, დღიურად გაკვეთილების გამცდენი მოსწავლეების რაოდენობა სტანდარტული გადახრით არის 1.71, საშუალო გამოთვლით 1,8.

$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
-1,8	3,24	32,40
-0,8	0,64	12,16
0,2	0,04	0,28
1,2	1,44	10,08
2,2	4,84	9,68
3,2	10,24	10,24
4,2	17,64	70,56
		$\Sigma = 145,40$

კალკულატორის გამოყენება. სტატისტიკური მაჩვენებლების გამოთვლისას საჭიროა კალკულატორის სტატისტიკურ სამუშაო რეჟიმში გადაყვანა. სტატისტიკურ კალკულატორებს არითმეტიკული საშუალოს, დისპერსიის, სტანდარტული გადახრის, გამოთვლისათვის სათანადო ღილაკები გააჩნია. ამოცანის ამოხსნის დროს ამ კალკულატორების ნაჩვენები

$\bar{x}$

$\bar{x}^2$

Σx

Σx^2

σ_n

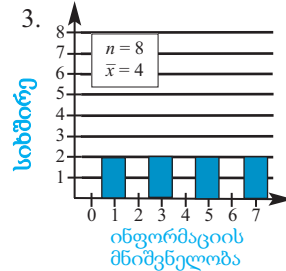
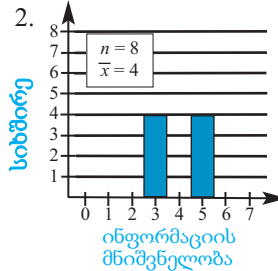
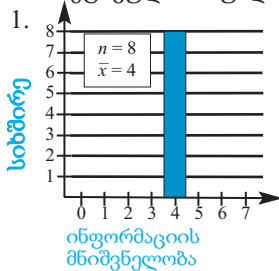
σ_{n-1}

ღილაკებით ისარგებლეთ.

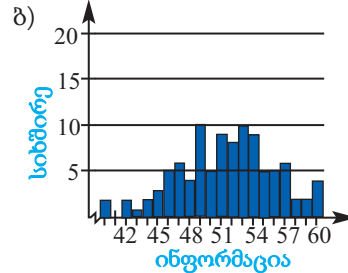
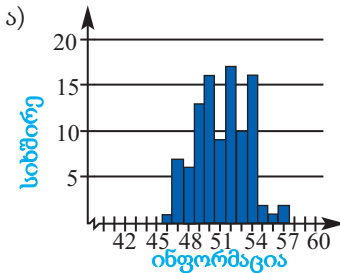
სტატისტიკური მაჩვენებლები

სასწავლო დაფალებები

1. ჯერ წერითი გამოთვლების გარეშე, გრაფიკების მიხედვით ივარაუდეთ ერთობლიობის სტანდარტული გადახრა. შემდეგ გამოთვლებით შეამოწმეთ თქვენი ვარაუდი. უჩვენეთ n ერთობლიობაში შემავალი ინფორმაციების რაოდენობა და $\bar{x}$ არითმეტიკული საშუალო.



2. ორივე გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციების არითმეტიკული საშუალო 50-ია. თუმცა ერთის სტანდარტული გადახრა 2,2-ია, მეორისა კი 6,8. რომელი სტანდარტული გადახრა, რომელ გრაფიკს ეხება?

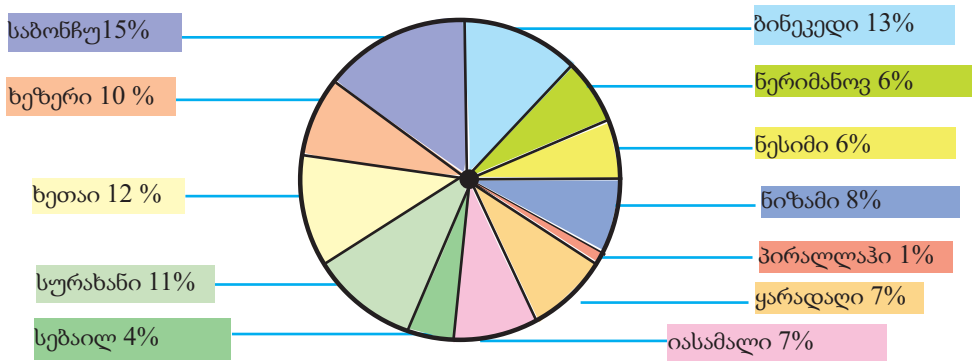


3. მოცემული ინფორმაციის მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.
 100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000;
 ა) იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო ($\bar{x}$) და სტანდარტული გადახრა (σ).
 ბ) თითოეული ინფორმაციის მნიშვნელობა გაამრავლეთ 10-ზე. ახალი ინფორმაციებისათვის იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო ($\bar{x}$) და სტანდარტული გადახრა (σ).
 გ) თითოეული ინფორმაციის მნიშვნელობა გაყავით 10-ზე. იპოვეთ $\bar{x}$ და σ .
 დ) განიხილეთ მოსაზრებები შედეგების შესახებ. განმარტეთ სტანდარტული გადახრის მნიშვნელობის მიხედვით არითმეტიკული საშუალოს მდგომარეობის შეფასება მართებულია თუ არა?
4. SAT (Scholastic Aptitude Test) სისტემით გამოცდის ჩამბარებელთა შორის შემთხვევით შერჩეული 8 გოგონასა და 8 ბიჭის შედეგები ქვემოთ არის მოცემული ბიჭების SAT ქულები: 1059; 1328; 1175; 1123; 923; 1017; 1214; 1042
 გოგონების SAT ქულები: 1226; 965; 841; 1053; 1056; 1393; 1312; 1222
 ა) თითოეული ინფორმაციის ჯგუფისათვის იპოვეთ უდიდესი სხვაობა, დიპერსია და კვადრატული გადახრა;
 ბ) განმარტეთ შედეგი რეალური სიტუაციის შესაბამისად.

5. დაწერეთ ათი ინფორმაციის შემცველი ისეთი რიცხვითი სიმრავლე, რომ არითმეტიკული საშუალო 10, ხოლო სტანდარტული გადახრა მიახლოებით 3 იყოს.

სტატისტიკური მაჩვენებლები

6. სურათზე მოცემულ წრიულ დიაგრამაზე 2016 წელს ქალაქ ბაქოში საშუალო განათლების მიმღებთა რაიონების მიხედვით განაწილებაა ნაჩვენები.



წყარო. აზერბაიჯანის რესპუბლიკის განათლების სამინისტრო. წლიური ანგარიში - 2016

- ა) ამ ინფორმაციის მიხედვით იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო, უდიდესი სხვაობა, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.
 ბ) რომელ რაიონს ახასიათებს უდიდესი სტანდარტული გადახრა.
 გ) წარმოადგინეთ ინფორმაცია ჰისტოგრამის სახით. რომელ სახეს შეიძლება მივაკუთვნოთ ეს ინფორმაცია განაწილების ფორმის მიხედვით?
 დ) ინფორმაციის თანახმად, საბონჩუს რაიონში განათლების მიმღებთა რაოდენობა 59088 კაცია. იპოვეთ ქალაქ ბაქოში განათლების მიმღებთა საერთო რაოდენობა.

7. ინფორმაციების მიხედვით იპოვეთ უდიდესი სხვაობა, არითმეტიკული საშუალო, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ა) 11 10 11 7 8 11 6 4 6 7

ბ) 13 15 13 17 18 13 15 14 13 20 20 18 23 20

8. მოცემული ინფორმაცია ასახავს ორ კომპანიაში შერჩეული თანამშრომლების ხელფასს.

ა) ინფორმაციის მიხედვით იპოვეთ უდიდესი სხვაობა, არითმეტიკული საშუალო, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ბ) განმარტეთ შედეგები რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესაბამისად.

კომპანია A: 220 265 290 320 350 230 280 310 180

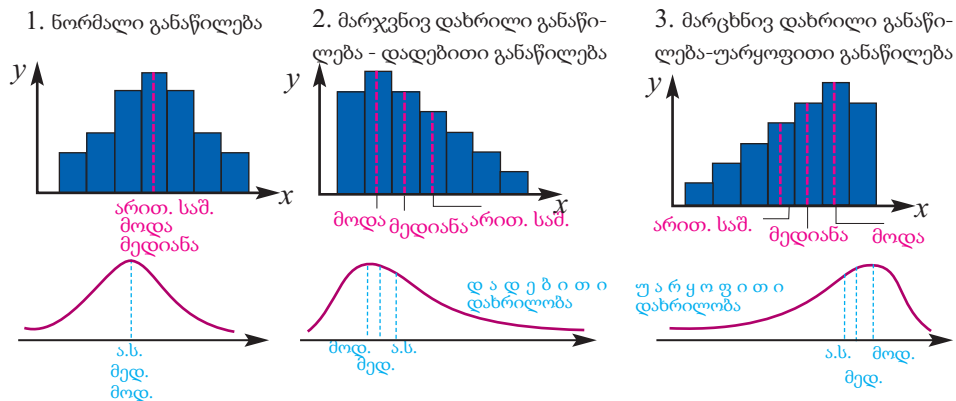
კომპანია B: 210 180 200 210 260 270 240 250 220

9. მიმდევრობით ხუთი წლის განმავლობაში ქვეყნის პირველობაზე ყველა თამაშში მონაწილე ორი ფეხბურთელის გატანილი გოლების რაოდენობა ცხრილშია ნაჩვენები. რომელი ფეხბურთელის შედეგები არის უფრო სტაბილური?

წლები	1	2	3	4	5
1-ლი ფეხბურთელი	23	19	17	23	18
მე-2 ფეხბურთელი	20	16	23	19	22

ინფორმაციების განაწილების ფორმები

სიხშირის განაწილების სახის მიხედვით შესაბამისი გრაფიკული ფორმები (ჰისტოგრამა ან სიხშირის პოლიგონი) შეიძლება იყოს სიმეტრიული ან ასიმეტრიული.

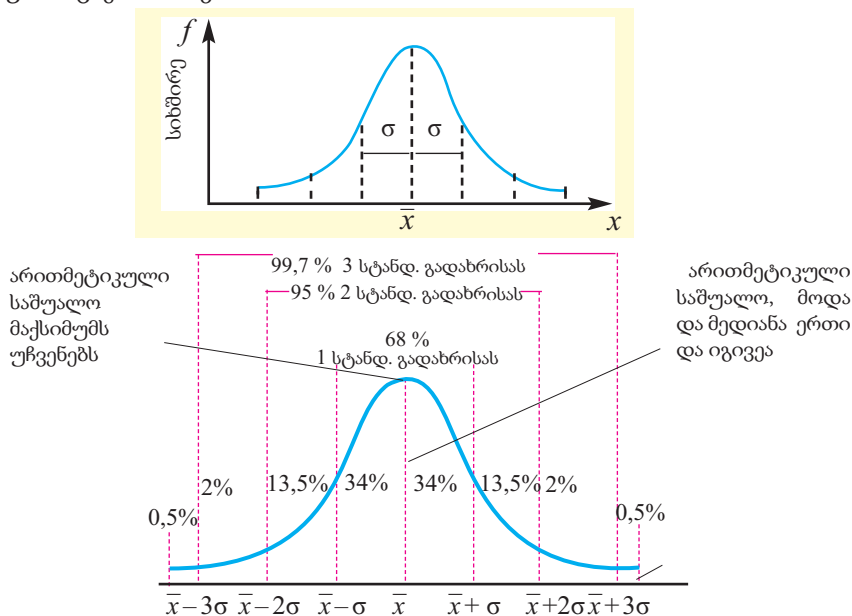


ინფორმაცია ახალდაბადებული ჩვილის სიმაღლისა და მასის შესახებ ნორმალური განაწილების ნიმუშებია.

ნორმალური განაწილების ფორმები განვიხილოთ ცოტა დაწვრილებით.

ნორმალური განაწილება

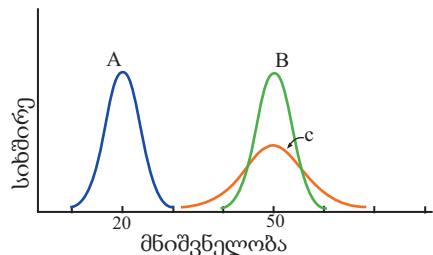
- ◆ ნორმალური განაწილების მრუდი არითმეტიკული საშუალოს მიმართ სიმეტრიულია.
- ◆ ნორმალურ განაწილებაში არითმეტიკული საშუალო, მედიანა და მოდა ტოლია.
- ◆ ნორმალური განაწილების გრაფიკი არითმეტიკული საშუალოსა ($\bar{x}$) და სტანდარტული გადახრის (σ) მიხედვით აიგება.
- ◆ ნორმალური განაწილება ძირითადად სამი სტანდარტული გადახრის გარშემო ინფორმაციებს ასახავს.



ნორმალურ განაწილებას 68-95-99 წესით განაწილებასაც უწოდებენ.

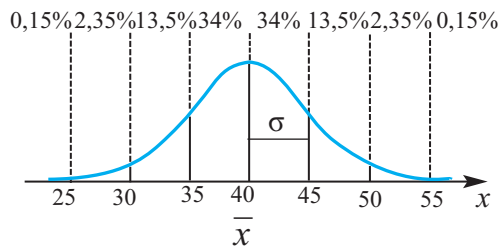
ნორმალი განაწილება

ნორმალი განაწილების გრაფიკი არითმეტიკული საშუალოს მნიშვნელობაზე დამოკიდებულებით მარჯვნივ ან მარცხნივ იცვლის ადგილს. არითმეტიკული საშუალოს ერთი და იმავე მნიშვნელობისას სტანდარტული გადახრის ცვლილებასთან ერთად გრაფიკი იკუმშება ან იჭიმება. მაგალითად, სურათზე ნაჩვენებ B გრაფიკის შესაბამისი არითმეტიკული საშუალო A გრაფიკის შესაბამისი არითმეტიკულ საშუალოზე მეტია, სტანდარტული გადახრები კი ერთი და იგივეა. B და C გრაფიკების მიხედვით ორივეში არითმეტიკული საშუალო ერთი და იგივეა, სტანდარტული გადახრა კი C-ში უფრო მეტია.



ნიმუში. რომელიმე X ერთობლიობის შესაბამისი ნორმალურ განაწილებაში არითმეტიკული საშუალო 40, სტანდარტული გადახრა 5-ია. ამ ერთობლიობაში შემავალ მნიშვნელობათა რამდენი პროცენტი ა) 45-ზე ნაკლები; ბ) 30-სა და 45-ს შორის?

ამოხსნა: პირობის თანახმად $\bar{x} = 40$, $\sigma = 5$. არითმეტიკული საშუალოსა და სტანდარტული გადახრის მიხედვით ავლნიშნოთ ინფორმაციები x ღერძზე და გავავლოთ ნორმალი გადახრის მრუდი. ავლნიშნოთ თითოეული ინტერვალის შესაბამისი პროცენტები. ნორმალი განაწილების გრაფიკის მიხედვით უკვე შეგვიძლია კითხვებზე პასუხის გაცემა.

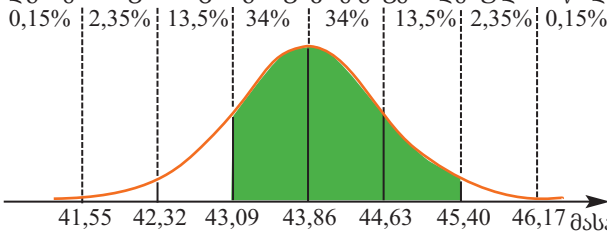


ა) ამ ერთობლიობაში შემავალი მნიშვნელობებიდან 45-ზე ნაკლები დაახლოებით $34\% + 34\% + 13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 84\%$ შეადგენს.

ბ) მნიშვნელობა 30 არითმეტიკული საშუალოდან 2σ -ით მარცხნივ, 45 კი σ სტანდარტული გადახრით მარჯვნივაა. 30-სა და 45-ს შორის მდებარე რიცხვები $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$ შეადგენს.

სასწავლო დაგეგმვები

1. სურათზე ორნითოლოგების მიერ ერთი და იგივე სახის ფრინველების კვერცხების მასის გაზომვის შედეგების ნორმალი განაწილების გრაფიკია ნაჩვენები. კვერცხების საშუალო მასა $\bar{x} = 43,86$ გრამს, სტანდარტული გადახრა $\sigma = 0,77$ -ს (გრამი) შეადგენს. წარმოადგინეთ ინფორმაცია გრაფიკზე გაფერადებული ნაწილის შესახებ.



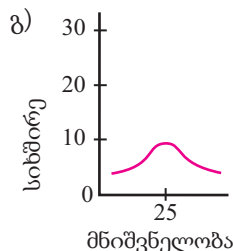
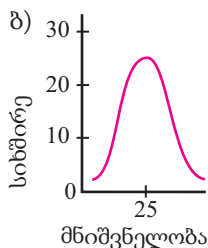
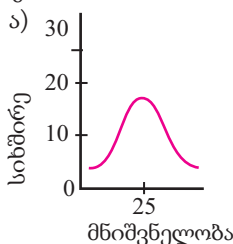
2. ცნობილია, რომ საცდელი გამოცდის შესაბამისი ნორმალ განაწილებაში არითმეტიკული საშუალოა 72 (ქულა), სტანდარტული გადახრაა 6 (ქულა). დაწერეთ შემდეგი ინფორმაციები (მათი მდებარეობის შესახებ):

- ა) არითმეტიკული საშუალოდან 1 სტანდარტული გადახრის დაშორებით;
- ბ) არითმეტიკული საშუალოდან 2 სტანდარტული გადახრის დაშორებით;
- გ) არითმეტიკული საშუალოდან 3 სტანდარტული გადახრის დაშორებით.

2) დახაზეთ ნორმალური განაწილების შესაბამისი მრუდი. თითოეული ინტერვალის უჩვენეთ პროცენტობით.

ნორმალური განაწილება

3. რომელ ნორმალ განაწილებაშია სტანდარტული გადახრა უდიდესი და რომელშია უმცირესი?

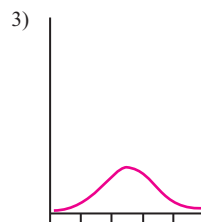
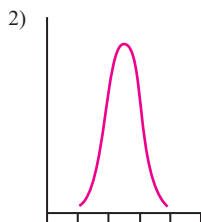
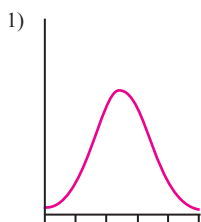


2) თითოეულ სიტუაციას თითო გრაფიკი შეესაბამება. განსაზღვრეთ შესაბამისობა.

ა) ერთი ყუთი ჩაის ნამდვილი მასა.

ბ) აზერბაიჯანში 16 წლის ახალგაზრდების წლიური შემოსავალი.

გ) შემაჯამებელ შეფასებაში მოსწავლეების მიღწეული შედეგები.



4. ააგეთ ნორმალური განაწილების მრუდები ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში. განმარტეთ ამ გრაფიკების მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები.

ა) არითმეტიკული საშუალო 50, სტანდარტული გადახრა 10
არითმეტიკული საშუალო 50, სტანდარტული გადახრა 20

ბ) არითმეტიკული საშუალო 50, სტანდარტული გადახრა 5
არითმეტიკული საშუალო 40, სტანდარტული გადახრა 5

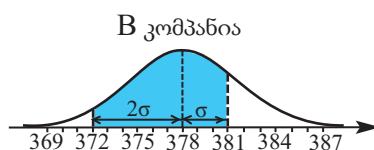
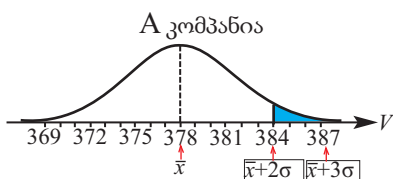
5. ერთი ყუთი წველის მოცულობის ცვლილება ნორმალურ განაწილებას შეესაბამება.

შემოწმებებმა უჩვენეს, რომ A კომპანიის წარმოებული პროდუქციის საშუალო მოცულობა 378 მლ სტანდარტული გადახრა 1მლ-ია. B კომპანიის ასეთივე პროდუქციის საშუალო მოცულობა კვლავ 378 მლ, სტანდარტული გადახრა 3 მლ-ია. ორივე პროდუქციაზე მოცულობა 375 მლ აწერია.

ა) თითოეულ კომპანიაში, პროდუქციის რამდენი პროცენტი შეესაბამება 375 მლ და მასზე ნაკლებ ტევადობას?

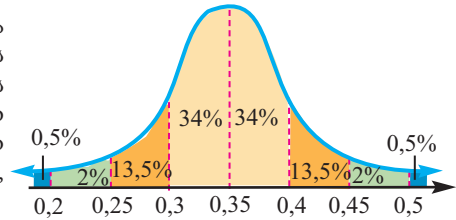
ბ) თითოეულ კომპანიაში, პროდუქციის რამდენი პროცენტი შეესაბამება 372 მლ-ზე მეტ, 382 მლ-ზე ნაკლებ ტევადობას?

გ) ქვემოთ მოცემულ სურათზე A და B კომპანიების შესახებ ნორმალური განაწილების გრაფიკია მოცემული. წარმოადგინეთ ფერადი ნაწილის ამსახველი ინფორმაცია.



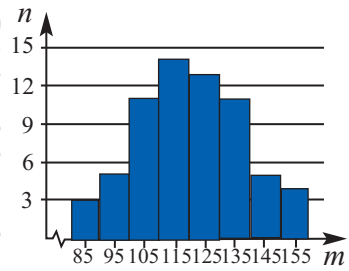
ნორმალ განაწილება

6. სურათზე ნაჩვენებია ნორმალ განაწილება 1800 ახალგაზრდის ხელ-თვალის რეაქციის დროის შემოწმების შედეგებს უჩვენებს. საერთო შედეგების მიხედვით შედგენილ ნორმალ განაწილებაში არითმეტიკული საშუალო 0,35 წამი, სტანდარტული გადახრა 0,5 წამია.



- ა) სავარაუდოდ, რამდენი ადამიანის ტესტირებული რეაქციის დროა 0,25-სა და 0,45 წამს შორის?
- ბ) თუ შემთხვევით ერთი ახალგაზრდა შეირჩევა, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მისი ხელ-თვალის რეაქციის დრო 0,4 წამზე მეტის მქონეთა შორის იქნება?
7. გამოცდის შედეგები ნორმალ განაწილებით იყო წარმოდგენილი. შედეგების მიხედვით არითმეტიკული საშუალო 70, სტანდარტული გადახრა 4,5-ია. გამოცდაზე 360 ადამიანმა მიიღო მონაწილეობა.
- 1) შემთხვევით შერჩეული იქნა ერთი პიროვნება. გამოთვალეთ:
 - ა) ალბათობა იმისა, რომ მის მიერ მოგროვებული ქულა იქნება 65-80 ინტერვალში.
 - ბ) ალბათობა იმისა, რომ იქნება არანაკლებ 75 ქულის მიმდებარე შორის.
 - გ) ალბათობა იმისა, რომ იქნება 62 ქულაზე ნაკლების მიმდებარე შორის.
 - 2) გამოთვალეთ გამოცდის ჩამბარებელთა 90%-მა რომელ ინტერვალში მოაგროვა ქულა.

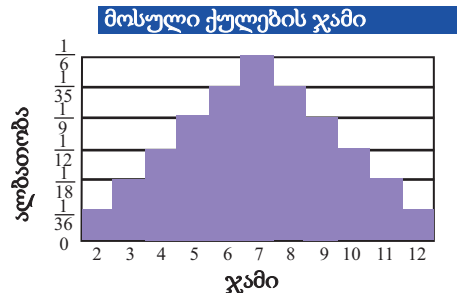
8. ღია ტიპის შეკითხვა. მოცემულ ჰისტოგრამაზე ფერმერის მიერ სახორცედ შენახული მსხვილფეხა პირუტყვის რაოდენობისა და მასის შესახებ ინფორმაცია არის ნაჩვენები.



- ა) ჰისტოგრამის მიხედვით იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო და სტანდარტული გადახრა.
- ბ) ააგეთ ნორმალ განაწილების მრუდი.
- გ) ნორმალ განაწილების მრუდის მიხედვით დაწერეთ ორი ამოცანა ალბათობის გამოთვლის შესახებ.
9. გააგორეს ორი კამათელი. მოსული ქულების ჯამის განაწილება ცხრილითა და ჰისტოგრამითაა მოცემული. უჩვენეთ, რომ ჰისტოგრამა ალბათობის განაწილების ნორმალ განაწილებაა.

ქულების ჯამი	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ალბათობა	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

- ა) რომელი ჯამის მოსვლის ალბათობა არის უფრო მაღალი და რისი ტოლია იგი?
- ბ) რას უდრის 10-ზე მეტი ქულების მოსვლის ალბათობა?
- გ) ორი კამათელის გაგორებისას “ყველაზე მეტი მოსული ქულების ჯამი 8-ზე ნაკლებია” მოსაზრება მართებულია?

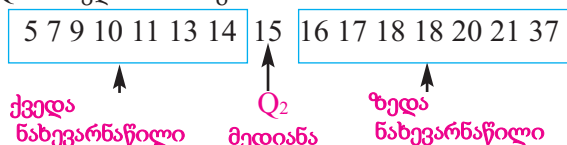


ყუთისა და სახელურის დიაგრამა

ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზე განვიხილოთ ყუთისა და სახელურის დიაგრამის აგება.

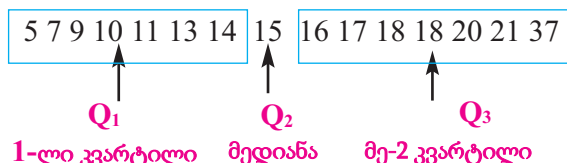
ნიმუში 1. უსაფრთხოების ნორმების შესახებ გამოცდის ჩაბარებისას კომპანიის 15 თანამშრომლის მიერ მოპოვებული ქულები შემდეგია: 13 9 18 15 14 21 7 10 11 20 5 18 37 16 17 ააგეთ ყუთი - სახელურის დიაგრამა.

ამოხსნა: 1. დავალაგოთ ინფორმაცია ზრდის რიგის მიხედვით, განვსაზღვროთ მედიანა და Q_2 -ით ავლნიშნოთ იგი.



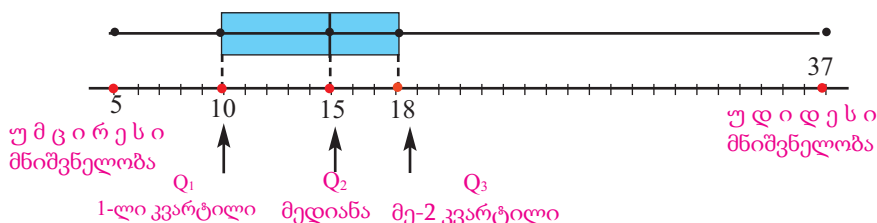
2. მედიანიდან მარცხენა მხარეს მდებარე ინფორმაციები პირველ, ქვედა ნახევარნაწილს, მარჯვენა მხარეს მდებარე ინფორმაციები კი ზედა ნახევარნაწილს შეადგენს. მაშასადამე მედიანა ინფორმაციას ორ ნახევარნაწილად ყოფს.

3. ნახევარნაწილის კვარტილად წოდებული მედიანები (აქ $Q_1 = 10$, $Q_3 = 18$) ინფორმაციას 4 ნაწილად ყოფენ.



4. განისაზღვრება ცვლილება (სხვაობა) კვარტილებს შორის. $Q_1 - Q_3 = 18 - 10 = 8$

5. რიცხვით ღერძზე ავლნიშნავთ 5 მნიშვნელოვან წერტილს: მოცემული ინფორმაციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს, კვარტილებისა და მედიანის მნიშვნელობებს. ვხაზავთ მართკუთხედს რომლის სიგრძეც კვარტილთა შორის ცვლილების ტოლია. ამ მართკუთხედს მედიანა ორ ნაწილად ყოფს. ახლა კი გავავლოთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების შესაბამის კვარტილებთან შემაერთებული სახელურები.



ჩვენ მოცემული ინფორმაციების შესაბამისად ავაგეთ ყუთი-სახელურის დიაგრამა. ახლა კი დიაგრამის მიხედვით წარმოვადგინოთ ინფორმაცია.

დიაგრამიდან ჩანს, რომ 15 კაციდან დაახლოებით ნახევარმა, 50%-მა 10-18 შორის ქულა მოაგროვა. 25%-მა 10-ზე ნაკლები და 25%-მა 18-ზე მეტი ქულა მოაგროვა.

მარცხენა და მარჯვენა სახელურების სიგრძის სხვადასხვაობა შესაბამის ნაწილში არსებული ინფორმაციის მნიშვნელობების სხვაობაზეა დამოკიდებული.

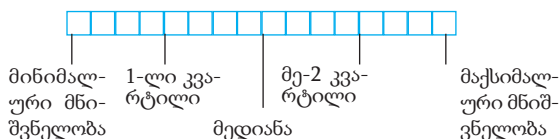
მოცემული ერთობლიობის მიხედვით განისაზღვრება 5 ინფორმაცია:

მედიანა - Q_2 , მედიანაზე ნაკლები მნიშვნელობის მქონე ინფორმაციის შემკრები კვარტილი - Q_1 , მედიანაზე მეტი მნიშვნელობის მქონე ინფორმაციების შემკრები კვარტილი - Q_3 , უმცირესი მნიშვნელობა და უდიდესი მნიშვნელობა.

5 ინფორმაცია

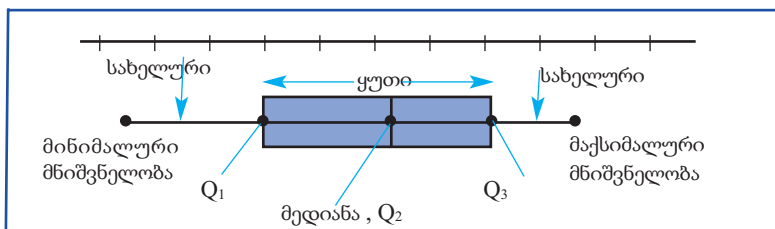
- მინიმალური მნიშვნელობა
- ქვედა ნახევარწილი: Q_1
- მედიანა: Q_2
- ზედა ნახევარწილი: Q_3
- მაქსიმალური მნიშვნელობა

ყუთი - სახელური დიაგრამაში ინფორმაციის სქემატური გამოსახვა



ყუთი - სახელური დიაგრამის აგების ნაბიჯები

1. გაივლება ჰორიზონტალური წრფე.
2. ინფორმაციის ცვლილების დიაპაზონის მხედველობაში მიღებით განსაზღვრული მასშტაბით დაიყოფა იგი.
3. წრფეზე აღინიშნება განსაზღვრული 5 ინფორმაცია - Q_1, Q_2, Q_3 , მინიმალური მნიშვნელობა და მაქსიმალური მნიშვნელობა.
4. დაიხაზება ყუთი Q_1 -დან Q_3 -მდე.
5. მინიმუმის მნიშვნელობიდან Q_1 -მდე და Q_3 -დან მაქსიმუმის მნიშვნელობამდე დაიხაზება სახელურები.

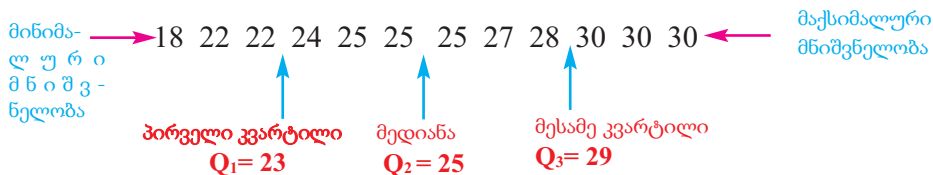


ნიმუში 2. პარალომპიელ ქალ ფრენბურთელთა გუნდის წევრების ასაკი ქვე-

მოთაა მოცემული: 24, 30, 30, 22, 25, 22, 18, 25, 28, 30, 25, 27

წარმოადგინეთ ინფორმაცია ყუთი - სახელური დიაგრამის სახით.

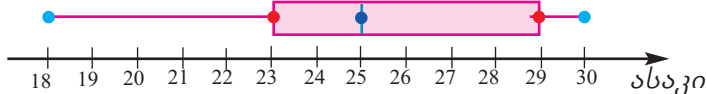
ამოხსნა: 1. დავალაგოთ ინფორმაცია, განვსაზღვროთ მედიანა და კვარტილები.



2. გავავლოთ რიცხვითი ღერძი და ზედ აღვნიშნოთ ინფორმაციები.

ყუთისა და სახელურის დიაგრამა

3. კვარტილების $Q_3 - Q_1 = 29 - 23 = 6$ სხვაობის მიხედვით დაგზაზოთ ყუთი და მედიანის მიხედვით იგი წრფით ორად გავყოთ, ყუთი უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებთან შევაერთოთ.



4. დიაგრამის წარდგენა. კალათბურთელების 50 % 23-29 წლებს შორისაა, 25% 23 წლამდეა, ხოლო 25% 29 წლის ზევით. ყუთის სახელურების გრძელ-მოკლეობა 25%-იანი ამ ნაწილებში მნიშვნელობების ერთმანეთთან ახლოს ან შორს ყოფნას უჩვენებს. მაგალითად ამ ნიმუშში მარცხენა სახელური გრძელია, მარჯვენა სახელური კი მოკლე. რადგან 25%-იან ამ ნაწილში მნიშვნელობის 18-23 შორის შეცვლისას, მარჯვენა სახელურის ნაწილში მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, 29-30-ს ვხვდებით.

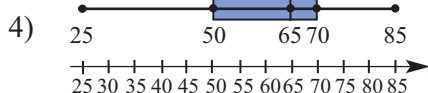
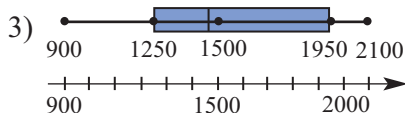
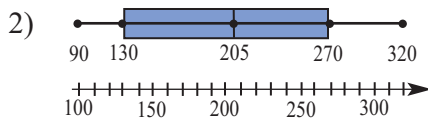
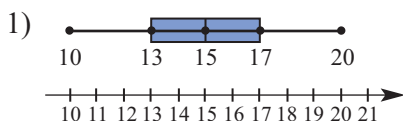
ინფორმაციაში არსებული მნიშვნელობებიდან დიდად განსხვავებულ მნიშვნელობებს განცალკევებული მნიშვნელობები ეწოდება. განცალკევებული მნიშვნელობები ქვედა და ზედა კვარტილების მიხედვითაც განისაზღვრება. ამ შემთხვევაში კვარტილების $Q_3 - Q_1$ სხვაობაზე 1,5-ჯერ მეტი ან ნაკლები მნიშვნელობა განცალკევებადაა მიღებული.

მაგალითად, ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში ქვედა კვარტილია 23, ზედა კვარტილია 29, კვარტილების სხვაობა 6-ია. $23 - 1,5 \cdot 6 = 14$ და $29 + 1,5 \cdot 6 = 38$ მნიშვნელობები საზღვრის მნიშვნელობებად ითვლება. 14-ზე ნაკლები და 38-ზე მეტი მნიშვნელობები ამ ინფორმაციისათვის განცალკევებულად ითვლება.

სასწავლო დაფალები

1. თითოეული ყუთი - სახელური დიაგრამის მიხედვით განსაზღვრეთ ინფორმაციები.

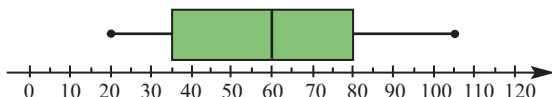
- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| ა) უმცირესი მნიშვნელობა; | დ) მედიანა; |
| ბ) უდიდესი მნიშვნელობა; | ე) მესამე კვარტილი Q_3 ; |
| გ) პირველი კვარტილი Q_1 ; | ვ) კვარტილების სხვაობა $Q_3 - Q_1$. |



2. უჩვენეთ ინფორმაცია ყუთი-სახელურის დიაგრამით და წარმოადგინეთ სიტუაციის შესაბამისად.

206, 173, 198, 241, 179, 236, 181, 231, 215, 222, 228

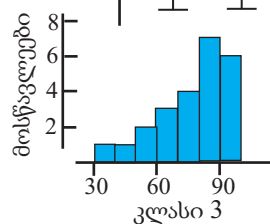
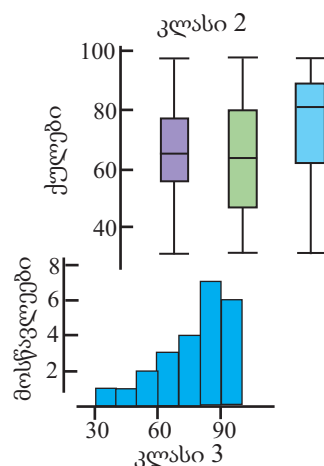
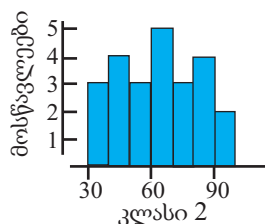
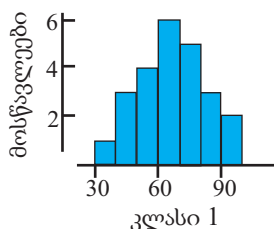
3. ყუთი - სახელურის დიაგრამა კლასის შეფასების შედეგებს გვიჩვენებს. მაქსიმალური ქულა 120-ია.



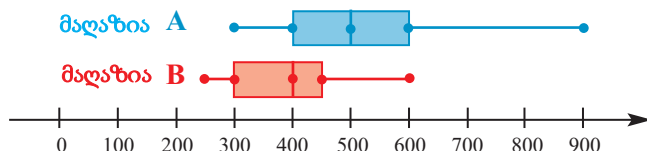
ყუთისა და სახელურის დიაგრამა

- ა) რამდენ ქულას შეესაბამება შედეგების მედიანა?
- ბ) იპოვეთ სხვაობა ყველაზე მაღალ და ყველაზე დაბალ შედეგს შორის.
- გ) კლასის რამდენმა პროცენტმა მიიღო 35-ზე უფრო მაღალი ქულა?
- დ) რამდენი ქულაა ($Q_3 - Q_1$) კვარტილების სხვაობა?
- ე) რომელ ინტერვალში იცვლება ყველაზე მეტი ქულის მიმღები მოსწავლეების 25%-ის ქულა?
- ვ) შედის თუ არა ყველაზე მეტი ქულის მომგროვებელ 25%-იან რაოდენობაში 63 ქულის მიმღები მოსწავლე?
- ზ) სიტუაციის შესაბამისად განმარტეთ რატომაა მარჯვენა სახელური მარცხენაზე უფრო გრძელი.

4. ყუთი-სახელურის დიაგრამები ასახავს ჰისტოგრამით მოცემულ ინფორმაციებს. რომელი ჰისტოგრამა რომელ ყუთ-სახელურიან დიაგრამას შეესაბამება?



5. დიაგრამა გვიჩვენებს ორ მაღაზიაში ტელევიზორების ფასებს. მოამზადეთ წარდგენა ამ მაღაზიებში არსებული ტელევიზორების ფასების შესახებ.



6. ინფორმაციის მედიანაა 32, პირველი კვარტილის მნიშვნელობა 24, მესამე კვარტილისა კი 43-ია. განსაზღვრეთ ამ ინფორმაციის განცალკევების საზღვრები. შეამოწმეთ 63, 20, 12, 53 მნიშვნელობებს აქვთ თუ არა განცალკევება.
7. ამერიკის შეერთებული შტატების 45 პრეზიდენტის ასაკის მაჩვენებელი განშტოებული დიაგრამა წარმოადგინეთ ყუთი-სახელური დიაგრამის სახით.

4	2	3	6	6	7	7	8	9	9																
5	0	0	1	1	1	1	2	2	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8
6	1	1	1	1	2	4	4	5	8	9															
7	0																								

70 წლის ასაკში პრეზიდენტად არჩეული დონალდ ტრამპი ყველაზე ასაკოვან, ხოლო 42 წლის თეოდორ რუზველტი კი ყველაზე ახალგაზრდა პრეზიდენტად ითვლება. შეიძლება თუ არა, მათი ასაკი ჩაითვალოს განცალკევებად?

ალბათობის თეორია ჩვენს გარემომცველ სამყაროში მომხდარ შემთხვევით ხდომილობათა მოხდენის ალბათობებს შორის აგებს მათემატიკურ დამოკიდებულებებს და ამ დამოკიდებულებების დახმარებით ხდომილობების მოხდენის ალბათობებს აფასებს უფრო მარტივი ხდომილობების ალბათობის საფუძველზე.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ვაკვირდებით სხვადასხვა მოვლენებს, ვაწყდებით მრავალრიცხოვან გამოცდილებას, ცდას და დაკვირვების შედეგებს.

ცდის დაკვირვებისა და გამოცდილების თითოეულ განუყოფელ შედეგს **ელემენტარული ხდომილობა** ეწოდება. ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეს კი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე (ეხს) ანუ ცდათა სივრცე ეწოდება. როგორც წესი ეხს Ω ასოთი აღინიშნება. მაგალითად, თუ ერთი კამათელის გაგორების ცდაში ზედა წახნაგზე k ქულის მოსვლას ავლენიანავთ E_k -თი, მაშინ $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ იქნება.

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ხდომილობა ეწოდება. მაგალითად, თუ კამათელის გაგორებისას “ლუწი ქულის მოსვლის” ხდომილობა A იქნება, მაშინ $A = \{E_2, E_4, E_6\}$

თუ ეხს-ის ელემენტების რაოდენობა m იქნება, მაშინ ქვესიმრავლეთა რაოდენობის 2^m -ის გამო, შესაძლოა ხდომილობათა რაოდენობაც 2^m იქნება. ვინაიდან თითოეული ხდომილობა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა, ამიტომ სიმრავლებისათვის განსაზღვრული მოქმედებები ხდომილობებისათვისაც იმავე წესით განისაზღვრება. ამ დროს $\emptyset$ ცარიელი სიმრავლე შეუძლებელი ხდომილობა, Ω კი აუცილებელი ხდომილობა იქნება.

A და B **ხდომილობების გაერთიანება** ეწოდება ყველა იმ შედეგს, რომელიც A და B ხდომილობებიდან თუნდაც ერთ-ერთში მაინც შემავალი ხდომილობებისაგან შედგება და $A \cup B$ სახით აღინიშნება.

ხდომილობას, რომლის შედეგიც შედის როგორც A ისე B ხდომილობებში A და B **ხდომილობათა თანაკვეთა** ეწოდება და $A \cap B$ სახით აღინიშნება.

ხდომილობებს, რომლებსაც საერთო შედეგები არ გააჩნიათ, **არათავსებადი ხდომილობები** ეწოდებათ. თუ A და B ხდომილობები არათავსებადია, მაშინ $A \cap B = \emptyset$.

ყველა იმ შედეგის სიმრავლეს, რომელიც არ შედის A ხდომილობაში, A ხდომილობის **მოპირდაპირე** ანუ **შემავსებელი ხდომილობა** ეწოდება და $\bar{A}$ სახით აღინიშნება.

თუ ცდის B ხდომილობის მოხდენა წარმოშობს A ხდომილობას, მაშინ B -ს A ხდომილობის **ხელსაყრელი ხდომილობა** ეწოდება.

ტოლშესაძლებლობიანი ელემენტარული შედეგების მქონე ექსპერიმენტისას ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობა ამ ხდომილობისათვის ხელსაყრელი შედეგების რაოდენობის ყველა ელემენტარული შედეგის რაოდენობასთან შეფარდების ტოლია:

$$P(A) = \frac{\text{ხელსაყრელ შედეგების რაოდენობა}}{\text{შესაძლო შედეგების რაოდენობა}}$$

ალბათობის ამოცანების ამოხსნისას ყურადღება მიაქციეთ შემდეგს:

1. ნებისმიერი შემთხვევითი A ხდომილობისათვის მართებულია, რომ $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. ცდის შესაძლო ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობების ჯამი 1-ის ტოლია:

$$\sum P(E_i) = 1$$
3. მართებულია ფორმულა: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

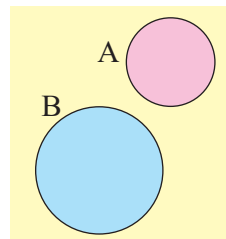
არათავსებადი ორი ხდომილობის მოხდენის ალბათობა.

ნებისმიერი არათავსებადი $A \subset U$ და $B \subset U$ ხდომილობებისათვის

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ფორმულა მართებულია.

ამ წესს ხდომილობების შეკრების წესი ეწოდება.



ნამუშაო. ურნაში ყვითელი, წითელი და თეთრი ბურთულებია. თეთრი ბურთულის ამოსვლის ალბათობა 0,25, წითელი ბურთულის ამოსვლის ალბათობა 0,30-ია. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ურნიდან შემთხვევით ამოღებული ერთი ბურთულა იქნება ყვითელი.

ამოხსნა: თუ ურნიდან ერთ ბურთულას ამოვიღებთ, ალბათობა იმისა, რომ ის იქნება თეთრი ან წითელი P (თეთრი ან წითელი) $= 0,25 + 0,30 = 0,55$ იქნება. ყვითელი ბურთულის ამოსვლა თეთრი და წითელი ბურთულის არ ამოსვლის ხდომილობას ნიშნავს. მაშასადამე, P (ყვითელი) $= P$ (თეთრის ან წითლის არ მოხდენა).

ეს ხდომილობები არათავსებადი ხდომილობებია, თანაკვეთა არა აქვთ. ხდომილობების მოხდენისა და არ მოხდენის ალბათობების ჯამი 1-ის ტოლი უნდა იყოს. მაშინ P (ყვითელი) $= 1 - P$ (თეთრი ან წითელი) $= 1 - 0,55 = 0,45$.

სასწავლო დავალებები

1. თითოეული ხდომილობისათვის დაწერეთ ელემენტარული ხდომილობათა სივრცე:

ა) ორი მონეტის ერთდროული აგდების ცდის;
ბ) ოჯახში მყოფი სამი ბავშვიდან გოგო-ბიჭების რაოდენობის.

2. მომხმარებელთა უფლებების დაცვის ორგანიზაციის მოცემული ინფორმაციის თანახმად, ახლად შეძენილი ავტომობილების 17%-ს ერთხელ, 7%-ს ორჯერ, 4%-ს კი 3-ჯერ და მეტად შეკეთება ესაჭიროება. ამ ინფორმაციის მიხედვით იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ერთი ავტომობილი შეკეთებაზე:

ა) საერთოდ არ მიმართავს.
ბ) ექნება არაუმეტეს ერთი მიმართვისა;
გ) ექნება სულ მცირე ერთი მიმართვა მაინც.

3. სისხლის ჯგუფები O (I ჯგუფი), A (II ჯგუფი), B (III ჯგუფი) და AB (IV ჯგუფი) სახით აღინიშნება. წითელი ნახევარმთვარის ორგანიზაციის მოცემული ინფორმაციის მიხედვით კატასტროფის მომხდარ ქალაქში მოსახლეობის 45% - O, 40% - A, 11% - B, დანარჩენი კი AB ჯგუფს მიეკუთვნება.

1) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებაყოფლობით სისხლის მიმცემი პიროვნების სისხლის ჯგუფი იქნება:

ა) A და B; ბ) A ან B; გ) არა O.

2) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სისხლის მიმცემი ორი პიროვნებიდან ერთი ეკუთვნის A, ხოლო მეორე B სისხლის ჯგუფს.

4. ყუთში 7 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა. იპოვეთ ალბათობა იმის ხდომილობისა, რომ შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთულიდან სულ მცირე ერთი მაინც იქნება თეთრი.

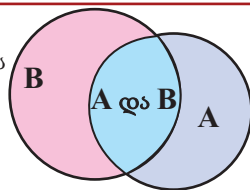
შემთხვევითი ხდომილობა და ალბათობა

ორი ხდომილობის მოხდენის ალბათობა.

ზოგადად ნებისმიერი $A \subset U$ და $B \subset U$ ხდომილობებისათვის

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

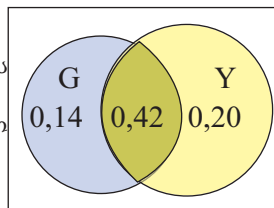
ფორმულა არის მართებული.



ნიმუში. სტუდენტებიდან 56% სტუდენტულ ქალაქში ცხოვრობს, 62% კი აქ მხოლოდ საჭმელს იღებს, 42% კი თან საჭმელს იღებს, თანაც რჩება საცხოვრებლად სტუდენტულ ქალაქში. თუ სტუდენტებიდან ერთ სტუდენტს შევარჩევთ, იპოვეთ:

ა) ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ცხოვრობს სტუდენტულ ქალაქში, მაგრამ იქ არ ჭამს;

ბ) ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი არ ცხოვრობს საერთო საცხოვრებელში და არც საჭმელს იღებს იქ.



ამოხსნა: ა) ავლენიშნით: $G = \{\text{სტუდენტულ ქალაქში მცხოვრები სტუდენტები}\}$, $Y = \{\text{სტუდენტები რომლებიც სტუდენტულ ქალაქში იკვებებიან}\}$. პირობის თანახმად $P(G \cap Y) = 0,42$ -ია.

რადგან $P(G) = 0,56$, ამიტომ $P(G \cap \bar{Y}) = 0,56 - 0,42 = 0,14$;

ბ) $P(\bar{G} \cap \bar{Y}) = 0,62 - 0,42 = 0,20$; $0,14 + 0,42 + 0,20 = 0,76$ ჯამი უჩვენებს ალბათობას იმისა, რომ შერჩეული სტუდენტი სტუდენტულ ქალაქში ცხოვრობს ან იქ საჭმელს იღებს. მაშინ, ალბათობა იმისა, რომ ერთი სტუდენტი არც სტუდენტულ ქალაქში ცხოვრობს და არც იქ საჭმელს სჭამს $P(\bar{G} \cap \bar{Y}) = 1 - 0,76 = 0,24$ ტოლი იქნება.

პირობითი ალბათობა. ზოგჯერ დამატებითი ინფორმაციები ცდასთან დაკავშირებული შედეგების მოხდენის შანსებზე ახდენს გავლენას. მაგალითად, კამათელის გაგორების ცდასას თუ ცნობილია, რომ მოსული ქულა ლუწი იქნება, მაშინ თითოეული ლუწი

ქულის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{3}$ იქნება. თუმცა, ამ ინფორმაციის არ არსებობის შემთ-

ხვევაში, თითოეული ქულის, მათ შორის ლუწი ქულის მოსვლის ალბათობა იყო $\frac{1}{6}$

მაშასადამე, რომელიმე ხდომილობის ალბათობის გამოთვლისას მასზე შესაძლო გავლენის მომხდენი სხვა ხდომილობის გათვალისწინებაც შეიძლება გახდეს საჭირო.

B ხდომილობის მოხდენის პირობებში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობას

პირობითი ალბათობა ეწოდება და $P(A|B)$ სახით აღინიშნება.

ნიმუში. ფსიქოლოგებმა დაახლოებით $\frac{1}{3}$ სოფლის, $\frac{1}{3}$ ქალაქის გარეუბნებისა და $\frac{1}{3}$ ქალაქის ცენტრში არსებული სკოლებიდან შემთხვევითი შერჩევის წესით შერჩეულ 478 მოსწავლეს შორის ჩაატარეს გამოკითხვა. ერთ-ერთი შეკითხვა და შესაძლო პასუხის არჩევნები ქვემოთაა მოცემული.

რომელია თქვენთვის უფრო მნიშვნელოვანი?

პოპულარობა

უმაღლესი განათლება

პროფესიონალიზმი

გამოკითხვის შედეგები ცხრილშია მოცემული:

	პოპულარობა	უმაღლესი განათლება	პროფესიონალიზმი	სულ
ბიჭები	117	50	60	227
გოგონები	130	91	30	251
სულ	247	141	90	478

შემთხვევითი ხდომილობა და ალბათობა

ალბათობა იმისა, რომ გამოკითხულთა შორის შემთხვევით შერჩეული ერთი პიროვნება გოგონა იქნება:

$$P(\text{გოგ}) = \frac{251}{478} = 0,525$$

პოპულარობის მსურველი გოგონების ალბათობა

$$P(\text{ცნობ. / გოგ.}) = \frac{130}{478} = 0,271$$

პროფესიონალად ყოფნის მსურველ მოსწავლეთა ალბათობა

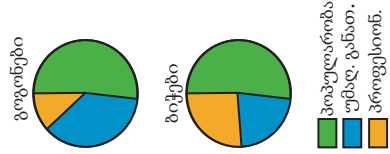
$$P(\text{პროფესი.}) = \frac{90}{478} = 0,188$$

თუ გოგონებს შორის ერთი შეირჩევა, შეიცვლება პროფესიონალიზმის მსურველთა ალბათობა?

$$P(\text{პროფ. / გოგ.}) = \frac{30}{251} = 0,120$$

მხოლოდ ბიჭებს შორის ერთი თუ შეირჩევა, პროფესიონალიზმის მსურველთა ალბათობა

$$P(\text{პროფ. / ბიჭი}) = \frac{60}{227} = 0,264$$



ზემოთ გამოთვლილი ალბათობებიდან ზოგიერთი ხელახლა ქვემოთ მოცემული წესით გამოვთვალოთ. მაგალითად,

$$P(\text{პროფ. / გოგ.}) = \frac{30/478}{251/478} = \frac{30}{251}$$

მაშასადამე, $P(\text{პროფ. / გოგ.}) = \frac{P(\text{გოგ. და პროფ.})}{P(\text{გოგ.})}$ ან კიდევ

$$P(\text{გოგ. / უმაღლ. განათ.}) = \frac{91/478}{141/478} = \frac{91}{141}$$

მაშასადამე, $P(\text{გოგ. / უმაღლ. განათ.}) = \frac{P(\text{უმაღლ. განათ. და გოგ.})}{P(\text{უმაღლ. განათ.})}$

თუ ამ ნიმუშებს განვაზოგადებთ, პირობითი ალბათობის ფორმულა ქვემოთ მოცემული სახისა იქნება:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ და } B)}{P(B)} \quad \text{და ან} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

სადაც $P(B) > 0$.

აქედან $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. *ალბათობების გამრავლების წესი.*

ნიმუში. ოჯახში ორი ბავშვია. თუ ბავშვებიდან ერთი ბიჭია, მაშინ იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბავშვი ბიჭი იქნება.

ამოხსნა: ავლნიშნოთ: ბიჭი-ბ, გოგონა - გ ასოთი. განვსაზღვროთ ელემენტარულ

ხდომილობათა სივრცე. $S = \{\text{ბბ, ბგ, გბ, გგ}\}$

ორივე ბიჭის ხდომილობა ავლნიშნოთ E-თი,

ერთი მაინც ბიჭის ყოფნის ალბათობა F-ით. მაშინ

$$E = \{\text{ბბ}\}, \quad F = \{\text{ბბ, ბგ, გბ}\}, \quad E \cap F = \{\text{ბბ}\}$$

$$P(F) = \frac{3}{4} \quad P(E \cap F) = \frac{1}{4} \quad P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

პირობითი ალბათობის ფორმულა არ არის დაკავშირებული ხდომილობათა დამოკიდებულებასა და დამოუკიდებლობასთან. ნებისმიერი რთული ხდომილების ალბათობის ამ ფორმულის მიხედვით გამოთვლა შეიძლება.

ნამუშაო. სტუდენტის საძინებელში მე-3 სართული ყველაზე კომფორტულად ითვლება და აქ 3 თავისუფალი ოთახია. სულ 12 ოთახია და ოთახები სტუდენტებს შორის ნომრის ამოღების გზით განისაზღვრება. ჯერ ელმირი იღებს ნომერს, შემდეგ მისი მეგობარი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მათგანი მე-3 სართულზე მოხვდება.

ამოხსნა:

გასაგებია, რომ ელმირის ამოღებული ნომერი უკან აღარ ბრუნდება და მეგობარი უკვე 12-ს კი არა 11 ბარათს იყენებს. ელმირის მე-3 სართულის არჩევის ალბათობა $\frac{3}{12}$ -ია. თუ ელმირი სასურველ ოთახს მიიღებს, მაშინ მეგობრის შანსი $\frac{2}{11}$ იქნება.

ელმირის მე-3 სართულის არჩევის პირობებში, მეგობრის მიერაც მე-3 სართულის არჩევის ალბათობა უნდა გამოვთვალოთ პირობითი ალბათობის ფორმულის გამოყენებით.

$$P(\text{ელ. და მ}) = P(\text{ე}) \times P(\text{მ} / \text{ელ.}) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \approx 0,045$$

თუ $P(A|B) = P(A)$ იქნება, ანუ B ხდომილობის მოხდენა არ ცვლის A ხდომილობის ალბათობას, მაშინ A და B ხდომილობებს **დამოუკიდებელი ხდომილობები** ეწოდება. როცა A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ მართებულია $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ტოლობა.

ნამუშაო. სურსათით უზრუნველყოფით დასაქმებულ კომპანიას ყოველ დილით სასადილოში ახალი პური უნდა მოჰქონდეს. სასადილოს გამგე ამბობს, რომ ამის ალბათობა 0,85-ია. თუ თქვენ ამ სასადილოში 4 დღე ზედიზედ საუზმის მირთმევა მოგიწევთ, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყოველ დილით საუზმეზე ახალი პური გექნებათ.

ამოხსნა: ვინაიდან ყოველ დილით ახალი პურის მოტანის ხდომილობა, სხვა დღეებში ახალი პურის მოტანაზე არ არის დამოკიდებული საძიებელი ალბათობა $0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 \approx 0,522$ იქნება.

ნამუშაო. პარკში 3 თეთრი და 7 შავი ბურთულაა. უკან დაუბრუნებლობის პირობით პარკიდან ამოიღება ორი ბურთულა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბურთულა იქნება თეთრი.

ამოხსნა: A_1 და A_2 -ით ავლენიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ შესაბამისად პარკიდან ამოსული 1-ლი და მე-2 ბურთულა იქნება თეთრი. ხდომილობა ხდება იმ შემთხვევაში, როცა ორივე ბურთულა თეთრი ფერისაა, ან კიდევ 1-ლი ამოსული შავი, მეორე კი თეთრი ფერისაა.

$$\text{მაშასადამე, } A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)$$

$$\begin{aligned} \text{მაშინ } P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2|\bar{A}_1) = \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \end{aligned} \text{ იქნება.}$$

სასწავლო დაგეგმვები

1. ოჯახში ორი ბავშვია. ქვემოთ მოცემული პირობების მიხედვით გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბავშვი გოგონაა. ა) უმცროსი ბავშვი გოგონაა; ბ) ერთ-ერთი გოგონაა.
2. ექიმთან მიმართვაზე მყოფი ბავშვების სამოცდაათი პროცენტი ციებას, ოცდაათი პროცენტი კი ყელის ტკივილს უჩიოდა. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ ერთ ბავშვს ექნება როგორც ციება, ისე ყელის ტკივილი.
3. დავუშვათ, რომ ვინმე პიროვნების 80 წლამდე სიცოცხლის ალბათობა $P(B) = 0,3$, 90 წლამდე სიცოცხლის ალბათობა კი $P(A) = P(A \cap B) = 0,2$ -ია.
ა) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 80 წლამდე მიღწეული პიროვნება იცოცხლებს 90 წლამდე.
ბ) $P(B/A)$ ხდომილობის ალბათობაც 1-ის ტოლია. დაასაბუთეთ ეს მოსაზრება და განმარტეთ სიტუაციის შესაბამისად.
4. კამათელი სამჯერ გააგორეს. A და B ხდომილობები განისაზღვრა ქვემოთ მოცემული პირობით.
 A ხდომილობა: ყოველი მესამე გაგორებისას 4-ის მოსვლა ივარაუდება,
 B ხდომილობა: ყოველი პირველი გაგორებისას 6-ის, ყოველი მეორე გაგორებისას 5-ის მოსვლა ივარაუდება.
გამოთვალეთ B ხდომილობის მოხდენა და A ხდომილობის არ მოხდენა.
5. ავტომობილის საბურავების მწარმოებელმა კომპანიამ გაავრცელა ინფორმაცია, რომ პროდუქციის 2%-ს შეიძლება გააჩნდეს წუნი. თუ თქვენ ამ კომპანიის 4 საბურავს შეიძენთ, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის სულ მცირე ერთი იქნება დეფექტიანი.
6. ყუთში არის ერთნაირი ფორმის ბარათები, რომლებსაც აწერია ციფრები 1, 2, 3, 4 და 5. ყუთიდან მიმდევრობით იღებენ ორ ბარათს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორედ ამოღებული ბარათის ციფრი იქნება კენტი, თუ პირველად ამოღებული ბარათის ციფრი არის:
ა) ლუწი; ბ) კენტი.
7. პირველი მსროლელის ერთი გასროლით მიზანში მოხვედრების ალბათობა, 0,8, მეორისა კი 0,6 -ია. მსროლელები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ახდენენ თითო გასროლას. იპოვეთ ქვემოთ მოცემულ ხდომილობათა ალბათობა:
ა) მიზანში მხოლოდ პირველი მსროლელი მოახვედრებს;
ბ) მიზანში ორივე მსროლელი მოახვედრებს;
გ) მიზანში მოუხვედრელობის;
დ) მიზანში ერთ-ერთი მსროლელი მოახვედრებს;
ე) მიზანში მსროლელებიდან ერთ-ერთი მაინც მოახვედრებს.
8. ორი ერთნაირი ყუთიდან პირველში 2 თეთრი და 1 შავი, მეორეში კი 1 თეთრი და 4 შავი ბირთვია. შემთხვევით შეირჩევა ერთი ყუთი და ერთი ბირთვი ამოიღება. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა თეთრი იქნება.

განმაზოგადებელი დაგვლებები

1.

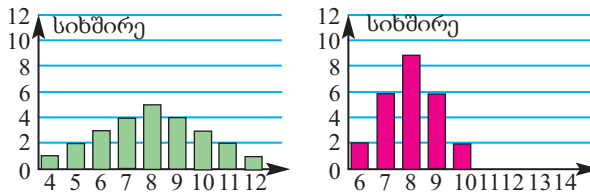
მოცემული ერთობლიობის მიხედვით გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

- ა) 11 10 8 4 6 7 11 6 11 7
 ბ) 13 23 15 13 18 13 15 14 20 20 18 17 20 13
 გ) 15 8 12 5 19 14 8 6 13
 დ) 24 26 27 23 9 14 8 8 26 15 15 27 11

2.

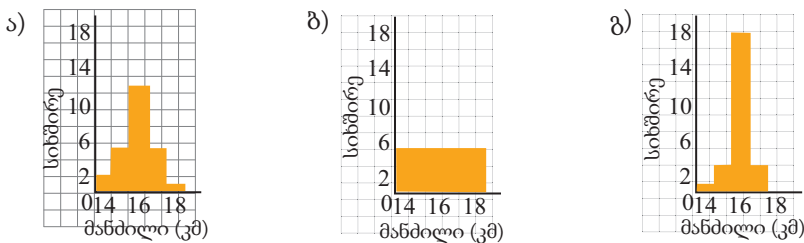
ქვემოთ მოცემულ გრაფიკებზე ინფორმაცია სიმეტრიულად არის განაწილებული.

- ა) გამოთვლების წარმოების გარეშე განსაზღვრეთ რომელ სტატისტიკურ ინფორმაციაში არის სტანდარტული გადახრა უფრო მეტი?
 ბ) თითოეული შემთხვევისათვის გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო და სტანდარტული გადახრა.
 გ) დახაზეთ ნორმალური განაწილების დიაგრამა.



3.

გამოთვლების წარმოების გარეშე გამოთქვით თქვენი მოსაზრება იმის შესახებ, თუ რომელ გრაფიკზე მოცემულ ინფორმაციაში არის სტანდარტული გადახრა მეტი.



4.

მაღაზიაში გაყიდვაში არსებული ვაკუუმით დაფასოებული მზა საჭმლის შენახვის ვადა ნორმალური განაწილების შესაბამისად, საშუალო ანგარიშით 180 დღე, სტანდარტული გადახრა კი 30 დღეა. საჭმლის რამდენი პროცენტის შენახვის ვადა არის:

- ა) 150 დღესა და 210 დღეს შორის;
 ბ) 180 დღესა და 210 დღეს შორის;
 გ) 90 დღეზე ნაკლები;
 დ) 210 დღეზე მეტი?

განმაზოგადებელი დაგალებები

5. ყუთში 10 შავი და 5 თეთრი ბურთულაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან უკან დაუბრუნებლად ზედიზედ ამოღებული ორი ბურთულიდან ორივე შავი იქნება.

6. 28 პიროვნებას შორის ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, თუ დღეში რამდენ საათს უყურებს ტელევიზორს. წარმოადგინეთ გამოკითხვის შედეგები ყუთი-სახელურის დიაგრამით.

2	4	3	1	5	7	1	4	3	2	6	4	5	5
2	0	3	5	9	4	5	2	1	3	6	7	2	4

ა) გამოკითხულთა რამდენი პროცენტი უყურებს ტელევიზორს 4 საათზე მეტ ხანს?
 ბ) თუ გამოკითხულთა შორის, შემთხვევით შერჩეული იქნება ერთი პიროვნება, რა იქნება ალბათობა იმისა, რომ იგი იქნება იმათგანი, ვინც ორ საათზე მეტხანს არ უყურებს ტელევიზორს?

7. სკოლაში 1000 მოსწავლე იღებს განათლებას. მათ შორის 430 გოგონაა. გოგონების 10%-ი მე-8 კლასელია. თუ შემთხვევით შეირჩევა ერთი მოსწავლე, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის იქნება მე-8 კლასელი გოგონა.

სიხშირეთა ცხრილი პლასტიკური სათამაშოების დამამზადებელ კომპანიაში მომუშავე შემთხვევით შერჩეული 100 პიროვნების კვირეულ ხელფასს უჩვენებს.	კლასები	სიხშირე
ა) სიხშირის ცხრილში მოცემული ინფორმაცია წარმოადგინეთ ნორმალი განაწილების მრუდით.	150 – 158	5
ბ) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ერთი პიროვნების კვირეული ხელფასი 170 მანეთზე მეტის მქონეთა შორის იქნება.	159 – 167	16
	168 – 176	20
	177 – 185	21
	186 – 194	20
	195 – 203	15
	204 – 212	3

9. ორი კამათელი გააგორეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ მათგანზე მოვა 3, ხოლო მეორეზე 5 ქულა.

10. ყუთში ჩაწყობილია ბარათები, რომლებზეც თითოეულზე თითო აზერბაიჯანული ასო აწერია. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 2 ბარათს, გამოთვალეთ ალბათობები: ა) P(2 ხმოვანი); ბ) P(2 თანხმოვანი); გ) P(1 ხმოვანი; 1 თანხმოვანი).

11. ქვემოთ მოცემული მნიშვნელობების მიხედვით განსაზღვრეთ ინფორმაციის განაწილების ფორმა

ა) არითმეტიკული საშუალო = 35 მედიანა = 40 მოდა = 45
 ბ) არითმეტიკული საშუალო = 50 მედიანა = 51 მოდა = 38

12. ნორმალ განაწილებაში არითმეტიკული საშუალო 27, სტანდარტული გადახრა 5-ია. თუ შემთხვევით შეირჩევა ერთი მნიშვნელობა, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის მოცემულ ინტერვალში იქნება.

ა) 22-სა და 32 შორის; ბ) არა ნაკლებ 37-ისა;
 გ) არა უმეტეს 32-ისა; დ) 27-სა და 37 შორის.

- ირაციონალური განტოლებები
- ირაციონალური უტოლობები
- მაჩვენებლიან განტოლებათა სისტემა
- ლოგარითმულ განტოლებათა სისტემა
- ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა
- განმაზოგადებელი დავალებები

ეს საინტერესოა!

პალეონტოლოგები ორგანიზმების ნაშთებისა და მათი ქმედების ნიშნების საფუძველზე დედამიწის გეოლოგიური ევოლუციის, ცოცხალი სამყაროსა და მისი განვითარების კანონზომიერებებს შეისწავლიან. ამ დროს მათ უწევთ მრავალრიცხოვანი სხვადასხვა სახის განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების (ექსპონენ-ციალური, ლოგარითმული და სხვ.) ამოხსნა.



ირაციონალური განტოლებები

განტოლებას, რომელიც შეიცავს ცვლადს ფესვის ნიშნის ქვეშ (ან წილად-მაჩვენებლიან ხარისხშია აყვანილი) ირაციონალური განტოლება ეწოდება.

ნიმუშები. $\sqrt[3]{x+2} - x = 3$; $\sqrt{x-1} = 5$

ირაციონალური განტოლებების ამოხსნისას, როგორც წესი ახარისხების მოქმედება გამოიყენება, ამ დროს საჭიროა გათვალისწინებული იქნას შემდეგი:

- ირაციონალური განტოლების ამონახსენი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში მოიძებნება.
- ლუწი ხარისხიდან ფესვის მნიშვნელობა, კენტი ხარისხიდან კი რადიკალების ნამდვილი მნიშვნელობები აიღება.
- განტოლების ორივე მხარის კენტ ხარისხში ახარისხებისას მისი ტოლფასი განტოლება მიიღება.
- ლუწ ხარისხში ახარისხებისას ახალ განტოლებაში ცვლადის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიძლება გაფართოვდეს. ამის შედეგად მიღებული განტოლების ფესვებიდან ზოგიერთმა შეიძლება მოცემული ირაციონალური განტოლება არ დააკმაყოფილოს. ამიტომაც, ლუწ ხარისხში ახარისხებისას საჭიროა შემოწმდეს აკმაყოფილებს თუ არა მოძებნილი მნიშვნელობები მოცემულ განტოლებას.

ნიმუში 1. ამოხსენით განტოლება: $\sqrt{x-3} + x = 5$

ამოხსნა: $\sqrt{x-3} = 5 - x$ რადიკალიანი გამოსახულება განტოლების ერთ მხარეს გამოვადგავთ,
 $x - 3 = (5 - x)^2$ განტოლების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში,
 $x^2 - 11x + 28 = 0$ გავამარტივოთ და ამოვხსნათ.
 $x_1 = 4, x_2 = 7$

შემოწმება. როცა $x = 4$, მაშინ $\sqrt{4-3} + 4 = 5$; $5 = 5$

როცა $x = 7$, მაშინ $\sqrt{7-3} + 7 = 5$; $9 \neq 5$

$x = 7$ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. პასუხი: $\{4\}$

ავღნიშნოთ, რომ $\sqrt{x-3} = 5 - x$ განტოლება მის ტოლფას $\begin{cases} x - 3 = (5 - x)^2, \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$ სისტემაზე დაყვანილად შეიძლება ამოიხსნას.

ამ ხერხით ამოხსნა თქვენ შეასრულოთ!

სასწავლო დაგვარებები

1. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\sqrt{x+3} - 3 = 1$	ბ) $\sqrt{3t+4} + 2 = 1$	გ) $\sqrt{x^2-7} - 1 = 2$
დ) $\sqrt[3]{1-2x} + 1 = 4$	ე) $\sqrt[4]{x^2+16} = \sqrt{5}$	ვ) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+2}} = 3$
ზ) $\sqrt{x-2} + x = 8$	თ) $\sqrt{x^2-x-4} = x+2$	ი) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

2. ამოხსენით განტოლებები სხვადასხვა ხერხით.

ა) $\sqrt{x^2+4x+4} = 3$ ბ) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x+1$ გ) $\sqrt{x^2+6x+9} = x+5$

3. რამდენი ნამდვილი რიცხვი აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას?

ა) $(x^2-1)\sqrt{x+5} = 0$ ბ) $(x^2-4)\sqrt{x-1} = 2x^2-8$ გ) $\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-4} = 3$

ირაციონალური უტოლობები

უტოლობას, რომელიც შეიცავს ცვლადს ფესვის ნიშნის ქვეშ, ირაციონალური უტოლობა ეწოდება. ირაციონალური უტოლობების ამონახსენიც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში მოიძებნება და ფესვი უტოლობების თვისებების გამოყენებით რაციონალური უტოლობის სისტემის ამოხსნაზე დაიყვანება.

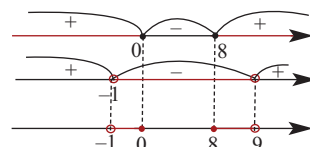
ნამუშაუ. ამოხსენით უტოლობა $\sqrt{x^2 - 8x} < 3$

ამოხსნა: მოცემული უტოლობის ამონახსენი ცვლადის შესაძლო მნიშვნელობების პირობით ანუ $x^2 - 8x \geq 0$ პირობის ფარგლებში ორივე მხარის კვადრატში ახარისხებით $x^2 - 8x < 9$ უტოლობის ამოხსნაზე, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ქვემოთ მოცემული სისტემის ამოხსნაზე დაიყვანება:

$$\begin{cases} x^2 - 8x \geq 0 \\ x^2 - 8x < 9 \end{cases}$$

სისტემაში შემავალ თითოეულ უტოლობას ვხსნით ინტერვალთა მეთოდით და ვპოულობთ ამ ამონახსენთა თანაკვეთას:

$$\begin{cases} x^2 - 8x \geq 0 \\ x^2 - 8x < 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - 8) \geq 0 \\ (x - 9)(x + 1) < 0 \end{cases}$$



პასუხი: $(-1; 0] \cup [8; 9)$

ნამუშაუ: ამოხსენით უტოლობა. $\sqrt{x + 3} > x + 1$

ამოხსნა: მარჯვენა მხარის ნიშნის გამო განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) თუ $x + 1 < 0$, მაშინ უტოლობა $x + 3 \geq 0$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყველა x -სათვის აკმაყოფილებს. მაშასადამე,

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

სისტემა უნდა ამოვხსნათ.

მისი ამონახსენია $[-3; -1)$ შუალედი.

2) თუ $x + 1 \geq 0$ მაშინ უტოლობის ორივე მხარე შეგვიძლია ავიყვანოთ კვადრატში, ანუ ამ შემთხვევაში

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 3 > (x + 1)^2 \end{cases}$$

სისტემას მივიღებთ. ამ სისტემის ამონახსენია $[-1; 1)$ შუალედი.

მოცემული უტოლობის ამონახსენი იქნება: $[-3; -1) \cup [-1; 1) = [-3; 1)$.

სასწავლო დავალებები

4. ამოხსენით უტოლობები.

- | | | | |
|---|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sqrt{x - 3} \geq 2$ | 2) $\sqrt{2t - 3} > 1$ | 3) $\sqrt{2x + 3} < 3$ | 4) $\sqrt{x - 4} \leq 2$ |
| 5) $\sqrt{x^2 + 15x} > 4$ | 6) $\sqrt{x^2 - 3x} \leq 2$ | 7) $\sqrt[3]{x^2 - 2x} > 2$ | 8) $\sqrt[4]{x^2 - 3x} < \sqrt{2}$ |
| 9) $(x^2 - 4x) \cdot \sqrt{3 - x} \leq 0$ | 10) $\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq -1$ | 11) $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$ | |
| 12) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 2$ | 13) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} > 3$ | 14) $\sqrt{x^2 + 18} \geq 2 - x$ | |
| 15) $\sqrt{24 - 5x} < x$ | 16) $\sqrt{x + 2} > x$ | 17) $\sqrt{x^2 - 2x} > 1 - x$ | |

მაჩვენებლიან განტოლებათა სისტემა

მაჩვენებლიანი განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, არ განსხვავდება სხვა განტოლებათა სისტემის ამოხსნისაგან. აქაც ჩასმის, ალგებრული შეკრების, გრაფიკული ამოხსნის და სხვა ხერხი გამოიყენება.

ნიმუში 1: ამოხსენით განტოლებათა სისტემა
$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$$

ამოხსნა: მოცემული განტოლებათა სისტემა ჩავწეროთ

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3 \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases}$$
 სახით. სისტემაში შემავალი განტოლებებიდან თითო-ეულში ხარისხის მაჩვენებლების გატოლებით მივიღებთ
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$
 წრფივ განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემის ამონახსენი (2;1) წყვილია.

ნიმუში 2: ამოხსენით განტოლებათა სისტემა
$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$$

ამოხსნა: სისტემის პირველი განტოლებიდან $x=y+1$ შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა მეორე განტოლებაში, y -ის მიმართ მივიღებთ $2^{y+1}+2^y=12$ განტოლებას. მისი $2^y(2+1)=12$ ანუ $2^y=4$ სახით ჩაწერა შეიძლება აქედან $y=2$ და მაშინ $x=2+1=3$ იქნება.

ამრიგად, მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსენი (3; 2) წყვილია.

ნიმუში 3: ამოხსენით განტოლებათა სისტემა
$$\begin{cases} 2^{y-x}-5^y=3 \\ 2^{y-x}+5^{y-1}=9 \end{cases}$$

ამოხსნა: თუ სისტემის I განტოლებას გავამრავლებთ (-1)-ზე და II-თან წევრ-წევრ შევკრებთ $5^y+5^{y-1}=6$ განტოლებას მივიღებთ. იგი $5^y(1+\frac{1}{5})=6$ სახით ჩავწეროთ.

აქედან $y=1$ ვპოულობთ. $y=1$ მნიშვნელობა შევიტანოთ სისტემის I განტოლებაში:

$$2^{1-x}-5=3; \quad 2^{1-x}=8; \quad 1-x=3; \quad x=-2$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსენი (-2;1) წყვილია.

სასწავლო დაგალებები

1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.

ა)
$$\begin{cases} 2^{x+y}=32 \\ 5^{x+3y}=0,2 \end{cases}$$

დ)
$$\begin{cases} 4^{x-y}=128 \\ 3^{3x+2y-3}=1 \end{cases}$$

ზ)
$$\begin{cases} 2^x+2^y=36 \\ x-y=3 \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y=18 \\ 2^y \cdot 3^x=12 \end{cases}$$

ე)
$$\begin{cases} 3^x-3^y=8 \\ 3^{x+y}=27 \end{cases}$$

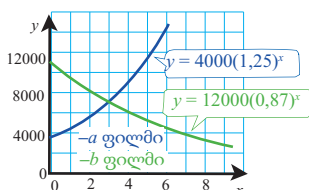
თ)
$$\begin{cases} 2^x+3^{y-1}=17 \\ 2^{x+2}-3^y=5 \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} 3^x-2^{x+y}=1 \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=19 \end{cases}$$

ვ)
$$\begin{cases} 2^{y-x}-5^y=3 \\ 2^{y-x}+5^{y-1}=9 \end{cases}$$

ო)
$$\begin{cases} 3^x+3^y=10 \\ x-y=1 \end{cases}$$

2. სურათზე მოცემულ გრაფიკზე 2004 წლიდან ორი სხვადასხვა ფილმის მაყურებელთა რაოდენობის წლების რაოდენობაზე (x) დამოკიდებულება არის მოცემული. დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები ფილმების მაყურებლების ცვლილებისა და ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის შესახებ.



ლოგარითმულ განტოლებათა სისტემა

ლოგარითმულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაშიც ჩასმის, ალგებრული შეკრების და სხვა ხერხები, ასევე ლოგარითმული ფუნქციის ცნობილი თვისებები გამოიყენება. განვიხილოთ ეს კონკრეტულ მაგალითებზე:

ნიმუში: ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$$

ამოხსნა: ცხადია რომ, $x > 0, y > 0$ უნდა იყოს.

სისტემის პირველი განტოლებიდან $y = 6 - x$, მეორე განტოლებიდან კი $\log_2(xy) = 3$ ანუ $xy = 8$ მიიღება.

ამრიგად, მივიღებთ სისტემას:
$$\begin{cases} y = 6 - x \\ xy = 8 \end{cases}.$$

$y = 6 - x$ მნიშვნელობის $xy = 8$ განტოლებაში შეტანით $x^2 + 6x + 8 = 0$ კვადრატული განტოლება მიიღება. მისი ფესვები $x_1 = 2, x_2 = 4$ რიცხვებია. მაშინ მნიშვნელობის შეტანით $y_1 = 4, y_2 = 2$ ვპოულობთ. მოცემული სისტემის ამონახსენი $(2; 4)$ და $(4; 2)$ წყვილებია.

ნიმუში: ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.
$$\begin{cases} \log_2(x - y) = 1 \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$$

ამოხსნა: სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ: $x - y = 2$ აქედან $x = 2 + y$ მნიშვნელობის სისტემის მეორე განტოლებაში შეტანით, მისი $2^{2+y} \cdot 3^{y+1} = 72$ ანუ $3^{y+1} \cdot 2^{y+1} = 36$ სახეზე დაყვანა შეიძლება. მისი $6^{y+1} = 6$ სახით ჩაწერით მივიღებთ, რომ, $y = 1$. მაშინ $x = 3$. ამრიგად, $(3; 1)$ წყვილი მოცემული სისტემის ამონახსენია.

სასწავლო დაფალებები

1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.

ა)
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

გ)
$$\begin{cases} \log_2(x + y) = 3 \\ \log_4(x - y) = 1 \end{cases}$$

დ)
$$\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1 \\ \log_3(xy) = 3 \end{cases}$$

ე)
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

ვ)
$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ \lg x - \lg y = 2 \end{cases}$$

ზ)
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 324 \\ \log_2(x - y) = 1 \end{cases}$$

თ)
$$\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^y = 24 \\ \log_3(y - x) = 1 \end{cases}$$

ი)
$$\begin{cases} \log_2 x + 2^{\log_2 y} = 5 \\ y^x = 625 \end{cases}$$

კ)
$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 12 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$$

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ ისეთი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ნიმუშები, რომლებშიც ერთი ალგებრული და ერთი ტრიგონომეტრიული განტოლება ან კიდევ ორივე ტრიგონომეტრიული განტოლებაა:

ნიმუში. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$$

ამოხსნა: $y = \frac{\pi}{2} - x$ მნიშვნელობის ჩასმით მეორე განტოლება $\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ სახით ჩავწერთ.

რადგან დაყვანის ფორმულის თანახმად $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, ამიტომ აქედან

$$\sin x + \cos x = 0$$

განტოლებას მივიღებთ. ორივე მხარის $\cos x$ -ზე გაყოფით დავიყვანოთ $\tan x + 1 = 0$ სახეზე.

რადგან $\tan x = -1$ განტოლების ამონახსენია $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ამიტომ ჩანაცვლებით $y = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4} + \pi n)$, ანუ $y = \frac{3}{4}\pi - \pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$) იქნება.

ამრიგად, მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსენი

$$(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3}{4}\pi - \pi n) \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ იქნება.}$$

როგორც ხედავთ, მოცემული სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე მთელ მნიშვნელობათა მიმღებ მხოლოდ ერთ n პარამეტრზე დამოკიდებული.

როგორც წესი, ორცვლადიან ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები ორ პარამეტრზე არიან დამოკიდებული.

ნიმუში. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.
$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

ამოხსნა: სისტემის მეორე განტოლების მარცხენა მხარის მამრავლებად დაშლისა და სისტემის პირველი განტოლების მხედველობაში მიღებით

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1 \\ \sin x + \cos y = 1 \end{cases}$$

სახის განტოლებათა სისტემა მიიღება. საიდანაც $\sin x = 1$, $\cos y = 0$ განტოლებები მიიღება.

ვინაიდან ამ განტოლებების შესაბამისი ამონახსნები არის

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ამიტომ მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსენი

$$(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \quad (n, k \in \mathbb{Z}) \text{ იქნება.}$$

სასწავლო დაგეგმვა

1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.

ა)
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$$

გ)
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$$

დ)
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ე)
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}$$

ვ)
$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases}$$

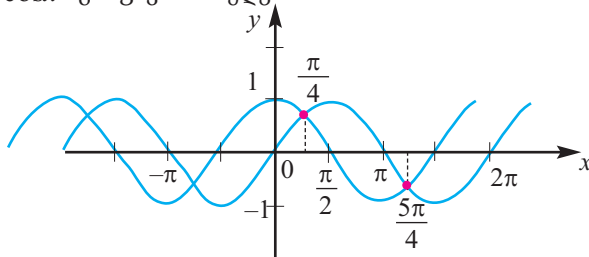
ზ)
$$\begin{cases} \cos(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

თ)
$$\begin{cases} \sin(x + y) = \frac{1}{2} \\ \sin(y - x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ი)
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4} \\ \sin y \cos x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

კ)
$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$$

2. ა)
$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$$
 სისტემის ამონახსენი დაწერეთ $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში გრაფიკის მიხედვით.



ბ)
$$\begin{cases} y = \sin x - 1 \\ y = \cos x + 1 \end{cases}$$
 ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ა პუნქტში არსებული გრაფიკით. აქვს ამ სისტემას ამონახსენი?

გ)
$$\begin{cases} y = \sin 2x \\ y = \cos x \end{cases}$$
 ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ა პუნქტში არსებული გრაფიკით და დაწერეთ სისტემის ამონახსენი $0 < x < 2\pi$ ინტერვალში.

3.
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1,5 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1,25 \end{cases}$$
 ამოხსენით განტოლებათა სისტემა $\sin x = u$, $\cos y = v$ ჩასმის ხერხით.

4. უჩვენეთ, რომ
$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$
 განტოლებათა სისტემის ამოხსენის სახის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსენაზე დაყვანა,

განმაზოგადებელი დაგვლებები

1. $x^2 - y^2 = 17$ პირობის დამაკმაყოფილებელი x და y ნატურალური რიცხვებისათვის იპოვეთ $x \cdot y$ ნამრავლი.

2. იპოვეთ $y = 2x^2 + 3x - 7$ პარაბოლისა და $y = 4x - 4$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

3. გამოსახეთ ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნები x ცვლადებისათვის ნამდვილი რიცხვებით, θ ცვლადისათვის გრადუსებით.

$$\sin 2\theta + 2 \cos \theta = -2, 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

$$\cos 2\theta + \cos \theta = 0, 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

$$\cos 2\theta + \sin^2 \theta = 0, 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

$$\cos x = \operatorname{ctg} x, 0 \leq x \leq 2\pi$$

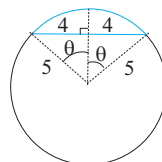
$$2 \sin^2 \theta + \sin 2\theta = 0,$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta,$$

$$\operatorname{tg} x = -2 \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$4 \cos^2 2x - 4 \cos 2x + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$$

4. 5 სმ რადიუსის მქონე წრეწირში, იპოვეთ 8 სმ ქორდის მომჭიმავი რკალის სიგრძე. პასუხი მეთაუდებამდე დამარგვალეთ.



5. შეასრულეთ გაყოფის მოქმედება. განსაზღვრეთ ნაშთი.

$$(x^3 + 3x^2 - 67x + 27) : (x + 10)$$

$$(x^3 + 8x^2 - 8x - 2) : (x - 1)$$

$$(3m + 4 - 11m^2 + 5m^3) : (4 + 5m)$$

$$(54n^3 + 36n^2 + 54n - 16) : (9n - 3)$$

6. თუ წრის რადიუსი 5 სმ-დან 3 სმ-მდე შემცირდება, რამდენი პროცენტით შემცირდება მისი წრეწირის სიგრძე და ფართობი?

7. პირღია ყუთი მართკუთხა ფორმის მქონე მუყაოს კუთხეებიდან კვადრატული ფორმის ტოლი ნაწილების ამოჭრით, გადაკვეცვა, დაწებებითაა დამზადებული, რისი ტოლი უნდა იყოს 15 სმ×13 სმ ზომების მუყაოსაგან ამოჭრილი კვადრატების გვერდის ზომა, რათა ყუთის მოცულობა აღმოჩნდეს 185 სმ³?

8. პარალელოგრამის დიაგონალები $\vec{a} = \langle 3; 3; 0 \rangle$ და $\vec{b} = \langle -1; 1; 2 \rangle$ ვექტორებითაა განსაზღვრული.

ა) უჩვენეთ, რომ ეს პარალელოგრამი რომბია.

ბ) დაწერეთ რომბის გვერდის მაჩვენებელი ვექტორი და იპოვეთ გვერდის სიგრძე.

გ) იპოვეთ რომბის კუთხეები.

9. $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომ ამ წერტილზე გამავალი მხები $2x + y = 0$ წრფის პარალელური იყოს.

განმაზოგადებელი დაგვლებები

10. იპოვეთ ფუნქციების წარმოებული.

$$ა) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$დ) f(x) = e^x \cos 2x$$

$$ზ) f(x) = \sqrt{e^{4x} + 1}$$

$$ბ) y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$$

$$ე) y = \sin^2(3x-2)$$

$$თ) y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$გ) y = x^3 \sin 2x$$

$$ვ) y = (1 + \cos 2x)^2$$

$$ი) y = x^2 e^{3x}$$

11. ააგეთ $(x) = [x]$ მთელი- ნაწილი ფუნქციის გრაფიკი $[-2; 3]$ შუალედში, უზენეთ გადაკვეთის წერტილები, იპოვეთ მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები ამ წერტილებში.

12. განსაზღვრეთ შესაბამისობა.

$$1. f(x) = 2e^{2x}$$

$$ა) \text{პირველადი ფუნქცია } F(x) = \sin x^2 + c$$

$$2. f(x) = 2xe^{x^2}$$

$$ბ) \text{პირველადი ფუნქცია } F(x) = e^{2x} + c$$

$$3. f(x) = 2x \cos x^2$$

$$გ) \text{პირველადი ფუნქცია } F(x) = e^{x^2} + c$$

13. შეადარეთ რიცხვები:

$$1) a = 5^{200}, b = 3^{300}, c = 28^{100}$$

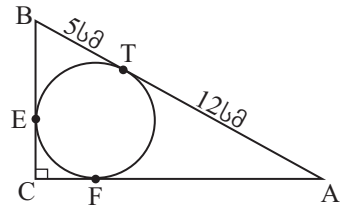
$$2) m = \log_4 3, n = \log_5 4$$

14. ამოხსენით უტოლობა:

$$ა) (0,3)^x > 3 \frac{1}{3}$$

$$ბ) 2^{\lg x} > \sin \frac{5\pi}{6}$$

15. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი.



16. გამოთვალეთ ზღვრები.

$$ა) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$ბ) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$$

$$გ) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

$$დ) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$ე) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{x^4 - 2x^3 + x - 2}$$

$$ვ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$$

17. რომელია ლუწი რიცხვი?

ა) ორი ლუწი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო.

ბ) ორი კენტი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო.

გ) ორი მთელი კვადრატული რიცხვის არითმეტიკული საშუალო.

დ) მამრავლებიდან ერთი 4-ის მქონე ორი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო.

ე) სამი მიმდევრობით მოცემული მთელი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო.

განმაზოგადებელი დაგვარებები

18. შეამოწმეთ, მოცემული ორწევრი არის თუ არა მოცემული მრავალწევრის მამრავლი.

1) $P(y) = y^5 + 6y^4 + 7y^2 + 33y - 54, \quad y + 6$

2) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 78x^3 + 84x^2 - 31x - 88, \quad x - 10$

3) $P(b) = b^5 + 8b^4 - 11b^2 + 10b - 8, \quad b - 1$

19. A და B რიცხვები მთელი რიცხვებია და $A : B$ შეფარდება $2 : 3$ სახისაა. თუ A და B რიცხვებიდან თითოეულს 100 მიემატება, მათი შეფარდება $3:4$ იქნება. იპოვეთ A და B რიცხვების მნიშვნელობები.

20. იპოვეთ ზღვრები.

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$ ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$

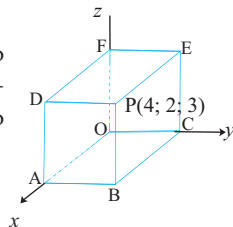
21. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ ფუნქციისათვის განსაზღვრეთ ქვემოთ აღნიშნულები:

- ა) კრიტიკული წერტილები;
- ბ) ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები;
- გ) ექსტრემუმები;
- დ) $[-2; 2]$ მონაკვეთზე უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

22. A $(-3; -4; 1)$, B $(-1; -2; 3)$ და C $(-7; 1; 0)$ სამკუთხედის წვეროების წერტილებია.

- ა) იპოვეთ $\angle B$.
- ბ) იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.
- გ) იპოვეთ სამკუთხედის სიბრტყის მართობული ერთეულოვანი ვექტორი.

23. სამგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში გამოსახული მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთ-ერთი წვეროს წერტილია $P(4; 2; 3)$. იპოვეთ პარალელეპიპედის დანარჩენი წვეროების კოორდინატები



24. იპოვეთ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები (თუ არსებობს).

ა) $3 - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ბ) $3\sin \alpha - 4\cos \alpha$

25. ამოხსენით განტოლება:

ა) $2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{x}} = 2$

ბ) $3 \cdot 4^{\sqrt{x}} + 2 \cdot 9^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 6^{\sqrt{x}}$

26. გამოთვალეთ ინტეგრალები.

ა) $\int_1^4 \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$

ბ) $\int_2^e \frac{1}{x} dx$

გ) $\int_0^1 x(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}) dx$

დ) $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx$

ე) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$

ვ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 \theta d\theta$

განმაზოგადებელი დაგალებები

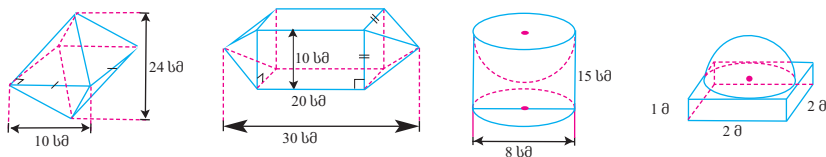
27. მოცემული პირობების მიხედვით დასაზეთ რაიმე $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

- ა) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 1$ და $f(5) = 0$
 ბ) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$ და $f(-1) = 5$
 გ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4$ და $f(2) = -4$

28. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 5 სმ და 12 სმ. იპოვეთ იმ კონუსის მოცულობა, რომელიც მიიღება:

- ა) 12 სმ სიგრძის;
 ბ) 5 სმ სიგრძის გვერდის გარშემო ბრუნვით.
 გ) დაწერეთ ა და ბ პუნქტებში ნაპოვნი მოცულობების შეფარდება.

29. მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ფიგურების მოცულობა.



30. გულნაზის კლასში საშინაო დავალებებს მასწავლებლის შერჩევით ყოველდღიურად თითო მოსწავლე განმარტავს. დღეს განმარტებისათვის შერჩეული მოსწავლე კვირის განმავლობაში აღარ შეიჩევა. კლასში 20 მოსწავლეა. გულნაზის ამ საქმისათვის ორმაზათს არჩევის ალბათობა და ოთხმაზათს არჩევის ალბათობა ერთი და იგივეა?

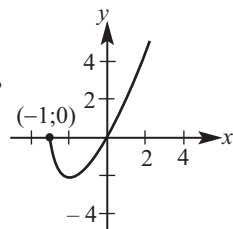
31. სახლის კლიტის კოდი ხუთციფრიანია. რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს: ა) ციფრების გამეორების შემთხვევაში; ბ) ციფრების განუმეორებლობის შემთხვევაში.

32. იპოვეთ $v(t) = 6t + 6$ სიჩქარით (მ/წმ) მოძრავი სხეულის $t = 1$ -დან $t = 4$ წამის განმავლობაში გავლილი მანძილი.

33. იპოვეთ $z = 4$ სიბრტყისა და $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ სფეროს გადაკვეთა.

34. არითმეტიკულ პროგრესიაში იპოვეთ მეხუთე წევრი, თუ $a_3 = 3$ და $a_7 = 17$. იპოვეთ ამ პროგრესიის იმ წევრების ჯამი, რომლებიც 30-ზე ნაკლებია.

35. გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ $f(x) = x\sqrt{x+1}$ ფუნქცია რომელ ინტერვალში არის უწყვეტი.



36. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$ გამოთვალეთ ზღვარი:

- 37.** ამანათის ველოსიპედიანი კურიერის საშუალებით მიწოდების მომსახურებისათვის კომპანიამ ამანათის მასაზე დამოკიდებულებით დაადგინა ქვემოთ მოცემული ფასები. 3 კგ-ზე მეტი წონის ამანათი არ მიიღება.

როცა $m \leq 100$ გრ მაშინ 15^რ

როცა $100 \text{ გრ} < m \leq 200$ გრ მაშინ 20^რ

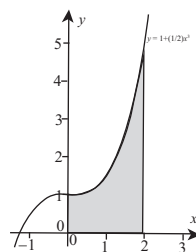
როცა $200 \text{ გრ} < m \leq 500$ გრ მაშინ 25^რ

როცა $200 \text{ გრ} < m \leq 3$ კგ მაშინ 45^რ

გამოსახეთ ეს სიტუაცია გრაფიკულად.

დაწერეთ გრაფიკის უწყვეტობის შესახებ.

- 38.** მოცემულია $y = 1 + \frac{1}{2}x^3$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ დაშტრიხული ფართობი.



- 39.** A (1;4) წერტილი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზეა. გრაფიკის 3 ერთეულით მარცხნივ პარალელური გადატანისა და x ღერძის მიმართ ასახვის მიხედვით დაწერეთ A წერტილის ახალი კოორდინატები.

- 40.** იპოვეთ კომპონენტებით მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი. განსაზღვრეთ ამ ვექტორებს შორის დარჩენილი კუთხე მეხვილია, ზღაგვია თუ 90° -ის ტოლია.

1) $\vec{a} = \langle -2; 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1; 2 \rangle$

2) $\vec{a} = \langle 2; 3; -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4; 3; -17 \rangle$

3) $\vec{a} = \langle 1; -2; 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3; -2; -2 \rangle$

- 41.** დაწერეთ P (1; 4; -2) წერტილზე გამავალი და $\vec{n} \langle 3; -1; 2 \rangle$ ვექტორის მართობული სიბრტყის განტოლება.

- 42.** ამოხსენით უტოლობები:

ა) $2(5-x) > 3x$ ბ) $\frac{x-3}{2-\sqrt{3}} > \sqrt{3} + 2$ გ) $4 < 2-3x \leq 8$ დ) $||x-3| - 1| < 3$

- 43.** ა) იპოვეთ 12 სმ და 16 სმ დიაგონალებიანი რომბის ფართობი, პერიმეტრი, სიმაღლე, და რომში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.
ბ) იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი 32 სმ, ხოლო სიმაღლეები 3 სმ და 5 სმ-ია.

განმაზოგადებელი დაგალებები

44. გამოთვალეთ $y = x^3$, $y = -x^3 + 2$, $x = 0$ და $x = 6$ წირებით შემოსაზღვრული ფართობი.

45. იპოვეთ $y = 4 - x^2$ ფუნქციის $[-2; 2]$ მონაკვეთზე გრაფიკით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილის x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ფიგურის მოცულობა.

46. 1) გამოთვალეთ გამოსახულებები.

ა) ${}_5P_3$, ${}_8P_6$, ${}_{11}P_8$, ${}_{12}P_5$, ბ) ${}_{15}C_8$, ${}_4C_1$, ${}_8C_6$, ${}_{12}C_3$,

2) რომელი მეტია: ${}_8P_r$ თუ ${}_8C_r$?

3) დაამტკიცეთ, რომ ${}_nP_r = {}_nC_{n-r}$

47. ლატარიის მოგება 0-დან 9-მდე ციფრებიდან ლატარიის ბორბლის არჩეული არაგანმეორებადი სამი ციფრით განისაზღვრება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ადილი არჩეული სამი ციფრით მიიღებს მოგებას?

48. ა) სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:5:6. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები და სიმაღლეები, თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 32 სმ-ია.

ბ) ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 15 სმ, ფუძისადმი გავლებული სიმაღლე 12 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი, ფართობი, ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსები.

49. ბაჰარმა მართონულ სირბილში მანძილის ერთი მეხუთედი ნაწილი გაიარა. თუ ის კიდევ 4 კმ-ს გაივლის, გარბენილი ექნება მთელი მანძილის ერთი მეოთხედი ნაწილი. რამდენი კილომეტრია გასარბენი მანძილის სიგრძე?

50. თუ პირველი 50 ნატურალური რიცხვის შემცველი სიმრავლიდან გამოვრიცხავთ 2-ისა და 3-ის ჯერადებს, რამდენი ელემენტი დარჩება სიმრავლეში?

51. $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $\sin y = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$ მოცემულის პირობ-

ებში იპოვეთ $\cos(x - y)$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

52. დიდი წრის რადიუსი და თითოეული პატარა წრის დიამეტრი 4 სმ-ია. იპოვეთ სურათზე დაშტრიხული ნაწილის ფართობი.



53. რომელ შუალედშია ზრდადი $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$ ფუნქცია?

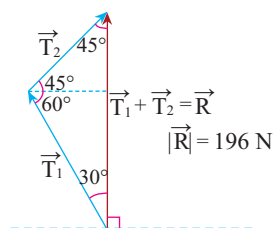
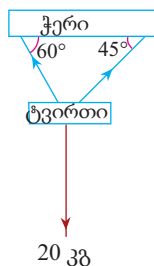
54. გამოთვალეთ : ა) $\lg 2 \cdot \lg 50 + \lg^2 5$

ბ) $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

განმაზოგადებელი დაგვლებები

- 55.** ჭერის სიბრტყესთან 60° და 45° -იანი კუთხის შემქმნელი ორი თოკით 20 კგ სიმძიმის ტვირთია ჩამოკიდებული. ტვირთის თოკებზე დაჭიმულობის ძალა ტვირთის ქვემოთ მიმართული სიმძიმის ძალის ტოლია. იპოვეთ თითოეულ თოკზე წარმოქმნილი დაჭიმულობის ძალა.

მითითება: ტვირთის თითოეულ კოლოგრამზე დედამიწის მიზიდულობის ძალის გავლენით 9,8 ნ ძალა გავლენას ახდენს. სიტუაციის ვექტორული გამოსახვის მიხედვით მიღებულ სამკუთხედში გამოიყენეთ სინუსების თეორემა.



- 56.** მოცემულია ფუნქცია $y = x^4 - 4x^3$.

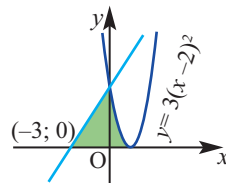
- იპოვეთ ფუნქციის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.
- იპოვეთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.
- იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობის შუალედები.
- იპოვეთ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები.
- ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

- 57.** ა) პარკში 5 თეთრი და 4 წითელი ბურთულაა. შემთხვევით ჯერ იღებენ ერთ ბურთულას და უკან დაუბრუნებლად ამოიღება მეორე ბურთულა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ბურთულებიდან სულ მცირე ერთი მაინც იქნება თეთრი.
ბ) დაწერეთ პირობითი ალბათობის ფორმულა და მის შესახებ ერთი ნიმუში.

- 58.** $y = kx + b$ წრფე აბსცისთა ღერძს $(-3; 0)$ წერტილში,

$y = 3(x-2)^2$ პარაბოლას ორდინატთა ღერძზე კვეთს.

- კიდევ რომელ წერტილში კვეთს წრფე პარაბოლას?
- იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



- 59.** 40 ტურისტის მოსათავსებლად დაიდგა 3-კაციანი და 4-კაციანი კარავები. რამდენია მათ შორის სამკაციანი, თუ სულ დაიდგა 12 კარავი?

- 60.** ლეტიფი 20 წუთში წიგნის 24 გვერდს კითხულობს. ა) რამდენ გვერდს წაიკითხავს 35 წუთში? ბ) რა დროში წაიკითხავს 360 გვერდიან წიგნს?

- 61.** წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა 4 სმ^3 , გვერდითი ზედაპირის ფართობი 8 სმ^2 -ია. იპოვეთ მანძილი პირამიდის ფუძის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდით წახნაგამდე.

62. $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ფუნქციისათვის:

- ა) იპოვეთ განსაზღვრის არე;
 ბ) დაწერეთ შექცეული ფუნქცია და უჩვენეთ მნიშვნელობათა სიმრავლე.
 გ) ამოხსენით უტოლობა $f(x-1) \leq 0$.

63. განსაზღვრეთ შესაბამისობა (c_n მიმდევრობის n -ური წევრი, S_n პირველი n წევრის ჯამია) 1. $S_n = n^2 + 3n$ ა) $c_2 = 6$ ბ) $c_2 = 5$ გ) $c_2 = 4$
 2. $S_n = n^2$ დ) გეომეტრიული პროგრესია ე) $c_n = 2n - 1$
 3. $S_n = 2^n - 1$

64. $a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = 3 : 4$, იპოვეთ $a + b$ ჯამი, თუ $\text{უსჯ}(a; b) + \text{უსგ}(a; b) = 39$.

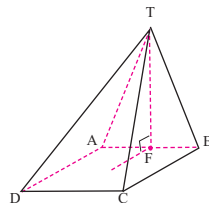
65. $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ და $\vec{y} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ პირობის მიხედვით განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემულები.

ა) $3\vec{x} - 2\vec{y}$ ბ) $|\vec{x} - 2\vec{y}|$ გ) $4\vec{x} + 2\vec{y}$

66. სურათზე მოცემული პირამიდის შესახებ ცნობილია შემდეგი:

F წერტილი AB-ს შუაწერტილია.
 TF = 5 მ, ABCD მართკუთხედი და AB = 6 მ, BC = 8 მ

- ა) იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი.
 ბ) იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



67. ამოხსენით განტოლებები.

ა) $4 \sin^2 x - 3 \cos x = 3$ ბ) $\text{tg } x - 3 \text{ctg } x - 2 = 0$
 გ) $\sin 3x + \sin 5x = 0$ დ) $\cos 3x - \cos x = 0$

68. გამოთვალეთ. ა) $\frac{\text{უსჯ}(84; 126)}{\text{უსგ}(84; 126)}$ ბ) $\frac{\text{უსჯ}(54; 72)}{\text{უსგ}(54; 72)}$

69. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $(3x + y)^2 + 2(3x + y)(x - y) + (x - y)^2$ როცა $x = \sqrt{3}$
 ბ) $\frac{\sqrt{2} - ab^2}{1 + b^2} + \frac{\sqrt{2}b^2 - a}{1 + b^2}$, როცა $a = \sqrt{5} - 1$

70. პარკში თეთრი და შავი ფერის ბურთულებია. შავი ბურთულების რაოდენობის თეთრი ბურთულების რაოდენობასთან შეფარდებაა 3:2. თუ შავი ბურთულების ნახევარს ამოვიღებთ, პარკში დარჩენილი თეთრი ბურთულების რაოდენობა შავი ბურთულების რაოდენობაზე 3-ით მეტი იქნება.

- 1) რამდენი ბურთულაა პარკში?
 2) თუ პარკში ჩაუხედავად ორი ბურთულა ამოიღება, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:
 ა) ორივე თეთრი იქნება; ბ) სხვადასხვა ფერისა იქნება.

განმაზოგადებელი დავალებები

71. იპოვეთ $\operatorname{tg}(x+y)$, თუ $\sin x (\cos y + 2\sin y) - \cos x (2\cos y - \sin y) = 0$

72. სხეული წრფის გასწვრივ $a(t) = 2t$ (სმ/წმ²) აჩქარებით მოძრაობს. სხეულის საწყისი სიჩქარე 9 სმ/წმ-ია.

ა) განსაზღვრეთ სხეულის სიჩქარის $v(t)$ ფუნქცია.

ბ) იპოვეთ სხეულის $t = 0$ -დან $t = 5$ წამისმომენტამდე გავლილი მანძილი.

73. $A(1; -2; 7)$, $B(2; 3; 5)$ და $D(-1; 3; 6)$ წერტილები ABCD რომბის წვეროებია. იპოვეთ C წვეროს კოორდინატები.

74. ა) იპოვეთ $3x^2 - x - 1 = 0$ განტოლების ფესვების კვადრატების ჯამი.

ბ) $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ განტოლების ფესვების ჯამი მათსავე ნამრავლზე 1 ერთეულით მეტია. იპოვეთ m და ამოხსენით განტოლება.

75. დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგით. $a = \frac{31}{32}$, $b = \frac{32}{33}$, $c = \frac{35}{34}$, $d = \frac{36}{35}$

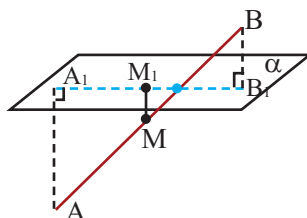
76. 1) c -ს რა მნიშვნელობისათვის $(c^2 - 4)x = c + 2$ განტოლებას: ა) აქვს ერთადერთი ამონახსენი; ბ) აქვს უსასრულო რაოდენობის ამონახსენი;

გ) არა აქვს ამონახსენი?

2) c -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსენი?

$$\begin{cases} 2x + y = c \\ y = x^2 \end{cases}$$

77. სიბრტყის მკვეთი AB მონაკვეთის წვეროები სიბრტყიდან 8 სმ და 2 სმ მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი მონაკვეთის M შუაწერტილიდან სიბრტყემდე.

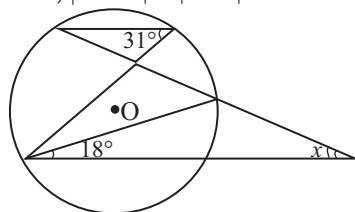


78. პარკში 10 ყვითელი, 10 წითელი და 10 ცისფერი ბურთულაა. დილარემ პარკში ჩაუხედავად ამოიღო ერთი ბურთულა და მეგობარს მისცა. თუ დილარე პარკში ჩაუხედავად კიდევ ერთ ბურთულას ამოიღებს დარჩენილი ბურთულებიდან, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა სხვადასხვა ფერისა იქნება?

79. |ამოხსენით განტოლება: ა) $|x + 6| = |x - 66|$

ბ) $|3x + 2| + |3 - x| = 5$

80. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x კუთხე.



განმაზოგადებელი დაგვლებები

- 81.** დღიური მარგინალური თვითღირებულების $C'(x) = 0,000006x^2 - 0,006x + 4$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. სადაც $C'(x)$ მანათობით ერთი ნაწარმის ფასს, x - კი წარმოებული პროდუქციის რაოდენობას გვიჩვენებს. გაითვალისწინეთ, რომ 100⁰მუდმივი დღიური ხარჯია.

ა) იპოვეთ პირველი 500 ნაწარმის საერთო თვითღირებულება.

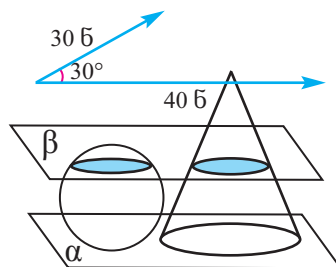
ბ) იპოვეთ თვითღირებულება 201-ე პროდუქციის წარმოებიდან მე-400 პროდუქციის წარმოებამდე.

- 82.** დანადგარის მოცულობა 60 000 მ³-ია. გამოსახეთ ეს მოცულობა კუბურ სანტიმეტრებში და ჩაწერეთ რიცხვი სტანდარტული სახით.

სხეულზე მოდებული ორი ძალა 20 ნ და 40 ნ 30°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ ამ ძალების ტოლქმედი ძალა.

მითითება: გამოიყენეთ კოსინუსების თეორემა.

- 83.** 6 სმ დიამეტრის მქონე ბირთვი და 10 სმ ფუძის რადიუსის მქონე კონუსი α სიბრტყეზე მდებარეობენ. α სიბრტყიდან 8 სმ მანძილზე მისი პარალელური β სიბრტყეა გავლებული. ბირთვისა და კონუსის β სიბრტყესთან გადაკვეთა კონგრუენტული წრეებია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.



- 84.** იპოვეთ ფუნქციების: ა) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები; ბ) კრიტიკული წერტილები; გ) ექსტრემუმები დ) გადახრის წერტილები; ე) ამოზნექის შუალედები და ააგეთ გრაფიკები.

ა) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

ბ) $f(x) = (x + 1)^4$

გ) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

დ) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$

- 85.** ნალექების საშუალო რაოდენობა. წლის დასაწყისიდან (x დღის შემდეგ) დღიური ნალექის რაოდენობა (სანტიმეტრობით) $r(x) = 0.00002(6511 + 366x - x^2)$ ფუნქციით შეიძლება განისაზღვროს. განსაზღვრეთ 180 დღის განმავლობაში მოსული ნალექის საშუალო რაოდენობა.

- 86.** მამამ ოქროს ზოდი 3 შვილს შორის გაანაწილა. უფროს შვილს ზოდის $\frac{2}{5}$

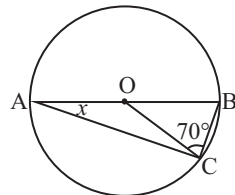
ნაწილი, შუათანას $\frac{1}{4}$ ნაწილი მისცა. დანარჩენი 240 გრ ოქრო კი უმცროს

შვილს მისცა. რამდენი გრამი იყო ოქროს ზოდი?

- 87.** იპოვეთ $f(x) = |x|$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია, რომლის გრაფიკიც გადის კოორდინატთა სათავეზე.

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 88. ჰაერის ტემპერატურა.** 10 საათის განმავლობაში ჰაერის ტემპერატურის $f(t) = -0,1t^2 + 0,8t + 34$, $0 \leq t \leq 10$ დამოკიდებულებით განსაზღვრა შეიძლება. იპოვეთ:
- ა) მინიმალური ტემპერატურა
 - ბ) მაქსიმალური ტემპერატურა.
 - გ) საშუალო ტემპერატურა.
- 89.** კუთხის შიგნით M წერტილია მოცემული. M წერტილიდან გაავლეთ ისეთი წრფე, რომ ამ წრფის კუთხის შიგნით დარჩენილი მონაკვეთი M წერტილით 1:2 შეფარდებით გაყოფილი აღმოჩნდეს.
- 90.** x , y და z ნატურალური რიცხვებია, $5y = 6z$, $x = 2z$, იპოვეთ $x + y + z$ ჯამის უმცირესი მნიშვნელობა.
- 91.** იპოვეთ $a^2 + \frac{1}{a^2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a - \frac{1}{a} = 3$
- 92.** რამდენ პროცენტიანი იქნება 5%-იანი 16 ლ მარილის ნაჯერისა და 10%-იანი 24 ლ მარილის ნაჯერის არევის შედეგად მიღებული ნაჯერი?
- 93.** გეომეტრიული პროგრესიის შემადგენელი სამი ნატურალური რიცხვიდან მეორე პირველზე 3 ერთეულით მეტია. იპოვეთ ასეთი პროგრესიების რაოდენობა.
- 94.** იპოვეთ $x^2 - y^2 - 5x - 5y$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $x - y = 7$ და $x + y = 4$
- 95.** მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x კუთხის გრადუსული ზომა.

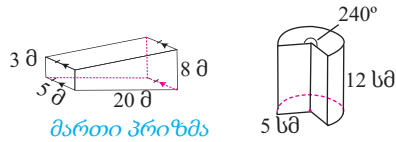


- 96.** დღის განსაზღვრულ დროში ქალაქის მოედანზე არსებული ძეგლის ჩრდილის სიგრძე 12 მ ხდება. ამ დროს ჩრდილის წვეროსადმი ძეგლის უმაღლესი წერტილიდან გავლებულ წრფესა და ჰორიზონტალური ჩრდილის წრფეს შორის დარჩენილი კუთხე 35° -ია. იპოვეთ ძეგლის სიმაღლე.
- 97.** იპოვეთ მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. უჩვენეთ მოცემული ფუნქციისა და შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.
- ა) $y = 2^{x-3} + 1$
 - ბ) $y = 1 - \log_2(x + 1)$
- 98.** სხეული მოცემული $s(t)$ კანონით წრფივად მოძრაობს. გამოსახეთ $s(t)$ ფუნქციის გრაფიკი. მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ აჩქარება. განსაზღვრეთ სხეული აჩქარებით მოძრაობს თუ შენელებით, როგორ ვლინდება ეს თქვენს მიერ აგებულ გრაფიკზე?
- ა) $s(t) = 2t^2 + 4t$
 - ბ) $s(t) = 40t + 10t - 5t^2$

განმაზოგადებელი დაგალებები

99. მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ფიგურების

ა) მოცულობა; ბ) ზედაპირის ფართობი.



მართი პრიზმა

100. მოწყობილობის მოცულობა 60000 მ^3 -ია. გამოსახეთ ეს მოცულობა კუბურ სანტიმეტრებში და დაწერეთ რიცხვი სტანდარტული სახით.

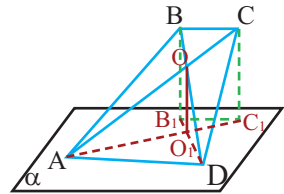
101. დაწერეთ $(2;2)$ წერტილზე გამავალი, აბსცისთა ღერძისა და $y = 4$ წრფის მხები წრეწირის განტოლება.

102. კლასში 14 მოსწავლეა. მათ შორის საჭიროა ორის შერჩევა დღევანდელ ღონისძიებაზე სტუმრების შესახვედრად.

ა) რამდენი ვარიანტია შესაძლებელი?

ბ) ნარგვი ამ კლასში სწავლობს. მას ან სეიმურთან ან გულნართან შერჩევა სურს. რისი ტოლია ამ ხდომილობის ალბათობა?

103. ABCD ტრაპეციის AD ფუძე α სიბრტყეზე, დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილი სიბრტყიდან 2 სმ მანძილზეა. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის BC ფუძიდან α სიბრტყემდე, თუ $AD:BC = 3:2$.



104. მოსახლეობის საშუალო მატება. დავუშვათ, ქვეყნის მოსახლეობის მე- t წელს არსებული მატების $P(t) = 5,4e^{0,01t}$ სახით განსაზღვრა შეიძლება. სადაც P უჩვენებს მოსახლეობის რაოდენობას (მილიონობით), t კი 2000 წლიდან დაწყებული წლებს უჩვენებს. იპოვეთ 2001 წლიდან 2005 წლამდე მოსახლეობის საშუალოწლიური მატება.

105. თუ მატარებლის სიჩქარე 70 კმ/სთ-დან 85 კმ/სთ-მდე გაიზარდება, მაშინ რამდენი პროცენტით შემცირდება ერთი და იგივე მანძილის გავლაზე დახარჯული დრო?

106. იპოვეთ $\frac{x-y}{x}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\frac{x+y}{y} = 3$

107. ა) ერთნაირი სიჩქარით მომუშავე 3 მუშა გარკვეულ სამუშაოს 15 დღეში ასრულებს. რამდენ დღეში შეასრულებს იმავე სამუშაოს, იმავე სიჩქარით 5 მუშა?

ბ) სამუშაოს 24 მუშა ერთნაირი სიჩქარით დღეში 8 საათი მუშაობით 30 დღეში ასრულებს. რამდენი მუშა შეასრულებს ამ სამუშაოს 20 დღეში, თუ ისინი დღეში 6 საათს იმუშავენ?

- 108.** კომპანიის მიერ 1990 წლიდან 2000 წლამდე სოფლის მეურნეობის პროდუქციის წლიური რეალიზაცია ათას ტონობით $M(x) = 2,2 + 1,1^x$ სახითაა მოდელირებული, სადაც t 1990 წლიდან დაწყებული წლების რაოდენობას უჩვენებს. გამოთვალეთ კომპანიის რეალიზაციის მოცულობა 1990 წლიდან 1994 წლამდე.

- 109.** 1) ქვემოთ მოცემული ცხრილის მიხედვით გამოთვალეთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

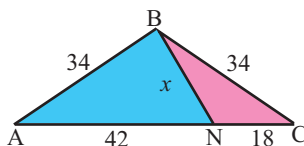
x	6	7	10	11	11	13	16	18	18	ჯამი
$x - \bar{x}$	-7	-6	-3	-2	-2	0	3	5	12	
$(x - \bar{x})^2$	49	36	9	4	4	0	9	25	144	280

2) ინფორმაციების მიხედვით შეადგინეთ ა პუნქტში არსებულის მაგვარი ცხრილი. იპოვეთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ა) 74, 72, 83, 96, 64, 79, 88, 69

ბ) 326° , 438° , 375° , 366° , 419° , 424°

- 110.** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ თითოეული ფერადი ნაწილის პერიმეტრი და ფართობი.



- 111.** წრეწირზე 12 წერტილია აღნიშნული, წვეროების ამ წერტილებში მქონე რამდენი სამკუთხედის აგება შესაძლებელი?

- 112.** საზოგადოებრივი ორგანიზაციის ხელმძღვანელის არჩევნებში ხმების 65% თავირმა, დანარჩენი კი ულქერმა მოიპოვა. რამდენი იყო ამომრჩეველთა რაოდენობა, თუ თავირმა ულქერზე 120 ხმით მეტი მიიღო?

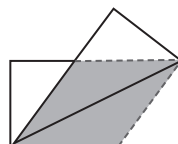
- 113.** გამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $(2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + 2^{10})^{1/3}$

ბ) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

- 114.** 102564 რიცხვის ბოლო ციფრის წაშლითა და წინ ჩაწერით მიღებული 410256 რიცხვი 102564-ზე 4-ჯერ მეტი ხდება: $410256 = 4 \times 102564$. იპოვეთ ბოლო ციფრი 9-ის მქონე ისეთი ექვსნიშნა რიცხვი, რომელსაც ეს თვისება გააჩნია.

- 115.** 6 სმ×12 სმ ზომებიანი მართკუთხა ფორმის ფურცელი დიაგონალის გასწვრივ გადაიკეცა. გარეთ აღმოჩენილი ნაწილების ჩამოჭრის შემდეგ გაშლისას ფურცელმა რომლის ფორმა მიიღო. იპოვეთ ამ რომლის გვერდის სიგრძე.

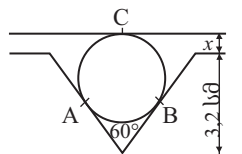


განმაზოგადებელი დავალებები

- 116.** ეპმედი 300 მეტრის სიგრძის წრიულ სარბენ ბილიკზე 7 კმ/სთ, ელმირი კი 8 კმ/სთ სიჩქარით დარბის. ისინი ერთდროულად ერთი და იგივე წერტილიდან იწყებენ მოძრაობას.

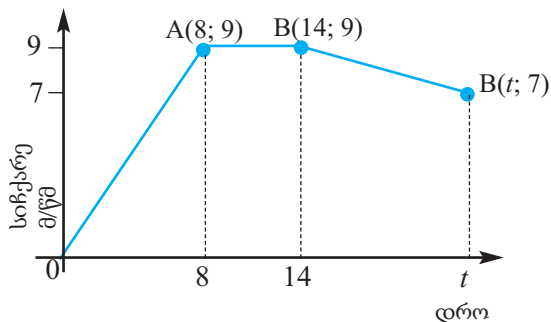
ა) რამდენი წუთის შემდეგ შეხვდებიან ისინი კვლავ ერთმანეთს?
 ბ) თუ ისინი განაგრძობენ სირბილს, შეხვდებიან თუ არა მოძრაობის საწყის წერტილში? თუ შესაძლებელია, მაშინ რამდენი წუთის შემდეგ მოხდება ეს?

- 117.** A და B წერტილებზე წრეწირის მხებებია გავლებული. ცნობილია, რომ წრეწირის დიამეტრი 2,4 სმ-ია. იპოვეთ x .



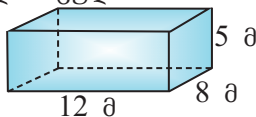
- 118.** სურათზე დროზე დამოკიდებულებით სიჩქარის ცვლილების გრაფიკია მოცემული. ცნობილია, რომ საშუალო სიჩქარე 7,52 მ/წმ-ია. გრაფიკის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ t დრო.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ გავლილი მანძილი გრაფიკზე მოცემული ფართობის ჯამის ტოლია.

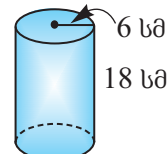
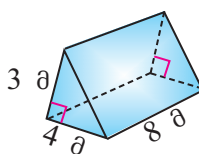


- 119.** დაწერეთ A(0; 3; 4), B(1; 2; 0) და C(-1; 6; 4) წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

- 120.** მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ ფიგურების სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



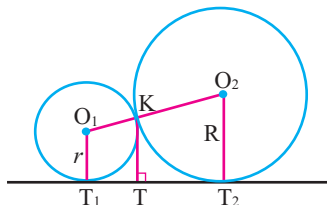
მართკუთხა პარალელებიპედი



მართი წრიული ცილინდრი

- 121.** ა) იპოვეთ $y = 2 + \sqrt{x-1}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.
 ბ) იპოვეთ $y = \sqrt{2} \cos x - 1$ ფუნქციის განსაზღვრის არე
 გ) იპოვეთ $y = \log_2 (3 + 2 \sin 2x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

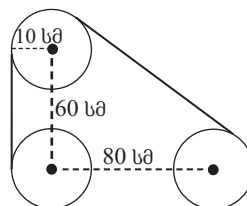
- 122.** R და r რადიუსიანი ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ:
 ა) მანძილი საერთო მხების შეხების წერტილებს შორის ($T_1 T_2$);
 ბ) მანძილი საერთო მხების წერტილიდან საერთო მხებამდე (KT).



- 123.** ცილინდრული ავზის შიგა ზედაპირის შეღებვისათვის 1 კვადრატულ მეტრზე 20 მანათობით სულ 2000 მანათი იქნა გადახდილი. ავზის სიღრმე 10 მ-ია.
 ა) იპოვეთ ავზის შიგა ზედაპირის ფართობი.
 ბ) იპოვეთ ავზის ფუძის რადიუსი.
 გ) გამოთვალეთ ავზის მოცულობა.

- 124.** ქერიმი შორს მანძილზე სირბილის დროს მზიან ამინდში 10 კმ/სთ სიჩქარით, წვიმიან ამინდში კი 6 კმ/სთ სიჩქარით დარბის. სირბილის განმავლობაში რამდენი საათი იყო წვიმიანი, თუ მან 20 კმ-ის გავლის 3 საათი მოანდომა?

- 125.** სურათზე ნაჩვენებების მსგავსად, კონვეიერის ნაწილის 3 დისკის ცენტრებს შორის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მანძილი შესაბამისად 80 სმ და 60 სმ-ია. იპოვეთ დისკის მომცავი ღვედის სიგრძე.



- 126.** იპოვეთ ყველა წესიერი წილადის ჯამი, რომლის მნიშვნელი: ა) არ აღემატება 100-ს; ბ) არ აღემატება n -ს.

- 127.** x რიცხვი m და 9, y რიცხვი $2m$ და 15, z რიცხვი $3m$ და 18 რიცხვის არითმეტიკული საშუალოს მნიშვნელობის ტოლია. გამოსახეთ x , y , z რიცხვების არითმეტიკული საშუალოს მნიშვნელობა ცვლადით.

- 128.** დაწერეთ მთელკოეფიციენტიანი ყველაზე დაბალხარისხიანი მრავალწევრები, რომლის ფესვები მოცემული რიცხვებია:

ა) 1; 4; 3

ბ) -1 ; 3; -5

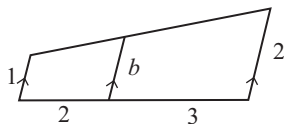
გ) 3; $-3i$; 1

- 129.** საცხოვრებელ პუნქტში ჩატარებულმა გამოკვლევებმა უჩვენა, რომ აქ მაცხოვრებელი ოჯახების 15%-ს ავტომობილი არ აქვს. 60%-ს ერთი ავტომობილი, 20%-ს ორი ავტომობილი, 5%-ს კი სამი ავტომობილი აქვს. რამდენი ავტომობილია ამ პუნქტში, თუ მასში ცხოვრობს 100 ოჯახი?

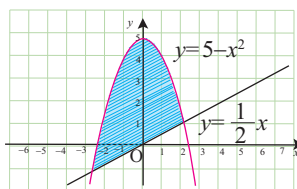
- 130.** მოცემულია ორი ტოლგვრდა სამკუთხედი. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის ფართობი ამ სამკუთხედების ფართობების ჯამის ტოლია.

განმაზოგადებელი დაგალებები

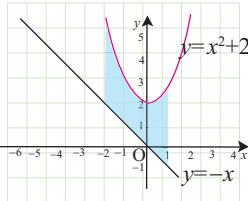
- 131.** რამდენი ისეთი წესიერი წილადი არსებობს, რომლის მნიშვნელიც არის 82 და იკვეცება?
- 132.** ფიცრის ნაჭრის 5 ნაწილად დასაყოფად 8 წუთია საჭირო. რა დრო იქნება საჭირო ამ ფიცრის ნაჭრის 8 ნაწილად დასაყოფად?
- 133.** სულ მცირე რამდენი უნდა იყოს $x^2 + y^2 = 1$ და $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ განტოლებებით მოცემული ორივე წრეწირის მომცავი მესამე წრეწირის რადიუსი?
- 134.** სურათზე ნაჩვენები წესიერი ექვსკუთხედის რა ნაწილია გაფერადებული?
- 135.** ფიგურაზე პარალელური მონაკვეთები ის-რითაა აღნიშნული. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ b მონაკვეთის სიგრძე.
- 136.** $\frac{24x^2 + 25x - 47}{ax - 2} = -8x - 3 - \frac{53}{ax - 2}$ განტოლება $ax \neq 2$ პირობით x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის მართებულია. იპოვეთ a მუდმივის მნიშვნელობა.
- 137.** დაშალეთ მამრავლებად: $x^2 - xy - 2y^2$
- 138.** მათემატიკაში შეფასების დავალებები 25 კითხვისაგან შედგება. თითოეულ სწორ პასუხში 4 ქულა იწერება. თითოეული მცდარი პასუხი არსებულ ქულას 1 ქულით ამცირებს. ბეშირმა ყველა კითხვაზე გასცა პასუხი და 35 ქულა მოაგროვა. რამდენი მცდარი პასუხი ჰქონდა ბეშირს?
- 139.** დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის $(-4; 0)$ და $(0; 3)$ წერტილებზე და ცენტრი $x - 2y + 11 = 0$ წრფეზე მდებარეობს.
- 140.** გრაფიკის გამოსახულებაზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



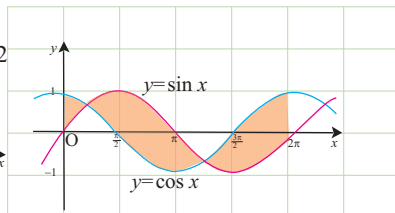
ა)



ბ)



გ)



141. ააგეთ სამგანზომილებიან კოორდინატა სისტემაში:

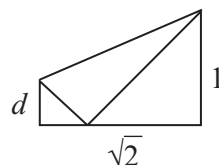
ა) $A(-1; 2; 3)$ წერტილი; ბ) $y = 4$ სიბრტყე.

142. იპოვეთ პარალელებიპედის მოცულობა, რომლის ზომები $\langle 1; 0; 0 \rangle$, $\langle 0; 2; 0 \rangle$, $\langle 0; 0; 6 \rangle$ ვექტორებით განისაზღვრება.

143. 9856 სმ³ მოცულობის მქონე კონუსის ფუძის რადიუსი 28 სმ-ია. იპოვეთ ამ კონუსის
ა) სიმაღლე; ბ) მსახველი; გ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

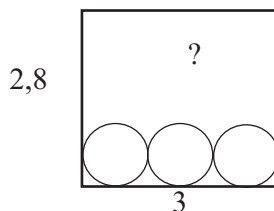
144. მოსწავლეებისა და კლასის ხელმძღვანელის საშუალო ასაკი 16 წელია. კლასის ხელმძღვანელი 36 წლისაა, მოსწავლეების საშუალო ასაკი კი 15 წელია. რამდენი მოსწავლეა კლასში?

145. მართკუთხედის ფორმის ფურცლის გვერდების ზომებია 1 და $\sqrt{2}$ და. იგი სურათზე ნაჩვენებების მსგავსად, ერთ-ერთი წვეროს მოპირდაპირე გვერდზე ყოფნის პირობით გადაიკეცა. იპოვეთ ამ მდგომარეობაში აღნიშნული d -ს სიგრძის მნიშვნელობა.



146. სპორტულ მოედანს 3 შესასვლელი აქვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოედანზე მოსული ორი კაციდან ორივე ერთი და იმავე კარებში შემოვა.

147. $1 \times 3 \times 2,8$ ერთეული ზომების მქონე მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის ყუთში მოთავსდება თუ არა 1 ერთეული დიამეტრიანი 8 ბურთულა?



148. იპოვეთ $x^2 + y^2 - 8x = 0$ განტოლებით მოცემული წრეწირის რადიუსი.

149. დაამტკიცეთ, რომ თუ a , b , c დადებითი რიცხვები გეომეტრიული პროგრესიის მიმდევრობითი წევრებია, მაშინ $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ რიცხვები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

150. გაამარტივეთ. $\frac{5^2 - 1}{3^2 - 1} \cdot \frac{9^2 - 1}{7^2 - 1} \cdot \frac{13^2 - 1}{11^2 - 1}$

151. მარწყვიანი და ჭერემიანი შოკოლადები წითელ და ნარინჯისფერ ყუთებში იყიდება. წითელ ყუთებში 17 მარწყვიანი და 5 ჭერემიანი შოკოლადია, ნარინჯისფერ ყუთებში კი 7 მარწყვიანი და 11 ჭერემიანი შოკოლადია. თუ ჰუსეინს ერთი წითელი ყუთი კანფეტი აქვს შეძენილი, მაშინ რამდენი ნარინჯისფერი ყუთი კანფეტი უნდა შეიძინოს იმისათვის, რომ მარწყვიანი და ჭერემიანი კანფეტების რაოდენობა ტოლი იყოს?

152. ა) $20a^2 = 12 \cdot n$ მოცემულობით იპოვეთ a ციფრი, აქ $n \in \mathbb{N}$

ბ) $7a3b$ სახის რამდენი ისეთი ოთხნიშნა რიცხვი არსებობს, რომელიც იყოფა 15-ზე?

განმაზოგადებელი დაგალებები

153. იპოვეთ $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 3$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[-2; 2]$ მონაკვეთზე.

154. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$
 ა) ამოხსენით განტოლება $f(x) = -\frac{3}{4}$
 ბ) იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

155. გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ ბ) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - 6\sqrt{8}$ გ) $\sqrt{3 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{11 - 6\sqrt{2}}$

156. იპოვეთ უმცირესი მრავალნიშნა რიცხვი, რომლის როგორც 35-ზე ისე 42-ზე გაყოფისას ნაშთში 3 მიიღება.

157. 51 სმ სიგრძის რკინის დეტალი 2 სმ-იანი და 5 სმ-იანი რკინის ჩხირებისგანაა დამზადებული. ამ დროს პირველი 5 სმ-იანი, შემდეგ კი 2 სმ-იანი ჩხირები იყო გამოყენებული. მაგალითად, 7 ცალი 5 სმ-იანი ჩხირის შემდეგ 8 ცალი 2 სმ-იანი ჩხირი შეიძლება დაიდოს. ამის მოწყობის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?

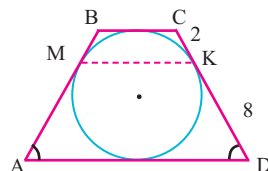
158. 1) იპოვეთ 2772-ის უდიდესი მარტივი გამყოფი.

(2) რიცხვ 210-ს რამდენი ისეთი გამყოფი აქვს, რომელთაგან თითოეულს:

ა) ორი მარტივი მამრავლი;

ბ) სამი მარტივი მამრავლი გააჩნია?

159. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის პერიმეტრი, ფართობი და ფერდების წრწიერთან შეხების წერტილების შემავრთებელი MK მონაკვეთის სიგრძე.



160. მეცნიერული გამოკვლევების მწარმოებელთა ჯგუფში მათემატიკოსების საშუალო ასაკი 40, კომპიუტერულ მეცნიერებათა სპეციალისტების საშუალო ასაკი კი 35 წელია. განსაზღვრეთ მათი რაოდენობრივი თანაფარდობა, თუ მათი საერთო რაოდენობა 40 კაცია.

161. მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრია: 1, 4, 2 და 3. მე-5 წევრიდან დაწყებული თითოეული წევრი მისი წინამდებარე ოთხი წევრის ჯამის ტოლია. იპოვეთ ამ მიმდევრობის მერვე წევრი.

162. ა) რამდენი დიაგონალი აქვს ამოზნექილ თერთმეტკუთხედს?
 ბ) იპოვეთ 54 დიაგონალის მქონე ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი.

163. საავტომობილო კომპანიები ავტომობილის ძრავის ზეთის მარეგულირებელი კლაპნის ქვედა და ზედა პერიოდულ მოძრაობას $f(x) = \sin x \cos x$ (სმ/წმ) ფუნქციით განსაზღვრვენ.
იპოვეთ კლაპნის რხევითი მოძრაობის ამპლიტუდა და სიხშირე.

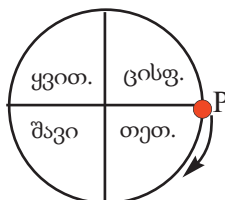
164. დაწერეთ $A(1; -2)$ და $B(4; -2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

165. ამოხსენით უტოლობა:

ა) $x^4 < 36$ ბ) $|2x - 3| < x$

166. კვირის განმავლობაში სპორტულ დარბაზში მისულების რაოდენობა ყოველდღიურად იყო წინა დღეს მისულთა რაოდენობის ორმაგზე 10 კაციტ ნაკლები. რამდენი კაცი იყო ოთხშაბათს სპორტულ დარბაზში, თუ შაბათ დღეს იყო 130 კაცი?

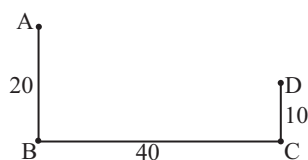
167. 12 სმ წრეწირის სიგრძის მქონე წრე 4 ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი და სურათზე ნაჩვენები სახითაა გაფერადებული. წრეწირის გასწვრივ მანათობელი წერტილი მოძრაობს საათის ისრის მიმართულებით. რომელ ფერად ნაწილზე იქნება მანათობელი წერტილი 100 სმ სიგრძის რკალის გასწვრივ მოძრაობის შემდეგ?



168. 48 მ სიგრძის მავთული გაიჭრა ორ ისეთ ნაწილად, რომ ერთის სიგრძე მეორეზე ორჯერ მეტია. ამ მავთულებისგან ორი კვადრატით დამზადდა. იპოვეთ კვადრატების ფართობების ჯამი.

169. კვირის განმავლობაში წარმოებული x ერთეული პროდუქციის თვითღირებულების $C(x) = 0,3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$ ფუნქციით გამოსახვა შეიძლება. დაწერეთ მარგინალური თვითღირებულების გამომსახველი $MC(x) = C'(x)$ ფუნქცია. გრაფიკულად კოორდინატორით ამ ფუნქციების გრაფიკები ააგეთ ერთი და იგივე კოორდინატთა სისტემაში.

170. თელეთი A წერტილიდან D წერტილში BC მონაკვეთზე მდებარე წერტილზე შეხებით უნდა მივიდეს. BC -ზე სად მდებარე წერტილი უნდა შეარჩიოს თელეთმა, რომ A -დან D -ში უმოკლესი გზით მივიდეს?



171. ა) $x^2 - 5x + q = 0$ განტოლების ფესვებისათვის სრულდება პირობა: $x_1^2 + x_2^2 = 13$, იპოვეთ q .
ბ) a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს $ax^2 + x + 1 = 0$ განტოლებას ორი სხვადასხვა ფესვი?

172. ყუთში 6 თეთრი და 4 შავი ბურთულაა. შემთხვევით ამოიღება მათგან 3 ბურთულა. ფერების მიხედვით, რომელი შემადგენლობით ბურთულების ამოსვლის ალბათობა არის უფრო მაღალი?

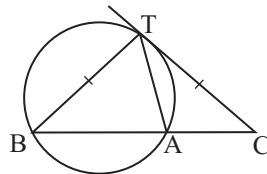
განმაზოგადებელი დაგალებები

173. ზამზარის 3 სმ-ით შეკუმშვისათვის 25 ნ ძალა იქნა გამოყენებული. გამოთვალეთ ზამზარის 7 სმ-ით შეკუმშვისათვის გაწეული მუშაობა.

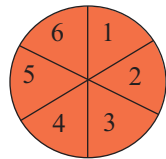
174. (3;9) და (11;3) წრეწირის დიამეტრის წვეროს წერტილებია. ამ წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის ორი წვერო ამ წერტილებში მდებარეობს. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე წვეროს ისეთი კოორდინატები, რომ მისი ფართობი იყოს მაქსიმალური.

175. AC ფუძის მქონე ტოლფერდა ABC სამკუთხედში P და Q წერტილები შესაბამისად CB და AB გვერდებზეა. იპოვეთ B კუთხის გრადუსული ზომა, თუ $AC = AP = PQ = QB$.

176. PT წრეწირის მხებია. იპოვეთ $\angle BTA$ თუ $PT = BT$ და $\angle TAB = 76^\circ$.



177. წარმოდგინეთ, რომ ნამცხვარი სურათზე ნაჩვენები სახით არის დაჭრილი და დანიშნული. პირველად შეგიძლიათ აიღოთ ნებისმიერი ნაჭერი, მაგრამ შემდეგი ნაჭერი შეჭმული ნაჭრის მიმდებარე უნდა იყოს. 6 ნაჭერი ტორტის ამნაირად შეჭმის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?



178. ა) შეადარეთ რიცხვები. $a = \sin 3^\circ$, $b = \sin 5^\circ$ და $c = \cos 88^\circ$

ბ) იპოვეთ $y = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

179. ასლანმა სახლი გერაის 60000 მანეთად მიჰყიდა. გერაიმ ეს სახლი მალე 10%-ით ძვირად ჯემაღს მიჰყიდა. ჯემაღმა სახლი შეძენილ ფასზე 10%-ით იაფად კვლავ ასლანს მიჰყიდა. მიიღო თუ არა ამ ყიდვა-გაყიდვიდან მოგება ასლანმა და თუ მიიღო, მაშინ რამდენი?

180. 1) n -ის რა მნიშვნელობისათვის არის $\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} = \frac{n}{2^{10}}$ ტოლობა მართებული?

2) x -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $2^x - 3$; $2^{\frac{x}{2}}$; $2^{x-1} + 2$ რიცხვები გეომეტრიული პროგრესიის მიმდევრობით მოცემული წევრები?

181. 15 მთიბავი მინდვრის $\frac{5}{6}$ ნაწილს 4 საათში თიბავს. რამდენ საათში გათიბავს 9 მთიბავი ამ მინდვრის $\frac{3}{4}$ ნაწილს?

182. გაამარტივეთ გამოსახულება.
$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{30} - \sqrt{45}}{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3}$$

183. $\int_0^6 f(x)dx = 8$ და $\int_0^4 f(x)dx = 2$. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_4^6 f(x)dx$

184. ა) თუ რიცხვ 200-ს 30%-ით შევამცირებთ და ახალ რიცხვს 30%-ით გავზრდით, რა რიცხვი მიიღება?
ბ) საქონლის ფასი 10%-ით გაზარდეს, შემდეგ კვლავ 10%-ით შეამცირეს. როგორ შეიცვლება ფასი?

185. ყუთში 6 შავი და x ცალი თეთრი ბირთვია. იპოვეთ x თუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ერთი ბურთულა იქნება თეთრი $\frac{2}{5}$ -ია. ამ ყუთიდან 2 ბირთვის ამოღების შემთხვევაში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ისინი სხვადასხვა ფერისა იქნება.

186. ა) იპოვეთ a წიბოს მქონე წესიერი ტეტრაედრის მოცულობა.
ბ) იპოვეთ V მოცულობიანი წესიერი ტეტრაედრის სიმაღლე.

187. იპოვეთ $[-2; 2]$ მონაკვეთზე მოცემული $y = 2 - |x|$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ფიგურის სრული ზედაპირის ფართობი.

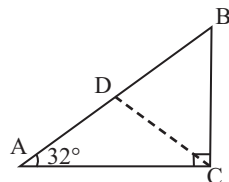
188. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\operatorname{ctg} x \cdot (1 - \cos x) = 0$

ბ) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 + 3 \sin x \cos x$

189. a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \log_2 a$ განტოლებას ამონახსენი?

190. $\triangle ABC$ -ში $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 32^\circ$ და $AC = 48$ სმ.
იპოვეთ CD მედიანის სიგრძე.



191. 100 ქულიანი შეფასების სისტემით კლასის 30 მოსწავლის საშუალო შემდეგი 70 ქულა იყო. 5-მა მოსწავლემ მიიღო 20, 25, 25, 30, 40 ქულა და გამსვლელი ქულის მოპოვება ვერ შეძლო. იპოვეთ გამსვლელი ქულის მომპოვებელთა საშუალო ქულა.

192. რომელ ნატურალურ რიცხვზე უნდა გავყოთ 87, რომ განაყოფი გამყოფზე 2 ერთეულით მეტი, ნაშთი კი გამყოფზე 1 ერთეულით ნაკლები აღმოჩნდეს?

193. თუ ორნიშნა ნატურალური რიცხვის ციფრებს ადგილებს შეუცვლით, მიღებული რიცხვი თავდაპირველ რიცხვზე 20%-ით მეტი იქნება. იპოვეთ თავდაპირველი რიცხვი.

194. გამოთვალეთ:

ა) $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ$

ბ)
$$\frac{\cos^2 53^\circ - \sin^2 23^\circ}{\sin 14^\circ}$$

195. $(-3, 4)$ წერტილი θ მობრუნების კუთხის ბოლო გვერდება. იპოვეთ $\sin \theta$ -ს მნიშვნელობა.

196. ა) იპოვეთ $1 + 2 \cos x = 0$ განტოლების ფესვები $[0; 2\pi]$ მონაკვეთზე.

ბ) დაწერეთ $\cos^2 x + 0,5 > \sin^2 x$ უტოლობის ამონახსენი $[-\pi; \pi]$ მონაკვეთზე.

197. ფერმაზე რძის მიღება 4 წლის განმავლობაში ქვემოთ მოცემული სახით იცვლება. პირველი ორი წელი x %-ით იზრდება, მომდევნო ორი წელი x %-ით მცირდება. დავუშვათ, რომ ფერმაზე უკვე 100 ერთეული რძე იყო წარმოებული. მომავალი 4 წლის პერიოდისათვის დასაწყისიდან ბოლომდე რძის წარმოების შესახებ წარმოადგინეთ ინფორმაცია პირობითი პროცენტების მიღებით.

198. სასწავლო შეჯიბრზე შერჩევითი ტურის მონაწილეებს ქვემოთ მოცემული ამოცანა 3 წუთის განმავლობაში ამოსახსნელად მიეცათ: ანარის, ბეხტიარისა და ფერიდის შექმნილი ვაშლების ერთმანეთთან შედარება ქვემოთ მოცემული სახისაა.

ანარი: ბეხტიარის შექმნილი ვაშლების ნახევრამდე, პლუს ფერიდის შექმნილი ვაშლების ერთი მესამედი პლუს ერთი ვაშლი.

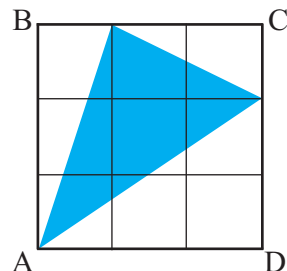
ბეხტიარი: ფერიდის შექმნილი ვაშლების ნახევარი, პლუს ანარის შექმნილი ვაშლების ერთი მესამედი და პლუს ორი ვაშლი.

ფერიდი: ანარის შექმნილი ვაშლების ნახევრამდე, პლუს ბეხტიარის შექმნილი ვაშლების ერთ მესამედამდე შეჭამა.

რამდენი ვაშლი შეჭამეს ბავშვებმა ერთად?

199. 200 მოსწავლეს შორის ჩატარებული გამოკითხვა უჩვენებს, რომ მათგან 120-ს ვანილიანი, 150-ს შოკოლადიანი ნაყინი მოსწონს, ხოლო 20-ს არც ერთი არ მოსწონს. მათ შორის რამდენ მოსწავლეს მოსწონს ორივე სახის ნაყინი?

200. 3 ერთეული გვერდის სიგრძის მქონე ABCD კვადრტი 9 ტოლ კვადრატადაა დაყოფილი. იპოვეთ დაშტრიხული ნაწილის ფართობი.



201. სამი გოგრა ორ-ორად ყველა შესაძლო ვარიანტით სასწოროზე აიწონა. შედეგები იყო: 12 კგ, 13 კგ და 15 კგ. რამდენ კილოგრამს იწონის ყველაზე მსუბუქი გოგრა?

202. თუ $\log_2(6!) = a$, $\log_2 7 = b$ მაშინ, $\log_2(8!) = a$ გამოსახულება გამოსახეთ a და b -ს საშუალებით.

მრავალწევრები

- გვ. 8-12. №1 ბ) $Q(y) = 2y^2 + 3y + 15$, $r = 59$. გ) $Q(x) = -x^2 + 4x - 4$, $r = 13$.
 №2 $2x^3 - 3x^2 - 20x + 29$ №3 $B(x) = x - 2$. №4 გ) $Q(x) = x^2 - x$, $R(x) = -2x - 3$;
 ბ) $Q(x) = x^2 + 4$, $R(x) = 12$ №5 $Q(2) = 3$ №6 ე) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $r = 0$.
 №7 დ) $Q(m) = m^3 + 5m^2 - 3m + 2$, $r = 6$ №11 1) გ) $r = 94$.
 №12 დ) $Q(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$, $r = -4$. №13 ბ) $c = -10,5$. №14 ს) $c = 57$.
 №15 $k = 4$ ან $k = -2$. №16 ს) $c = 11$. №18 $-x + 1$ №19 ს) $3x - 10$; ბ) $2x + 5$.
 №20 $1,5x^2 + 20x + 120$. №21 $3x^2 + 200x + 3000$.
 გვ. 14-21. №2 ბ) $k = 6$; გ) $k = -6$ №3 1) $f(x) = (x-10)(x-4)(x+2)$; 4) $f(x) = (x+5)(x-3)^2$
 №4 ბ) $\{-\frac{1}{3}; -4; 2\}$ №5 2) ა) 0; ბ) -6 . №6 ა) $\{-1; 2; 3\}$ №8 ს) $x+2$ და $x+4$
 ბ) $x+3$ და $x+5$ №10 $\{-2; -1; 2; 5\}$ №11 ს) $\{\frac{1}{2}; -1; 3\}$; ბ) $\{\frac{1}{3}; -2; 3\}$
 №12 $P(x) = 2(x+2)(x-1)(x-2)$ №13 $x_1 = -3$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1$
 №14 ბ) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 4$; ხარისხი 5-ია. ე) $x_1 = x_2 = x_3 = 4$, $x_4 = x_5 = 3$,
 $x_6 = 1$; ხარისხი 6-ია. №15 გ) $\{0,5; 3; 5\}$ №16 გ) $x_1 = 2$; $x_2 = -1 - \sqrt{5}$; $x_3 = -1 + \sqrt{5}$.
 №17 ბ) $\rightarrow f$; ს) $\rightarrow g$; გ) $\rightarrow h$ №18 გ) $\{\frac{1}{2}; 1 \pm \sqrt{2}\}$. №19 ბ) $x = -2$ ორჯერ განმე-
 ორებადი ფესვია. №20 $a = -3$, $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ №21 1) ე) $-8i$; 2) ბ) ± 1 ; $\pm i$.
 №23 ბ) $P(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 1)$, ხარისხი 4-ია; გ) $P(x) = (x-2) \cdot (x^2 - 6x + 10)$, ხარისხი
 3-ია. №24 1 მილიონი ცალი.
 გვ. 24-25. №1 ა) ხარისხი 3; მთავარი კოეფიციენტი 2; როცა $x \rightarrow +\infty$, მაშინ $f(x) \rightarrow +\infty$, როცა $x \rightarrow -\infty$
 მაშინ $f(x) \rightarrow -\infty$. №3 ა) კენტხარისხიანი მრავალწევრი; ბ) მთავარი კოეფიციენტი უარყოფითია
 გ) $(-4; 0)$, $(-1; 0)$, $(3; 0)$. №4 ა) $\rightarrow 4$; ბ) $\rightarrow 2$; გ) $\rightarrow 1$; დ) $\rightarrow 3$. №6 გ) 4 სმ.
 №7 ა) სულ მცირე 3 ხარისხის; ბ) სულ მცირე 4 ხარისხის; გ) სულ მცირე 4 ხარისხის.
 გვ. 28. №3 ა) $y = 1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტა; ბ) $y = 0$ ჰორიზონტალური ასიმ-
 პტოტა, $x = 1$ და $x = -1$ ვერტიკალური ასიმპტოტა; დ) $x = -1$ ვერტიკალუ-
 რი ასიმპტოტა, $y = 2x - 1$ დახრილი ასიმპტოტა. №4 ა) $\rightarrow 2$; ბ) $\rightarrow 3$);
 გ) $\rightarrow 1$).
 გვ. 29. №1 $m = 1$; $n = -5$. №2 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, $B(x) = x + 3$,
 $Q(x) = x^2 - 5x + 6$, $r = 0$. №4 ბ) $r_1 = r_2 = 0$ №6 ა) $Q(x) = 3x - 8$, $r = 20$.
 №7 ა) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$; ბ) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6}$. №8 ა) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = x_4 = -2$.
 №9 ა) $P(x) = (x+2)(x+1)^2$; ბ) $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.
 ვექტორები სივრცეში
 გვ. 34-38. №3 გ) მე-8; ზ) მე-6 №6 ბ) 17 №9 $(0; 3; 0)$ ან $(0; -1; 0)$ №10 $a = 2$ ან $a = 8$ №11
 2) x, y, z ღერძებზე მანძილი შესაბამისად $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$ ერთეულია.
 №13 $(0; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$ წერტილი. №15 $B(-1; -5; 7)$ №16 $(2; 4; 2)$, $(4; 0; 4)$, $(-2; 2; 6)$.
 №17 17. №18 $(0; -1; 0)$ ან $(-2; 2; -3)$. №19 $AB : BC = 1 : 2$. №20 $(4; 6; 12)$
 გვ. 42-45. №1 ბ) $\vec{RS} = \langle -9; -5; 11 \rangle$, $|\vec{RS}| = \sqrt{227}$. №2 ე) $|\vec{v}| = \sqrt{68}$. №5 ბ) როცა $y = 8$, $z = 15$
 №6 $2\vec{a} - 3\vec{b} = \langle 0; -3; 11 \rangle$. №7 ბ) $2\vec{u} - 3\vec{w} = \langle -5; 14; -8 \rangle$. №8 $\vec{c} = \langle 4; -1; 5 \rangle$. №9 $K(3; 6; 14)$
 №10 $k = -2$. №11 $\langle -9; 0; -9 \rangle$
 №12 ა) $\vec{OP} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. №13 ა) $P(2; -1; -1)$. №14 გ) $|\vec{v}| = \sqrt{29}$
 №15 ბ) $x = -3$; $y = 4$; $z = 4$. №16 ბ) $\vec{e} = \langle \frac{-3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}} \rangle$ №17 ბ) $\vec{e} = \langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1 \rangle$
 №19 გ) $\sqrt{54}$. №24 ბ) $9\vec{i} - 5\vec{j}$

- პპ. 48-50. №2 ა) $\approx 2753,26$; ბ) $-83,14$; გ) 0. №4 ბ) $\vec{p} \cdot \vec{q} = 23$. №5 -12. №6 ა) 43 ჯგულის. №7 ა) 590,88 ჯგულის. №8 ა) $\vec{e} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$; ბ) $\vec{F} = \langle 12; 16 \rangle$; გ) $\vec{A} = \vec{F} \cdot d = 200$ ჯგულის. №11 გ) $\theta = 90^\circ$ დ) $\theta = 180^\circ$. №12 2) $k = \pm 2$. №13 ა) $\langle 6; -8 \rangle$ ან $\langle -6; 8 \rangle$. ბ) $k = -7$ №14 135° . №16 ა) $\angle A = 90^\circ$; $\angle B \approx 64^\circ$; $\angle C \approx 26^\circ$; ბ) $\angle B = 90^\circ$; $\angle A = \angle C = 45^\circ$
- პპ. 52. №1 ბ) $2x - 3y - 18 = 0$. №2 ბ) $2x + y + 1 = 0$. №3 ბ) 45° და 135° . №4 ბ) 90° . №5 ბ) 0,8; გ) $3\sqrt{2}$
- პპ. 56-58. №3 ა) $7x + y + z - 18 = 0$. №4 ა) $6x - 4y - 5z = 0$. №5 ა) $n = \langle 1; -7; -18 \rangle$ №6 ბ) $y + 2z = 0$. №7 ა) $x - 6y - z - 1 = 0$, არა. №9 ა) $x + 2y - 3z + 12 = 0$; ბ) $x + y + z = 0$. №11 ბ) 2 ერთეული. №12 ა) $3x + 2y + 5z + 8 = 0$. №13 ა) $k = 8$; ბ) $k = -2,5$ №14 60°
- პპ. 59-60. №1 ა) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, ბ) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 36$. №2 (0;0;0), (2;0;0), (0;-6;0), (0;0;10). №3 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 24$. №4 17. №6 სფეროს ცენტრი $M(-1; 8; -5)$ წერტილშია. რადიუსი 6-ია. A წერტილიდან სფერომდე მანძილი 11 ერთეულია. №7 $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = 49$ ან $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 49$. №10 ა) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 36$
- პპ. 63. №2 ა) (2;-3;6); ბ) (-1;-2;6). №3 გ) (2;-3;1). №4 გ) (3;2;-1). №5 (-2;-13;0)
- პპ. 64-65. №2 $\sqrt{6}$. №5 გ) 25. №6 45° . №7 ა) (4;0;3) ან (5;-1;4). №9 ა) $\approx 129,27$ ნ და $\approx 95,96$ ნ. №12 ა) -5; ბ) 6. №14 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 24$. №17 C(0;8;4).
- ზღვარი
- პპ. 71-73. №2 დ) 2; ე) 3; ვ) 1. №3 გ) 1024 სმ³ №4 1) ა) 7; ბ) 7; გ) 7. №5 ა) -1; გ) -3.
- პპ. 75-79. №2 1) ა) 15; ბ) 5; გ) 6; დ) $\frac{2}{3}$. №3 1) -17; 2) 1; 5) 7; 6) 5. №4 გ) 32; დ) 2; ე) 2. №5 დ) 3; ე) 1; ვ) 0. №7 ზ) 14; თ) -1 №8 ა) 50; ბ) 50; გ) 10000 №10 ე) 4; ვ) $-\frac{3}{4}$; ზ) 2; თ) $\frac{5}{6}$ ი) -7. №11 3) $\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{4}$; 12) $\frac{1}{3}$. №12 1) ა) 4; ბ) 64; გ) 64. 3) ა) 3; გ) 2 №14 ა) 25 მილიონი მანათი; გ) მოთხოვნილი სახსრები უსასრულოდ იზრდება. №15 ბ) 1500; გ) 1000. №16 ა) 20; ბ) 22; გ) 36; დ) 36 ე) 32; ე) 34; ზ) არ არსებობს; თ) 32. №17 8 №2 4) $x = -1$ გადგვეთის წერტ.; ა) $f(-1) = 2$; დ) არ არსებობს. №3 ა) მთელ
- პპ. 81-85. ნამდვილ ლერძზე უწყვეტია. ბ) $x = 1$ წერტ. უწყვეტია. №5 1) $x = 2$ წერტ. უწყვეტია, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$; 3) $x = -2$ წერტ. უწყვეტია, როცა $x \rightarrow -2$ მაშინ ზღვარი არ არსებობს. №7 2) ა) უწყვეტია; ბ) წვეტადია. №10 1) ბ) $x = 5$; გ) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 8$; $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 7$.
- პპ. 87. №1 3) -0,5 4) -1; 6) $-\sqrt{2}$ №2 1) $\frac{1}{5}$; 2) 1,5; 6) $\frac{2}{3}$; 7) 2; 8) 0; 9) $\frac{1}{4}$; 10) 2; 11) -4 №3 ა) $\frac{1}{2}$; ბ) -1; გ) $\frac{1}{4}$
- პპ. 91-92. №1 ა) $x = -2$ და $x = 2$ წრფეები ვერტ. ასიმპტოტა. №2 ბ) $y = 0$ წრფე ჰორიზონტალური ასიმპტოტა. №3 ა) $x = 2$ წრფე ვერტიკალური, $y = 2$ წრფე ჰორიზონტალური ასიმპტოტა. №4 გ) 1,5; ე) $\frac{1}{4}$; ვ) $-\frac{1}{4}$; ზ) 2,5; თ) 0 №5 ა) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. №8 30. №10 64 №11 ა) ≈ 459449 ; ბ) 400000.
- პპ. 95-98. №5 1) 3; 3) 2; 6) 3; 11) $\frac{1}{4}$; 15) 1 №6 ა) e^2 ; ბ) $e\sqrt{e}$; ე) e^3 ; ვ) $\frac{1}{e}$

პპ-99. №1 8) $0,5$; 11) $\frac{1}{2}$; 15) 0 №4 ა) 1; ბ) -2 ; დ) 1 №7 0 და 2.

ბრუნვის ფიგურები.

ცილინდრი, კონუსი და ბირთვი

პპ-103. №1 $h = 6\sqrt{3}$ სმ. №2 I შემთხვევა: $h = 3$ სმ, $d = 8$ სმ; II შემთხვევა: $h = 4$ სმ, $d = 6$ სმ. №3 I შემთხვევა: $R \approx 4,77$ სმ, II შემთხვევა: $R \approx 3,18$ სმ.

პპ-105-107. №1 ა) 112π სმ²; ბ) 64π მ²; გ) 80π სმ². №2 ა) 720π სმ². №3 ა) 108 სმ²; გ) 78π სმ². №4 ბ) 4-ჯერ იზრდება. №5 $R = 4$ სმ, $h = 14$ სმ. №6 I შემთხვევა: $S_{\text{სფ}} \approx 58,2$ მ², II შემთხვევა: $S_{\text{სფ}} \approx 53,7$ მ². №7 2:3 №8 ≈ 641 სმ². №9 ა) $\approx 457,06$ სმ² $\approx 482,19$ სმ² №10 ა) $S_{\text{გგ}} = 96\pi$ სმ², $S_{\text{სფ}} = 120\pi$ სმ². №11 $\approx 46,3$ მ². №12 ერთ სრულ პერიოდში $\approx 5,89$ მ² ფართობი მოსწორდება. №13 ≈ 16 სმ. №14 $\approx 1583,4$ მ². №15 $\approx 1514,3$ სმ². №16 სულ მცირე 4 რულონი.

პპ-112-114. №1 ა) $100,8^\circ$; ბ) 7 სმ, 175π სმ² გ) 24 სმ; დ) 224π სმ². №2 ა) 144π სმ²; გ) 50π მ². №4 ა) $l = \frac{S_{\text{გგ}}}{\pi r}$. №5 ბ) 540π მ². №7 666π სმ². №8 $0,6\pi$ მ²; $0,96\pi$ მ².

№9 ა) 216 მ²; ბ) 90π მ² №10 $16,8\pi$ სმ² №11 ა) 36π ; ბ) 24π ; გ) 60π ; დ) 48π ;

№12 11 სმ². №13 240° . №15 240π სმ². №16 ცილინდრი. №17 $\approx 15,81$ მ². №18 ბ) $25\sqrt{5}\pi$ სმ², $25\pi(1+\sqrt{5})$ სმ². №19 $62,25\pi$ სმ², $20,25\pi$ სმ²

პპ-116. №1 14π მ². №2 36π მ². №3 45° . №4 R^2 . №5 12 სმ². №6 500 სმ². №7 $\approx 1,66$ მ². №8 675π სმ² $\approx 0,21$ მ²

პპ-118-119. №1 ბ) $S_{\text{გგ}} = 45\pi$ სმ², $S_{\text{სფ}} = 90\pi$ სმ². №2 226π სმ² ≈ 710 სმ². №3 ა) $104,5\pi$ მ², $168,38\pi$ მ². №4 325π სმ², 650π სმ². №5 $p \approx 1,33$ მანათი.

$$\text{№6 } S_{\text{გგ}} = 100\pi \text{ სმ}^2. \text{ №7 } h = 15 \text{ მ. } \text{№8 } S_{\text{გგ}} = \frac{SR^2}{R^2 - r^2}$$

პპ-122-125. №1 გ) 64π მ² №31:16 №4 ბ) 64π №5 3სმ №6 გ) 3:2 №7 468π სმ². №8 320π სმ². №9 100π სმ², 20π სმ², 80π სმ² №10 ა) 64π სმ²; ბ) 128π სმ²; გ) 192π სმ²; დ) $S_{\text{სფ}} = 3\pi R^2$. №11 7სმ №12 180π სმ² №13 ა) $\approx 7,07$ მ² №14 ა) 320π სმ², ბ) 1 : 5 №15 6 სმ. №16 300π სმ². №17 280π მ². №18 400π სმ² ან 1100π სმ². №19 910π სმ² №20 $h = R(\sqrt{3}-1)$

პპ-126-127. №1 ა) 195π სმ²; ბ) 115π სმ²; გ) $(440+16\pi)$ სმ² №2 144π სმ² №3 ა) $S_{\text{სფ}} = \pi d^2 + \pi dl$. №4 ა) 150π მ² ბ) 180 მ². №5 $\approx 9,1$ l №6 მიაღწევს. №7 დ) $6\sqrt{3}$ სმ²; ე) 32 სმ² №8 π სმ² №9 ა) 87π სმ². №10 ა) 1026π სმ².

პპ-128. №2 $S_1:S_2 = 25:16$, $h = \frac{4}{5}$ H. №3 $\frac{15}{8}\pi$ სმ² №4 4სმ, 6სმ და 6სმ, 9სმ

პპ-129-130. №1 12 სმ. №2 ა) $l = 2r$; ბ) 72π სმ² №3 ა) 660 სმ²; ე) 9π მ² №5 $\approx 31,3$ მ² №6 გ) 200π სმ² №7 26 სმ №8 576π სმ² №9 $4\sqrt{15}$ სმ² №10 50π სმ²

ფუნქციის წარმოებული

პპ-135-136. №2 1) ა) $\frac{1}{2}$; ბ) 1; დ) 1. №3 ა) გამარჯვებული ფაზილია. №4 ა) 1; ბ) $1\frac{2}{3}$ №6 4) ა) 10 მ/წმ №7 2) ა) 20π №9 ა) 1; ბ) 2 №10 გ) ≈ 2 №11 ა) $v(1) = 5$; ბ) $v(5) = 13$;

38·
140-142.

№1 ბ) $f(x)=3x^3$, $f'(x)=9x^2$ №2 ბ) $y'=4x$, $y'=-6x$. №4 1) ა) x_2 , x_7 ; ბ) x_1 , x_4 ; გ) x_6 ; 2) x_3 და x_5 . №6 ბ) 2; გ) $-0,5$ №7 1) ა) $y=4x-4$; 2) ბ) $y=12x-16$.
№9 $A \rightarrow c$, $B \rightarrow b$, $C \rightarrow a$. №11 $\frac{1}{2\sqrt{t+40}}$

38·
145-147.

№2 დ) $-12x^3$; ბ) $-\frac{5}{x^2}$ თ) $-\frac{2}{x\sqrt{x}}$ №3 დ) $\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; ე) $4\pi r^2$. №42) $\frac{x\sqrt[4]{x+12}}{4x^2}$; 4) $\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}$.
№5 დ) $2x - \frac{2}{x^2}$. №6 ა) $f'(0)=4$, $f'(2)=16$; ბ) $f'(1)=1,5$, $f'(4)=\frac{5}{16}$
№7 ა) $x=0$, როცა $x=\pm\sqrt{2}$. №8 ა) $(-2; +\infty)$; ბ) $x \in (0; 2)$. №9 $f'(x)=3x^2-2x-1$
№10 $a=2$, $b=-2,5$. №14 $k=-6$; $y=-6x+10$. №16 ა) $x_1=0$, $x_2=2$.
ბ) $y=0$, $y=12x-12$, $y=0$, $y=12x-16$. №17 (2;3), $y=3x-3$ №18 $k=4$; $k=-4$.
№19 $y=-2x-3$ ან $y=6x-11$. №20 გ) $f(x)=x^3-2$ №21 გრაფიკები არ იკვეთებიან.
№22 ა) $k=-2$; ბ) $y=\frac{1}{2}x+4$. №23 ბ) $\approx 17\%$.

38·
149

№1 ა) $4x-7$. №3 ა) $y=11x-6$ №5 131 №6 ა) $P(x)=(2x^3+8x) \cdot (3x^2-4x)$
№7 ბ) $y=-36x+65$; გ) $y=-4x-24$. №8 ბ) (2; -70) გ) (1;3), $(-\frac{7}{3}; -\frac{32}{9})$
№10 ა) 90 l; ბ) საათში $3\frac{1}{3}$ ლ-ით მცირდება.

38·
150-151.

№1 3) $\frac{-17}{(4+t^2)}$; 4) $\frac{x^2+6x-12}{(x+3)^2}$. №3 ა) $\frac{1}{(x+1)^2}$; ბ) $\frac{-1}{(x+1)^2}$. №4 1) ბ) $y=\frac{1}{2}x+2$;
2) ა) $y=\frac{x+5}{18}$. №5 $\frac{12-x^2}{x^4}$ №6 $T'(2)=-0,96^\circ\text{C}$. №7 ა) $N'(t)=\frac{2000t}{(3t^2+10)^2}$

38·
153-157.

№2 ა) $60(4x+1)^4$; ბ) $24x(3x^2-1)^3$. №3 ა) $\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$; ბ) $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. №4 ა) $\frac{20}{(3-2x)^3}$
№5 ა) $h'(x)=18(6x-1)^2$, $z'(x)=18x^2$ №6 გ) $f'(-2)=-2$. №7 $f'(1)=-10$.
№8 ბ) $x \in (\frac{1}{10}; \frac{1}{2})$. №9 ა) $\frac{-3}{(3x+5)^2}$ №10 ა) $y=0,6x+3,2$; ბ) $y=x+3$

№12 $2m(2t+1)$. №14) $\approx 60,4$; $\approx 69,52$; $\approx 87,68$. №15 ა) $S=\pi t^4$, ჩადვრილი ნავთობის გავრცელების ფართობი დროის მე-4 ხარისხის პროპორციულია. ბ) $S'=4\pi t^3$, გავრცელების სიჩქარე დროის კუბის პირდაპირპროპორციულია.
№17 ა) 110 მანათი; ბ) 80 მანათი. №18 ა) 16 მანათი; ბ) 15,998 მანათი; გ) წარმოების ზრდისას მარგინალური შემოსავალი მცირდება. №19 გ) $\approx 593,6$ მანათი

38·
159-160.

№1 5) $30x$; 9) $\frac{6}{x^4}$. №2 1) 48 ; 4) 62 . №3 1) $24x-2$; 2) $\frac{44}{(2x-3)^3}$.
№5 ა) $v(t)=-gt+v_0$; $a(t)=-g$. ბ) $h(t)=-0,5gt^2+18t+3$; $v(t)=-gt+18$;
 $a(t)=-g$. №7 49 ჯოული №8 6 ნ.

38·
162-163.

№1 ე) $2e^x(x+1)$; ვ) $xe^x(2+x)$ №2 გ) $3 \cdot 4^{x+2} \cdot \ln 4$; დ) $-3 \cdot 10^{3x-4} \cdot \ln 10$.
№3 ბ) $y=2x+1$; გ) $y=-ex$. №4 ა) 2; ბ) $1,5e$. №5 ა) $(-\infty; 0)$; ბ) $(1; +\infty)$.

№7 ა) $\approx 71,7$ მილიონი. №9 ა) $\approx 44,85$, გ) $\approx 6,98$. №10 გ) $\approx 0,92$; დ) $\lim_{t \rightarrow \infty} c'(t)=0$, წარმოება სტაბილურდება, თვითღირებულება არ იცვლება.

38·
165-166.

№1 ბ) $\frac{2}{2x+1}$; ე) $\frac{2x}{x^2+1}$. №2 ა) $x(2\ln x+1)$; გ) $\frac{3\ln^2 x}{x}$. №4 ბ) $\frac{3}{(x-2)(x+1)\ln 3}$.
№5 ა) $4\log_e$; ბ) -2 №6 1) $(1; +\infty)$; 2) ბ) როცა $x=1$. №7 ა) $y=x$.
№8 ბ) $N'(t)=20e^{0,2t}$ №9 ბ) $\approx 0,36$ მანათი. №14 ა) ≈ 830 ; ≈ 2066 .

- პპ. №2 ზ) $2x\sin x + x^2\cos x$; ი) $2x\cos 2x - 2x^2\sin 2x$. №3 ა) 0; ბ) -1. №4 დ) 3; ვ) 0.
 169-170. №5 ბ) $4\cos 4x$; გ) $-2\sin 2x$ №7 5) $\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}$. 7) $2e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$
 №8 ბ) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; გ) $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. №11 ა) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; ბ) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 გ) $y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$ №14 $-\sin 2x$, ანუ დ) პუნქტი. №17 ა) $3\sin \theta - 2\cos \theta$.
 პპ. №3 ბ) $y = 3$. №4 $f'''(x) = -18x - 2$. №5 ა) -101. №6 ა) $1\frac{3}{4}$; ა) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.
 171. №7 დ) $4\sin^3 \theta \cos \theta$. №9 ბ) ≈ 645 მანათი

ბრუნვის ფიგურების მოცულობა

- პპ. №2 ა) 450 მმ³ №3 ა) 6,4 მ №4 10π კუბ. ერთ. №5 80 π სმ³ №6 100π სმ³ გაიზრდება.
 173-176. №8 $\frac{SC}{4\pi}$ №9 $4\sqrt{2}\pi$ №10 4:1 №11 ა) 900π მ³; ბ) 189π სმ³. №12 დ) 21,3π მ³
 №13 ბ) 4 სიგრძის ერთ. №14 ≈ 250 მანათი №15 $\approx 3,43$ კგ №17 $\approx 21,1$ სმ³
 №18 გ) 15,5 π მ³ №21 ≈ 114 ცალი №22 125 სმ³ №23 64π სმ³ №24 $\approx 1,02$ მ³
 პპ. №1 ა) 7π მ³ ბ) π მ³. №2 ა) 180π სმ³ გ) 4მ №3 36 π №4 $h = 3y$ №5 ა) 864 სმ²,
 178-180. 960 სმ³ №6 16,8 π სმ², 9,6π სმ³ №7 96π სმ² №8 128π სმ³ №9 $\frac{\pi l^3}{8}$
 №10 ≈ 418 ცალი №11 $\approx 185,4$ სმ³ №12 $h = 6$ სმ №13 ჭურჭლის 80% ≈ 151
 წუთში დაიცვლება, $\approx 0,75$ ლ №14 ა) 50π სმ³ №15 168,48π №16 54 სმ³
 №18 ბ) ≈ 73 მლ №19 216π სმ², 388π სმ³ №20 $\approx 9,5$ მანათი, $\approx 14,09$ მანათი
 პპ. №2 ბ) 3მ. №3 გ) $R = 6$ სმ $h = 18$ სმ. №5 2) ა) 144π სმ². №6 $\approx 526,5$ მ³, $\approx 1485,2$ მ³.
 182-184. №7 B-72π სმ², 36π სმ³. №9 9 π სმ²; $-\frac{50}{3}$ π სმ³. №10 45π სმ³ და 243π სმ³.
 №11 112500π სმ³. №12 1) $\frac{28}{3}$ π სმ³; 2) $\frac{442}{3}$ π სმ³. №13 ა) $\frac{448}{3}$ π სმ³;
 ბ) $\frac{550}{3}$ π სმ³.
 პპ. №2 ა) $V_1 : V_2 = 1 : 8$, ბ) $V_1 : V_2 = 8 : 27$. №4 ა) 256 მ³. №5 3მ.
 186-188. №6 ა) 4-ჯერ; ბ) 8-ჯერ გ) 27 : 64. №7 ≈ 314 მ³. №9 ბ) 10 მ³.
 №10 $V_1 : V_2 = 1 : 8$, $S_1 : S_2 = 1 : 4$. №11 960 სმ².

- პპ. №3 $\approx 9,921$ მ³. №4 $\approx 1,177$ ტონა. №5 ≈ 392 კგ. №6 ≈ 3 ერთეული. №9 99π სმ³
 189-190.

ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის მეშვეობით

- პპ. №1 ა) $f(3) > f(10)$ №3 ბ) $(-\infty; 1,5]$ შუალედში კლებადია, $[1,5; +\infty)$ შუალედში ზრდადია.
 195-196. დ) $(-\infty; 0]$ და $[4; +\infty)$ შუალედში კლებადია, $[0; 4]$ შუალედში ზრდადია.
 ე) ფუნქცია $(-\infty; -1]$ და $[3; +\infty)$ შუალედებში ზრდადია, $[-1; 3]$ მონაკვეთზე
 კლებადია. №4 ა) ფუნქცია $(-\infty; 3]$ შუალედში კლებადია, $[3; +\infty)$ შუალედში
 ზრდადია. №5 ე) $(-\infty; -2]$ და $[2; +\infty)$ შუალედში ზრდადია, $[-2; 2]$ შუალედში
 კლებადია. №9 4) ა) $-\frac{1}{3}$ და 1; ბ) $(-\infty; -\frac{1}{3}]$ და $[1; +\infty)$ შუალედებში
 ზრდადია, $[-\frac{1}{3}; 1]$ შუალედში კლებადია. №10 ა) $h(3) > h(4)$; ბ) $h(-1) < h(0)$.
 №11 ბ) როცა $b \in [-6; 6]$.
 პპ. №5 ა) $x=0$ და $x=2$; ბ) $(-\infty; 2]$ შუალედში კლებადია, $[2; +\infty)$ შუალედში ზრდადია
 202-204. №6 გ) კრიტიკული წერტილები $x=-1$ და $x=2$, $(-\infty; -1]$ და $[2; +\infty)$ შუალედებში ზრდადია
 $[-1; 2]$ შუალედში კლებადია, $g(-1)=12$, $g(2)=-15$ №7 5) $x_1=-1$ და $x_2=2$ კრიტიკული

წერტილებია. $x_{\max} = -1, x_{\min} = 2, f_{\max} = 13, f_{\min} = 4$. №10 6) $x_1 = -1, x_2 = 1$ კრიტიკული წერტილებია. $x_{\min} = 1, x_{\max} = -1, f_{\min} = -4, f_{\max} = 4$; 9) $x_1 = 0$ და $x_2 = 2$ კრიტიკული წერტილებია. $x_{\min} = 0, x_{\max} = 2, f_{\min} = 0, f_{\max} = 4e^{-2}$ 10) $x = 1$ კრიტიკული წერტილია.

$x_{\min} = 1, f_{\min} = 1$. №12 ა) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; ბ) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

№13 ბ) 3) $\max_{[-1;1]} f(x) = 0, \min_{[-1;1]} f(x) = -5$. 8) $\max_{[1/e;e]} f(x) = \frac{e+1}{e}, \min_{[1/e;e]} f(x) = 1$

№15 $C'(x) = 0, 9x^2 - 10x + 28$. №16 ბ) კვადრატის პერიმეტრი უმცირესია თუ მისი გვერდი 10-ია. №17 ა) 1; გ) $-\frac{1}{2}$; დ) $4 + 8 + 6$. №18 როცა $R = r$.

№19 $T_{\max} = 102,2 \text{ F}; T_{\min} = 95,64 \text{ F}$

33. 207-208. №5 ა) მაქსიმუმ ორი ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება იყოს. ბ) $x_1 = -3$ და $x_2 = 4$ კრიტიკული წერტილებია. $x_{\max} = -3, x_{\min} = 4, f_{\max} = 142, f_{\min} = -201, (-\infty; -3]$ და $[4; +\infty)$ შუალედში ზრდადია და $[-3; 4]$ შუალედში კლებადია.

№6 ა) ღერძებთან გადაკვეთა: $(0; 0), (3; 0)$;

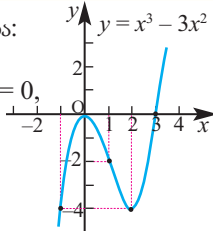
კრიტიკული წერტილები: $x_1 = 0, x_2 = 2$;

$(-\infty; 0]$ და $[2; +\infty)$

შუალედებში ზრდადია,

$[0; 2]$ შუალედში კლებადია;

$x_{\max} = 0, x_{\min} = 2, f_{\max} = 0, f_{\min} = -4$



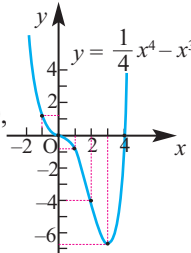
№7. გ) ღერძებთან გადაკვეთა: $(0; 0), (4; 0)$;

კრიტიკული წერტილები: $x_1 = 0, x_2 = 3$;

$(-\infty; 3]$ შუალედში კლებადია,

$[3; +\infty)$ შუალედში ზრდადია;

$\min = 3, f_{\min} = -6,75$.



№7. ა) ღერძებთან გადაკვეთა:

$(-\sqrt{2}; 0), (0; 0), (\sqrt{2}; 0)$;

კრიტიკული წერტილები:

$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$;

$(-\infty; -1]$ და $[0; 1]$ შუალედებში

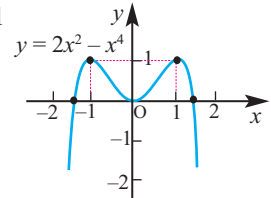
ზრდადია, $[-1; 0]$ და $[1; +\infty)$ შუა-

ლედებში კლებადია;

$x_{\max} = -1, x_{\min} = 0, x_{\max} = 1$,

$f_{\max} = f(-1) = 1, f_{\min} = f(0) = 0$,

$f_{\max} = f(1) = 1$



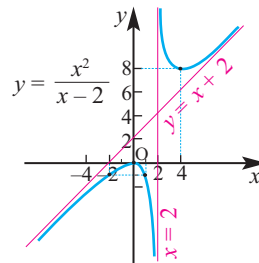
№9. გ) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

ვერტიკალური ასიმპტოტი: $x = 2$, დახრილი ასიმპტოტი: $y = x + 2$;

კრიტიკული წერტილები: $x_1 = 0, x_2 = 4$;

$(-\infty; 0]$ და $[4; +\infty)$ შუალედებში ზრდადია, $[0; 2)$

და $(2; 4]$ შუალედებში კლებადია; $x_{\max} = 0, x_{\min} = 4, f_{\max} = 0, f_{\min} = 8$.



33. 211-215. №1 12+12 №2 ფართობი უდიდესია, როცა კვადრატის გვერდი 15 მ-ია. №3 $8\text{მ} \times 8\text{მ}$ №4 როცა ზომებია $50 \times 100 \times 50$. №5 $6\text{მ} \times 6\text{მ} \times 3\text{მ}$

№6 ა) $\frac{125000}{3} \text{ მ}^2$. №72 $8\text{მ} \times 6\text{მ} \times 5\text{მ}$. №10 მაშინ, თუ ნავით C წერტილიდან 0,75 კმ მანძილზე მოყვ D წერტილში მივა, იქიდან B წერტილში ქვეითად წავა.

№12 ბ) 36 სმ^2 . №15 $250\sqrt{3} \pi \text{ სმ}^3$ №16 $\frac{128\sqrt{3} \pi}{9} \text{ სმ}^3$ №17 $r = \frac{2b}{3}, h = \frac{a}{3}$

33. 216-217. №5 $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$. №6 $x_1 = 0,5$ და $x_2 = 1$. №7 $y = 2x - 1$. №8 $(1; 1)$. №12 8 სმ

ინტეგრალი

- პპ. №2 დ) $F(x) = x^5$. №3 გ) $g(x) = 2x+1$. №4 ბ) $x^2 + C$; გ) $x^4 + C$;
 220-228 დ) $\operatorname{tg} x + C$. №5 დ) $\frac{1}{3}x^2 + C$. №6 ა) $\frac{4}{3}x^3 + C$; დ) $\frac{1}{8}x^4 + C$. №7 ბ) $\frac{1}{4x^4} + C$;
 ე) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; თ) $-2x^{\frac{3}{2}} + C$. №8 ბ) $\frac{3\sqrt{4x+1}}{2} + C$. №9 ბ) $-\frac{1}{27}(7-3x)^9 + C$.
 დ) $\frac{1}{25(5x+2)^5} + C$. №10 გ) $x^3 + \frac{1}{x} + C$. №11 ა) $3x^2$; ბ) $x^3 + C$; გ) $\sqrt{x}$.
 №12 ბ) $x - \frac{x^2}{2} + C$; ე) $\frac{x^4}{4} - 9x + C$; ზ) $x^3 + \frac{1}{2x^2} + C$. №13 გ) $x - \frac{x^2}{2} + C, (x \geq 0)$.
 №14 ბ) $2u^2 + 5u + \frac{1}{u} + C$; ე) $\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$. №15 ბ) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x^3 + C$.
 №16 ბ) $\frac{3}{2-4x} + C$; გ) $\frac{2}{3}x^3 - x + C$. №17 ბ) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$. №18 ბ) $-4e^{3x} + C$;
 დ) $\frac{2^{x+2}}{\ln 2} + C$; ზ) $\ln|5x+4| + C$. №19 ბ) $2\ln|2x-3| + C$; გ) $-2e^{3-2x} + C$.
 №20 ა) $e^x - \frac{ex^2}{2} + C$; ბ) $\frac{2x}{\ln 2} - 2\ln|x| + C$. №21 ბ) $2\operatorname{tg} x + C$; გ) $-6\operatorname{ctg} x + C$.
 №22 გ) $-2\operatorname{ctg} 2x + C$. №23 ა) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; გ) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.
 №24 ე) $-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. №25 ა) $\operatorname{tg} \theta + C$; ბ) $-\operatorname{ctg} x - x + C$. №27 ბ) $\sqrt{x} - 4$.
 №29 გ) $4\ln x + 1$. №34 გ) $x(t) = t^2 - 1$. №35 $x(t) = t^2 - 3t$. №36 $P(12) \approx 206152$.

- პპ. №4 ე) 2,5; თ) 8,5. №6 ა) $3\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{1}{4}$. №7 8,5.
 233-235

- პპ. №1 4) $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; 15) 1. №2 ა) 2. №3 გ) 6 ე) $\frac{20}{3}$. №4 ა) $\frac{20}{3}$. №6 გ) 1;
 238-241 დ) $e-1$. №9 ბ) 9,08. №10 ა) ≈ 172 ათას მან. №12 625მ. №14 ≈ 721 კაცი.

- პპ. №1 ა) $\frac{1}{2}$; დ) $-e$. №2 ბ) 6,5; გ) 1,5. №3 ა) 4,5 №4 ა) 25 №6 ა) 40,5; №9 $c = 2$.
 244-246

- პპ. №1 გ) $5\frac{1}{3}$. №2 გ) 9. №3 ბ) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$. №4 გ) 6. №5 გ) $\frac{1}{6}$. №6 ა) 2,5. №7 ა) $\frac{5}{6}$.
 249-251. №9 ა) 2,5. №10 ბ) 3 წმ.

- პპ. №1 ა) 21π ; გ) $-\frac{\pi}{3}$. №3 1) 50π ; 5) $7,5\pi$; 7) $\frac{\pi}{6}$. №4 ა) 80π №6 ა) $3\frac{83}{120}\pi$.
 255-257.

- პპ. №3 გ) 17. №5 გ) $\frac{17}{6}$. №7 ბ) 2. №8 ა) $2\pi+8$. №9 ბ) 2π . №10 გ) $49\frac{1}{3}$.
 258-259. №12 ა) $x(t) = -0,5t^3 + t^2 + 3,5t - 9$.

სტატისტიკა და ალბათობა

- პპ. №1 3) $\sigma \approx 2,24$ №3 ა) $\bar{x} = 550, \sigma \approx 287$. №6 ა) $\bar{x} = \frac{25}{3}$; უდიდესი სხვაობა: 14;
 264-265. $\sigma^2 \approx 14,03$; $\sigma = 3,75$; ბ) უდიდესი გადახრა აქვს პირალლაჰის რაიონს. დ) ≈ 393920 . №8 ა) A: უდიდესი სხვაობა 170, $\bar{x} = 272, \sigma^2 = 2578, \sigma \approx 51$; B:
 უდიდესი სხვაობა 90, $\bar{x} = 227, \sigma^2 = 800, \sigma \approx 28,3$. №8 მე-2 ფეხბურთელის
 შედეგი უფრო სტაბილურია.

- პპ. №1 ფრინველის კვერცხების $\approx 81,5\%$ -ის მასა 43,09 გრამსა და 45,4 გრამს
 267-269. შორისაა. №2 ა) (66; 78) ბ) (60; 84) გ) (54; 90). №3 1) გ)-ში უდიდესი, ბ)-ში
 უმცირესი. №5 ა) A კომპანიაში 5%, B-ში 14%. №6 ა) ≈ 1710 ; $P=0,16$
 №7 1) ა) 0,82; ბ) 0,16; გ) 0,03. 2) [63; 77]. №8 ა) $m=120, \sigma=17,6$.
 №9 ჯამში 7-ის მოსვლის ალბათობა უფრო მაღალია და $\frac{1}{6}$ -ია; ბ) $\frac{1}{12}$

- პპ. №2 მედიანა $Q_2 = 215$, $Q_1 = 181$, $Q_3 = 231$; უმცირესი მნიშვნელობა 173; უდიდესი მნიშვნელობა 241; ინფორმაციის $\approx 63\%$, ძირითადი ნაწილი ყუთზე მოდის. 18,2% მარცხენა და მარჯვენა სახელურზეა. №3 ა) 60; ბ) 85; გ) 75%; დ) 45; ე) [80; 105] ე) არა.
- პპ. 272-273. №2 ა) 72%; ბ) 89%; გ) 28%. №3 1) ა) $P(A \cap B) = 0,04$; ბ) $P(A \cup B) = 0,51$; გ) $P(O) = 0,55$
- პპ. 275. №2 0,21. №3 ა) $P = \frac{2}{3}$. №5 0,0776. №6 ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{1}{2}$. №7 ა) 0,32; ბ) 0,48; გ) 0,08; დ) 0,44; ე) 0,92. №8 $\frac{13}{30}$.
- პპ. 279. №1 ბ) $\bar{x} = 16,6$; $\sigma^2 = 17,4$; $\sigma = 4,2$. №2 ა) 1)-ში უფრო მეტია. №4 ა) 68%; ბ) 34%; გ) 0,5%; დ) 16%. №5 $\frac{3}{7}$. №7 0,043. №9 $\frac{1}{18}$. №10 ა) $\frac{9}{124}$; ბ) $\frac{253}{496}$
- პპ. 280. №12 ა) 0,68; ბ) 0,025; გ) 0,84; დ) 0,475.

განტოლებები, უტოლობები და განტოლებათა სისტემები. განმარტებული დაგალებები

- პპ. 283-284. №1 ა) 13; გ) ± 4 ; ვ) 62; ე) $\{-1; 3\}$. №2 ბ) 0. №3 ბ) ორი. №4 4) [4; 8]; 8) $(-1; 0] \cup [3; 4)$; 9) [0; 3]; 10) $(-\infty; 2] \cup [4; \infty)$; 17) $[2; +\infty)$.
- პპ. 285. №1 ა) (8; -3); ბ) (1; 2); ე) (2; 1); ზ) (5; 2); თ) (3; 3); ი) (2; 0).
- პპ. 286. №1 ა) (8; 2); გ) (6; 2); ე) (4; 2); ზ) (4; 2); თ) (0; 3); ი) (2; 5), (32; 1); კ) (3; 3)
- პპ. 288. №1 ა) $(2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; გ) $(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$; ვ) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi n)$, $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$;
- პპ. 289-310. №2 (-1; -8); (1,5; 2). №3 ა) 180° ; ბ) 60° , 180° , 300° . ზ) 0 ; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$; 2π .
- №4 $\approx 9,4$ სმ. №6 წრეწირის სიგრძე 40%, ფართობი 64% მცირდება. №7 2 სმ.
- №9 (-1; 1). №10 ა) $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; ზ) $\frac{2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}}$. №12 $1 \rightarrow B$, $2 \rightarrow C$, $3 \rightarrow A$. №15 40 სმ, 60 სმ². №16 დ) $\frac{1}{4}$; ე) $\frac{2}{3}$; ვ) $\frac{1}{4}$. №20 გ) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{2}$. №21 ა) $x = -1$ და $x = 2$ ბ) $(-\infty; -1]$ და $[2; +\infty)$ შუალედში ზრდადია, $[-1; 2]$ შუალედში კლებადია; გ) $y_{\max} = y(-1) = 13$, $y_{\max} = y(2) = -14$. №22 ა) 60° ; ბ) $9\sqrt{3}$. №24 ა) უდმ=3, უმმ არა აქვს №28 ბ) 240π სმ³
- №29 ბ) $\frac{7}{3}$ დმ³. №31 ა) 10^5 ; ბ) $10P_5$. №32 63მ. №38 4კვ.ერთ. №41 $3x - y + 2z + 5 = 0$.
- №43 ბ) 30 სმ². №45 $\frac{512\pi}{15}$ კვ.ერთ. №52 4π. №54 ა) l . №55 $T_1 \approx 143,56$, $T_2 \approx 101,56$.
- №56 გ) $[-\infty; 3]$ შუალედში კლებადია, $[3; +\infty)$ შუალედში ზრდადია. დ) $x_{\min} = 3$, $y_{\min} = -27$. №58 ა) $(\frac{16}{3}; \frac{100}{3})$; ბ) 26 კვ.ერთ. №61 3სმ. №66 ა) ≈ 138 მ²; ბ) 80მ³
- №67 გ) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. №71 2. №72 ა) $v(t) = t^2 + 9$; ბ) $86\frac{2}{3}$ მ. №78 $\frac{20}{29}$. №81 ა) 1600° ; ბ) 552° ; №83 24სმ. №85 $\approx 5,7$ მმ. №92 8%. №93 სამი. №99 ა) 550 მ³, 942,5სმ³.
- ბ) ≈ 476 მ², 476სმ². №101 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ან $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- №102 ა) 91; ბ) $\frac{2}{91}$. №109 1) $\sigma^2 \approx 31,1$, $\sigma \approx 5,58$. №110 $P_{ABN} = 96$, $S_{ABN} = 336$, $P_{BCN} = 72$, $S_{BCN} = 144$. №115 7,5 სმ. №117 0,4 სმ. №118 45წმ. №123 ა) 100მ²; ბ) $\approx 1,4$ მ; №126 ა) 2475; ბ) $\frac{n(n-1)}{4}$. №129 115. №134 $\frac{5}{18}$. №135 1,4. №140 ბ) 7,5; გ) $4\sqrt{2}$. №145 $d = \sqrt{2} - 1$. №147 მოთავსდება. №159 $P = 40$, $S = 80$, $MK = 6,4$.
- №163 ამპლიტუდა $\frac{1}{2}$, სიხშირე $\frac{1}{\pi}$. №167 შავი. №170 B-დან 28 მამნიძილზე.
- №173 0,24C. №174 (4; 2), (10; 10). №183 6. №189 $0,5 \leq a \leq 2$. №202 $a + b + 3$.

ლიტერატურა

1. ალგებრა და ანალიზის საწყისები. სახელმძღვანელო. მე-10 კლასი. მერდანოვი მ., იაკუბოვი მ. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2014.
2. ალგებრა და ანალიზის საწყისები. სახელმძღვანელო. მე-11 კლასი. მერდანოვი მ., იაკუბოვი მ. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011.
3. გომეტრია. სახელმძღვანელო. მე-9 კლასი. მერდანოვი მ., მირზაევი ს. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011.
4. გომეტრია. სახელმძღვანელო. მე-10 კლასი. მერდანოვი მ., მირზაევი ს. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011.
5. გომეტრია. სახელმძღვანელო. მე-11 კლასი. მერდანოვი მ., მირზაევი ს. და სხვ. ჩაშოილლუ, 2011.
6. A problem solving approach to Mathematics. Rick Billstein,... Pearson, 2013.
7. The 3rd edition of the Mathematics Standard Level, Methods Standard Level Course of the International Baccalaureate Cirrito Fabio, Patrice Tobin, Shannon Books, Australia
8. Algebra 2. James E. Schulltz,... Harcourt Education Company, 2004.
9. Stats. Data and Models. Richard D. De Veaux v a b. Addison Wesley/ Copyright Pearson Education, 2012
10. Precalculus. A graphing approach. Tomas Hungerford v a b. Harcourt Education Company. USA, 2006
11. Discovering Advanced Algebra An Investigative Approach. Grades 10–12. Jerald Murdock,... Key Curriculum Press. 2010.
12. College and Apprenticeship mathematics. Addison Wesley. Copyright. Pearson Education Canada Inc., 2003
13. Геометрия. Учебник для 7-11 классов. А.В.Погорелов, Просвещение, 1999.

<http://www.classzone.com>

<http://www.nctm.org>

<https://www.engageny.org/content/prec calculus-and-advanced-topics>

<https://www.edonline.sk.ca/webapps/moe-curriculum-BBLEARN/index.jsp>

<http://math.kendallhunt.com/x5273.html>

<https://www.khanacademy.org/math>

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 11

Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün

Riyaziyyat fənni üzrə

Dərslik

(Gürcü dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:

Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Məsləhətçi:

Çingiz Qacar

Elmi redaktoru:

Əbdürrəhim Quliyev

Tərcüməçi:

Çalabi Abdurahmanov

Kompüter tərtibatı:

Mustafa Qəhrəmanov

Bədii tərtibatı:

Leyla Bəşirova

Korrektor:

Tərlan Qəhrəmanova

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2018-217

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi - 2018

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Kağız formatı: 70×100 ¹/₁₆.

Fiziki çap vərəqi 20.

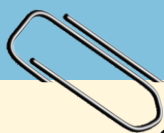
Səhifə sayı 320.

Tiraj: 84. Pulsuz.

Bakı 2018

Radius nəşriyyatı
Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

Pulsuz



Əziz məktəbli !

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sənə kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!