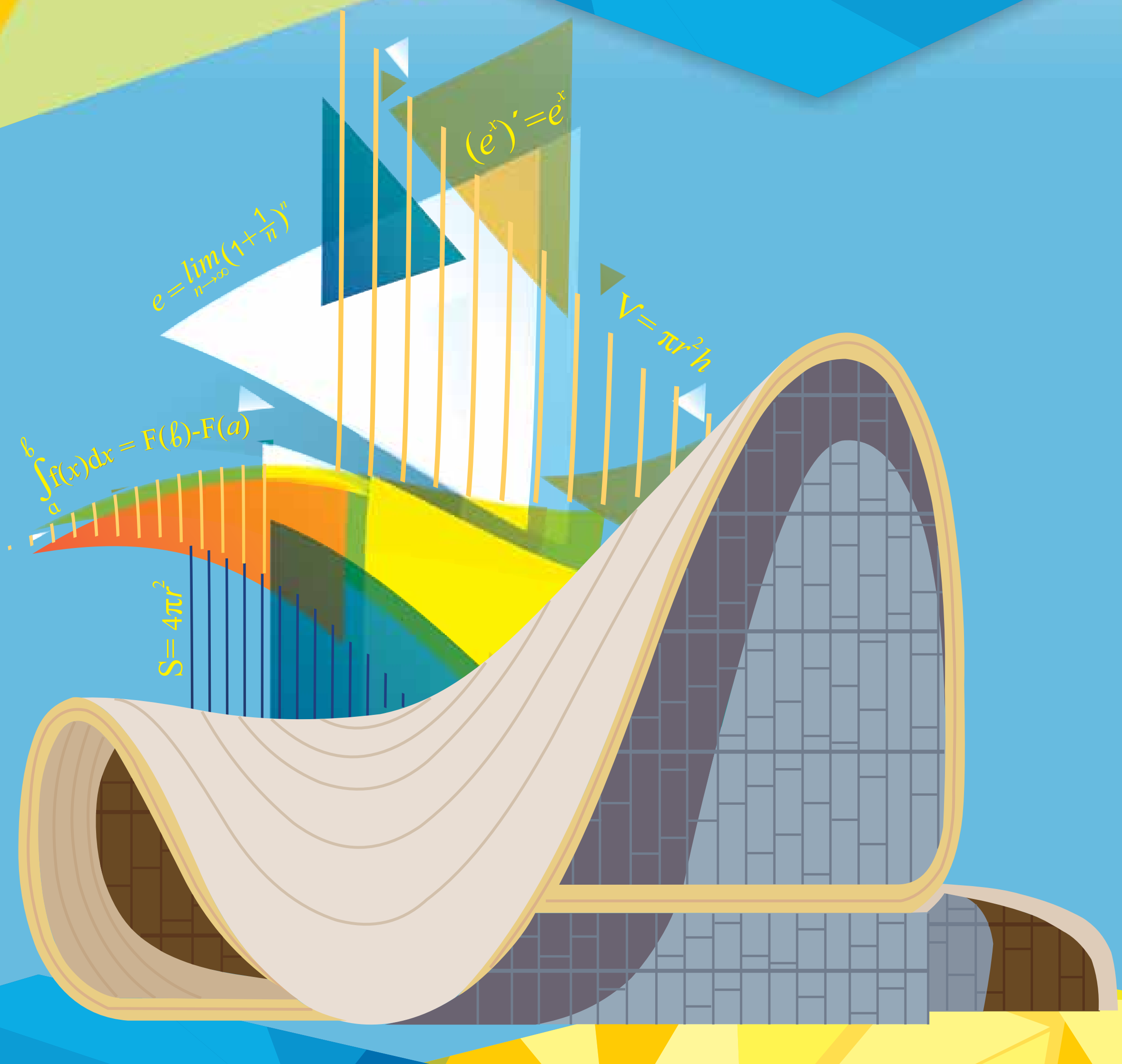
МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК 11



AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASININ DÖVLƏT HİMNİ

Musiqisi ***Üzeyir Hacıbəylinin,***
sözləri ***Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!

Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Абдуррахим Гулиев

Учебник
по предмету
МАТЕМАТИКА

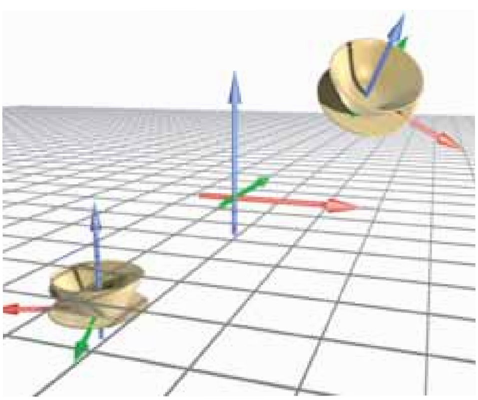
для 11-х классов общеобразовательных заведений

Замечания и предложения, связанные с этим изданием, просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!

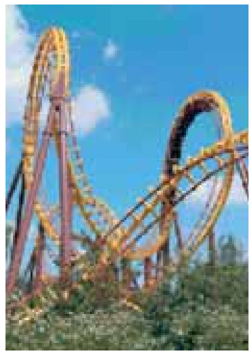
Содержание

1. Многочлены

2. Векторы в пространстве



3. Предел



4. Фигуры вращения Цилиндр, конус, шар

5. Производная функции

6. Объем фигур вращения

7. Применение производной к исследованию функций

8. Интеграл

9. Статистика и вероятность

10. Уравнения, неравенства, Системы уранений

1

Многочлены

- Деление многочлена на многочлен
- Теорема об остатке
- Теорема о разложении на множители
- Нахождение рациональных корней
- Основная теорема алгебры
- Функция-многочлен
- Рациональная функция

Математический словарь

- Многочлен *n*-ой степени
- Делимое, делитель, остаток
- Деление уголком
- Синтетическое деление
- Теорема об остатке
- Множители многочлена
- Рациональные корни
- Корни многочлена

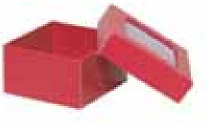
Это интересно!

Живший в 1050-1122 гг. Омар Хаям известен в мире как мастер рубаи. Однако имя Омара Хаяма также упоминается наряду с именами гениальных математиков. Именно Омар Хаям впервые представил общую формулу корней уравнения кубического многочлена $f(x) = x^3 - bx - a$, в случае $a>0$, $b>0$.

Схематическую запись правила деления многочлена на двучлены впервые ввел итальянский математик Паоло Руффини.

Полиномография – вид искусства, который является результатом синтеза изобразительного искусства, математики и компьютерной науки. Основой полиномографии является визуализация корней многочлена при помощи компьютерных программ.

Деление многочлена на многочлен



Задача. Объём подарочных коробок, размеры которых даны в сантиметрах, можно смоделировать функцией $V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$, где x - положительное целое число и $5 \le x \le 15$. Если высоты коробок можно определить при помощи линейной функции $h(x) = x + 1$, то как можно выразить другие размеры коробки в виде многочлена? Вы сможете решить эту задачу, изучив правило деления многочлена на многочлен.

Исследование. Изучите, как правило деления многозначных чисел столбиком можно применить при делении многочлена.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,552 & 17 \\ \cline{2-2}
\underline{51} & 32 \\
-\,42 & \\
\underline{34} & \\
8 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,x^2 + 6x + 11 & x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 + 3x\phantom{{}+11}} & x + 3 \\
-\,3x + 11 & \\
\underline{3x + 9} & \\
2 &
\end{array}
$$

a) Для каждого из двух случаев укажите, какие числа и какие многочлены соответствуют понятиям делимое, делитель и частное.

b) Как был найден первый член при делении многочлена? Каковы сходные и отличительные черты данного деления и деления многозначных чисел?

c) Как вы убедились,что каждое из двух делений выполнено правильно?

Выражение вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ называется многочленом n-ой степени от одной переменной. Здесь x – переменная, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – определённые числа и $a_n \neq 0$, $a_n x^n$ – старший член, a_n - коэффициент при старшем члене, a_0-свободный член. Многочлен можно разделить на многочлен аналогично правилу деления целых чисел столбиком.

Деление натурального числа на натуральное число можно проверить равенством : **делимое = частное × делитель + остаток**

Аналогичное правило справедливо и при делении многочлена на многочлен. Если многочлен $P(x)$ -делимое, $B(x)$ - делитель, $Q(x)$ - неполное частное, $R(x)$ - остаток, то справедливо равенство $\dfrac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$ или $P(x) = Q(x)\,B(x) + R(x)$. Здесь, степень многочлена $R(x)$ ниже степени многочлена $B(x)$. Если делителем является двучлен $x - m$, то остатком может являться определенное число (r).

В этом случае: $\dfrac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \dfrac{r}{x-m}$; $\quad P(x) = (x-m)\,Q(x) + r$

Пример 1. a) Разделите многочлен $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ на двучлен $x - 3$. Ответ запишите в виде $\dfrac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \dfrac{r}{x-m}$

b) Определите множество допустимых значений переменной.

c) Выполните проверку.

Решение: a)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-4x+5 & x-3 \\
\cline{2-2}
-\underline{x^3-3x^2} & x^2+x-1 \\
x^2-4x & \\
-\underline{x^2-3x} & \\
-x+5 & \\
-\underline{-x+3} & \\
2 &
\end{array}
$$

На каждом шаге деления, начиная слева, первый член делимого делится на старший член делителя (в данном случае на x).

Значит,

$$\frac{x^3-2x^2-4x+5}{x-3}=\underbrace{x^2+x-1}_{\text{частное}}+\frac{\overset{\text{остаток}}{2}}{x-3}$$

b) При этом $x-3\neq 0$ или $x\neq 3$, иначе возникает деление на нуль.

c) Должно выполняться тождество

$$x^3-2x^2-4x+5=(x-3)(x^2+x-1)+2=$$
$$=x^3+x^2-x-3x^2-3x+3+2$$
$$=x^3-2x^2-4x+5$$

Пример 2. Разделите $5x+3x^3+2x^4-1$ на многочлен x^2-2x+2.

Решение: запишем делимое в порядке убывания степеней. Введем в запись отсутствующие члены с коэффициентом равным 0.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3+0x^2+5x-1 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
-\underline{2x^4-4x^3+4x^2} & 2x^2+7x+10 \\
7x^3-4x^2+5x & \\
-\underline{7x^3-14x^2+14x} & \\
10x^2-9x-1 & \\
-\underline{10x^2-20x+20} & \\
11x-21 &
\end{array}
$$

На каждом шаге деления, начиная слева, первый член делимого делится на старший член делителя (в данном случае на x^2).

$$\frac{2x^4}{x^2}\quad \frac{7x^3}{x^2}\quad \frac{10x^2}{x^2}$$
$$2x^2+7x+10$$

Обучающие задания

1. 1) Выполните деление многочлена на многочлен столбиком.

a) $(2x^2-3x+6):(x-2)$

b) $(2y^3-y^2+3y-1):(y-4)$

c) $(4x+2x^2-x^3+5):(x+2)$

d) $(-3y^3+4y-5):(y-1)$

e) $(-z^3+2z^2-3z+2):(z-2)$

f) $(2x^3-12x-7x^2-3):(2x+3)$

2) Решение проверьте при помощи равенства $P(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

2. Найдите многочлен, при делении которого на двучлен $x-3$ частное равно $2x^2+3x-11$, а остаток равен -4.

3. При делении многочлена $2x^2-7x+9$ на некоторый многочлен в частном получается $2x-3$, а в остатке 3. Найдите делитель.

4. Выполните деление.

a) $(x^4-x^3-x-3):(x^2-1)$ b) $(x^4+2x^2+4):(x^2-2)$

5. Найдите Q(2), если $x^3-x^2-5x+6=(x-2)\cdot Q(x)$.

Деление многочлена на многочлен

Практическая работа: 1) Исследуйте деление столбиком многочлена $2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ на двучлен $x - 2$.
2) На каждом шаге деления делимое делится на старший член делителя, на x, и результат записывается в частное. Установите, как можно найти первый член при делении на каждом из следующих шагов.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+3x^2-5x+7 & x-2 \\ \cline{2-2} -\underline{2x^3-4x^2} & 2x^2+7x+9 \\ \qquad 7x^2-5x & \\ \qquad -\underline{7x^2-14x} & \\ \qquad\qquad 9x+7 & \\ \qquad\qquad -\underline{9x-18} & \\ \qquad\qquad\quad 25 & \end{array}$$

$3x^2 - (-4x^2) = x^2 \cdot (3 + 2\cdot 2)$

$-5x - (-14x) = x \cdot (-5 + 2\cdot 7)$

$7 - (-18) = 7 + 2\cdot 9$

Правило синтетического деления многочлена на двучлен $x - m$ (схема Горнера)

При делении многочлена на двучлен вида $x - m$ можно использовать метод, альтернативный делению столбиком - метод синтетического деления. При синтетическом делении, используя только коэффициенты, выполняется меньшее количество вычислений.

Пример. Разделите многочлен $2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$ на двучлен $x + 3$ методом синтетического деления.
Решение: коэффициенты делимого записываются в порядке убывания степеней (отсутствующий член записывается с коэффициентом равным нулю). Если двучлен имеет вид $x + m$, то его записывают в виде $x - (-m)$.

Запишем двучлен $x + 3$ в виде $x + 3 = x - (-3)$.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$

значение m					коэффициенты многочлена
→ –3	2	3	– 4	11 ←	
×					

–3	2	3	–4	11
		–6		
×	2	–3		

1. Перепишем старший коэффициент (2) в нижнюю строку.

2. Коэффициент 1-*го* члена 2 умножим на (–3) и полученный результат (–6) сложим с коэффициентом второго члена (3). Получим 2-ой коэффициент частного (–3).

–3	2	3	–4	11
		–6	9	–15
×	2	–3	5	–4

$2x^2 - 3x + 5$ остаток

3. Коэффициент 2-го члена частного (–3) умножим на (–3) и сложим с коэффициентом 3-го члена делителя (–4). Получим 3-ий коэффициент частного (5).
Остальные коэффициенты находятся по аналогичному правилу.

Таким образом, для делимого $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$ и делителя $B(x) = x + 3$ частным будет $Q(x) = 2x^2 - 3x + 5$, а остатком $r = -4$.

Деление можно записать в виде:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 11}{x+3} = 2x^2 - 3x + 5 - \frac{4}{x+3}$$

В общем случае, правило синтетического деления (или схема Горнера) многочлена n-ой степени на двучлен $x - m$ приведено в таблице ниже.

	a_n	a_{n-1}	....	a_2	a_1	a_0
m		$+ m \cdot b_{n-1}$		$+ m \cdot b_2$	$+ m \cdot b_1$	$+ m \cdot b_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + m \cdot b_{n-1}$	....	$b_1 = a_2 + m \cdot b_2$	$b_0 = a_1 + m \cdot b_1$	$r = a_0 + m \cdot b_0$

Обучающие задания

6. Выполните деление при помощи метода синтетического деления. Проверьте результат при помощи равенства $P(x) = (x - m)\,Q(x) + r$.

a) $(x^2 + 3x + 15) : (x - 5)$

b) $(x^2 + 7x - 2) : (x - 2)$

c) $(x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$

d) $(x^3 - 14x + 8) : (x + 4)$

e) $(x^4 - 9x^2 + x + 3) : (x + 3)$

f) $(10x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9) : (x + 1)$

7. Выполните деление любым из известных вам способом.

a) $(x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (x - 1)$

b) $\dfrac{t^3 + 2t^2 - 7t - 2}{t - 2}$

c) $(y^3 + 3y + 10):(y + 2)$

d) $\dfrac{m^4 + 6m^3 + 2m^2 - m + 8}{m + 1}$

8. а) Сначала выполните деление многочлена $12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ на двучлены $2x + 1$, $3x + 1$ и $4x + 1$ столбиком, а затем этот же многочлен разделите методом синтетического деления на двучлены $x + \dfrac{1}{2}$, $x + \dfrac{1}{3}$ и $x + \dfrac{1}{4}$. Для каждого случая выразите свое мнение об остатках и коэффициентах.

б) При синтетическом делении делитель должен иметь вид $x - m$. Как можно применить эту схему, если делитель будет иметь вид $2x - 4$?

9. По данным синтетического деления найдите делимое, делитель, частное и остаток.

3	1	–5	3	12
		3	–6	–9
	1	–2	–3	3

Теорема об остатке

Теорема об остатке (Теорема Безу)

Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен $x - m$ равен значению многочлена P(x) в точке $x = m$.

$$P(x) = (x - m)Q(x) + P(m), \quad r = P(m)$$

Доказательство: В равенстве $P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$ запишем $x = m$.
$P(m) = (m - m) \cdot Q(m) + r$, тогда $r = P(m)$

Пример. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^3 - 11x + 9$ на двучлен $x + 4$, применив теорему об остатке.
Решение: запишем делитель в виде $x + 4 = x - (-4)$, тогда $m = -4$.
По теореме об остатке получим, что остаток равен P(–4): $r = P(-4) = (-4)^3 - 11\cdot(-4) + 9 =$
$= -64 + 44 + 9 = -11$

Проверим решение.
$x^3 - 11x + 9$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -11 & 9 \\
-4 & & & & \\
\times & 1 & -4 & 16 & -20 \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & -11
\end{array}$$

$x^2 - 4x + 5$ остаток

$P(-4) = -11$

Обучающие задания

10. Многочлен P(x) разделите на двучлен $x - m$ методом синтетического деления и сравните полученный остаток со значением многочлена P(m).

a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 3$; $m = 2$
b) $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9$; $m = -4$
c) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$; $m = -2$
d) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x + 3$; $m = 1$

11. Используя теорему об остатке, определите остаток от деления многочленов на двучлены: 1) $x - 4$; 2) $x + 2$.

a) $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$
b) $2x^3 + 5x - 2x^4$
c) $3x^3 + 7x^2 - 2x - 3$
d) $3x^3 + 4x^2 - 19$
e) $8x^2 - 8x - 5x^3 + 3$
f) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

12. С помощью схемы Горнера выполните деление. Проверьте результат при помощи теоремы об остатке.

a) $(x^3 + 2x^2 - 3x + 9) : (x + 3)$
b) $(2y^2 + 3y - y^3 + 5) : (y - 4)$
c) $(2x^3 + 2x^2 - 5x + 4) : (x - 2)$
d) $(2t^4 + 3t^3 - t^2 + 4t) : (2 + t)$

13. Для каждого делимого найдите значение коэффициента c, при котором остаток равен 2.

a) $(x^3 + 3x^2 - x + c) : (x - 1)$
b) $(x^3 + x^2 + cx - 15) : (x + 2)$
c) $(x^3 + cx^2 + x - 3) : (x - 2)$
d) $(cx^3 + 3x + 1) : (x + 3)$

14. a) При каком значении c многочлен $x^3 - 5x^2 - 5x + c$ делится на двучлен $x + 3$ без остатка?
b) При каком значении c многочлен $x^4 + 2x^3 - x + c$ делится на двучлен $x + 2$ без остатка?

Теорема об остатке

15. При каком значении k при делении многочлена $3x^2 + 6x - 10$ на двучлен $x + k$ остаток будет равен 14?

16. a) При каком значении c остаток при делении многочлена $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ на двучлен $x - 2$ равен остатку при делении этого же многочлена на двучлен $x + 1$?
b) Остаток при делении многочлена $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax - 7$ на $(x + 1)$ равен 4. Найдите действительное число a.

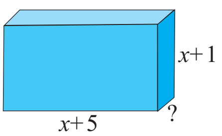
17. Гюльнар утверждает, что может выполнить деление $(x^4 + 1) : (x + 1)$ устно и при этом получит результат $x^3 + 1$. Права ли Гюльнар? Обоснуйте свое мнение.

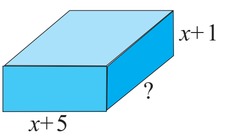
18. Многочлен $P(x)$ делится на $(x - 1)$ без остатка, а при делении на $(x + 2)$ дает остаток 3. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x^2 + x - 2)$.

Прикладные задания

19. Данные многочлены выражают объём прямоугольного параллелепипеда. Найдите неизвестные ребра параллелепипеда.

a) $V = 3x^3 + 8x^2 - 45x - 50$ b) $V = 2x^3 + 17x^2 + 40x + 25$





20. **Затраты на театр и кино.** Сумма, потраченная на посещение кино и театров жителями города с 2000 по 2007 гг. (в тыс. ман.), может быть смоделирована в виде $M(x) = 0{,}3x^3 + 64x^2 + 824x + 4800$ (здесь x – количество лет, начиная с 2000 года). Количество населения (в тыс. чел.) для данного города в заданном временном промежутке можно смоделировать в виде $P(x) = 0{,}2x + 40$. Сколько в среднем в год было потрачено жителями города с 2000 по 2007 гг. на посещение кино и театров?

21. **Среднее количество зрителей.** Количество зрителей (A), которые посещают турнир Супер Лиги по волейболу среди женщин начиная с 1982 года, и количество команд (T), которые принимали участие в турнире, можно смоделировать при помощи многочленов: $A(x) = 6x^3 + 418x^2 + 7200x + 18000$ и $T(x) = 2x + 6$, (здесь x - количество лет и $0 \le x \le 10$).

Запишите многочлен, моделирующий среднее количество зрителей на каждой игре за эти годы.

Теорема о разложении многочлена на множители

Значения переменной x, которые обращают многочлен $P(x)$ в нуль (т.е. корни уравнения $P(x) = 0$), называются корнями (или нулями) многочлена.

Теорема. Если число m является корнем многочлена $P(x)$, то двучлен $x - m$ является множителем многочлена $P(x)$.

Действительно, если $P(m) = 0$, то из равенства
$P(x) = (x - m)Q(x) + P(m)$ имеем $P(x) = (x - m)Q(x)$.

Верно и обратное утверждение, т.е. если двучлен $x - m$ является множителем многочлена $P(x)$, то $P(m) = 0$.

Пример 1. При помощи теоремы о разложении многочлена на множители определите, являются ли двучлены $x - 1$ и $x + 2$ множителями многочлена $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

Решение: вычислим значение многочлена $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ при $x = 1$ и $x = -2$.

$x = 1$	$x = -2$
$P(1) = 1^3 - 1^2 - 5\cdot 1 + 2 = -3$	$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 5\cdot(-2) + 2 = 0$

Значит, $(x - 1)$ не является множителем, а $(x + 2)$ является одним из множителей данного многочлена.

Пример 2. Зная, что $f(-2) = 0$, разложите многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ на множители.

Решение: так как $f(-2) = 0$, то двучлен $x - (-2) = x + 2$ один из множителей многочлена $f(x)$. Другой множитель найдём, используя метод синтетического деления.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^3 & -5x^2 & -2x & +24 \\
-2 & 1 & -5 & -2 & 24 \\
 & & -2 & 14 & -24 \\
\hline
\times & 1 & -7 & 12 & 0
\end{array}
\qquad x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x^2 - 7x + 12)$$

Учитывая, что $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ получим:

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4).$$

Отсюда получаем, что $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ являются нулями многочлена.

Примечание: Если многочлен задан в виде $P(x) = (x - m)^k\cdot Q(x)$ (здесь $Q(m) \neq 0$), то число m является k **кратным** корнем многочлена $P(x)$ (повторяется k раз). Например, если разложение многочлена на множители имеет вид $P(x) = (x - 2)^3\cdot(x + 1)$, то число $x = 2$ является корнем кратности 3.

Теорема о разложении на множители

Обучающие задания

1. Определите множителем какого из следующих многочленов является двучлен $x - 1$.

$3x^3 - x - 3$	$2x^3 - x^2 - 3x - 2$	$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$
$x^3 - 3x^2 + 4x - 2$	$2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$	$4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

2. При каком значении k заданный двучлен является множителем многочлена?

a) $x^2 - x + k$, $x + 1$ c) $x^3 - x + k$, $x - 2$

b) $x^2 + kx - 16$, $x - 2$ d) $x^3 + 4x^2 + x + k$, $x + 2$

3. Зная, что $f(a) = 0$, разложите многочлен на множители.

1) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 12x + 80$; $a = 10$
2) $f(x) = x^3 - 18x^2 + 95x - 126$; $a = 9$
3) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$; $a = 1$
4) $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$; $a = -5$
5) $f(x) = x^3 - 11x^2 + 14x + 80$; $a = 8$
6) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 33x - 18$; $a = -6$

4. Дан один из корней уравнения. Решите это уравнение.

a) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$; $x = 2$

b) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$; $x = -\dfrac{1}{3}$

c) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$; $x = -2$

d) $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0$; $x = -\dfrac{3}{2}$

5. 1) Покажите, что если x_1, x_2 и x_3 корни многочлена третьей степени, который можно разложить на множители в виде

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3 \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

2) Зная, что x_1, x_2, x_3 корни уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$, найдите:

а) Сумму $x_1 + x_2 + x_3$; б) Произведение $x_1x_2x_3$.

6. a) Найдите корни уравнения $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, разделив многочлен $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ на двучлен $x + 1$.

b) При помощи синтетического деления докажите, что один из корней уравнения $12x^3 - 11x^2 - 82x + 21 = 0$ равен 3 и решите его.

7. Применяя теорему о разложении на множители, покажите, что двучлен $x + 1$ является множителем многочлена $P(x) = x^{25} + 1$ и не является множителем многочлена $Q(x) = x^{25} - 1$.

8. a) Запишите другие размеры ящика в задании на странице 7 в виде многочлена с целыми коэффициентами.

b) Объём аквариума в форме прямоугольного параллелепипеда можно смоделировать по формуле $V(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$. Если многочлен $x + 6$ выражает глубину, то запишите другие измерения в виде многочлена с соответствующими целыми коэффициентами.

Нахождение рациональных корней

Практическая работа: 1. Запишите уравнение $15x^3-52x^2+23x+6=0$ в виде $x\cdot(15x^2-52x+23)=-6$. Делителем какого числа должен являться целый корень (если имеется) этого уравнения?

2. С помощью синтетического деления проверьте, что число $x=3$ является корнем данного уравнения. Покажите, что $\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{5}$ также являются корнями этого уравнения.

3. Запишите корни уравнения в виде $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-1}{5}$. Делителями каких коэффициентов уравнения являются числители и знаменатели этих дробей?

Теорема о рациональных корнях

Если для многочлена $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами существует рациональный корень, то этот корень имеет вид

$$\frac{p}{q}=\frac{\text{делитель свободного члена } a_0}{\text{делитель старшего коэффициента } a_n}$$

Доказательство. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами:

$$a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0$$

Умножим обе части равенства на q^n:

$$a_n\cdot p^n+a_{n-1}p^{n-1}\cdot q+\ldots+a_1p\cdot q^{n-1}+a_0\cdot q^n=0$$

Так как в последнем равенстве каждый член, кроме члена $a_0\cdot q^n$, содержит множитель p и каждый член, кроме члена $a_n\cdot p^n$, содержит множитель q, то коэффициент a_0 должен делится на p, а коэффициент a_n должен делится на q.

Пример 1. Найдите рациональные корни многочлена $f(x)=2x^3-3x^2-5x+6$.

Решение: свободный член 6, старший коэффициент 2.

Для $p\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$, $q\in\{\pm1;\pm2\}$, запишем все возможные числа вида

$$\frac{p}{q}:\ \pm1;\pm2;\pm3;\pm6;\pm\frac{1}{2};\pm\frac{3}{2}$$

$f(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2-5\cdot1+6=0$, т.е. одним из множителей является двучлен $x-1$. Другие множители найдем, используя синтетическое деление:

$$(2x^3-3x^2-5x+6):(x-1)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \multicolumn{4}{c}{2x^3-3x^2-5x+6} \\
1 & 2 & -3 & -5 & 6 \\
 & & 2 & -1 & -6 \\
\hline
\times & 2 & -1 & -6 & 0 \\
 & \multicolumn{4}{l}{2x^2-x-6}
\end{array}$$

Так как,
$2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)\cdot(2x^2-x-6)=$
$=(x-1)(2x+3)(x-2)$, получим, что
$x_1=1$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=2$ являются корнями многочлена.

Следствие 1. Если старший коэффициент ±1 и многочлен имеет рациональный корень, то он является целым числом.

Следствие 2. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами (если они имеются) являются делителями свободного члена.

Нахождение рациональных корней

Пример. Найдите корни многочлена $P(x) = x^3 + x^2 - 19x + 5$.

Решение: по теореме о рациональных корнях многочлена, целый корень данного многочлена (если он существует) надо искать среди делителей числа 5.

Это числа ±5; ±1.

Запишем это короче при помощи синтетического деления и проверим, являются ли эти числа корнями многочлена.

m	1	1	–19	5
1	1	2	–17	–12
–1	1	0	–19	24
5	1	6	11	60
–5	1	–4	1	0

$x = -5$ является корнем многочлена

Так как $x^3 + x^2 - 19x + 5 = (x + 5)(x^2 - 4x + 1)$, то, решив квадратное уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$, получим другие корни: $2 \pm \sqrt{3}$. Значит данный многочлен третьей степени имеет три корня: -5; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$.

Внимание! Если коэффициенты многочлена являются рациональными числами, то для нахождения рациональных корней уравнения $P(x) = 0$ сначала обе части уравнения надо умножить на такое число (отличное от нуля), чтобы коэффициенты стали целыми.

Например, для нахождения корней многочлена

$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{6}$ надо умножить все члены

уравнения $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{6} = 0$ на 12, а затем решить полученное уравнение $6x^3 - 4x^2 - 21x + 10 = 0$.

Для нахождения рациональных корней выполните следующие действия.

1. Записывается множество всех возможных дробей, числителями которых являются делители свободного члена, а знаменателями являются делители старшего коэффициента.
2. Из этих чисел выбирается число m (обращающее значение многочлена в нуль), которое является корнем многочлена, т.е. определяется двучлен $x - m$, на который многочлен делится без остатка.
3. Для данного многочлена при помощи синтетического деления на двучлен $x - m$ определяется другой множитель.
4. Если другой множитель является квадратным трехчленом или его можно разложить при помощи формул сокращённого умножения, находятся другие корни. Иначе все линейные множители находятся синтетическим делением.
5. Возможно, что ни одно число из списка не будет нулём многочлена. В этом случае многочлен не имеет рациональных корней.

Например, рациональными корнями многочлена $f(x) = x^3 + x + 1$ могут являться числа ± 1.

Проверим: $f(-1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1 \neq 0$; $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$.

Значит, многочлен $f(x) = x^3 + x + 1$ не имеет рациональных корней.

Нахождение рациональных корней

Обучающие задания

9. Определите какое из чисел –1, 1, –2 и 2 является корнем заданного многочлена. Разложите на множители при помощи синтетического деления и найдите другие корни.

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$
b) $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 16x - 2$
c) $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
d) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$
e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$
f) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12$

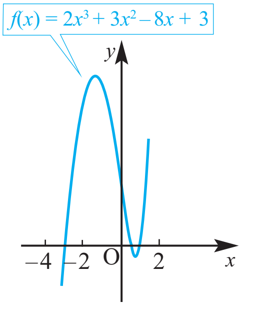
10. При помощи синтетического деления покажите, что число 5 является корнем уравнения $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 = 0$. Решите это уравнение.

11. Решите уравнения, применяя правило нахождения рациональных корней.

a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$
b) $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = 0$

12. Для многочлена P(x) известно, что коэффициент при старшем члене $a = 2$ и $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$. Запишите многочлен в виде произведения множителей.

13. На рисунке изображен график функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.
По графику определите нули многочлена. Найдите корни многочлена по правилу нахождения рациональных корней и при помощи метода синтетического деления найдите остальные корни. Сравните результат с графиком.



О комплексных числах

Известно что, при D < 0 уровнение $ax^2 + bx + c = 0$ на множестве действительных чисел не имеет корней. Простейшим из таких уравнений является уравнение $x^2 + 1 = 0$. Чтобы любое квадратное уравнение имело корни приходится расширять множество действительных чисел. Примем, что $i^2 = -1$, здесь i называется мнимой единицей.
Расширим множество действительных чисел так, чтобы в него входили все действительные числа и мнимая единица i, и были справедливы все свойства сложения и умножения.
Выражение вида $a + bi$ называется комплексным числом, где a и b - действительные числа, i мнимая единица.Комплексные числа можно обозначать через z, w, ω и т.д. Например, $z = a + bi$.

a является действительной частью, bi–мнимой частью и b–коэффициентом мнимой части комплексного числа $z=a+bi$ и записывается так: $a=Rez,\ b=\dot{I}mz$ При $a = 0,\ b = 0$ комплексное число равно нулю и наоборот, если $a + bi = 0$, то $a = 0$ и $b = 0$. "0" единственное комплексное число, которое одновременно является действительным и чисто мнимым. Множество комплексных чисел обозначается буквой C.

Следствие: для комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ равенство $a + bi = c + di$ справедливо тогда и только тогда, если $a = c,\ b = d$.

Пример. Из равенства $x + 3i = 5 + (x + y)i$ найдите x и y.

Решение: Из равенства действительных и мнимых частей получаем:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 3 = x + y \end{cases},\ \text{т.е. } x = 5,\ y = -2.$$

Суммой комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется комплексное число $(a + c) + (b + d)i$, т.е. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Произведением комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется число $ac - bd + (ad + bc)i$, т.е. $(a + bi)\cdot(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

Значит, два комплексных числа умножаются по правилу умножения многочленов при условии, что $i^2 = -1$.

Пример. $(3 + 2i)\cdot(2 - i) = 3\cdot2 - 3i + 4i - 2i^2 = 6 + i - 2\cdot(-1) = 8 + i$

Число $a - bi$ называется сопряжённым для числа $a + bi$ и обозначается как $\overline{z} = a - bi$. Ясно, что если число $a - bi$ является сопряжённым для числа $a + bi$, то число $a + bi$ является сопряжённым для числа $a - bi$. Поэтому, числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называются взаимно сопряжёнными комплексными числами. Действительные части взаимно сопряжённых чисел равны, а мнимые части отличаются только знаком.

Произведение взаимно сопряжённых комплексных чисел является действительным числом: $z\cdot\overline{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

В частном случае, сопряжённым для действительного числа является само число, для мнимого - произведение числа и (-1).

Для каждого комплексного числа $z = a + bi$ существует противоположное число $-z$ и $-z = -a - bi$. Для каждого, отличного от нуля, комплексного числа $z = a + bi$ существует обратное.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \underbrace{\frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)}}_{\text{умножим числитель и знаменатель на } (a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Разность и частное комплексных чисел определяется равенствами:

$$z - w = z + (-w) \qquad \frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}\ (w \neq 0)$$

Для нахождения отношения комплексных чисел, удобнее числитель и знаменатель умножить на число, сопряжённое для знаменателя .

Пример. Найдём разность и отношение чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 2 - i$.
Решение: $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (2 - i) = 1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2} = \frac{6+7i-2}{5} = \frac{4+7i}{5} =$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i = 0{,}8 + 1{,}4i$$

Все свойства арифметических операций для действительных чисел, справедливы для комплексных чисел.

Рассмотрим частные случаи степеней мнимых единиц:

$i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Как видно, натуральные степени мнимой единицы i равны $i, -1, -i$, 1 и повторяются через каждые четыре шага, т.е.справедливо равенство

$$i^{4m+k} = (i^4)^m \cdot i^k = i^k.$$

Пример. Вычислите: а) i^{58} б) i^{63}
Решение: а) $i^{58} = i^{4\cdot 14+2} = i^2 = -1$ б) $i^{63} = i^{4\cdot 15+3} = i^3 = -i$

Любые алгебраические тождества справедливы и для множества комплексных чисел. Например, для комплексных чисел z и w справедливы тождества: $(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$

$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$ и т.д.

Корни квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ для множества комплексных чисел находится по тому же правилу, что и для действительных чисел.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Пример. Решим уравнение $x^2 + 4x + 5 = 0$.
Решение:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4\cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$x_1 = -2 + i \qquad x_2 = -2 - i$

Легко можно проверить, что также в силе остаётся и теорема Виета. Для квадратного уравнения с действительными коэффициентами комплексные корни являются сопряжёнными числами.

Обучающие задания

1. При каких действительных значениях x и y справедливо равенство?

а) $(x + y) + 2i = 3 - (x - y)i$ б) $4 + xyi = x + y + 3i$

2. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел.

а) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 + i$ б) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 3 + i$

3. При каких действительных значениях x и y следующие числа являются взаимно сопряжёнными?

а) $z_1 = 5 + xi$, $z_2 = y + 4i$ б) $z_1 = (x + y) + i$, $z_2 = 5 - (x - y)i$

4. Найдите: а) i^{12} б) i^{15} в) i^{21} г) i^{82} д) i^{101}

5. Выполните действия.

а) $(3 + 4i) + (4 - 3i)$ б) $(5 + 4i) - (3 + 2i)$
в) $(2 + 3i)\cdot(3 + 2i)$ г) $(4 - i)\cdot(4 + i)$
д) $(i + 1)^2$ е) $(2 + i)^2$
ж) $(1 + i)^2\cdot(3 - i)$ з) $(2 + i)^2\cdot(2 - i)^2$
и) $(i + 1)^8$ к) $(i^8 + i^5)\cdot(i + 1)$

6. Упростите.

а) $\dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{2-i}{2+i}$ б) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

7. Для следующих чисел найдите сопряжённые числа.

а) $z = 3 + 4i$ б) $z = \dfrac{2}{1-i}$ в) $z = (2 + i)^2$

8. а) Квадрат какого числа равен i?

б) Найдите комплексное число, равное квадрату сопряжённого числа ($z \notin R$).

9. Разложите на множители

а) $m^2 + 4$ б) $y^2 + 9$ в) $4x^2 + 1$

Пример. а) $m^2 + 4 = m^2 - 4\cdot i^2 = m^2 - (2i)^2 = (m - 2i)\cdot(m + 2i)$

10. Решите уравнение.

а) $x^2 + 4 = 0$ б) $x^2 + 3 = 0$ в) $x^2 + 16 = 0$

11. Решите уравнения.

а) $x^2 - 4x + 5 = 0$ б) $x^2 - 6x + 13 = 0$
в) $x^2 + 8x + 41 = 0$ г) $x^2 - 2x + 3 = 0$

12. Составьте приведенное квадратное уравнение с корнями:

$3 + 2i$ и $3 - 2i$

Основная теорема алгебры

Покажем на примере, что многочлен n -ой степени имеет n корней.

Пример 2. Найдите все корни многочлена $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$.

Решение: рациональными корнями данного многочлена (если они существуют), согласно правилу, могут являться числа $\pm1, \pm5$. Проверим:

$P(1) = 1^4 - 6\cdot1^3 + 14\cdot1^2 - 14\cdot1 + 5 = 0$.

Значит, $x = 1$ является корнем данного многочлена $P(x)$. Другие корни найдем синтетическим делением.

	x^4	$-\ 6x^3$	$+\ 14x^2$	$-\ 14x$	$+\ 5$
1	1	–6	14	–14	5
×		1	–5	9	–5
	1	–5	9	–5	0
	x^3	$-\ 5x^2$	$+\ 9x$	$-\ 5$	

В выражении $P(x) = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$
для множителя $(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$ вновь применим теорему о рациональных корнях и синтетическое деление. Тогда $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)\cdot(x^2 - 4x + 5)$; $P(x) = (x - 1)^2(x^2 - 4x + 5)$.
Решим уравнение $(x - 1)^2(x^2 - 4x + 5) = 0$;
$(x - 1)^2 = 0$; $x = 1$ (корень кратности 2);
$x^2 - 4x + 5 = 0$; $x = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

Корни: $x_1 = x_2 = 1$ $x_3 = 2 + i$, $x_4 = 2 - i$

Во всех рассмотренных нами примерах уравнение n-ой степени всегда имеет n корней, включая кратные корни (действительных или комплексных).

Основная теорема алгебры

Теорема. Любой многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень на множестве комплексных чисел.

Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ является многочленом ненулевой степени с комплексными коэффициентами, то согласно основной теореме алгебры, у него есть хотя бы один корень
r_1. По теореме о разложении многочлена на множители получим $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$. При этом многочлен $Q_1(x)$ имеет степень $n - 1$. Если $n - 1 = 0$, то $Q_1(x) = a_n$; если $n - 1 > 0$, то согласно той же теореме, многочлен $Q_1(x)$ имеет хотя бы один корень. Обозначим его через r_2, тогда справедливо разложение $Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ - многочлен степени $n - 2$. Значит, можно записать $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$. Аналогично, если $n - 2 = 0$, то $Q_2(x) = a_n$; при $n - 2 > 0$, на основании той же теоремы, многочлен $Q_2(x)$ имеет хотя бы один корень. Обозначим его через r_3, получим

$Q_2(x) = (x - r_3)Q_3(x)$ т.е. можно записать

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)Q_3(x).$$

Основная теорема алгебры

Продолжая процесс n раз, получаем $Q_n(x) = a_n$. Тогда для многочлена $P(x)$ можно записать следующее разложение:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)a_n$$

здесь числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ являются нулями многочлена $P(x)$. Эти нули могут и не быть различными.

> **Следствие.** Многочлен n-ой степени ($n \geq 1$) на множестве комплексных чисел имеет ровно n корней, включая кратные корни.

Отметим, что если комплексное число $a + bi$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное комплексное число $a - bi$ так же является корнем данного многочлена.

Любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения двучленов вида $(x - r)$, соответствующих действительным корням, и трехчленов вида $(x^2 + px + q)$, соответствующих сопряженным комплексным корням.

Отсюда можно сделать вывод, что многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами всегда имеет хотя бы один действительный корень

Пример. Запишите в виде произведения множителей многочлен наименьшей степени, если коэффициент при старшем члене равен 2, а корни равны 3 и $1 + i$.

Решение: так как число $1 + i$ является корнем многочлена, то сопряженное комплексное число $1 - i$ также является корнем этого многочлена. Тогда искомый многочлен можно записать в виде

$$P(x) = 2(x-3)(x-1-i)(x-1+i) = 2(x-3)[(x-1)^2 - i^2)] =$$
$$= 2(x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

Обучающие задания

1. Дано разложение многочлена на множители. Запишите корни многочлена и определите его степень.

a) $P(x) = (x-1)(x-1)(x+2)$
b) $P(x) = (x-1)^3(x-4)^2$
c) $P(x) = (x+2)(x-i)(x+i)$
d) $P(x) = (x+2)^3(x-2)$
e) $P(x) = 3(x-4)^3(x-3)^2(x-1)$
f) $P(x) = (x-7)(x+4)^3(x+8)$

2. По заданным корням найдите остальные корни многочлена.

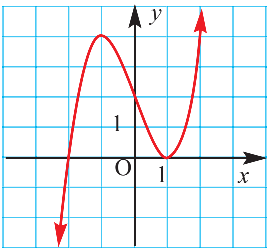
a) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 16;\quad x_1 = -1$
b) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18;\quad x_1 = 3$
c) $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 28x - 15;\quad x_1 = \frac{1}{2}$
d) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4;\quad x_1 = 1,\ x_2 = -1$

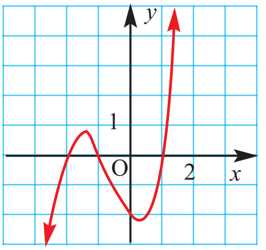
3. Решите уравнение.

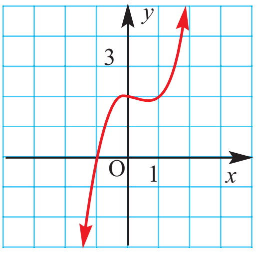
a) $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = 0$
b) $x^3 - 22x + 24 = 0$
c) $x^3 - 8x + 8 = 0$
d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

4. 1) Найдите корни многочленов.
2) Установите соответствие многочленов и графиков.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $\qquad g(x) = x^3 - 3x + 2$ $\qquad h(x) = x^3 - x^2 + 2$

a)


b)


c)


5. Решите уравнение.

a) $x^3 - 19x + 30 = 0$
b) $x^3 - 7x - 6 = 0$
c) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$
d) $2x^3 - 10x^2 + 12x - 4 = 0$
e) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$
f) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$

6. Применив последовательно схемы Горнера, найдите кратность корней многочлена:
a) число $x = 1$ многочлена $x^3 - 3x + 2$;
b) число $x = -2$ многочлена $x^3 + 3x^2 - 4$.

7. Зная, что $x = -2$ один из корней уравнения $x^3 + 2x^2 + ax - 6 = 0$, найдите a и решите уравнение.

8. Запишите корни многочлена.
a) $P(x) = x^3 + 1$ $\qquad$ b) $P(x) = x^4 - 1$ $\qquad$ c) $P(x) = x^6 - 1$

9. a) Запишите какой-либо квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $3 - \sqrt{2}$.

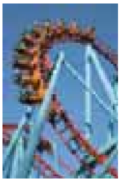
b) Проверьте, что одним из трехчленов с действительными коэффициентами, один из корней которого равен $2 + 3i$, является трехчлен $x^2 - 4x + 13$.

c) Обобщите результаты, полученные в заданиях пунктов a) и b). Запишите своё мнение.

10. Запишите в виде множителей многочлен наименьшей степени $P(x)$ с заданными корнями и старшим коэффициентом, равным 1 и укажите его степень.

a) -2 (корень кратности 3) и 1 (корень кратности 2);
b) 1 (корень кратности 2), $-i$ и i; $\qquad$ c) 2 и $3 - i$

Прикладные задания



Пример. При движении скоростной карусели в Лунапарке изменение высоты (в метрах) кабины от нулевого уровня за первые 5 секунд можно смоделировать функцией $h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14$. В какие моменты в течении 5 секунд после начала движения кабина карусели находилась на нулевом уровне?

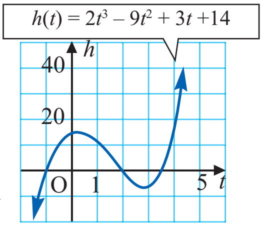
Решение: во всех случаях, кроме значений $h(t)$, равных нулю, кабина карусели находится либо ниже, либо выше нулевого уровня. Значит, мы должны найти корни заданного многочлена. Применим правило нахождения рациональных корней.

1. Проверим, является ли число –1 корнем.
$h(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 9\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 14 = -2 - 9 - 3 + 14 = 0$

2. Число –1 является корнем, значит одним из множителей данного многочлена является $t + 1$. Другие корни найдём при помощи синтетического деления.

–1	2	–9	3	14
		–2	11	–14
×	2	–11	14	0

$h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14 = (t + 1)(2t^2 - 11t + 14)$.
Учитывая, что $2t^2 - 11t + 14 = (t - 2)(2t - 7)$, запишем многочлен в виде $h(t) = (t + 1)(t - 2)(2t - 7)$, т.е. $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3{,}5$ являются корнями уравнения. Значения $t_2 = 2$, $t_3 = 3{,}5$ принадлежат временному интервалу в 5 секунд, и в этих моментах кабина карусели находилась на нулевом уровне.



То, что корни найдены верно показывает график многочлена, построенный при помощи графкалькулятора.

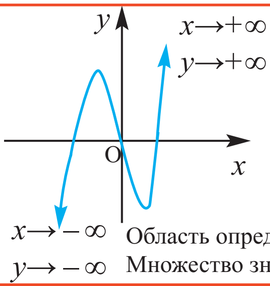
11. Прибыль, которую получает фирма по пошиву спортивных рубашек, можно смоделировать функцией $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$, здесь P - прибыль (в млн. ман.), x - количество рубашек (млн. штук). В отчете показано, что за 4 млн. пошитых рубашек была получена прибыль в размере 4 млн. манат. Какое количество рубашек надо пошить, чтобы их количество стало меньше, а прибыль осталась бы такой же?

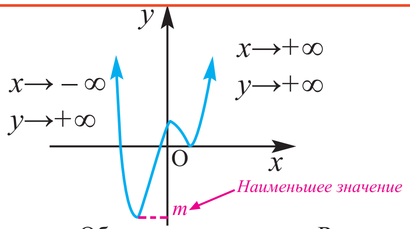
12. Произведение двух чисел задано выражением $2n^2 + 7n + 3$ (здесь n - действительное число). Если одно из чисел равно $n + 3$, то запишите выражение для другого числа. Что можно сказать об этих числах в случае $n = 1$?

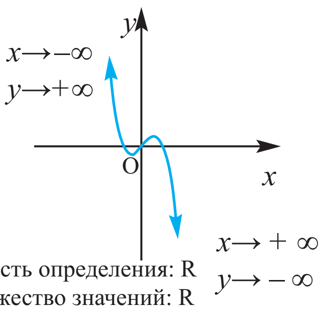
График функции–многочлен

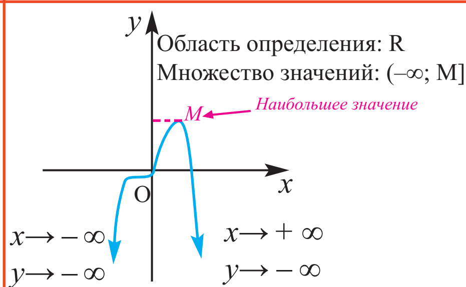
В стандартном виде функция - многочлен записывается как $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. В частном случае, при $n = 1$ получаем линейную функцию (график - прямая линия), при $n = 2$ получаем квадратичную функцию (график- парабола). Любой многочлен определён на множестве действительных чисел и его графиком является непрерывная линия.

При возрастании значений аргумента по абсолютному значению многочлен ведет себя как функция старшего члена $y = a_nx^n$. Ниже показаны примеры графиков функции - многочлен и их свойства.

<table>
<tr><th colspan="3">$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$</th></tr>
<tr><th></th><th>n нечетное</th><th>n четное</th></tr>
<tr><td>$a_n > 0$</td><td>

Область определения: R
Множество значений: R</td><td>

Область определенияı: R
Множество значений: [m ; +∞)</td></tr>
<tr><td>$a_n < 0$</td><td>

Область определения: R
Множество значений: R</td><td>Область определения: R
Множество значений: (–∞; M]
</td></tr>
</table>

Пример 1. Определите характер поведения функции - многочлен в зависимости от степени и коэффициента при старшем члене при возрастании аргумента по абсолютному значению.

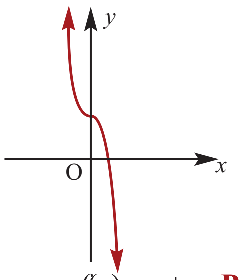
a) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$

Решение: a) степень многочлена $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ нечетная (равна 3). Коэффициент старшего члена равен –2. По таблице видно, что в данном случае при $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$; а при $x \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$.

b) степень многочлена $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ четная (равна 4). Коэффициент старшего члена равен 1. В данном случае при $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$; при $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$.

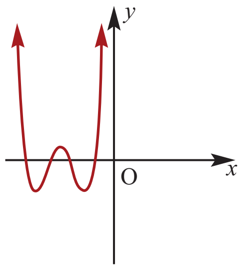
Пример 2. По графику определите как ведёт себя функция - многочлен при неограниченном возрастании аргументов по абсолютному значению, четность или нечетность степени многочлена, знак коэффициента старшего члена.

a)



Решение: при $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$
при $x \to +\infty, f(x) \to -\infty$
Многочлен нечетной степени.
$a_n < 0$.

b)



Решение: при $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$
при $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$
Многочлен чётной степени.
$a_n > 0$.

Отметим, что если n нечетно, то функция - многочлен имеет хотя бы один действительный нуль, если n четно, то их вообще может и не быть.

> Алгоритм построения эскиза графика функции - многочлен.
> 1. Находятся точки пересечения графика с осями координат (если они есть). Эти точки отмечаются на координатной плоскости.
> 2. Вычисляются значения функции в некоторых точках между действительными нулями. Соответствующие точки отмечаются на координатной плоскости.
> 3. Определяется поведение графика при больших значениях аргумента по абсолютному значению.
> 4. На основе полученных данных строят схематически график.

Пример 3. Постройте график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$.

1. Применим теорему о рациональных корнях. Разложим многочлен на множители и найдем нули функции.

По теореме возможные рациональные нули надо искать среди чисел, которые являются делителями числа 8: $\pm1; \pm2; \pm4; \pm8$.

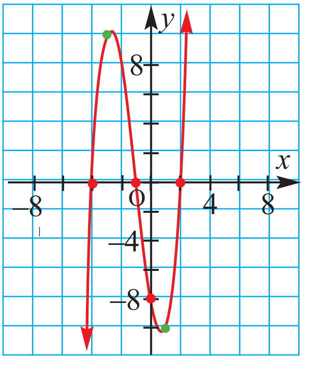
Проверим -1. $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) - 8 = 0$

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ -1 & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$
$$x^2 + 2x - 8$$

Значит, двучлен $x + 1$ является одним из множителей. Остальные множители найдем синтетическим делением.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^2 + 2x - 8)$

Зная, что $(x^2 + 2x - 8) = (x - 2)(x + 4)$ запишем все линейные множители многочлена: $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$;



Отсюда находим нули –1; 2; –4. Т.е. график пересекает ось абсцисс в точках (–4; 0), (–1; 0) и (2; 0). Так как $f(0) = -8$, то точка (0;–8) является точкой пересечения с осью y. Отметим эти точки на координатной плоскости.

2. Найдём ещё несколько значений функции в точках, не требующих сложных вычислений. Например, в точках $x = 1$ и $x = -3$:

$f(-3) = (-3 + 1)\cdot(-3 - 2)\cdot(-3 + 4) = 10$

$f(1) = (1 + 1)\cdot(1 - 2)\cdot(1 + 4) = -10.$

Отметим точки (–3; 10) (1; –10).

3. Определим, как меняется график при уменьшении или увеличении значений x. Степень при старшем члене равна 3, а коэффициент положителен, функция нечётная. Значит, при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, при $x \to -\infty$, $y \to -\infty$.

4. Соединим отмеченные точки и получим схематический график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$.

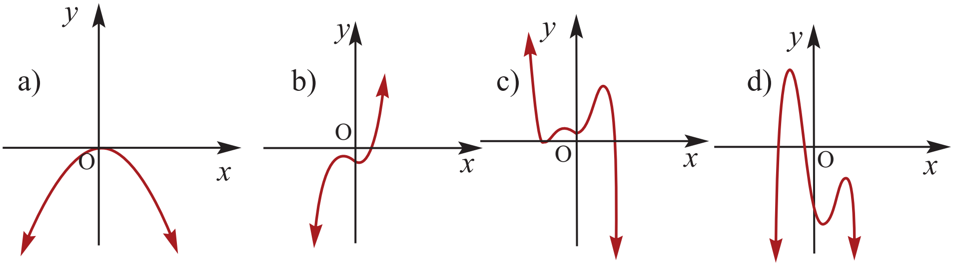
Обучающие задания

1. Зная степень многочлена и коэффициент при старшем члене, определите характер поведения многочлена при больших значениях аргумента по модулю.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ b) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4$

c) $f(x) = -x^6 + 2x^3 + 3x + 1$ d) $f(x) = -4x^5 + 2x^3 - 3x + 1$

2. По графику определите степень многочлена (четная или нечетная), знак коэффициента при старшем члене и знак значений функции при увеличении аргумента по абсолютному значению.



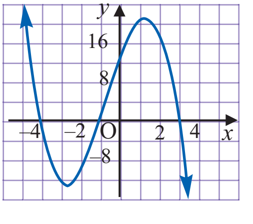
3. По графику определите:

a) степень многочлена (четная или нечетная);

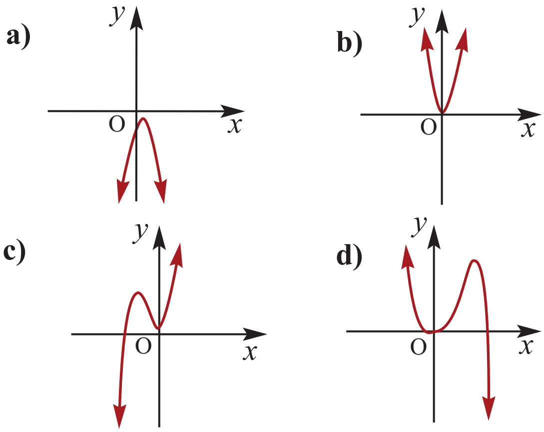
b) знак коэффициента при старшем члене;

c) точки пересечения с осью x;

d) интервалы, где функция положительна или отрицательна.



4. Установите соответствие графиков и функций.



1) $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + 1$

2) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 3x^2$

3) $f(x) = 3x^4 - x^5 + x$

4) $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$

5. Схематично изобразите график функции.

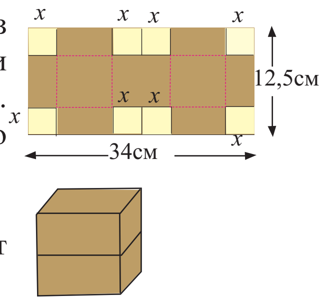
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ b) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

6. Фирма планирует выпускать коробку. Для этого из картона прямоугольной формы с размерами 34 см $\times$12,5 см вырезают квадраты со стороной x см.

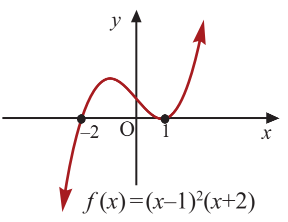
a) Запишите функцию - многочлен, выражающую зависимость объёма коробки от x.

b) Схематично изобразите график функции.

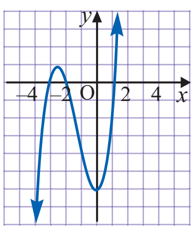
c) При каком целом значении x объем коробки будет равен 324 см^3?



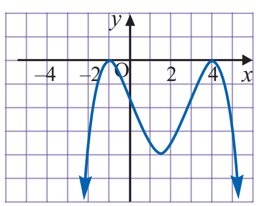
7. На рисунке изображен график функции $f(x) = (x-1)^2(x+2)$. График функции в нулях четной кратности касается оси x и поворачивается. Учитывая это, для следующих графиков установите, какую наименьшую степень может иметь многочлен, соответствующий графику.



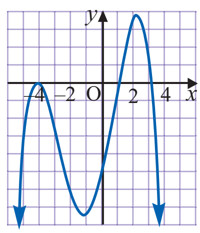
a)



b)



c)



8. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат. Выберите и постройте графики любых двух функций.

$f(x) = 2(x-1)^2(x+1)$ $f(x) = -3(x+3)^2(x+1)^2$ $f(x) = (x-2)^2(x+5)$

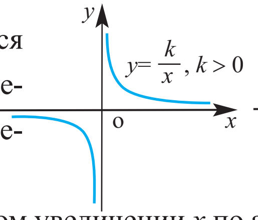
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Рациональная функция

Рациональной функцией называется функция, которою можно представить в виде отношения двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}; \; a_m \neq 0, b_n \neq 0$$

Самым простым примером рациональной функции является функция $y = \frac{k}{x}$.



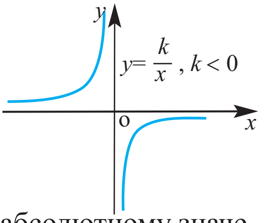
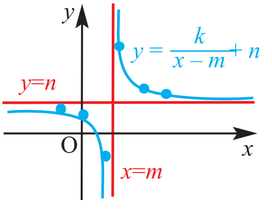


График функции $y = \frac{k}{x}$ называется **гиперболой**. При стремлении значений x к нулю точки гиперболы стремятся к оси ординат, т.е. к прямой $x = 0$, при неограниченном увеличении x по абсолютному значению точки гиперболы неограниченно приближаются к оси абсцисс, т.е. к прямой $y = 0$. Прямая $x = 0$ называется **вертикальной асимптотой**, а прямая $y = 0$ называется **горизонтальной асимптотой** гиперболы $y = \frac{k}{x}$. При параллельном переносе гиперболы $y = \frac{k}{x}$ на вектор $\langle m; n\rangle$ получается график функции $f(x) = \frac{k}{x-m} + n$.

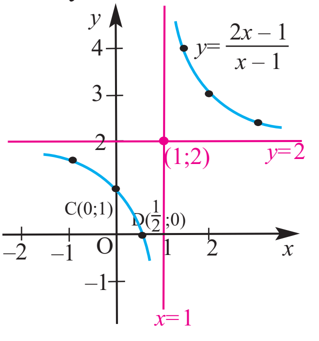


В этом случае начало координат преобразуется в точку $(m; n)$ и вертикальной асимптотой становится прямая $x = m$, а горизонтальной - прямая $y = n$.

Пример 1: Постройте график функции $y = \frac{2x-1}{x-1}$

Решение: точки пересечения с осью x найдем из уравнения $\frac{2x-1}{x-1} = 0$: $(\frac{1}{2}; 0)$. При $x = 0$ получим $y = 1$, и график пересекает ось y в точке $(0;1)$. Разделим почленно числитель функции на знаменатель и запишем ее в виде $y = 2 + \frac{1}{x-1}$. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, а прямая $y = 2$ - горизонтальной асимптотой. Зададим таблицу значений для нескольких точек справа и слева от вертикальной асимптоты.

x	–1	0	0,5	1,5	2	3
y	1,5	1	0	4	3	2,5



Отметим на координатной плоскости точки, соответствующие парам значений из таблицы и, учитывая горизонтальную и вертикальную асимптоту, изобразим ветви гиперболы, которые пересекают координатные оси в точках $C(0;1)$ и $D(\frac{1}{2}; 0)$.

Обратите внимание! Ветви гиперболы симметричны относительно точки (1;2)!

Рациональная функция

В общем случае, для построения графика рациональной функции надо найти точки пересечения с осями координат (если они есть) и ее асимптоты.

Если выражение, которое задает рациональную функцию, имеет вид дроби, знаменатель которой обращается в нуль в точке $x = a,$ а числитель отличен от нуля, то данная функция имеет вертикальную асимптоту. Горизонтальные асимптоты для рациональной функции f определяются в соответствии со степенью m и n данных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

если $m < n,$то прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой.

если $m = n$, то прямая $y = \frac{a_m}{b_n}$ является горизонтальной асимптотой.

если $m > n,$ то график не имеет горизонтальной асимптоты.

Для $m = n + 1$, т.е. если степень многочлена в числителе на 1 единицу больше степени многочлена в знаменателе, частное, полученное при делении, имеет вид $y = ax + b$ и является линейной функцией. При возрастании x по абсолютному значению график функции приближается к данной прямой. В этом случае говорят, что прямая $y = ax + b$ является **наклонной асимптотой.**

Пример 2. Найдите асимптоты и схематично изобразите график функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

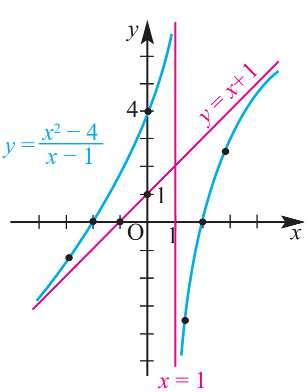
Решение: Точки пересечения с осью x найдем из уравнения $\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0$: (–2;0), (2;0). При $x = 0$ получим $y = 4$ и график пересекает ось y в точке (0;4). При $x = 1$ знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Значит, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. Горизонтальной асимптоты у данной функции нет ($m > n$). Разделив числитель на знаменатель, запишем функцию в виде:

$$y = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$$

Для больших, по модулю, значений x дробь $\frac{3}{x - 1}$ по абсолютному значению уменьшается и график заданной функции бесконечно приближается к прямой $y = x + 1$, т.е. прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой данной функции.

Составим таблицу значений для некоторых точек слева и справа от вертикальной оси.

x	–3	–2	–1	0	1,5	2	3
y	–1,25	0	1,5	4	–3,5	0	2,5



Отметим точки, координаты которых соответствуют парам из таблицы. Учитывая вертикальную и наклонную асимптоту, схематично изобразим график функции.

Рациональная функция

Обучающие задания

1. Постройте графики следующих функций при помощи параллельного переноса гиперболы $y = \dfrac{2}{x}$.

a) $y = \dfrac{2}{x-1}$ b) $y = \dfrac{2}{x+3}$ c) $y = \dfrac{2}{x} - 1$ d) $y = \dfrac{2}{x} + 1$

2. Найдите асимптоты и постройте графики следующих функций.

a) $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ b) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ c) $y = \dfrac{2x+1}{x}$ d) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$

3. Найдите асимптоты заданных рациональных функций.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$ c) $y = \dfrac{x^3+1}{x-1}$ d) $y = \dfrac{2x^2+x+2}{x+1}$

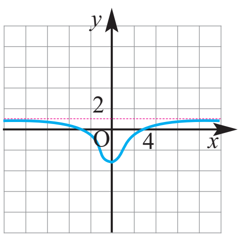
4. Даны графики и функции. Установите соответствие между графиками и функциями.

1) $y = \dfrac{-10}{x^2-9}$

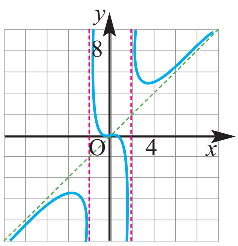
2) $y = \dfrac{x^2-10}{x^2+3}$

3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

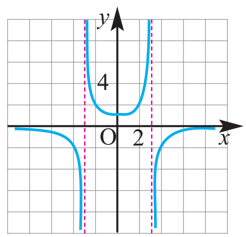
a)



b)



c)



5. Найдите асимптоты, составьте таблицу значений и схематично изобразите графики следующих функций.

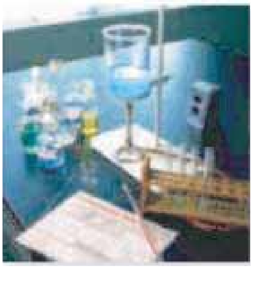
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ c) $y = \dfrac{x^2-3x}{x-2}$

6. По закону Идеального Газа для P давления, V объема, T температуры идеального газа справедливо отношение, которое задаётся уравнением PV = nRT, где n - количество молей газа, R - универсальная постоянная.

a) Постройте график зависимости P от V, если принять T за постоянную.

b) Какие линии являются асимптотами графика?

c) Что можно сказать об изменении давления газа при бесконечном увеличении объёма, если T остается постоянным?



Обобщающие задания

1. При делении многочлена $x^3 + mx^2 + nx + 2$ на двучлен $x + 3$ в остатке получается -1, а при делении его на двучлен $x - 2$ в остатке получается 4. Найдите значения параметров m и n.

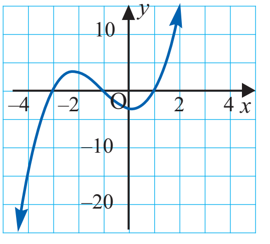
2. По данным синтетического деления найдите делимое, делитель, частное и остаток.

-3	1	-2	-9	18
		-3	15	-18
	1	-5	6	0

3. Выполните деление уголком.

a) $(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$
b) $(x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2)$
c) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$
d) $(x^3 - 3x^2 - 7x + 6) : (x - 2)$
e) $(x^3 + 2x^2 - x + 5) : (x^2 - x + 1)$
f) $(7x^3 + x^2 + x) : (x^2 + 1)$

4. На рисунке представлен график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.
a) Найдите значение m, если при делении $f(x)$ на $(x - m)$ в остатке получается -15.
b) При помощи графика определите остатки при делении:
$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 3)$ и
$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 1)$.



5. Покажите, что заданный двучлен является множителем многочлена.

$g(x) = x^3 - x^2 - 20x;\ x + 4$
$h(x) = x^3 - x^2 - 24x - 36;\ x + 2$
$r(x) = x^3 - 37x + 84;\ x + 7$
$f(x) = x^4 - 6x^3 - 8x + 48;\ x - 6$
$s(x) = x^4 + 4x^3 - 64x - 256;\ x + 4$
$t(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45;\ x - 5$

6. Выполните деление при помощи метода синтетического деления.

a) $(3x^2 + 7x - 20) : (x + 5)$
b) $(5x^2 - 12x - 8) : (x + 3)$
c) $(4x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$
d) $(5x^3 - 6x^2 + 3x + 11) : (x - 2)$
e) $(6x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1) : (x - 2)$
f) $(x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 2x + 3) : (x - 3)$

7. По заданному корню найдите остальные корни многочлена.

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 1;\ x = -1$
b) $f(x) = x^3 - 9x + 10;\ x = 2$

8. Решите уравнение.

a) $(4x^2 - 16)(x^2 - 3x - 10) = 0$
b) $(4x^2 - 81)(x^2 - 9) = 0$
c) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$
d) $16x^6 = 54x^3$
e) $2x^3 + 5x^2 = 8x + 20$
f) $6x^5 - 18x^4 + 12x^3 = 36x^2$

9. Разложите многочлен на множители.

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
b) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

10. Изобразите схематично график функции:

a) $f(x) = 3x - x^3$;
b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x}$

2

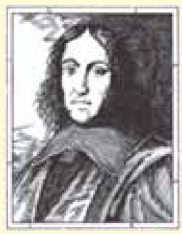
Векторы в пространстве

- **Прямоугольная система координат в пространстве**
- **Векторы в пространстве**
- **Скалярное призведение двух векторов**
- **Общее уравнение прямой**
- **Уравнение плоскости**
- **Взаимное расположение плоскостей**
- **Уравнение сферы**
- **Преобразования в пространстве и на плоскости**

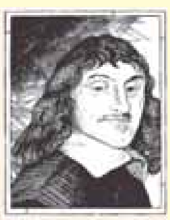
Математический словарь

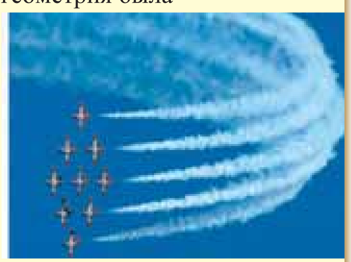
- прямоугольная система координат
- координатные плоскости
- координаты точек в пространстве
- октанты
- вектор
- компоненты вектора
- длина вектора
- орт векторы
- единичный вектор
- позиционный вектор (радиус-вектор)
- компланарные векторы
- общее уравнение прямой
- уравнение плоскости
- уравнение сферы

Это интересно!

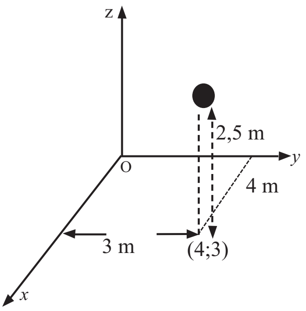

Пьер де Ферма
(1607-1665)

Основоположниками аналитической геометрии являются знаменитые ученые Декарт и Ферма. Однако Декарт свои исследования опубликовал первым. А исследования Ферма увидели свет намного позже, после его смерти. Интересно, что подойдя к проблеме с разных сторон, они пришли к одинаковым выводам. Декарт искал уравнение исследуемой кривой, а Ферма для заданного уравнения искал соответствующую кривую. Применение правил алгебры к геометрии привело к возникновению аналитической геометрии. В последствии аналитическая геометрия была усовершенствована основателем математического анализа Исааком Ньютоном, который писал "*... я смог пойти дальше Декарта, только потому, что стоял на плечах гигантов*"


Рене Декарт
(1596-1650)

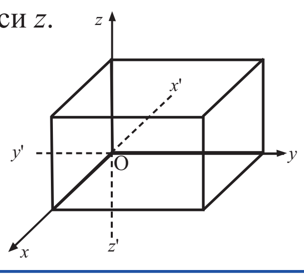


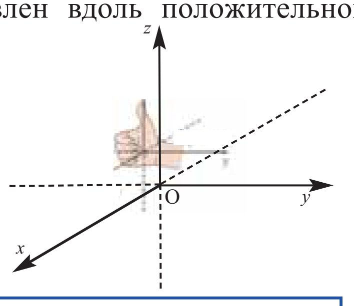
Прямоугольная система координат в пространстве



Пусть мяч ударился о пол и отскочил вертикально вверх. Координаты мяча в точке на полу можно определить относительно длины и ширины комнаты двумя значениями. Однако когда мяч отскочил от пола, то его положение уже невозможно определить двумя координатами. Если положение мяча на полу определяется как (4; 3), то после поднятия на высоту 2,5 м его положение в пространстве задается уже тремя координатами (4; 3; 2,5).

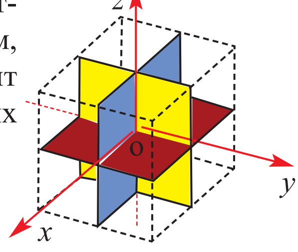
Прямоугольная система координат в пространстве. В пространстве возьмем произвольную точку O и проведем через нее три попарно перпендикулярные прямые линии. Примем точку O за начало координат и, выбрав на этих прямых положительное направление и единичный отрезок, назовем эти прямые координатными осями O*x*, O*y*, O*z*. Начало координат O делит каждую ось на две полуоси (положительную и отрицательную). Пересекаясь попарно, три координатные оси образуют координатные плоскости. Плоскость O*xy* берется по горизонтали, положительное направление оси O*z* проводится по направлению вверх. Трехмерная система координат, образованная по данному правилу, называется еще **системой правой руки**. Если согнуть пальцы правой руки от положительного направления оси *x* вдоль положительного направления оси *y*, то большой палец будет направлен вдоль положительного направления оси *z*.





- O начало координат
- *Ox*, *Oy*, *Oz* координатные оси
- *Oxy*, *Oyz*, *Ozx* координатные плоскости.

Координатные плоскости обозначаются как и *xy*, *yz*, *zx*



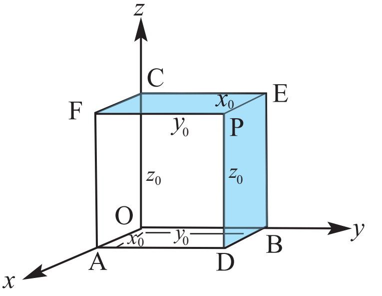
Каждая координатная плоскость делит пространство на два полупространства и, таким образом, три координатные плоскости вместе делят пространство на восемь частей, каждая из которых называется **октантом**:

1. O*xyz*; 2. O*x*'*yz*; 3. O*x*'*y*'*z*; 4. O*xy*'*z*;
5. O*xyz*'; 6. O*x*'*yz*'; 7. O*x*'*y*'*z*'; 8. O*xy*'*z*'

Прямоугольная система координат в пространстве

Пусть точка P произвольная точка в пространстве. Параллельно плоскостям O*yz*, O*zx* и O*xy,* через точку P, проведем плоскости*,* которые пересекают соответствующие координатные оси в точках A, B и C. Получим три плоскости:

1. ADPF || Oyz ;
2. BEPD || Oxz ;
3. CFPE || Oxy .



Координаты точки в пространстве.

1) Плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости $Oyz,$ пересекает ось x в точке $(x_0;0;0)$.

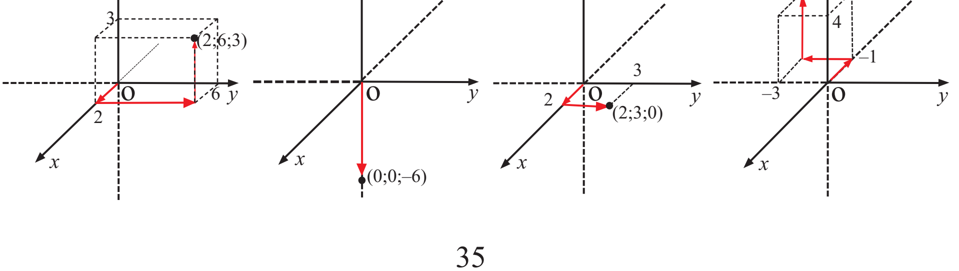
2) Плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости $Oxz,$ пересекает ось y в точке $(0;y_0;0)$.

3) Плоскость, проходящая через точку P и параллельная плоскости $Oxy,$ пересекает ось z в точке $(0;0;z_0)$.

Значит, каждой точке P пространства соответствует упорядоченная тройка $(x_0; y_0; z_0)$ и наоборот: $P \leftrightarrow (x_0; y_0; z_0)$.
Упорядоченная тройка $(x_0; y_0; z_0)$ в прямоугольной системе координат ($Oxyz$) называется координатами точки P и **декартовыми координатами.** Расстояние от точки P до плоскостей yz, zx и xy соответствует абсолютным значениям координат x_0, y_0, z_0. Числа x_0, y_0, z_0 соответственно называются абсциссой, ординатой и аппликатой точки P и это записывается так: $P(x_0; y_0; z_0)$.

1) Начало координат: O (0, 0, 0).
2) Точка, расположенная на оси Ox: $(x; 0; 0)$
   Точка, расположенная на оси Oy: $(0; y; 0)$
   Точка, расположенная на оси Oz: $(0; 0; z)$.
3) Точка, расположенная на плоскости Oxy: $(x; y; 0)$
   Точка, расположенная на плоскости Oyz : $(0; y; z)$
   Точка, расположенная на плоскости Oxz : $(x; 0; z)$.

Точка (2; 6; 1) в пространстве расположена в I октанте, точка (0; 0;–6) расположена на отрицательной полуоси z, точка (2; 3; 0) расположена на плоскости xy, точка (–1; –3; 4) расположена в III октанте.



Прямоугольная система координат в пространстве

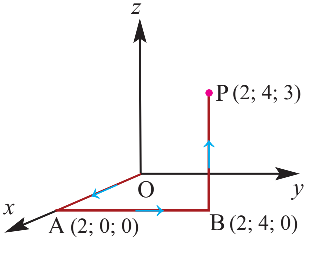
Знаки координат точки. Знак координаты точки зависит от того, в каком октанте расположена точка. В следующей таблице показаны знаки координат точек в различных октантах.

Октанты	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	OXYZ	OX'YZ	OX'Y'Z	OXY'Z	OXYZ'	OX'YZ'	OX'Y'Z'	OXY'Z'
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

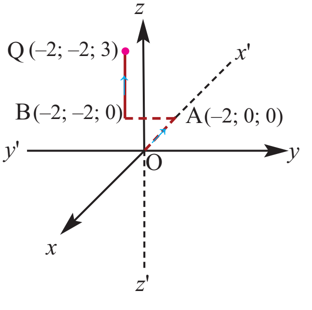
В первом октанте все знаки координат положительны, в седьмом октанте все знаки отрицательны.

Пример 1. В прямоугольной системе координат в пространстве постройте точки: a) P (2; 4; 3); b) Q (–2; –2; 3).

Решние: a) для построения точки P (2; 4; 3) от начала координат по оси x в положительном направлении на расстоянии 2-x единичных отрезков отметим точку A (2; 0; 0). От точки A, вдоль положительного направления оси y и параллельно этой оси, на расстоянии 4-x единичных отрезков отметим точку B (2; 4; 0). От точки B, вдоль положительного направления оси z и параллельно этой оси, на расстоянии 3-x единичных отрезков отметим точку P (2; 4; 3).



b) для построения точки Q (–2; –2; 3) от начала координат по оси x в отрицательном направлении на расстоянии 2-x единичных отрезков отметим точку A (–2; 0; 0), от точки A, вдоль отрицательного направления оси y и параллельно этой оси, на расстоянии 2-x единичных отрезков отметим точку B (–2; –2; 0). От точки B, вдоль положительного направления оси z и параллельно этой оси, на расстоянии 3-x единичных отрезков отметим точку Q (–2; –2; 3).

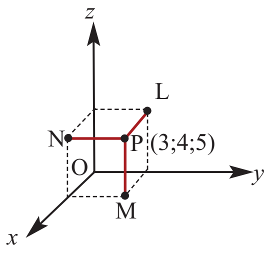


Пример 2. От точки P (3; 4; 5) к осям координат проведены перпендикуляры. Запишите координаты оснований перпендикуляров, соответствующих точкам A, B и C.

Решение: для точки основания перпендикуляра, проведенного из точки P на ось x, координаты y и z равны нулю. Значит, координаты точки – A (3; 0; 0). Аналогично, координаты остальных точек – B(0;4;0) и C(0;0;5).

Прямоугольная система координат в пространстве

Пример 3. От точки P (3; 4; 5) к плоскостям *Oxy*, *Oxz* и *Oyz* проведены перпендикуляры. Запишите координаты точек M, N и L, которые являются основаниями перпендикуляров.



Решение: координата z точки основания перпендикуляра, опущенного от точки P на плоскость *Oxy* равна нулю. Значит, точка M имеет координаты (3; 4; 0). Аналогично находят координаты других точек: L(0; 4; 5) и N(3; 0; 5).

Обучающие задания

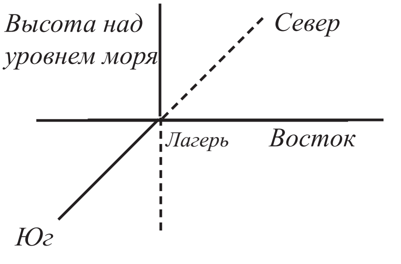
1. В трехмерной системе координат постройте точки (1; 1; 0), (2; 3;−1) и (−1; 2; 3).

2. 1) В пространстве определите:
a) координаты точки, расположенной на оси Oy.
b) координаты точки, расположенной на плоскости Oxy.
c) координаты оснований перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости и оси координат от точки P(–2;3;1).

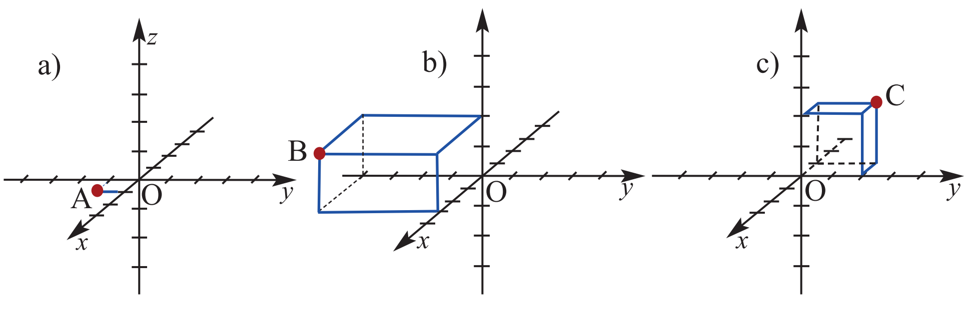
3. Запишите, какому октанту принадлежит каждая из следующих точек.

a) (1; 2; 5) b) (4; –2; 5) c) (6; –2; –3) d) (4; 5; –1)
e) (–4; 7; 2) f) (–3; –1; 8) g) (–3; 4; –9) h) (–6; –2; –1)

4. Мустафа и его друзья вместе с альпинистами взбираются на вершину. До места назначения они планируют двигаться так: 3 км на восток, 2 км на на север и 4 км вверх. В заданной системе координат укажите конечный пункт назначения Мустафы и его друзей.



5. Запишите координаты точек, указанных на рисунке. Изобразите систему координат в тетради и постройте данные точки.

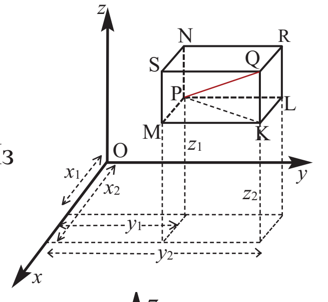


Прямоугольная система координат в пространстве

Расстояние между двумя точками в пространстве. Расстояние между точками P (x_1, y_1, z_1) и Q $(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле
$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Доказательство. Пусть PQ диагональ параллелепипеда PMSNRLKQ с ребрами MP, PL и KQ, которые параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz. Из прямоугольного треугольника PKQ ($\angle PKQ$ прямой) имеем: $PQ^2 = PK^2 + KQ^2$. Из прямоугольного треугольника PKL ($\angle PLK$ прямой) имеем: $PK^2 = KL^2 + PL^2 = MP^2 + PL^2$;

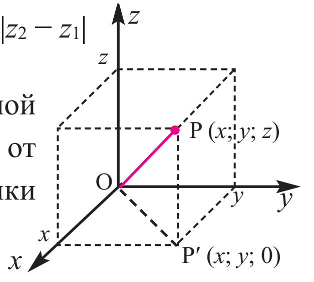
$KL = MP, \qquad PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$



Учитывая, что $MP = |x_2 - x_1|$, $PL = |y_2 - y_1|$ и $KQ = |z_2 - z_1|$ получаем, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Расстояние от начала координат. В прямоугольной системе координат в пространстве расстояние от точки O (0;0;0) начала координат до любой точки P$(x; y; z)$ вычисляется по формуле:

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Пример 1. Точки, расположенные на одной прямой, называются **коллинеарными точками**.

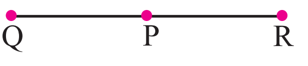
Докажите, что точки P (2; 4; 6), Q (– 2;– 2;–2) и R (6;10;14) являются коллинеарными точками, используя формулу нахождения расстояния между двумя точками.

Решение: $PQ = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-4)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

$PR = \sqrt{(6-2)^2 + (10-4)^2 + (14-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

$QR = \sqrt{(6+2)^2 + (10+2)^2 + (14+2)^2} = \sqrt{64+144+256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$.

Так как QR = QP + PR, то точки P, Q и R расположены на одной прямой, т.е. они коллинеарны.



Пример 2. Найдите координаты точки, расположенной на оси абсцисс и равноудаленной от точек A (3; 2; 2) и B (5; 5; 4).

Решение: если точка P расположена на оси абсцисс, значит ее координаты – $(x; 0; 0)$. Так как точка P равноудалена от точек A и B, то PA = PB или $PA^2 = PB^2$. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

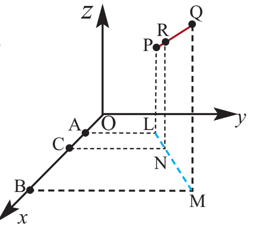
$$(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-5)^2 + (0-5)^2 + (0-4)^2$$

$$4x = 25 + 25 + 16 - 17;\ x = 12{,}25$$

Значит, точка P (12,25; 0; 0) расположена на оси абсцисс и равноудалена от точек A и B.

Координаты точки, делящей отрезок в некотором отношении. Координаты точки R, делящей отрезок с концами в точках P $(x_1; y_1; z_1)$ и Q $(x_2; y_2; z_2)$ в отношении PR : RQ= $m : n$, находятся как:

$$R\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n};\ \frac{my_2+ny_1}{m+n};\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$



Доказательство: пусть точка R$(x; y; z)$ делит отрезок PQ в заданном отношении. Через точки P, R и Q к плоскости xy проведем перпендикуляры PL, RN и QM и через точки L, N, M перпендикуляры LA, NC и MB к оси Ox. По рисунку видно, что
$AC = OC - OA = x - x_1$ и $BC = OB - OC = x_2 - x$.
На основе теоремы о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$n\,x - nx_1 = m\,x_2 - mx$$

$$(m + n)x = mx_2 + nx_1$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

Аналогично,используя перпендикуляры к осям Oy и Oz, можно определить координаты y и z.

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \qquad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

Координаты середины отрезка. Координаты середины отрезка, соединяющих точки P $(x_1; y_1; z_1)$ и Q $(x_2; y_2; z_2)$, находятся следующим образом: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Кооринаты центра тяжести треугольника.

Координаты центра тяжести треугольника (точка пересечения медиан) с вершинами в точках M (x_1, y_1, z_1), N $(x_2; y_2; z_2)$ и L $(x_3; y_3; z_3)$ находятся следующим образом:

$$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$ (проверьте сами)

Пример 3. Даны точки A (– 2; 0; 6) и B (10; –6; –12). Найдите координаты точки P, которая делит отрезок AB как AP : PB = 5 : 1.

Решение: пусть точка P имеет координаты P$(x;y;z)$. Эта точка делит отрезок AB в отношении 5 : 1. По формуле нахождения координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении, получаем:

$$P(x;y;z) = P\left(\frac{5\cdot 10 + 1\cdot (-2)}{5+1}; \frac{5\cdot(-6) + 1\cdot 0}{5+1}; \frac{5\cdot(-12) + 1\cdot 6}{5+1}\right) =$$

$$= P(8; -5; -9)\,.$$

Пример 4. Даны координаты двух вершин треугольника (3; –5; 7) и (–1; 7; –6). Найдите координаты третьей вершины, если центр тяжести треугольника совпадает с началом координат.

Решение: так как центр тяжести находится в начале координат, то:

$$O\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)=$$

$$=O\left(\frac{3-1+x_3}{3};\frac{-5+7+y_3}{3};\frac{7-6+z_3}{3}\right)=O\,(0;0:0)$$

Отсюда, $\frac{3-1+x_3}{3}=0$; $\frac{-5+7+y_3}{3}=0$; $\frac{7-6+z_3}{3}=0$

$x_3=-2$ $\quad y_3=-2$ $\quad z_3=-1$

Значит, третьей вершиной треугольника является точка (–2; –2;–1).

Обучающие задания

6. Найдите расстояние между точками.

a) A(5; 4; 0) и B(8; 8; 4) b) M(7; 6; –3) и N(–1; –3; 9)

7. Покажите, что следующие точки коллинеарны.

a) (−3; 2; 4) , (−1;5 ; 9), (1; 8; 14) b) (5; 4; 2) , (6; 2 ;−1), (8; −2; −7)

8. Докажите, что точки (0; 7; 10), (–1; 6; 6) и (– 4; 9; 6) являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

9. Найдите координаты точки, расположенной на оси ординат, если расстояние от этой точки до точки A(2; 1; 3) равно $\sqrt{17}$.

10. При каких значениях *a* расстояние между точками (5;− 1;7) и (*a*; 5; 1) равно 9 ед.?

11. Найдите расстояние от точки P (3; –1; 2): 1) до координатной плоскости; 2) до координатной оси; 3) до начала координат.

12. Закончите предложения, поставив вместо точек соответствующие данные.

1) Расстояние от точки P (3; 5; 6) до плоскости O*xy* равно .... ед.

2) Расстояние от точки M (3; 4; 2) до оси O*z* равно .... ед.

13. Найдите координаты точки, расположенной на плоскости *yz*, равноудаленной от точек A (–1; 1; 0), B (1; 0; –1) и C (0; –1; 0).

14. Определите, являются ли точки A, B и C вершинами треугольника.

a) A(4; –2; 0), B(6; –5; 6), C(0; –7; 9)

b) A(3;2; –2), B(5; 6; 2), C(1; − 2; –6)

15. Точка M (1; –2; 3) является серединой отрезка AB. Найдите координаты конца B, если координаты другого конца равны A(3; 1; –1).

16. Найдите координаты вершин треугольника, если точки (3; 2; 3), (1; 1; 5) и (0; 3; 4) являются серединами его сторон.

17. Найдите длину медианы BM треугольника, с вершинами в точках A(17; – 2; –1), B(1; –2; 11) и C(1; 16; –1).

18. Даны точки P (2; – 4; 3) и Q (– 4; 5; – 6). Найдите координаты точки, которая делит отрезок PQ в отношении 2:1(рассмотрите два случая).

19. Даны коллинеарные точки A (3; 2; – 4), B (5; 4; –6) и C (9; 8; – 10). Найдите, в каком отношении точка B делит отрезок AC.

20. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках (9; 6; 9); (3; 3; 15); (0; 9; 12).

21. Отрезок AB является диагональю параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям. Для каждого случая:
a) изобразите соответствующий геометрический рисунок.
b) найдите координаты остальных 6 вершин параллелепипеда.
c) найдите длину диагонали AB.

1. A(0; 0; 0); B(7 ;2;3)
2. A(1; 1 ; l); B(3; 4; 2)
3. A(–1; l; 2); B(2; 3; 5)
4. A(2; –1; –9); B(4; 0; –l)

22. Докажите, что:
a) точки A(0;4;1), B(2;3; −1), C(4;5;0) и D(2;6;2) являются вершинами квадрата.

b) точки (5; –1; 1), (7; – 4; 7), (1; – 6; 10) и (–1; – 3; 4) являются вершинами ромба.

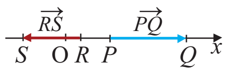
23. Точки A (9; 6; 0), B (15; 9; 6), C (21; –3; – 8) являются вершинами треугольника. Биссектриса ∠ BAC пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

24. a) Изобразите комнату, одна из противоположных вершин которой совпадает с началом координат, другой расположен следующим образом: 4 м на север, 3 м на восток и 3,5 м вверх.
b) Найдите длину диагонали, соединяющей противоположные вершины.
c) Запишите координаты всех 8 вершин параллелепипеда, который являются моделью комнаты.

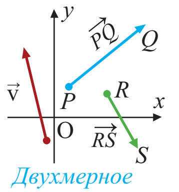
Векторы в пространстве

Векторной величиной или вектором называется величина, которая определяется не только значением, но и направлением. Изображается вектор направленным отрезком. Длина отрезка, образующего вектор, называется **длиной вектора** или его **модулем**.

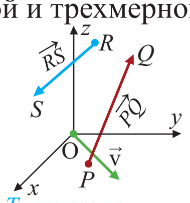
Вектор можно изобразить в одномерной, двухмерной и трехмерной системе координат.



Одномерное

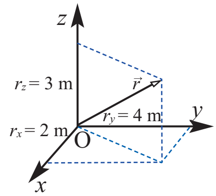


Двухмерное



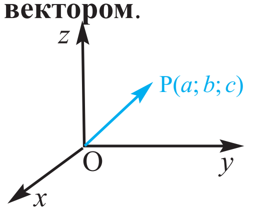
Трехмерное

Вектор, у которого начальная и конечная точки совпадают, называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора не определено. Местоположение любой точки (объекта) в пространстве изображается вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец - с данной точкой. Например, на рисунке изображен вектор, показывающий положение мяча в пространстве, который брошен на высоту 3 м на игровой площадке, длина которой равна 4 м, а ширина 2 м.

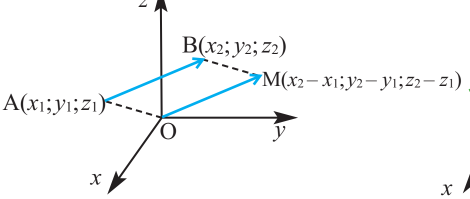


В пространстве вектор, который соединяет начальную и заданную точку, называется **позиционным вектором** или **радиус - вектором**.

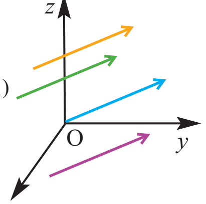
Каждой точке пространства соответствует единственный позиционный вектор. Положение точки $P(a;b;c)$ в пространственной системе координат определяет вектор $\overrightarrow{OP}\ \langle a; b; c\rangle$ - вектор, заданный компонентами.



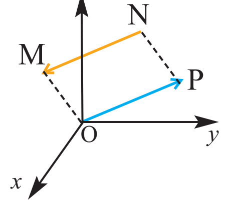
Два вектора называются равными если они имеют равные модули и одинаково направлены. Равные векторы, при помощи параллельного переноса, можно расположить друг на друге. Например, на рисунке векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$ равны. Для позиционного вектора $\overrightarrow{OM}$ можно провести бесконечно много равных по модулю и направлению векторов. В пространстве вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A $(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке B $(x_2; y_2; z_2)$ записывается компонентами как $\overrightarrow{AB}\ \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\rangle$. Соответствующие компоненты равных векторов равны и наоборот. Векторы, которые равны по модулю, но имеют противоположные направления, называются противоположными векторами.



равные вектора



противоположные вектора

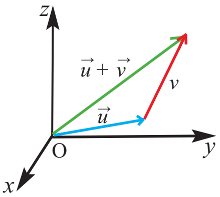


Векторы в пространстве

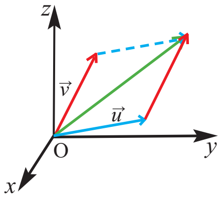
В пространстве, как и на плоскости, можно геомерически построить сумму и разность векторов, и произведение вектора на число.

Сложение векторов

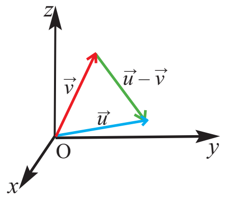
правило треугольника



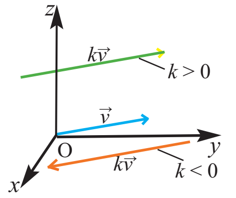
правило параллелограмма



Вычитание векторов



Умножение вектора на число



Найти компоненты и длину вектора, а также выполнить действия над векторами в пространственной Декартовой системе координат можно по правилам, аналогичным для прямоугольной системы координат на плоскости.

Длина вектора. Модуль вектора можно найти, используя формулу нахождения расстояния между двумя точками.

Теорема. Если начало вектора расположено в точке P (x_1, y_1, z_1), а конец в точке Q (x_2, y_2, z_2), то длина вектора $\overrightarrow{PQ}$ вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Следствие. Длина радиус-вектора равна $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (находится по формуле нахождения расстояния от начала координат до точки).

Сложение и вычитание векторов: суммой (разностью) векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$, является вектор, компоненты которого равны сумме (разности) соответствующих компонент векторов, т.е.сумма (разность) векторов $\vec{v}\langle v_1 ; v_2 ; v_3\rangle$ и $\vec{u}\langle u_1; u_2; u_3\rangle$ равна вектору:

$\vec{v}+\vec{u}=\langle v_1+u_1; v_2+u_2; v_3+u_3\rangle$ $\qquad$ $\vec{v}-\vec{u}=\langle v_1-u_1; v_2-u_2; v_3-u_3\rangle$

Пример 1. Найдите сумму и разность векторов $\vec{v}=\langle 2; 1; -3\rangle$ и $\vec{u}=\langle 0; 4; -2\rangle$.

Решение: $\vec{v}+\vec{u}=\langle 2; 1; -3\rangle + \langle 0; 4; -2\rangle = \langle 2; 5; -5\rangle$

$\vec{v}-\vec{u}=\langle 2; 1; -3\rangle - \langle 0; 4; -2\rangle = \langle 2; -3; -1\rangle$

Умножение вектора на число: произведение вектора $\vec{v}\langle v_1; v_2; v_3\rangle$ на действительное число k определяется как вектор $k\vec{a}=\langle kv_1;kv_2;kv_2\rangle$.

Для произведения вектора на действительное число справедливы следующие правила:

- Если $k \in R$,то $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$
- Если $k_1, k_2 \in R$, то $(k_1+k_2)\vec{u}=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$
- Если $k_1, k_2 \in R$, то $(k_1\cdot k_2)\cdot\vec{u}=k_1\cdot(k_2\cdot\vec{u})$

Пример 2. Для вектора $\vec{u}\langle 1;-2; 3\rangle$ и $k = 3$, запишите компонентами вектор $k\vec{u}$.

Решение: $k\vec{u}=\langle 3\cdot 1; -2\cdot 3; 3\cdot 3\rangle=\langle 3; -6; 9\rangle$

Коллинеарные векторы. Если направленные отрезки, которыми изображены векторы, параллельны или лежат на одной прямой, то вектора называются **коллинеарными**. Если векторы $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда существует единственное число k, которое удовлетворяет условию $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. При $k > 0$ векторы сонаправленные, при $k < 0$ они направлены в противоположные стороны. Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\boldsymbol{b_1 = k \cdot a_1, \ \ b_2 = k \cdot a_2, \ \ b_3 = k \cdot a_3}$$

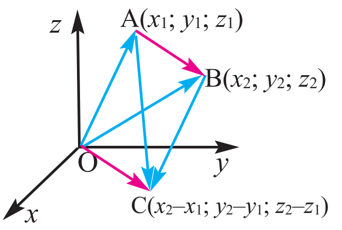
При $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ это условие запишется как: $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3} = k.$

Пример 3. Определите, являются ли расположенные в пространстве векторы $\vec{a} = \langle -1; 2; -3 \rangle$ и $\vec{b} = \langle -3; 6; -9 \rangle$ коллинеарными.

Решение: так как $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{-3}{-9} = \dfrac{1}{3}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и сонаправлены.

Пример 4. Постройте радиус-вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение: в соответствии с правилом треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Точкам A и B соответстуют радиус-векторы $\overrightarrow{OA} \langle x_1; y_1; z_1 \rangle$ и $\overrightarrow{OB} \langle x_2; y_2; z_2 \rangle$.



По правилу сложения векторов на плоскости $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Отсюда, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle x_2; y_2; z_2 \rangle - \langle x_1; y_1; z_1 \rangle = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \rangle = \overrightarrow{OC}$.

Пример 5. В трехмерной системе координат задан вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A(–3;–4;1) и концом в точке B(1; –2; 3). а) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$; б) Запишите компонентами радиус-вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение: a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-(-4))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) Обозначим вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$, через $\overrightarrow{OP}$. Тогда точке A соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OA}\langle -3; -4; 1 \rangle$, точке B соответствует радиус- вектор $\overrightarrow{OB}\langle 1; -2; 3 \rangle$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}\langle 1; -2; 3 \rangle - \overrightarrow{OA}\langle -3; -4; 1 \rangle = \langle 4; 2; 2 \rangle$

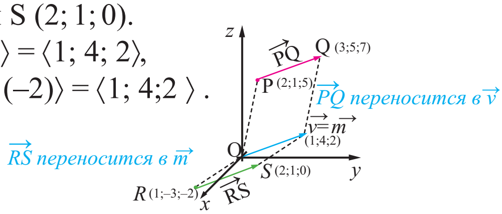
Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, то $\overrightarrow{OP}\langle 4; 2; 2 \rangle$.

Пример 6. Установите справедливость равенства $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ для точек P(2; 1; 5), Q(3; 5; 7), R (1; –3; –2) и S (2; 1; 0).

Решение: $\overrightarrow{PQ} = \langle 3-2;\ 5-1;\ 7-2 \rangle = \langle 1; 4; 2 \rangle$,

$\overrightarrow{RS} = \langle 2-1;\ 1-(-3);\ 0-(-2) \rangle = \langle 1; 4; 2 \rangle$.

Из равенства соответствующих компонентов следует $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.



Обучающие задания

1. По координатам точек R и S в пространстве запишите компонентами вектор $\overrightarrow{RS}$ и найдите его длину.

a) R (3;–1;1), S (3;−2;1) b) R (4;3;–6), S (–5;−2;5)

2. Найдите длину вектора.

a) $\vec{v}\langle 2;-1;1\rangle$ b) $\vec{v}\langle 2;-1;0\rangle$ c) $\vec{v}\langle 3;2;-2\rangle$
d) $\vec{v}\langle 0;0;1\rangle$ e) $\vec{v}\langle 6;4;-4\rangle$ f) $\vec{v}\langle -2;3;-0\rangle$

3. Запишите компонентами вектор, начало которого расположено в точке A(1;–2;3), а конец в точке B(–2;1;1) и найдите его длину.

4. a) Верно ли равенство $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ для точек P (1;−1;1), Q (2;−2;2), R (2;0;1), S (3;−1;2) пространства?
b) Даны точки A (1;0;1), B (–1;1;2), C (0;2;–1). Найдите точку D (x; y; z), если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

5. Зная, что следующие векторы являются коллинеарными, найдите неизвестные координаты данных векторов.

a) $\vec{a}\langle -1;2;3\rangle$ и $\vec{b}\langle x;6;9\rangle$ b) $\vec{a}\langle 4;y;6\rangle$ и $\vec{b}\langle 10;20;z\rangle$

6. Даны $\vec{a}\langle 3;0;4\rangle$ и $\vec{b}\langle 2;1;-1\rangle$. Запишите компонентами вектор $2\vec{a}-3\vec{b}$.
Указание. Запишите компоненты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в выражение и выполните действия над векторами..

7. Для векторов $\vec{v}=\langle 2;1;-1\rangle$ и $\vec{w}=\langle 3;-4;2\rangle$ запишите компонентами следующие векторы:

a) $\vec{v}-\vec{w}$ b) $2\vec{v}-3\vec{w}$ c) $-\vec{v}-2\vec{w}$ d) $2(\vec{v}+\vec{w})$

8. Какой вектор надо прибавить к вектору $\vec{a}\langle -1;\ 2;\ 0\rangle$, чтобы получить вектор $\vec{b}\langle 3;\ 1;\ 5\rangle$?

9. Даны точки A (1;2;4) и B (4;8;19). Используя коллинеарность векторов, найдите координаты точки K, делящей отрезок AB в отношении AK : KB = 2:1

10. Даны векторы $\vec{a}\langle 1;-1;\ k\rangle$ и $\vec{b}\langle -1;\ -6;\ -4\rangle$. При каком значении k длина вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ будет равна 5?

11. **Физика.** На тело действуют две силы, векторы которых выражены компонентами ⟨3; –2; 4⟩ и ⟨6; 2; 5⟩. Запишите компонентами вектор третьей силы, которая сохраняет тело в состоянии равновесия.

Векторы, расположенные на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются **компланарными векторами**. Например, векторы, расположенные на противолежащих гранях куба, компланарны, а векторы, направленные по трём ребрам выходящим из одной вершины, некомпланарны.

Единичый вектор - вектор, длина которого равна единице.

Для любого, отличного от нуля вектора $\vec{v}$, вектор вида $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ является единичным вектором.

Пример 1. Для вектора $\vec{a} = \langle 4; -2; 4\rangle$: a) найдите единичный сонаправленный вектор $\vec{u}$; b) запишите компонентами вектор $\vec{v}$, сонаправленный вектору $\vec{a}$, длина которого равна 10 единицам.

Решние: a) обозначим единичный вектор через $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{u} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{6} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{6} = \left\langle \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\rangle$$

Проверим, действительно ли длина этого вектора равна единице:

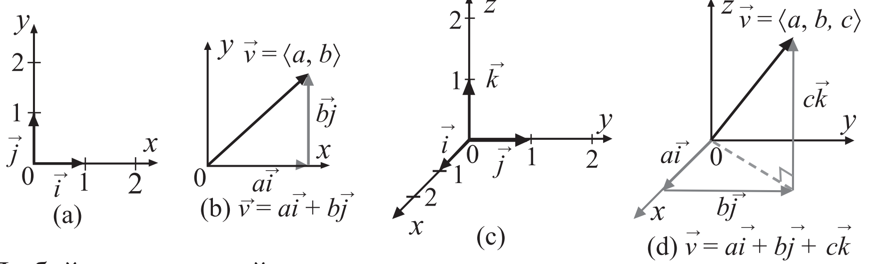
$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

b) чтобы определить вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a} = \langle 4; -2; 4\rangle$ длиной 10 единиц, надо компоненты единичного вектора, найденного в пункте a, увеличить в 10 раз.

$$\vec{v} = 10\,\vec{u} = 10 \cdot \left\langle \frac{2}{3}; \ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\rangle = \left\langle \frac{20}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right\rangle$$

В прямоугольной системе координат в пространстве векторы, направленные вдоль положительных направлений координатных осей Ox, Oy, Oz и определенные как $\vec{i} = \langle 1; 0; 0\rangle$, $\vec{j} = \langle 0; 1; 0\rangle$ и $\vec{k} = \langle 0; 0; 1\rangle$ при $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, называются **орт векторами**. Понятно, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – некомпланарны.

Орт векторы в различных системах координат



(a) (b) $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (c) (d) $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Любой позиционный вектор и на плоскости, и в пространстве, можно выразить через орт вектора. На плоскости точке A (x; y) соответствует позиционный вектор $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, в пространстве точке A (x; y; z) соответствует вектор $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Данное выражение называется записью вектора компонентами. Здесь числа x, y, z координаты точки A.

Теорема. Любой вектор $\vec{a}\langle a_1; a_2; a_3\rangle$ можно разложить по орт векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ единственным образом, при этом справедливо равенство

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}.$$

Пример 2. Вектор $\vec{a}$, началом которого на плоскости является точка (2;–5), а концом точка (1; –3), выразите через орт вектора.

Решение: зная, что $\vec{a} = \langle 1-2; -3-(-5)\rangle = \langle -1; 2\rangle$ получим $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Пример 3. Запишите разложение вектора $\vec{a} = \langle -3; 2; 7\rangle$ в пространстве по орт векторам.

Решение: по теоерме разложения вектора по орт векторам имеем:
$\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$

Пример 4. a) Запишите в виде $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ позиционный вектор, соответствующий точке P (1; –3; 2).

b) Запишите вектор $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ компонентами в виде $\vec{r}\langle x; y; z\rangle$.

Решение: a) начало позиционного вектора совпадает с началом координат O(0; 0; 0). Таким образом вектор $\overrightarrow{OP}$ имеет вид
$\overrightarrow{OP} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = 3\langle 1; 0; 0\rangle - 2\langle 0; 1; 0\rangle - \langle 0; 0; 1\rangle =$
$= \langle 3; 0; 0\rangle - \langle 0; 2; 0\rangle - \langle 0; 0; 1\rangle = \langle 3; -2; -1\rangle$

Пример 5. Найдите сумму и разность векторов.
$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

Решение: $\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{a} - \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Обучающие задания

12. Зная координаты точки P, запишите позиционный вектор $\overrightarrow{OP}$ в виде $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

a) (1; 3;–1) b) (2; –1; 0) c) (–3; 2;–2) d) (–4; 0;–3)

13. Запишите координаты точки P, зная выражение для радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$.

a) $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ b) $-\vec{i} - 2\vec{k}$ c) $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ d) $-\vec{i} - 4\vec{j}$

14. Найдите длину вектора.

a) $\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ b) $\overrightarrow{OP} = \langle -3; 1; 2\rangle$ c) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

15. Зная, что векторы равны, найдите неизвестные компоненты векторов.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + y\vec{k}$ и $\vec{b} = x\vec{i} - 3\vec{k}$ b) $\vec{a} = x\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = \langle -3; y; z\rangle$

16. Для каждого вектора запишите сонаправленный единичный вектор и проверьте полученный результат.

a) $\overrightarrow{OR} = \langle 3; 0; 1\rangle$ b) $\overrightarrow{OP} = \langle -3; 1; 2\rangle$ c) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

17. Запишите вектор $\vec{v}$, сонаправленный и равный заданному вектору $\vec{u}$.

a) $\vec{u} = \langle 0;\ 3;\ 0\rangle$, $|\vec{v}| = 6$ c) $\vec{u} = \langle 1;\ 1\rangle$, $|\vec{v}| = 5$
b) $\vec{u} = \langle \sqrt{3};\ 3;\ 2\rangle$, $|\vec{v}| = 2$ d) $\vec{u} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $|\vec{v}| = 2$

18. Зная, что $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, запишите разложение следующих векторов по орт векторам.

a) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ b) $3\vec{a} + \vec{b}$ c) $-2\vec{a} - 4\vec{b}$

19. Найдите длину векторов.

a) $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ b) $\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ c) $\vec{l} = 7\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

20. В пространстве заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Определите векторы, коллинеарные вектору $\vec{a}$ или $\vec{b}$.

1) $-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 2) $5\vec{i} - 10\vec{j} + 15\vec{k}$ 3) $4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

4) $6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ 5) $-2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ 6) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

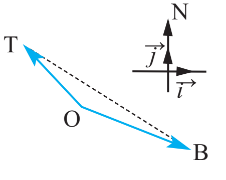
21. Даны радиус - векторы $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Запишите разложение следующих векторов по орт векторам.

a) $\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ c) $4\overrightarrow{BO}$ d) $-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$

22. Дильбар утверждает, что вектор $\langle 1; 1; 1\rangle$ является единичным вектором, а вектор $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$ не является единичным вектором. Как вы обоснуете, верно ли утверждение Дильбар?

23. Длина суммы двух векторов не больше суммы длин этих векторов. Запишите данное утверждение математически и докажите его справедливость. **Указание:** используйте неравенство треугольника.

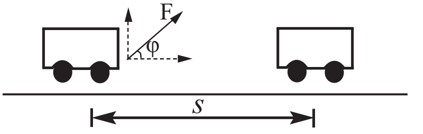
24. Наблюдатель находится на возвышенности. На расстоянии 4 км на запад и 3 км на север от него расположен трансформатор высокого напряжения, а на расстоянии 5 км на восток и 2 км на юг от него расположено новое здание. Место, где находится наблюдатель, примите за начало координат. a) Определите радиус - векторы трансформатора $\overrightarrow{OT}$ и здания $\overrightarrow{OB}$. b) Определите вектор $\overrightarrow{TB}$ расположения трансформатора относительно здания.



Скалярное произведение двух векторов

Тележка переместилась на расстояние s по прямой под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом наклона φ. Вычислите совершаемую работу: если значение силы $\vec{F}$ равно F, то $\vec{F} = \langle F\cos\varphi;\ F\sin\varphi\rangle$. На горизонтальном пути работа вертикальной компоненты силы $\vec{F}$ равна нулю. Тогда работа, совершаемая горизонтальной компонентой силы $\vec{F}$ на расстоянии s будет:

$$A = F \cdot s \cdot \cos\varphi.$$



Работа, совершаемая при перемещении груза на расстояние s равна произведению длины вектора перемещения и значения компонента вектора силы ($|\vec{F}|\cos\varphi$), направленной вдоль перемещения.

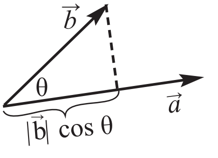
$$A = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$$

Работа является скалярной величиной, однако её значение зависит от угла между силой, действующей на тело, и вектором перемещения.

Скалярное произведение двух векторов

Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол θ между равными им векторами с общим началом. Ясно, что $0 \le \theta \le \pi$.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно произведению модулей этих векторов и косинуса угла между ними. Скалярное произведение записывается как: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

Свойство скалярного произведения

- Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, то есть скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

- **Переместительное свойство скалярного произведения.** Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

- **Свойство группировки скалярного произведения.** Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и действительного числа m справедливо равенство
$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$$

- **Распределительное свойство скалярного произведения:**

1) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и действительного числа m справедливо следующее равенство $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

2) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо равенство $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$.

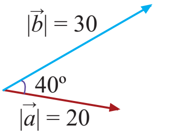
Скалярное произведение двух векторов

В частном случае, для скалярного произведения орт векторов получим:

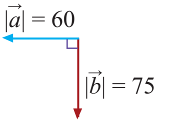
$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Пример 1. По данным на рисунке найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

a)



b)



Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

a) $|\vec{a}|=20$ ед., $|\vec{b}|=30$ ед., $\theta=40°$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=20\cdot 30\cos 40°\approx 459{,}6$

b) $|\vec{a}|=60$ ед., $|\vec{b}|=75$ ед., $\theta=90°$

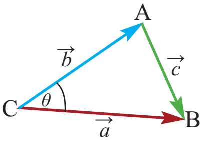
$\vec{a}\cdot\vec{b}=60\cdot 75\cos 90°=60\cdot 75\cdot 0=0$

Пример 2. Упростите выражение $(\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s})$, используя свойство скалярного произведения векторов.

Решение:

$$(\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s})=(\vec{r}+\vec{s})\cdot\vec{r}+(\vec{r}+\vec{s})\cdot(-\vec{s})=\vec{r}\cdot\vec{r}+\vec{s}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot(-\vec{s})+\vec{s}\cdot(-\vec{s})=$$
$$=|\vec{r}|^2+\vec{s}\cdot\vec{r}-\vec{r}\cdot\vec{s}-|\vec{s}|^2=|\vec{r}|^2-|\vec{s}|^2$$

Скалярное произведение двух векторов на координатной плоскости можно найти при помощи координат.



Пусть даны векторы $\vec{a}\langle a_1, a_2\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1, b_2\rangle$.
По определению скалярного произведения двух векторов имеем

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Из Δ ABC получаем $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\langle a_1-b_1;\ a_2-b_2\rangle$

По теореме косинусов получаем $|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2 \qquad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2}=\frac{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}{2}$$

$$=\frac{\cancel{a_1^2}+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{b_2^2}-\cancel{a_1^2}+2a_1b_1-\cancel{b_1^2}-\cancel{a_2^2}+2a_2b_2-\cancel{b_2^2}}{2}$$

$$=\frac{2a_1b_1+2a_2b_2}{2}=a_1b_1+a_2b_2,\text{ а это значит, что}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

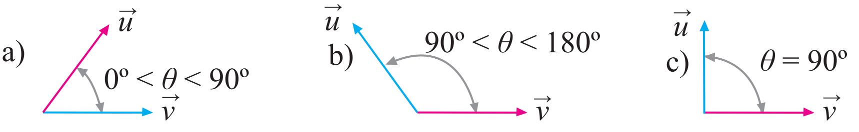
> Аналогичным образом, скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\langle a_1; a_2; a_3\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1; b_2; b_3\rangle$ в трехмерной, Декартовой системе координат находится как: $\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Пример 3. Зная, что $\vec{a} = \langle 2; -3; 5\rangle$, $\vec{b} = \langle 1; 2; -4\rangle$, найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = 2 - 6 - 20 = -24$

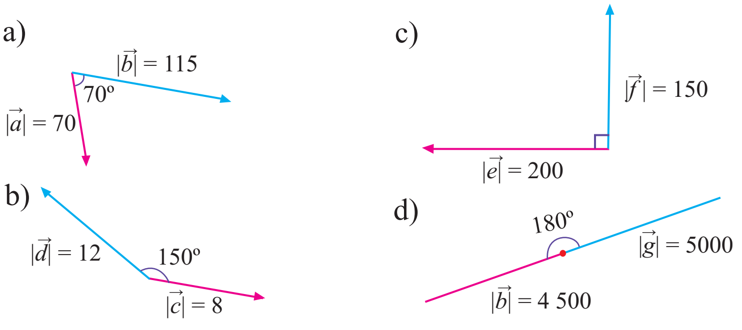
Обучающие задания

1. a) По определению скалярного произведения значение угла θ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится в промежутке $0 \le \theta \le 180°$. Почему?

b) Определите знак скалярного произведения двух векторов в зависимости от значения угла θ.



2. По рисунку найдите скалярное произведение векторов.



3. По данным найдите скалярное произведение следующих векторов. θ - угол между векторами.

a) $|\vec{f}| = 5{,}8$; $|\vec{g}| = 6{,}4$; $\theta = 180°$ b) $|\vec{m}| = 16$; $|\vec{p}| = 2$; $\theta = 45°$

c) $|\vec{m}| = 16$; $|\vec{n}| = 28$; $\theta = 35°$ d) $|\vec{m}| = 2{,}5$; $|\vec{s}| = 20$; $\theta = 120°$

4. Найдите скалярное произведение векторов, заданных компонентами.

a) $\vec{a}\ \langle 6; 2; 4\rangle$; $\vec{b}\ \langle 9; 3; 6\rangle$ c) $\vec{s} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{t} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

b) $\vec{p}\ \langle -3; 2; 5\rangle$; $\vec{q}\ \langle 3; 1; 6\rangle$ d) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

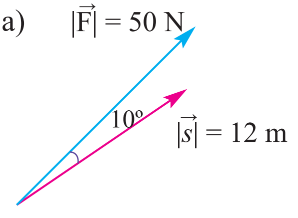
5. Зная, что $\vec{a} = \langle -2; 1; 3\rangle$, $\vec{b} = \langle 1; 4; -3\rangle$, найдите скалярное произведение $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$. Решите задачу разными способами.

6. Вычислите работу, совершаемую телом под действием силы $\overrightarrow{F}$ (в ньютонах), если оно совершило перемещение $\vec{s}$ (в метрах).

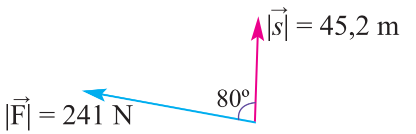
a) $\overrightarrow{F}\langle 5; 2\rangle$, $\vec{s}\langle 7; 4\rangle$ b) $\overrightarrow{F}\langle 100; 400\rangle$, $\vec{s}\langle 12; 27\rangle$

7. По данным на рисунке вычислите работу под действием силы $\overrightarrow{F}$. при перемещении $\vec{s}$.

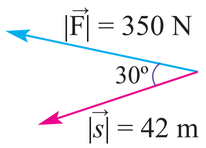
a)



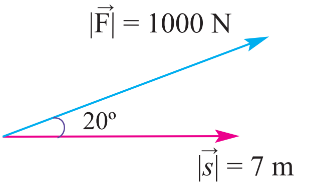
c)



b)



d)



8. В направлении вектора $\vec{a}\langle 3; 4\rangle$ действует сила $(\overrightarrow{F})$ 20 Н .

a) Запишите единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

b) Запишите компонентами силу $\overrightarrow{F}$, используя результаты пункта a.

c) Найдите работу по перемещению (в метрах) объекта из точки (0;0) в точку (6;8) под действием данной силы.

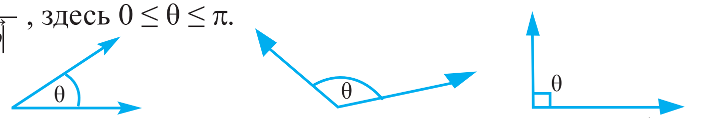
9. Из-за остановки конвейерной линии рабочий толкнул рукой коробку, приложив к ней силу 50 Н в направлении под углом 30°. При этом коробка переместилась из точки (−3;0) в точку (3;0). Найдите проделанную работу, учитывая, что длина конвейера измеряется в метрах.

10. Найдите значение силы, приложенной токарем под углом 20° при изготовлении детали, зная что работа, совершаемая на расстоянии 8 м в горизонтальном направлении равна 150 Дж.

Угол между двумя векторами

Угол между двумя ненулевыми векторами находится из соотношения

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, здесь $0 \le \theta \le \pi$.



Пример. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \langle -3;4\rangle$ и $\vec{b} = \langle 9;12\rangle$.

Решение:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-3\cdot 9 + 4\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{9^2+12^2}} = \frac{-27+48}{5\cdot 15} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$$

Вывод: два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

Пример. При каком значении k вектора $\vec{a} = \langle 3;4\rangle$ и $\vec{b} = \langle k;12\rangle$ взаимно перпендикулярны?

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\quad 3\cdot k + 2\cdot 6 = 0$ при $k = -4$ имеем $\vec{a}\perp\vec{b}$

Обучающие задания

11. Сколько градусов составляет угол между векторами?

a) $\vec{a}\langle -3;\ 6\rangle$ и $\vec{b}\langle 4;\ 2\rangle$
b) $\vec{m}\langle 1;\ 3\rangle$ и $\vec{n}\langle 2;\ 1\rangle$
c) $\vec{e}\langle 2;\ 3;\ 0\rangle$ и $\vec{f}\langle 9;\ -6;\ 2\rangle$
d) $\vec{t}\langle -2;\ -1;\ 2\rangle$ и $\vec{s}\langle 2;\ 1;\ -2\rangle$

12. 1) Покажите, что векторы $\vec{u}\langle 6;\ -2;\ -5\rangle$ и $\vec{v}\langle -12;\ 4;\ 10\rangle$ коллинеарны.

2) При каком значении k угол между векторами $\vec{u}\langle 0;\ 1;\ 1\rangle$ и $\vec{v}\langle k;\ 2;\ 1\rangle$ равен 45°?

13. a)Запишите компонентами вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}\langle 4;\ 3\rangle$, длина которого равна 10.

b) При каком значении k векторы $\vec{u}\langle 2;\ 5;\ -3\rangle$ и $\vec{v}\langle k;\ 4;\ 2\rangle$ перпендикулярны?

14. Даны точки A(3; –1; –2), B(–1; 1; 2), C(1; 1; –3), D(3; –1; –3). Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

15. Проверьте, является ли треугольник прямоугольным. Обозначьте прямой угол. Решите задание различными способами.
a) ΔABC с вершинами в точках A(3; 1), B(–2; 3) и C(5; 6).
b) ΔSTU с вершинами в точках S(4; 6), T(–3; 7) и U(–5; –4).

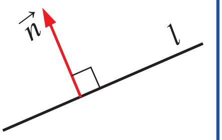
16. a) Найдите углы треугольника с вершинами в точках A(5; 1), B(4; 7) и C(–7; –1).

b) Найдите углы треугольника с вершинами в точках A(1; 2; –2), B(3; 4; –1), C(1; 5; 1).

Общее уравнение прямой

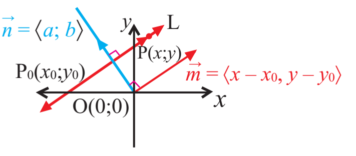
В системе координат на плоскости уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$. Это уравнение называется общим уравнением прямой. Вектор, перпендикулярный прямой, называется **нормальным вектором** к данной прямой или **нормалью**. Покажем, что общее уравнение прямой с нормалью $\langle a;b\rangle$ имеет вид $ax + by + c = 0$.

Пусть $P_0(x_0; y_0)$ заданная точка на прямой, а точка $P(x; y)$ произвольная точка на прямой, отличная от точки P_0, а вектор $\vec{n}$ – нормаль к прямой.



Так как векторы $\vec{n}\langle a;b\rangle$ и $\overrightarrow{P_0P}\langle x - x_0; y - y_0\rangle$ перпендикулярны, то

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$



$\langle a;b\rangle \cdot \langle x - x_0; y - y_0\rangle = 0,$

$ax - ax_0 + by - by_0 = 0,$

$ax + by - by_0 - ax_0 = 0$

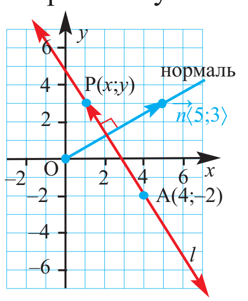
Если ввести обозначение $-by_0 - ax_0 = c$, то

получим уравнение в виде $ax + by + c = 0$. Здесь $a^2 + b^2 > 0$

Частные случаи:

- $a = 0, b \neq 0.$ $\quad y = -\dfrac{c}{b}$ *уравнение прямой, параллельной оси абсцисс*
- $a \neq 0, b = 0.$ $\quad x = -\dfrac{c}{a}$ *уравнение прямой, параллельной оси ординат*
- $c = 0.$ $\quad ax + by = 0$ *уравнение прямой, проходящей через начало координат*

Пример 1. Запишите уравнение прямой l, проходящей через точку $A(4; -2)$, нормаль к которой равна $\vec{n} = \langle 5; 3\rangle$.



Решение: на координатной плоскости построим вектор $\vec{n} = \langle 5; 3\rangle$ и изобразим графическое решение задания, проведя через точку $A(4; -2)$ прямую перпендикулярную нормали. Теперь запишем требуемое уравнение.

Способ 1.

Пусть точка $P(x;y)$ является точкой, расположенной на прямой l и отличной от точки A. Тогда вектор $\overrightarrow{AP}$ коллинеарен прямой l и $\overrightarrow{AP} = \langle x - 4; y - (-2)\rangle = \langle x - 4; y + 2\rangle$.Так как вектора $\vec{n}$ и $\overrightarrow{AP}$ перпендикулярны, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Тогда получим:$\langle 5; 3\rangle \cdot \langle x - 4; y + 2\rangle = 0$.

Таким образом, $\quad 5(x - 4) + 3(y + 2) = 0; \quad 5x + 3y - 14 = 0.$

Способ 2.

Зная нормаль $\vec{n} = \langle 5;3\rangle$, уравнение $ax + by + c = 0$ можно записать следующим образом: $5x + 3y + c = 0$. Так как точка $A(4; -2)$ должна находится на прямой, то $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + c = 0$, $c = -14$ и уравнение будет

$$5x + 3y - 14 = 0.$$

Общее уравнение прямой

Пример 2. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x - y + 1 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$.

Решение: угол между прямыми можно найти как угол между их нормалями.

Для угла θ между нормальных векторов $\vec{n_1}\langle 1;-1\rangle$ и $\vec{n_2}\langle 2;1\rangle$ имеем:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162.$$ Отсюда $\theta \approx 72°$

Обучающие задания

1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку P_0 с нормалью $\vec{n}$.

a) $P_0(-2; 5)$, $\vec{n}\langle 4; 3\rangle$ b) $P_0(3; -4)$, $\vec{n}\langle 2; -3\rangle$

2. Запишите уравнение прямой, перпендикулярной прямой $2x - 4y + 5 = 0$ и проходящей через точку $P(-1; 1)$.

3. Даны прямые $x - 3y + 6$ и $x + 2y - 7 = 0$.

a) Изобразите графики данных прямых.

b) Найдите острый и тупой угол между данными прямыми.

4. Найдите угол между прямыми.

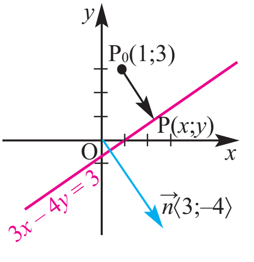
a) $y = 0{,}5x + 6$ и $y = -0{,}75x - 1$ b) $2x - y + 3 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$

5. Изучите пример. Найдите расстояние между заданной точкой и прямой l, заданной уравнением.

a) $P_0(1;3)$ l: $3x - 4y = 3$ b) $P_0(2; 1)$ l: $2x - y - 7 = 0$

c) $P_0(0;2)$ l: $x - y = 4$ d) $P_0(3; 0)$ l: $x + 2y = 0$

Пример. Найдите расстояние от точки $P_0(1;3)$ до прямой $3x - 4y = 3$.



Решение: пусть точка $P(x;y)$ является основанием перпендикуляра, проведенного к прямой от точки $P_0(1;3)$.

Так как векторы $\overrightarrow{P_0P}\langle x-1;y-3\rangle$ и $\vec{n}\langle 3;-4\rangle$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\overrightarrow{P_0P} = k\cdot\vec{n}$ или $\langle x-1; y-3\rangle = \langle 3k; -4k\rangle$. Из равенства соответствующих компонент получим $x = 3k + 1$, $y = -4k + 3$. Координаты x и y точки P должны удовлетворять уравнению $3x - 4y = 3$:

$$3(3k + 1) - 4(-4k + 3) = 3$$

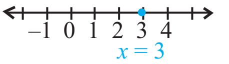
Отсюда $k = \frac{12}{25}$. Тогда $|\overrightarrow{P_0P}| = |k|\cdot|\vec{n}| = \frac{12}{25}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2} = \frac{12}{25}\cdot 5 = 2{,}4$

т.е. искомое расстояние равно 2,4 единицам.

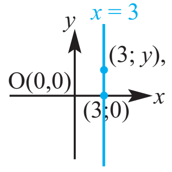
Уравнение плоскости

Исследование. Какому множеству точек соответствует одно и тоже уравнение, например $x = 3$, в одномерной, двухмерной и трехмерной системах координат?

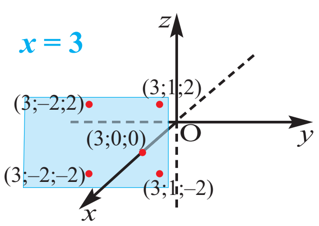
1. В одномерной системе координат, т.е. на числовой оси, уравнению $x = 3$ соответствует одна точка.

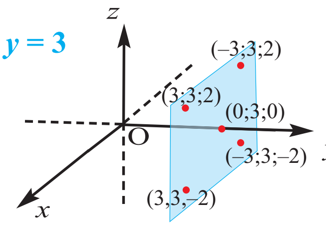


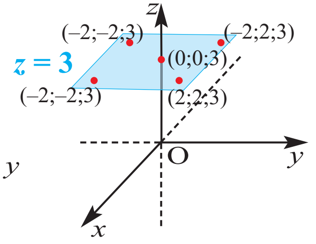
2. В двухмерной системе координат уравнению $x = 3$ или $x + 0 \cdot y = 3$ удовлетворяют все точки с координатами $(3; y)$ $(y \in R)$. Множеством таких точек является прямая параллельная оси y.



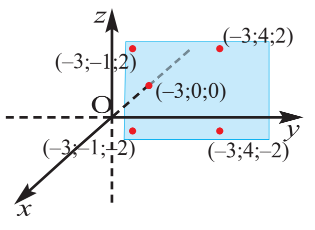
3. В трехмерной системе координат уравнению $x = 3$ или $x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$ удовлетворяет множество точек $(3; y; z)$ $(y, z \in R)$. Множеством таких точек является плоскость, параллельная плоскости Oyz. Аналогично, уравнениям $y = 3$ и $z = 3$ соответствуют плоскости, параллельные плоскостям Oxz и Oxy.

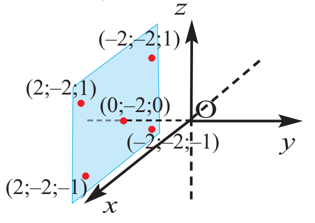


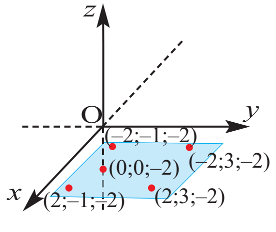




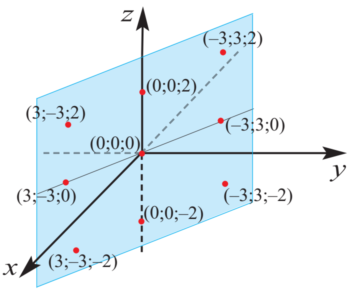
4. В трехмерной системе координат представьте множество точек, удовлетворяющих уравнениям $x = -3$, $y = -2$ и $z = -2$.

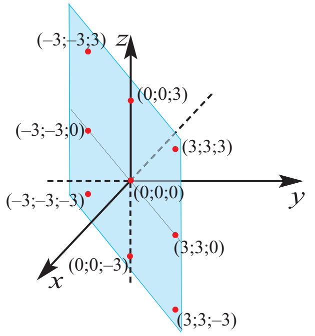






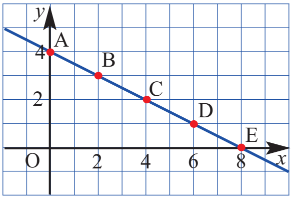
5. Сопоставьте координаты точек, данных на плоскости, с уравнениями $x + y = 0$ и $x - y = 0$. Представьте плоскости.

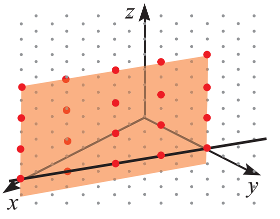




Уравнение плоскости

Уравнение прямой в двухмерной системе координат имеет вид $ax + by + c = 0$. Например, уравнение $x + 2y - 8 = 0$ определяет прямую, проходящую через точки A(0; 4), B(2; 3), C(4; 2), D(6; 1) и E(8; 0). В трехмерной системе координат мы можем написать это уравнение в виде: $x + 2y - 0z = 8$. Так как коэффициент z равен нулю, то аппликата z может получать любые значения. Т.е. в трехмерной системе координат для любого z координаты точек A(0; 4; z), B(2; 3; z), C(4; 2; z), D(6; 1; z) и E(8; 0; z) удовлетворяет уравнению $x + 2y - 0 \cdot z = 8$. Если отметить все такие точки в трехмерной системе координат, то получим плоскость, параллельную оси z. В общем, уравнение плоскости в трехмерной системе координат имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

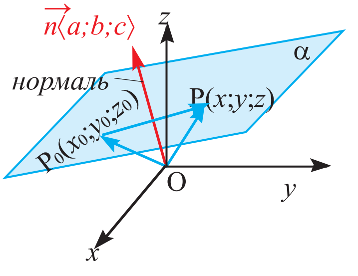




Плоскость может быть определена различными способами.

- тремя неколлинеарными точками
- прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой
- двумя пересекающимися прямыми
- двумя параллельными прямыми
- точкой и перпендикуляром в этой точке в заданном направлении

Используя последний способ, которым можно задать плоскость, покажем, что уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Вектор, перпендикулярный к плоскости называется ее **нормалью**. Пусть, дана плоскость α, точка $P_0(x_0; y_0; z_0)$, расположенная на этой плоскости и нормаль $\vec{n}\langle a; b; c\rangle$ к этой плоскости. Выберем на этой плоскости какую-либо другую точку $P(x;y;z)$ и соединим точки P_0 и P. Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в данной плоскости. Значит $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$.



$$\text{А это значит, что } \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Учитывая, что $\vec{n}\langle a; b; c\rangle$ и $\overrightarrow{P_0P}\langle x - x_0; y - y_0; z - z_0\rangle$, имеем:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Обозначим $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$,

тогда уравнение плоскости будет иметь вид:

$$ax + by + cz = d.$$

Уравнение плоскости

Пример 1. Плоскость с нормалью $\vec{n}\langle -1;\,3;\,4\rangle$ проходит через точку A(1; 2; 3). Запишите уравнение этой плоскости.

Решение: задание можно выполнить двумя способами.

1-ый способ. Возьмём произвольную точку P(x; y; z) на плоскости и запишем компонентами вектор с началом в точке A и концом в точке P. Вектор будет иметь вид $\overrightarrow{AP} = \langle x-1;\, y-2;\, z-3\rangle$. Так как нормальный вектор имеет вид $\vec{n}\langle -1;\,3;\,4\rangle$, то $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$ или справедливо следующее:

$\langle -1;\,3;\,4\rangle\cdot\langle x-1;\, y-2;\, z-3\rangle = 0$. Отсюда

$-1(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0$,

$-x + 1 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0$,

$-x + 3y + 4z - 17 = 0$.

Умножим обе части уравнения на (–1). Тогда уравнение данной плоскости будет иметь вид $x - 3y - 4z + 17 = 0$.

2-ой способ. Известно, что уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, а нормаль к плоскости имеет вид $\vec{n} = \langle a;\, b;\, c\rangle$. Значит, коэффициенты a, b, c известны. Из вектора нормали $\vec{n}\langle -1;\,3;\,4\rangle$ имеем: $(-1)x + 3y + 4z + d = 0$. Записав координаты точки A(1;2;3), принадлежащей плоскости, в уравнение $-x + 3y + 4z + d = 0$, найдем переменную d:

$-x + 3y + 4z + d = 0$, $-1 + 3\cdot2 + 4\cdot3 + d = 0$; $d = -17$

и уравнение плоскости будет иметь вид:

$-x + 3y + 4z - 17 = 0$ или $x - 3y - 4z + 17 = 0$

Пример 2. Дано уравнение плоскости $x + 2y - z - 8 = 0$.

a) Определите, принадлежат ли точки A(1; 3; –1), B(3,5; 1), C(–1; 3:1) плоскости.

b) Определите координаты точки пересечения плоскости с осями x, y, z.

c) Запишите координаты какой-либо другой точки, принадлежащей данной плоскости.

Решение:

a) Проверка: A(1;3;–1)	B(1; 5; 3)	C(1;3;–1)
$x + 2y - z - 8 = 0$	$x + 2y - z - 8 = 0$	$x + 2y - z - 8 = 0$
$1 + 2\cdot3 + 1 - 8 = 0$	$1 + 2\cdot5 - 3 - 8 = 0$	$-1 + 2\cdot3 - 1 - 8 = -4$
Принадлежит плоскости	Принадлежит плоскости	Не принадлежит плоскости

b) Координаты точек пересечения с осями x, y, z:

в точке пересечения с осью x координаты y и z равны нулю

$x = 8$

(8; 0; 0)

в точке пересечения с осью y координаты x и z равны нулю

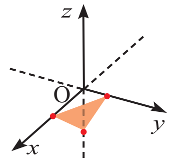
$y = 4$

(0; 4; 0)

в точке пересечения с осью z координаты x и y равны нулю

$z = -8$

(0; 0; –8)



c) Для определения координаты другой точки на заданной плоскости задайте любые значения двум переменным и найдите третью координату.

Например, при $x = 4$, $y = -5$ значение z находят так: $4 + 2(-5) - z - 8 = 0$, $z = -14$. Значит, точка (4; –5; –14) принадлежит данной плоскости.

Обучающие задания

1. Определите, принадлежат ли заданные точки плоскости $4x + 3y - 5z = 10$.

a) A(1; 2; 0) b) B(1,2; –2,4; 6,2) c) C(–7; 6; 4) d) D(–2; 1; –3)

2. Запишите координаты трех точек, расположенных на плоскости.

a) $x = 6$ b) $2x - 5y + z - 1 = 0$ c) $3x + 7y - 2z = 6$

3. Запишите уравнение плоскости с нормалью $\vec{n}$, проходящей через точку P_0.

a) $P_0(2; 1; 3)$, $\vec{n}\ \langle 7; 1; 1\rangle$ b) $P_0(5; 1; 9)$, $\vec{n}\ \langle 1; 0; 0\rangle$
c) $P_0(0; 6; 2)$, $\vec{n}\ \langle 2; 0; -1\rangle$ d) $P_0(0; 0; 0)$, $\vec{n}\ \langle 2; 1; 4\rangle$

4. Плоскость с нормалью $\vec{n}\langle -12; 8; 10\rangle$ проходит через начало координат. Запишите уравнение данной плоскости.

5. Плоскость задана уравнением $x - 7y - 18z = 0$.
a) Запишите вектор нормали к плоскости.
b) Обоснуйте, что данная плоскость проходит через начало координат.
c) Запишите координаты трех точек, расположенных на плоскости.

6. a) Запишите уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и проходящей через точку A(3;1;2).
b) Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку B(2; 2; –1) и ось Ox.

Уравнение плоскости

7. Запишите уравнение плоскости, которая проходит через середину отрезка, соединяющего точки M(1; 3; 1) и N(2; –3; 0), и перпендикулярной данному отрезку. Принадлежит ли точка A(2; –1; 1) данной плоскости?

8. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку B (1; 2; 3) , если её нормаль:

a) параллельна оси y; b) перпендикулярна плоскости xy.

9. a) Запишите уравнение плоскости, параллельной плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$ и проходящей через точку A(1; −2; 3).

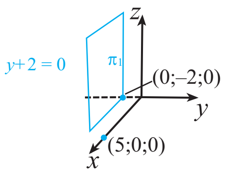
b) Запишите уравнение плоскости, которая проходит через точки A(1; 1; −2), B(2; −1; −1) и C(1; −2; 1).

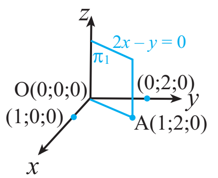
10. В уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ для каждого следующего случая задания коэффициентов запишите свое мнение о расположении плоскости и изобразите новые примеры.

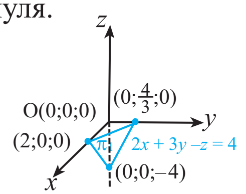
a) Только один из коэффициентов A, B, C равен нулю.

b) Только два из коэффициентов A, B, C равны нулю.

c) Все три коэффициента A, B, C отличны от нуля.







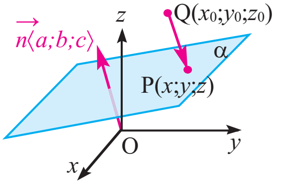
11. Найдите расстояние от заданной точки Q до плоскости α.

a) Q (1; 3; 3) — α: $12x + 4y + 3z + 6 = 0$

b) Q (2; −1; −1) — α: $2x - 3y + 6z + 1 = 0$

c) Q (2; 2; 2) — α: $x + y + z = -1$

d) Q (1; 2; 0) — α: $3x - 4y - 5z - 2 = 0$



Пример. Найдите расстояние от точки Q(1; 3; 3) до плоскости $12x + 4y + 3z + 6 = 0$.

Решение: пусть точка N$(x;y;z)$ является основанием перпендикуляра, проведенного от точки Q(1; 3; 3). Так как векторы $\overrightarrow{QN}\langle x-1;\ y-3;\ z-3\rangle$ и $\vec{n}\langle 12;\ 4;\ 3\rangle$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\overrightarrow{QN} = k\cdot\vec{n}$ или $\langle x-1;\ y-3;\ z-3\rangle = \langle 12k;\ 4k;\ 3k\rangle$. Из равенства соответствующих компонент получим $x = 12k + 1$, $y = 4k + 3$, $z = 3k + 3$. Координаты x, y, z точки N удовлетворяют уравнению:

$12(12k + 1) + 4(4k + 3) + 3(3k + 3) + 6 = 0.$

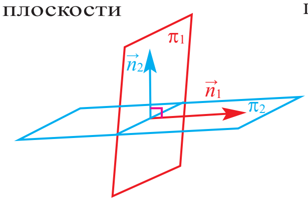
Отсюда $k = -\dfrac{3}{13}$. Тогда $|\overrightarrow{QN}| = |k|\cdot|\vec{n}| = \dfrac{3}{13}\cdot\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = 3.$

Это говорит о том, что расстояние от заданной точки Q до плоскости равно 3 единицам.

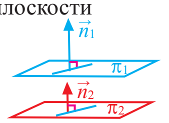
Плоскости α и β перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормали: $\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

Плоскости α и β параллельны тогда и только тогда, когда параллельны их нормали: $\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$

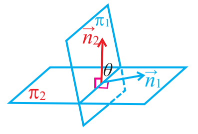
Перпендикулярные плоскости



Параллельные плоскости



Угол между двумя плоскостями



Для угла θ между двумя плоскостями π_1 и π_2 с нормалями $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ справедливо отношение $\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$.

Пример. Определение параллельности или перпендикулярности плоскостей по уравнению.

a) плоскость α задана уравнением $2x - 3y + z - 1 = 0$, а плоскость β задана уравнением $4x - 3y - 17z = 0$. Обоснуйте, что данные плоскости перпендикулярны.

b) плоскость α задана уравнением $2x - 2y - z + 3 = 0$, а плоскость β задана уравнением $2x - 2y - z - 1 = 0$. Обоснуйте, что данные плоскости параллельны.

Решение: для того чтобы плоскости α и β были перпендикулярны, скалярное произведение нормалей $\vec{n_\alpha}\langle 2;-3;1\rangle$ и $\vec{n_\beta}\langle 4;-3;-7\rangle$ плоскостей α и β должно равняться нулю.

$\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta} = \langle 2;-3;1\rangle \cdot \langle 4;-3;-7\rangle = 2\cdot 4 - 3(-3) + 1(-17) = 8 + 9 - 17 = 0$

Значит, плоскости α и β перпендикулярны: $\alpha \perp \beta$

b) Нормали плоскостей α и β равны: $\vec{n_\alpha} = \vec{n_\beta} = \langle 2;-2;-1\rangle$. Если для данных плоскостей постоянная D имеет различное значение, то это значит, что плоскости не лежат друг на друге, т.е. они параллельны.

Обучающие задания

12. Точка P (1; 2: –3) находится на плоскости с нормалью $\vec{n}\langle 3; 2; 5\rangle$.

a) Запишите уравнение плоскости.

b) В уравнении $2x + 2y - cz - 1 = 0$ подберите такое значение коэффициента c, чтобы плоскости были перпендикулярны.

c) Какой-либо вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости если $\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$. Определите, параллелен ли вектор $\vec{a}\langle -4; 1; 2\rangle$ плоскости?

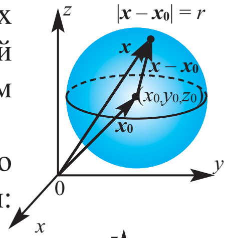
13. При каком значении k плоскости, заданные уравнениями $4x + ky - 2z + 1 = 0$ и $2x + 4y - z + 4 = 0$:

a) параллельны; b) перпендикулярны?

14. Найдите угол между плоскостями $x - y - 2z + 3 = 0$ и $2x + y - z + 2 = 0$

Уравнение сферы

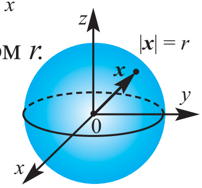
Определение. Сферой называется множество всех точек, расположенных на расстоянии r от заданной точки $P_0(x_0; y_0; z_0)$. Точка P_0 называется центром сферы, r - радиусом сферы.



Если точка $P(x; y; z)$ - произвольная точка сферы, то по формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Это уравнение сферы с центром в точке P_0 и радиусом r.



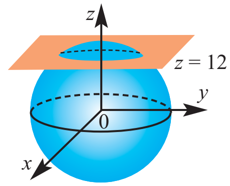
Если центр сферы находится в начале координат, то уравнение сферы радиуса r имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Как видно из рисунка, пересечение этой сферы с координатной плоскостью Oxy является ее большой окружностью.

Пример 1. Запишите уравнение сферы, радиус которой равен $r = 5$, а центр расположен в точке $M(2; -1; 1)$.

Решение: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$

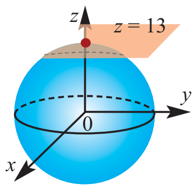


Пример 2. Представьте фигуру, которая получается при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ с плоскостью $z = 12$.

Решение: радиус сферы $\sqrt{169} = 13$. Учитывая в уравнении сферы, что $z = 12$ получим : $x^2 + y^2 + 12^2 = 169$; $x^2 + y^2 = 169 - 144 = 25$

Пересечение плоскости $z = 12$ и данной сферы является окружность с центром в точке $(0; 0; 12)$ и радиусом $r = 5$.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **плоскостью, касательной к сфере.**



Например, плоскость $z = 13$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $(0;0;13)$.

Плоскость, касательная к сфере, в точке касания перпендикулярна радиусу сферы.

Обучающие задания

1. a) Запишите уравнение сферы радиусом 4, центр которой находится в начале координат.

b) Запишите уравнение сферы радиусом 6, центр которой находится в точке $M(1; -2; 4)$.

2. Найдите точки пересечения сферы, заданной уравнением $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 35$ с осями координат.

3. Запишите уравнение сферы с центром в точке $(2; 3; -1)$, проходящей через точку $(4; -1; 1)$.

Уравнение сферы

4. Найдите расстоянии от точки A(1; 2; 3) до сферы, заданной уравнением $(x-9)^2 + (y+7)^2 + (z+9)^2 = 36$.

5. Определите, являются ли следующие уравнения уравнением сферы. Если уравнение является уравнением сферы, то найдите ее центр и радиус.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 37 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 19 = 0$

c) $x^2 + y^2 - z^2 + 12x + 2y - 4z + 32 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 4z - 44 = 0$

6. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 10z + 54 = 0$. Вычислите расстояние от точки A(8; 0; 7) до сферы.

7. Запишите уравнение сферы радиусом 7, если плоскость $z = 0$ касается сферы в точке A(3; 4; 0).

8. Изобразите геометрически множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему условию.

a) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$

9. Расстояние от точки P до точки A(−1; 5; 3) в два раза больше , чем расстояния от точки P до точки B(6; 2; −2). Покажите, что множество данных точек является сферой.

10. Запишите уравнение сферы, центр которой находится в точке (2;–3;6) и касающейся плоскостей: a) xy; b) yz; c) xz.

11. Запишите уравнение сферы, концами одного из диаметров которого являются точки (2; 1; 4) и (4; 3; 10).

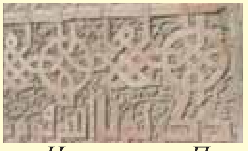
12. a) Запишите уравнение сферы, центр которой находится в точке (6; 8; −5) и радиус равен 6.

b) Представьте пересечение этой сферы с координатными плоскостями..

13. Если $\vec{r} = \langle x; y; z \rangle$, $\vec{a} = \langle 2; 1; -1 \rangle$ и $\vec{b} = \langle 1; 1; 0 \rangle$, то покажите, что равенство $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0$ выражает сферу и найдите ее центр.

14. В пространстве четыре сферы, имеющие одинаковые радиусы, касаются друг друга. Найдите центр и радиус четвертой сферы, если центры трех из них находятся в точках $(\sqrt{2}; 0; 0)$,$(0; \sqrt{2}; 0)$, $(0; 0; \sqrt{2})$, а центр четвертой находится в 7 октанте.

Ремесленники и художники создают узоры, заполняя некоторую площадь без пробела рисунком при помощи преобразований (параллельный перенос, поворот, отображение) или увеличения или уменьшения этого рисунка (гомотетия).



Нахичевань. Примеры образцов на камне

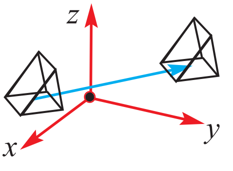
Китайская тарелка

Это знать интересно. Великий голландский художник Эшер, объединив такие разделы математики как симметрия, комбинаторика, стереометрия и топология, создал динамические рисунки, заполняя плоскости цветовыми оттенками. Не имея специального математического образования, Эшер создавал свои произведения, опираясь на интуицию и визуальные представления. Ряду работ, построенных на параллельном переносе, он дал название "Правильное движение плоскости".
https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

М.К.Эшер
Пределы окружности IV

Если каждой точке P фигуры F в пространстве, по определенному правилу, ставится в соответствие единственная точка P′, то это называется преобразованием фигуры F в пространстве. Преобразование, сохраняющее расстояние между точками, называется **движением.** Движение преобразовывает плоскость в плоскость, прямую в прямую, отрезок в отрезок, а угол - в конгруэнтный ему угол. Значит, движение преобразовывает фигуру в конгруэнтную себе фигуру.

Известно, что в двухмерной системе координат за преобразование каждой точки $(x; y)$ в точку $(x+a; y+b)$, т.е. за параллельный перенос отвечает вектор $\langle a; b\rangle$. Аналогичным образом, в пространстве при параллельном переносе координаты каждой точки изменяются так: $(x; y; z) \rightarrow (x+a; y+b; z+c)$.



Параллельный перенос является движением. Каждому параллельному переносу соответствует один вектор. Справедливо и обратное.

Пример 1. В какую точку переходит точка A(–4; 5; 6) при параллельном переносе на вектор $\vec{p}\langle 2; -1; 3\rangle$?

Решение: по определению при данном преобразовании, координаты точки A преобразуются в координаты точки A′ следующим образом: $x' = -4 + 2 = -2$; $y' = 5 - 1 = 4$; $z' = 6 + 3 = 9$. Т.е. при этом параллельном переносе точка A(–4; 5; 6) преобразуется в точку A′(–2; 4; 9).

Симметрия. В пространстве симметрии относительно точки и прямой дается такое же определение как и на плоскости. В пространстве также рассматривается симметрия относительно плоскости.

Для точки (x; y; z) пространства

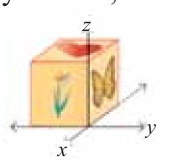
- Точка, симметричная относительно начала координат: ($-x$; $-y$; $-z$)
- Точка, симметричная относительно оси Ox: (x; $-y$; $-z$)
- Точка, симметричная относительно оси Oy: ($-x$; y; $-z$)
- Точка, симметричная относительно оси Oz: ($-x$; $-y$; z)
- Точка, симметричная относительно плоскости Oxy: (x; y; $-z$)
- Точка, симметричная относительно плоскости Oyz: ($-x$; y; z)
- Точка, симметричная относительно плоскости Oxz: (x; $-y$; z)

Пример. Найдите точку, симметричную точке (1; 2; 3) относительно плоскости $z = 5$.

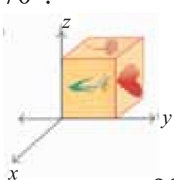
Решение: точка (x'; y'; z'), симметричная точке (1; 2; 3) относительно плоскости $z = 5$, расположена на прямой, перпендикулярной как плоскости $z = 5$, так и плоскости Oxy. Поэтому абсциссы и ординаты точек равны: $x' = 1$, $y' = 2$. Координаты точки z' можно найти из отношения $(z' + 3) : 2 = 5$; $z' = 7$. Таким образом, это точка (1; 2; 7).

Поворот. Поворотом фигуры в пространстве вокруг прямой l на угол θ называется такое преобразование, при котором каждая плоскость, перпендикулярная прямой l, поворачивается в одном направлении на угол θ вокруг точек пересечения прямой l с плоскостью. Прямая l называется осью симметрии, угол θ называется углом поворота.

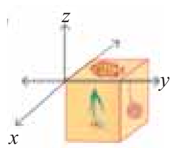
Ниже на рисунках представлены примеры различных изображений поворота куба вокруг оси x в направлении по часовой стрелке на угол 90°, 180°, 270°.



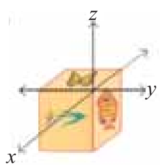
начальное положение



поворот на 90°



поворот на 180°

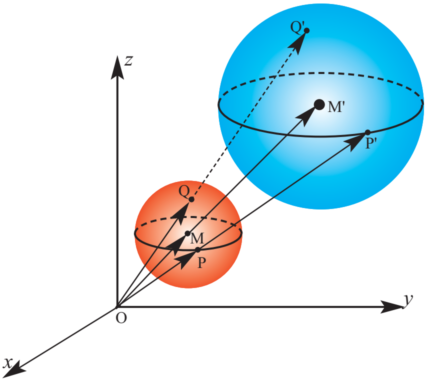


поворот на 270°

Гомотетия. Аналогичным образом в пространстве вводится понятие преобразования подобия. Если при преобразовании фигуры расстояние между двумя точками X и Y изменяется в $k>0$ раз, то такое преобразование называется преобразованием подобия. Здесь число k называется коэффициентом подобия.

Если для любой точки X фигуры F, при преобразовании ее в точку X′ выполняется равенство $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, то это преобразование называется **гомотетией** с центром в точке O и с коэффициентом k ($k \neq 0$). Гомотетия - это преобразование подобия. В частном случае, при $k = -1$ получаем центральную симметрию относительно O, при $k = 1$ - тождественное преобразование.

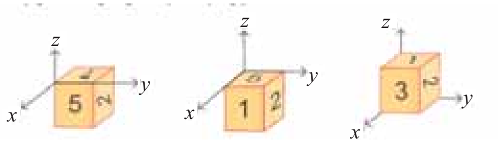
Пример. Пусть дана сфера с центром в точке M(1;3;3) и радиусом 2. Запишите уравнение сферы, полученной гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом $k = 3$.



Решение: позиционный вектор, соответствующий точке M, равен $\overrightarrow{OM}\langle 1;\ 3\ ;\ 3\rangle$. Пусть позиционный вектор, соответствующий точке M′, будет $\overrightarrow{OM'}\langle x';\ y';\ z'\rangle$. Тогда, по определению, $\overrightarrow{OM'} = k\cdot\overrightarrow{OM}$ или $\langle x';\ y';\ z'\rangle = 3\cdot\langle 1;\ 3\ ;\ 3\rangle = \langle 3;\ 9;\ 9\rangle$.
Тогда $x'=3,\ y'=9,\ z'=9$. Т.е. центром данной сферы будет точка M′(3; 9; 9). Зная, что радиус сферы равен $R = M'P' = 3MP = 3\cdot 2 = 6$, получим уравнение сферы $(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-9)^2 = 36$.

Обучающие задания

1. На рисунке показаны последовательно выполненные повороты куба относительно оси y в направлении по часовой стрелке на угол 90°, 180°, 270°. Изобразите начальное положение куба.



2. При параллельном переносе точка A(2; 0; –1) преобразовывается в точку A′(4; –3; 5). В какую точку при этом же параллельном переносе преобразовывается: a) начало координат; b) точка B(–3; 1; 0)?

3. Запишите координаты точек, симметричных точке B(2;3;1) относительно плоскостей: a) Oxy; b) Oyz; c) Oxz.

4. В какую точку преобразовывается точка A(3; 2; 5) при симметрии относительно плоскости: a) $x = 4$; b) $y = 3$; c) $z = 2$?

5. В какую точку преобразовывается точка A(0; –3; 2) при гомотетии с центром в точке P(1; 2; 3) коэффициентом гомотетии $k = 3$.

6. Изобразите куб, длина ребер которого равна единице, одна из вершин совпадает с началом координат, а ребра, выходящие из этой вершины расположены на положительных направлениях осей координат. Запишите координаты вершин куба, полученного при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии, равным $k = 2$.

Обобщающие задания

1. Даны векторы $\vec{a}\langle 1; -1; 2\rangle$ и $\vec{b}\langle 2; -3; -1\rangle$.

a) Запишите разложение вектора по орт векторам.

b) Найдите длину векторов.

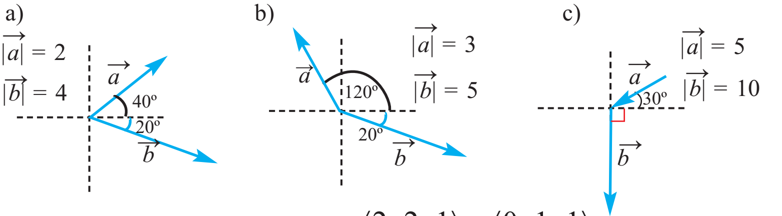
c) Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$.

2. Найдите длину медианы BM треугольника с вершинами в точках A(2; 3; 4), B(7; 4; 7) и C(–1; 6; 3).

3. Прямая, проходящая через точку P(4; 3), параллельна радиус - вектору $\vec{m}\langle 5; -1\rangle$. Изобразите график данной прямой и напишите ее уравнение.

4. Даны точки A(1; –2; 4), B (2; 1; –3), C (–5; 0; 2), D (3; 4; 0). Запишите компонентами следующие вектора:
a) $\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

5. Для каждого отдельного случая найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



6. Найдите угол между векторами $\langle 2; 2; 1\rangle$ и $\langle 0; 1; 1\rangle$.

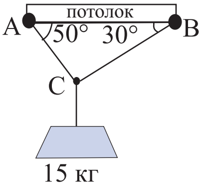
7. Точка C делит отрезок, соединяющий точки A (2; 2; 1) и B (7; −3; 6), в отношении 2 : 3. Найдите координату точки C. Рассмотрите два случая.

8. Даны векторы $\vec{a}\langle 4; 2\rangle$ и $\vec{b}\langle 2; -4\rangle$:
a) изобразите данные вектора;
b) что больше: $|\vec{a} + \vec{b}|$ или $|\vec{a}| + |\vec{b}|$?

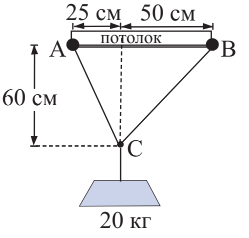
Обобщающие задания

9. Найдите силу натяжения кабеля под действием тяжести.

a)



b)



10. Силы 20 Н, 55 Н и 75 Н, приложенные к телу, образуют с положительным направлением оси x соответственно углы 30°, 45° и 120°. Найдите направление и модуль результирующей силы.

11. Найдите точку, расположенную на плоскости Oyz и равноудаленную от точек A(2; 0; 3), B (0; 3; 2) и C (0; 0; 1).

12. При каком значение m данные точки коллинеарны:
a) A(4; 2), B (m; –7), C (6; 4);
b) A(3; –1; 0), B (m; 2; 3), C (7; 3; 4)?

13. При каком значении $\boldsymbol{k}$ векторы $\vec{a}\langle 12; -20; 16\rangle$ и $\vec{b}\langle 3; k; 4\rangle$:
a) параллельны; b) перпендикулярны?

14. Запишите уравнение сферы с центром в точке (2; 3; −1), проходящей через точку (4; −1; 1).

15. Плоскость задана уравнением $x = 0$.
a) Запишите вектор нормали к плоскости.
b) Обоснуйте, что данная плоскость проходит через начало координат.
c) Запишите три точки, принадлежащие данной плоскости.

16. Найдите координаты точки на оси Oz, расположенной на одинаковом расстоянии от точек A(–2; 0; 3) и B(0; 2; –1).

17. Точки A(1; –2; 7), B(2; 3; 5) и D(–1; 3; 6) являются вершинами ромба ABCD. Найдите координаты точки C.

18. В какую точку преобразовывается точка A(3; 5; 0) при гомотетии с коэффициентом $k = 2$, центр которой находится в точке M(1; 2; –3)?

3 Предел

- Предел функции в точке
- Нахождение предела функции по таблице значений функции и по графику
- Существование предела
- Свойства пределов
- Непрерывность функции
- Замечательные пределы, содержащие тригонометрические функции
- Бесконечные пределы и предел функции на бесконечности. Горизонтальная и вертикальная асимптоты
- Предел числовой последовательности

Математический словарь

- предел
- односторонний предел
- левый предел
- правый предел
- существование предела
- непрерывность
- непрерывность в точке
- непрерывность на интервале
- непрерывность на отрезке
- замечательные пределы
- предел на бесконечности
- предел числовой последовательности

Это интересно!

Предел (лимит) от латинского слова “limes”, что означает граница, цель.

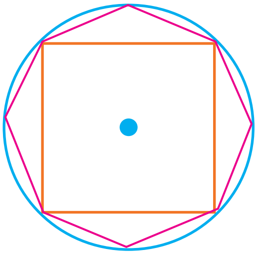
Понятие предела независимо друг от друга было введено английским математиком Исааком Ньютоном (1642–1727) и немецким математиком Готфридом Лейбницом (1646–1716). Однако ни Ни Ньютон, ни Лейбниц не смогли полностью объяснить вводимые ими понятия. Точное определение предела было дано французским математиком Коши. А работы немецкого ученого Вейерштрасса наконец завершили создание этой серьезной теории.

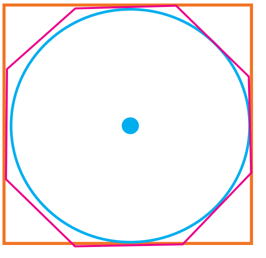
Предел функции в точке

Понятие предела является одним из фундаментальных понятий в математике.

Чтобы представить понятие предела, рассмотрим следующие примеры.

1. Площадь круга





Великий ученый и философ Архимед для нахождения площади круга использовал площади вписанных в круг и описанных около круга правильных многоугольников. Площадь квадрата, вписанного в круг, намного меньше площади круга, однако площадь восьмиугольника уже не так отличается от площади круга. Если внутри круга изобразить правильные 16-ти угольник, 32-х угольник и т.д., то их площади еще больше приближаются к площади круга. При увеличении количества сторон вписанного правильного многоугольника площадь будет стремиться к площади круга.

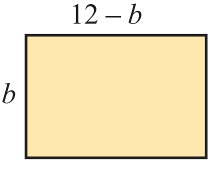
При увеличении количества сторон правильного многоугольника, описанного около круга, разница между площадью многоугольника и площадью круга также уменьшается.

Данный подход, предложенный Архимедом, на самом деле составляет основную концепцию предела.

2. n-ый член последовательности $1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{1000}, \dfrac{1}{10000}, \ldots$ можно найти по формуле $b_n = \dfrac{1}{10^{n-1}}$.

С возрастанием числа в знаменателе, каждый следующий член становится меньше предыдущего. Сделайте прикидку, к какому значению стремится b_n, если n неограниченно возрастает!

Исследование. Участок прямоугольной формы необходимо оградить проволокой, длина которой равна 24 м. Какие размеры нужно выбрать для этого участка, чтобы он имел наибольшую площадь?



Решение: обозначим длину прямоугольника через a, а ширину через b. Тогда периметр прямоугольника будет равен $P = 2a + 2b$. По условию $2a + 2b = 24$. Отсюда $a = 12 - b$. Используем последнее в формуле для нахождения площади $S = ab$.

Тогда зависимость площади от ширины можно записать как $S = (12 - b)b$ или $S(b) = 12b - b^2$.

Предел функции в точке

Составим таблицу значений площади для значений ширины b, которые как справа, так и слева стремятся к 6.

при стремлении b к 6 слева → ← *при стремлении b к 6 справа*

Ширина	b	5,0	5,5	5,9	6,0	6,1	6,5	7,0
Площадь	S	35,00	35,75	35,99	36,00	35,99	35,75	35,00

S(b) стремится к 36 → ← *S(b) стремится к 36*

Значит, при стремлении значений b как справа, так и слева к 6 значения $S(b)$ приближаются к 36. Также это стремление не зависит от того, как значения b стремятся к 6. В этом случае число 36 называется пределом функции $S(b)$ при стремлении переменной b к 6 и это записывается так:

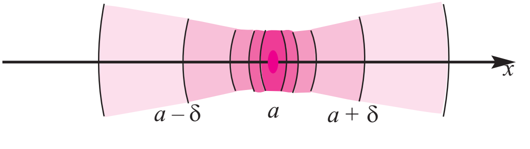
$$\lim_{b \to 6} S(b) = \lim_{b \to 6} (12b - b^2) = 36$$

При стремлении значений переменной b к 6 предел функции S(b) равен 36.

Здесь запись $b \to 6$ означает, что b расположено сколь угодно близко к 6, однако это не означает, что b равно 6. Как видно из таблицы, числа при стремлении слева меньше 6, а при стремлении справа числа больше 6.

Записав $S(b)$ в виде $S(b) = 36 - (b - 6)^2$, можно увидеть, что при стремлении величины $|b - 6|$ к 0 значения S стремятся к 36.

Интервал $(a - \delta; a + \delta)$ называется δ $(\delta > 0)$ окрестностью точки a. Можно выбрать δ так, что для любых x из данной окрестности, расстояние $|x - a|$ станет меньше любого положительного числа. Значит, разность $x - a$ можно сделать сколь угодно близкой к 0.



Пусть функция $f(x)$ определена в какой-либо окрестности точки a (кроме может быть, этой точки). Если при стремлении разности $x - a$ к нулю разность $f(x) - L$ также стремится к нулю, то число L называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ и это записывает так:

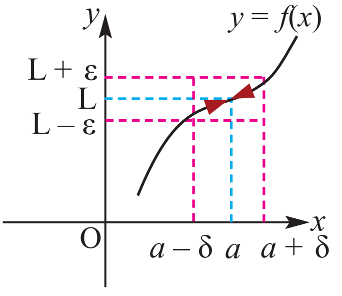
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Предел функции в точке

Определение. Пусть для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$, такое что для всех x удовлетворяющих соотношению $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Тогда число L называется пределом функции $f(x)$ в точке a и записывается как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Это можно объяснить коротко геометрически.

На оси ординат для произвольного числа $\varepsilon > 0$ возьмем окрестность $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ точки L. Через точки $L - \varepsilon$ и $L + \varepsilon$ проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Получим полосу шириной 2ε. Тогда всем x $(x \neq a)$ функции $f(x)$ в окрестности $(a - \delta; a + \delta)$ соответствуют значения из интервла $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$, расположенные в полосе 2ε по графику.



Пример 1. Используя определение предела, покажем справедливость следующего равенства $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$

Решение: выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Для всех x, удовлетворяющих условию $|x - 2| < \delta$, оценим величину $|(3x - 2) - 4|$:

$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta$. Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, тогда для всех x, удовлетворяющих условию $|x - 2| < \delta$, имеет место $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$. А это, по определению, означает $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$

Предел можно приблизительно оценить или определить различными методами.

- по таблице
- по графику
- аналитически

Нахождение значения предела функции по таблице значений и по графику

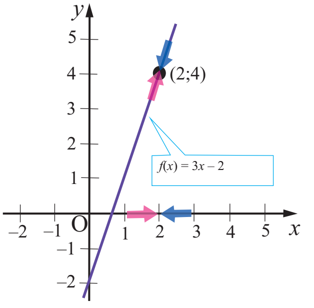
Пример 2. Задайте таблицу значений и найдите предел: $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2)$

Решение: запишем в таблицу значения функции $f(x) = 3x - 2$ при некоторых значениях x, стремящихся слева и справа к 2.

x	1,9	1,99	1,999	2,0	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,700	3,970	3,997	?	4,003	4,030	4,300

По таблице видно, что при стремлении значений x к 2, как справа, так и слева, значения $f(x)$ приближаются к 4.

Построив график функции $f(x) = 3x - 2$, также можно увидеть, что при стремлении x как справа, так и слева к 2, значения функции “сходятся” к 4. Значит, можно записать следующее: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2) = 4$.



Пример 3. Найдите. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Решение: функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x = 1$ и $f(x) = x + 1$ при $x \neq 1$. Построим таблицу значений функции при стремлении x слева и справа к числу 1.

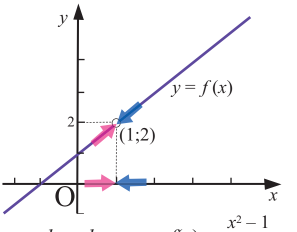


график функции $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1

Из таблицы видно, что при стремлении значений x к 1 значения $f(x)$ стремяться к 2. Убедится в этом можно, построив график соответствующей функции.

Внимание! В точке $x = 1$ заданная функция не определена, однако в этой точке предел функции существует и он равен 2.

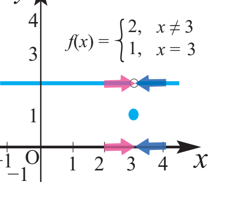
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Обратите внимание на разницу двух понятий - предел функции и значение функции в заданной точке!

Пример 4. По графику функции $f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$

найдите: a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$; b) $f(3)$.

Решение: a) из графика видно, что при стремлении значений x к 3 значение функции приближается к 2: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$



b) Значение функции в точке $x = 3$ равно 1: $f(3) = 1$

Предел функции в точке

Обучающие задания

1. Определите предел по таблице.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+3)$

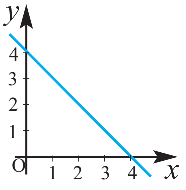
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

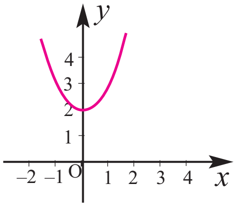
x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$				?			

2. Используя графики функций, найдите требуемые пределы.

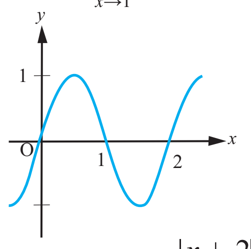
a) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)$



b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$

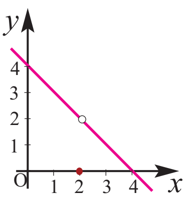


c) $\lim\limits_{x\to 1}(\sin \pi x)$



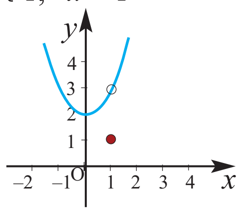
d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$f(x)=\begin{cases} 4-x, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$

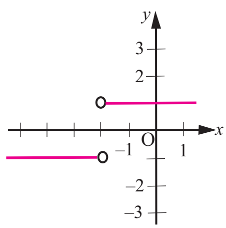


e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$



f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+2|}{x+2}$



3. Из картона в форме квадрата, длина стороны которого равна 24 см, с каждого угла отрезали одинаковые по размеру квадраты, после чего картон сложили в виде коробки (без крышки).

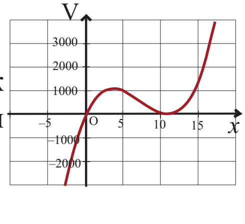
a) По следующим данным изобразите рисунок коробки и отметьте на нем соответствующие обозначения.

b) Покажите, что объем коробки можно найти по формуле $V = 4x(12-x)^2$.

c) Заполните следующую таблицу и исследуйте, как изменяются значения функции при стремлении x к 4. По таблице найдите предел $\lim\limits_{x\to 4} V$.

x	3	3,5	3,9	4	4,1	4,5	5
V							

d) При помощи графкалькулятора постройте график функции $V(x)$. По графику проверьте, что функция достигает максимального значения при $x = 4$.



Существование предела. Односторонний предел.

Для некоторых значений переменной x приходится рассматривать стремление к a только с одной стороны (слева или справа).

Левый предел. Если значения x, оставаясь меньше a, стремятся к a, при этом разность $f(x) - L$ стремится к нулю, то число L называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева и записывается как $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Правый предел. Если значения x, оставаясь больше a, стремятся к a, при этом разность $f(x) - L$ стремится к нулю, то число L называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа и записывается как $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет правый и левый пределы и они равны, то функция $f(x)$ в точке $x = a$ имеет предел и справедливо равенство $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

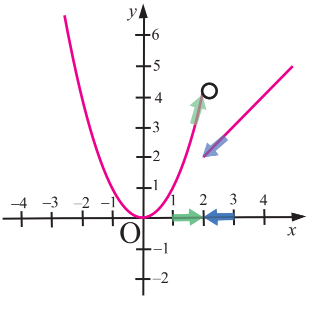
Для данного предположения верно и обратное.

Обратное утверждение запишите сами!

Исследуем пределы слева и справа для кусочно - заданной функции**.**

Пример 5. Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$

найдите предел слева и справа при $x = 2$.



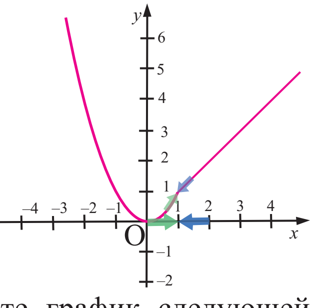
Решение: предел слева: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

Предел справа: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$

Так как левый и правый пределы не равны, то в точке $x = 2$ для данной функции предела не существует.

Пример 6. Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

найдите предел слева и справа при $x = 1$.



Решение: предел слева: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

Предел справа: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

значение функции: $f(1) = 1$

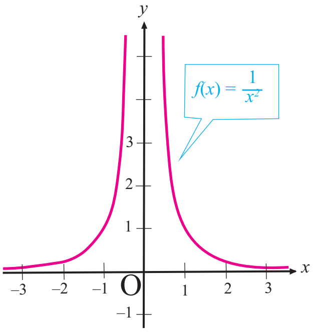
Исследуйте самостоятельно!

a) Постройте график следующей функции. Проверьте, существует ли предел функции при $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 3 \\ 9 - x, & x > 3 \end{cases}$$

b) Постройте график следующей функции. Проверьте, существует ли предел функции при $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x > 1 \\ x^2 + 3, & x \leq 1 \end{cases}$$



В определении предела функции мы предположили, что числа a и L конечны. Однако, a и L (одно или оба) могут и не быть конечными числами.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

Как видно по графику, при стремлении значений x к нулю слева и справа значения функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ бесконечно возрастают. Значит, выбирая достаточно маленькие значения $|x|$, можно достигнуть того, что функция будет иметь значения больше произвольного числа. Например,

$$0<|x|<\frac{1}{10} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>100,$$

$$0<|x|<\frac{1}{1000} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>1000\,000$$

при уменьшении значений $|x|$ значения функции неограниченно растут. Функция $\frac{1}{x^2}$ при $x\to 0$ бесконечно возрастающая. Это записывается так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

Обучающие задания

4. Используя график заданной функции, найдите пределы (если они существуют). Если предел не существует, то объясните причину.

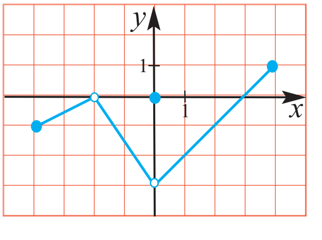
1) $f(x)=\begin{cases}x+6, & x<1\\ 8-x, & x\geq 1\end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

2) $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x<0\\ 1-x^2, & x\geq 0\end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5. По графику функции найдите следующие пределы.



a) $\lim\limits_{x\to -4^+}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)$

6. Согласно условиям изобразите график какой-либо функции $f(x)$.

a) $f(-1)=3$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует.

b) $f(-2)=4$, $f(0)=5$, $f(1)=-2$ и $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

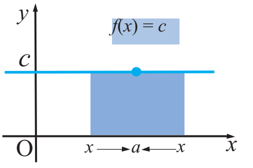
Свойства пределов

Для пределов функции справедливы следующие утверждения.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то он единственный.

Предел постоянной величины. Для постоянной функции $f(x) = c$ имеем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$.

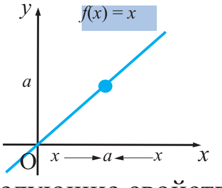
Предел постоянной величины равен самой постоянной величине.



Пример. $\lim\limits_{x\to 3} 7 = 7$, $\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$

Предел тождественной функции.

Для тождественной функции $f(x) = x$ имеем $\lim\limits_{x\to a} x = a$



Пример. $\lim\limits_{x\to -5} x = -5$

При нахождении пределов функции используются следующие свойства.

Если для действительных чисел L, M, a имеются $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \text{L}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{M}$, то:

1. Предел суммы: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{L} + \text{M}$

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов .

Пример. $\lim\limits_{x\to 3} (x + 6) = \lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 6 = 3 + 6 = 9$

2. Предел разности: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{L} - \text{M}$

Предел разности двух функций равен разности их пределов.

Пример. $\lim\limits_{x\to -1} (11 - x) = \lim\limits_{x\to -1} 11 - \lim\limits_{x\to -1} x = 11 + 1 = 12$

3. Предел произведения: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = \text{L} \cdot \text{M}$

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

В частном случае, $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

То есть постоянный множитель можно вынести за знак предела.

Пример. $\lim\limits_{x\to 5} (-2x) = (-2) \cdot \lim\limits_{x\to 5} x = -2 \cdot 5 = -10$

4. Предел частного: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\text{L}}{\text{M}}$, $\text{M} \neq 0$

Предел частного двух функций равен частному их пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю.

Пример. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+5}{4-x}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} (x+5)}{\lim\limits_{x\to 2} (4-x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 5}{\lim\limits_{x\to 2} 4 - \lim\limits_{x\to 2} x} = \dfrac{2+5}{4-2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$

5. Предел степени: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = \text{L}^n$, $n \in N$.

В частном случае, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

Пример. a) $\lim\limits_{x\to 10} x^4 = 10^4 = 10000$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} 2}{\lim\limits_{x\to 3} x^3} = \dfrac{2}{27}$

Свойства пределов

На основании данных утверждений можно сделать следующий вывод.

Предел многочлена и рациональной функции

Для произвольного многочлена P(x) имеем: $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Для произвольных многочленов P(x) и Q(x) при Q(a) ≠ 0 имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 4) = 3\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 4 = 3\cdot(2)^2 + 4 = 16$

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$

Как видно, если знаменатель рациональной функции при $x\to 1$ отличен от нуля, то можно применить все свойства, о которых говорилось ранее.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{2\cdot(1)^2 + 1 + 1}{1 + 1} = 2.$$

Можно показать, что при возможных значениях переменной имеет место:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(a)}$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$

Обучающие задания

1. Применяя свойства пределов, вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 8$ b) $\lim\limits_{x\to 6} x$ c) $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 4)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} 7x^2$

2. 1) Зная, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 2$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 3$, найдите:

a) $\lim\limits_{x\to c}(5g(x))$ b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x))$ c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)g(x))$ d) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2) Зная, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \dfrac{3}{2}$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \dfrac{1}{2}$, найдите:

a) $\lim\limits_{x\to c}(4f(x))$ b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) - g(x))$ c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)g(x))$ d) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

3. Вычислите, используя свойства пределов.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(-4x^2 + 2x - 5)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x - x^3)$ 3) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3 - 4x + 1)$

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5x^3 + 6x^2 - 8)$ 5) $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2 + 4x + 1)$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3 - 2x^2 + 4)$

4. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to -4} x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^3)$ c) $\lim\limits_{x\to 3}(x - 1)^5$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3x + 1}$ e) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[3]{x + 1}$

5. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

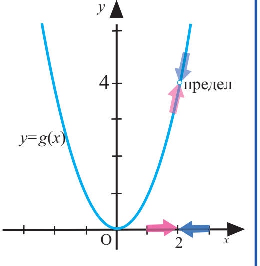
6. a) Изобразите график какой-либо функции, определенной в точке $x = 2$, но не имеющей предела при $x\to 2$.

b) Изобразите график какой-либо функции, не определенной в точке $x = 2$, но имеющей предел при $x\to 2$

Некоторые способы вычисления пределов

Нахождение предела рационального выражения, при помощи разложения числителя и знаменателя (или же одного из них) на множители и сокращения

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$ При непосредственной подстановке $x = 2$ получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.



В этом случае числитель и знаменатель рационального выражения раскладывают на множители и сокращают, а затем вычисляют предел эквивалентного выражения:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4.$$

Проверь себя! Вычислите предел рациональной функции (если он существует). Если у функции нет предела, запишите причину.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x-25}{x^2-4x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$

Нахождение пределов при помощи освобождения от радикала.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$ Вычислите предел, освободив числитель от радикала.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+4} + \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Применяются свойства пределов.

7. Вычислите предел рациональной функции (если он существует). Если у функции нет предела, запишите причину.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(-4x)$ b) $\lim\limits_{x\to 5}(-x^3)$ c) $\lim\limits_{x\to -2}x^2$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-4x+1)$ e) $\lim\limits_{x\to 6}(-5x^2+6x+8)$ f) $\lim\limits_{t\to -2}(t+4)^2$

g) $\lim\limits_{t\to 1}(3t-1)(5t^2+2)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6}{x^2-7x+6}$

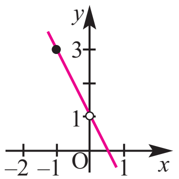
8. Зная, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}=100$, найдите:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{100}-1)^2}{(x-1)^2}$

Покажите, какое свойство пределов вы применяли на каждом шагу при вычислении.

9. Определите точки в которых функция не определена. По графику найдите пределы (если они существуют) следующих функций.

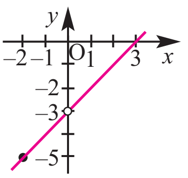
$g(x)=\dfrac{-2x^2+x}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$

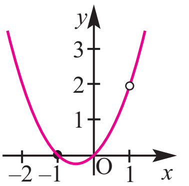
$h(x)=\dfrac{x^2-3x}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to -2}h(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$

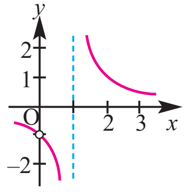
$\varphi(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

10. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-12}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^3+4x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}$

Свойства пределов

11. Применяя различные методы, вычислите пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 2}[(x+1)^2(3x-1)^3]$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}[(x+2)^3(3x+2)]$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{6}{x^2-9}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

12. Вычислите пределы функций.

1) $f(x)=5-x,\qquad g(x)=x^3$

a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4}g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}g(f(x))$

2) $f(x)=x+7,\qquad g(x)=x^2$

a) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4}g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3}g(f(x))$

3) $f(x)=4+x^2,\qquad g(x)=\sqrt{x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}g(f(x))$

Прикладные задания

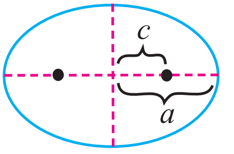
Пример. По теории относительности Эйнштейна длина движущегося тела относительно наблюдателя, находящегося в состоянии покоя, при возрастании скорости уменьшается. Если длина тела в состоянии покоя L_0, а при движении длина тела равна L, то между этими величинами существует зависимость $L = L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$. Что можно сказать о длине искусственного спутника, если его скорость будет стремиться к скорости света?

Решение: в этом случае мы должны вычислить предел $\lim\limits_{v\to c} L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

$$\lim_{v\to c} L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L_0\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} = L_0\sqrt{0}=0.$$

Значит, для наблюдателя, находящегося в состоянии покоя, длина спутника сравняется с нулем в случае, если скорость спутника сравняется со скоростью света.

13. Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна, называется эллипсом. Площадь, ограниченную эллипсом, больший диаметр которого равен $2a$, можно найти по формуле $\pi a\sqrt{a^2-c^2}$, $2c$ - расстояние между фокусами эллипса. Найдите предел площади при $c \to 0$. Объясните значение данного предела.



14. Денежные средства (тыс. манат), которые необходимы для очистки p% озера, можно вычислить по формуле $C = \dfrac{25000p}{100-p}$, $(0 \le p < 100)$.

a) Вычислите сумму денег, необходимую для очистки 50% озера.

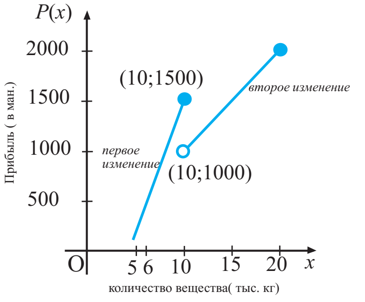
b) Сколько процентов озера можно очистить за 100 млн. манат?

c) Вычислите $\lim\limits_{p\to 100^-} C$ и объясните смысл данного предела.

15. На графике показана прибыль, полученная от продажи x (тыс. кг) химических средств. При помощи графика найдите требуемые пределы (если это возможно).

a) $\lim\limits_{x\to 6} P(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 10^-} P(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 10^+} P(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 10} P(x)$



16. Почта для срочной отправки принимает бандероль, при условии, что ее масса не превышает 0,3 кг. За бандероль массой до 0,1 кг надо заплатить 20 манат. Если вес бандероли будет больше 0,1 кг, то за каждые лишние 25 грамм (или до 25 грамм) надо доплатить 2 маната. Обозначив через $M(x)$ сумму, которую надо заплатить за бандероль массой x кг, найдите следующее:

a) $\lim\limits_{x\to 0{,}3^-} M(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0{,}3^+} M(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0{,}3} M(x)$ d) $M(0{,}3)$

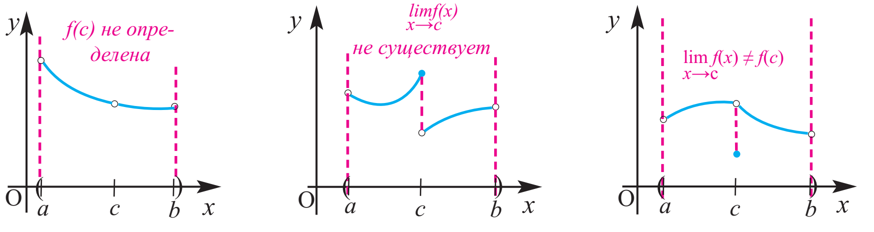
e) $\lim\limits_{x\to 0{,}25^-} M(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0{,}25^+} M(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 0{,}25} M(x)$ h) $M(0{,}25)$

17. Для всех значений x, удовлетворяющих условию $8 - x^2 \le f(x) \le 8 + x^2$, вычислите $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Непрерывность функции

Непрерывность функции часто можно легко объяснить следующим образом. Если график какой-либо функции можно построить не отрывая карандаш от бумаги, то эта функция непрерывна. В противном случае, у графика есть точки разрыва (скачка) и данная функция является разрывной функцией. График разрывной функции невозможно изобразить, не отрывая карандаш от листа.

Непрерывность функции в точке. Для того, чтобы функция была непрерывной в точке, ее график не должен прерываться, т.е. график не должен иметь "скачков". График функций на рисунках прерывается или имеет "скачок" в точке $x = c$. Значит, эти функции в точке $x = c$ имеют разрыв. Рассмотрим данные случаи.



Как видно по графику, функция разрывная в точке $x = c$ в следующих случаях:

1. Функция не определена в точке $x = c$, однако определена в некоторой окресности этой точки.
2. В точке $x = c$ функция $f(x)$ не имеет предела.
3. Предел функции $f(x)$ в точке $x = c$ существует, но не равен $f(c)$.

Точка c, в которой функция прерывается, называется **точкой разрыва**.

Если функция не удовлетворяет ни одному из указанных выше условий, то ее можно назвать непрерывной в точке $x = c$.

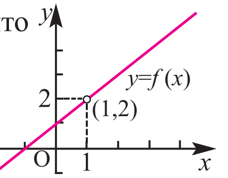
Непрерывность функции в точке. Для того, чтобы функция f была непрерывна в точке c должны выполняться три следующих условия:
1. Функция должна быть определена в точке $x = c$;
2. Должен существовать предел $\lim\limits_{x \to c} f(x)$;
3. Должно выполняться равенство $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(\text{c})$.

Пример. Исследуйте непрерывность следующих функций.

a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

Решение: a) из графика функции $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ видно, что при стремлении значений x к 1 функция имеет предел и он равен 2: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Однако в точке $x = 1$ функция не определена. Значит, в точке $x = 1$ функция разрывна.



$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

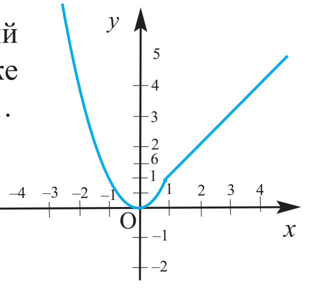
Отметим, что во всех точках кроме $x = 1$ на всей действительной оси она определена и непрерывна.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

Как видно из графика, при стремлении значений x к 1 функция имеет предел, равный 1, в тоже время, при $x = 1$ значение функции также равно 1.

Предел функции: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

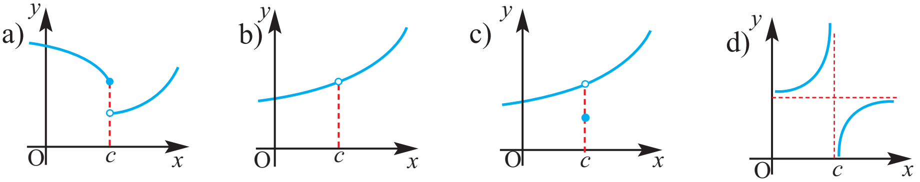
Значение функции: $f(1) = 1$



При $x \to 1$ предел функции равен значению функции в точке $x = 1$. Т.е. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Значит, данная функция непрерывна в точке $x = 1$.

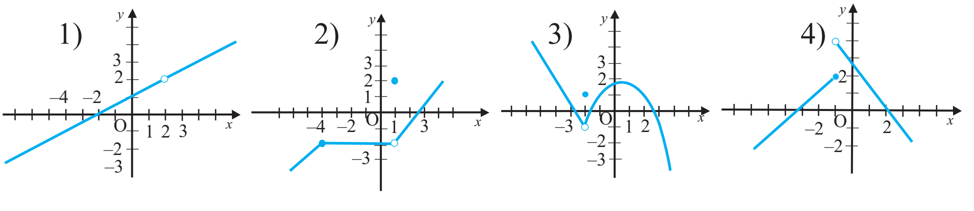
Обучающие задания

1. По графику исследуйте непрерывность функции в точке $x = c$.



2. По графику определите точку разрыва x=a функции и найдите (если существует) следующее:

a) $f(a)$; b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$



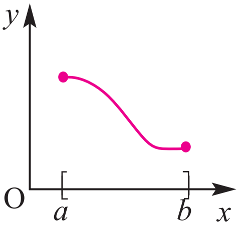
3. Определите точки разрыва (если они существуют) функции.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ c) $f(x) = x^2 - 9x + 18$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$

Непрерывность функции

Непрерывность функции на интервале.

Определение. Функция называется непрерывной на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.



Непрерывность функции на отрезке.

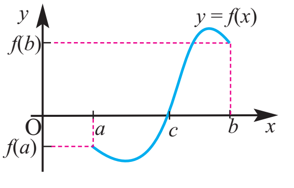
Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она определена на отрезке $[a; b]$, непрерывная на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Любая функция - многочлен непрерывна на всей числовой оси. Рациональная функция непрерывна во всех точках, кроме тех, которые обращают знаменатель в 0. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ непрерывны на всей действительной оси, а функции $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \log_a x$ непрерывны на области определения.

Для функции, непрерывной на отрезке, справедлива следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. Функция, непрерывная на отрезке, принимает в нем наименьшее и наибольшее значения.

Теорема Коши. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на концах отрезка значения противоположных знаков, то хотя бы в одной точке из интервала $(a; b)$ она принимает значение, равное нулю.

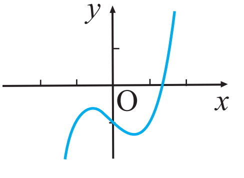


Следствие. Функция, непрерывная на отрезке, принимает все значения от наименьшего до наибольшего

Применяя эту теорему, можно решить следующий тип задач.

Пример 1. Существует ли такое действительное число, куб которого больше самого числа на 1?

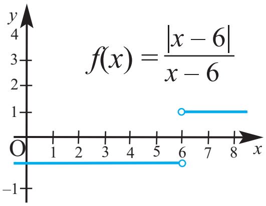
Решение: искомое число x равно $x^3 - 1$, т.е.должно удовлетворять уравнению $x^3 - x - 1 = 0$. Для решение задачи исследуем функцию $f(x) = x^3 - x - 1$. Из графика функции, построенного с помощью граф-калькулятора, видно, что значения функции в точках $x = 1$ и $x = 2$ имеют разные знаки: $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$. Тогда, по теореме Коши, существует такое число $c \in (1; 2)$, что $f(c) = 0$.



Это число c является корнем уравнения $x^3 - x - 1 = 0$.

Если какая-либо функция непрерывна на интервале $(a; b)$, это не означает, что она непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Пример 2. Исследуйте непрерывность функции $f(x) = \dfrac{|x-6|}{x-6}$



Решение: как видно из графика, при стремлении x справа к 6 предел функции равен 1, при стремлении слева предел равен -1.

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = \frac{|x-6|}{x-6} = 1 \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x) = \frac{|x-6|}{x-6} = -1$$

Т.е. в точке $x = 6$ предела функции не существует.

Данная функция разрывается в точке $x = 6$, но на каждом из интервалов $(-\infty; 6)$ и $(6; +\infty)$ она непрерывна.

Пример 3. Определите точки разрыва функции $f(x) = \begin{cases} x+2\,, & x \le 0 \\ 2\,, & 0 < x \le 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$

Решение:

Линейная функция $f(x) = x + 2$, постоянная функция $f(x) = 2$ и функция-многочлен $f(x) = x^2 + 2$ непрерывны для всех значений x. Значит, непрерывность может быть нарушена только в точках “перехода” , т.е. в точках $x = 0$ и $x = 1$.

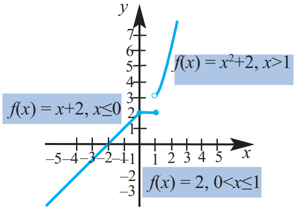
Сначала исследуем непрерывность функции в точке $x = 0$.

1. Значение функции. Функция определена в точке $x = 0$ и $f(0) = 0 + 2 = 2$.

2. Существование предела. Для определения предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ исследуем левый ($x\to 0^-$) и правый ($x\to 0^+$) пределы функции. При приближении к 0 слева значения x меньше 0 и в этом случае $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = 2$.

При приближении к 0 справа значения x больше 0, и в этом случае $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$. Значит, $\lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

3. Значение и предел функции в точке.



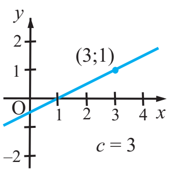
Так как $f(0) = 2$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, то в точке $x = 0$ функция непрерывна.

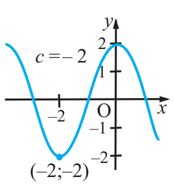
! Непрерывность функции в точке $x=1$ исследуйте самостоятельно. Результаты проверьте по графику.

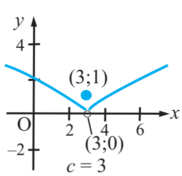
Обучающие задания

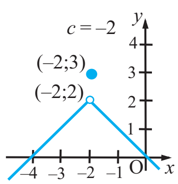
4. По графикам определите требуемый предел и исследуйте непрерывность функций.

a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$









5. Для следующих функций определите точки разрыва. Найдите предел функций в данной точке (если он существует).

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ 3) $p(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$ 4) $f(x)=\dfrac{5+x}{x-2}$

6. Упростите выражение заданной функции и запишите свое мнение о непрерывности функции в заданной точке.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x=-3$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x=1$

c) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $x=4$ d) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2-11x+30}{x^2-4}$, $x=2$

7. Определите, является ли функция непрерывной в заданном промежутке.

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ 2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

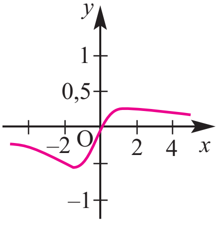
a) $(-2; 2]$ b) $[-4; 3]$ a) $(0;1]$ b) $[-1; 1]$

8. **Вопрос открытого типа.** Изобразите график произвольной функции, соответствующий условиям. Запишите свое мнение о непрерывности функции в заданной точке.

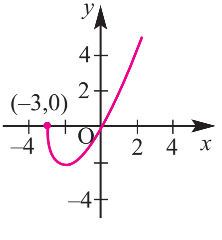
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ və $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ və $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$

9. По графику определите, в каком промежутке функция непрерывна.

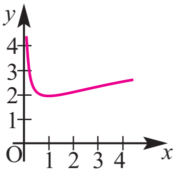
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$



$f(x)=x\sqrt{x+3}$



$f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$



10. a) Постройте график заданной функции.
b) Покажите точки разрыва функции.
c) Найдите левый и правый пределы в точках разрыва.

1) $f(x)=\begin{cases}1, & x<2\\ x+3, & 2\le x\le 5\\ 7, & x>5\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ 0, & 1\le x\le 4\\ x-2, & x>4\end{cases}$

11. 1) Покажите, что функция принимает указанные значения, используя теорему о промежуточных значениях функции.

a) $f(x)=x^2+x-1$, $[0; 5]$, $f(c)=11$

b) $f(x)=x^2-6x+8$, $[0; 3]$, $f(c)=0$

2) Для функции $f(x)=x^3-3x+1$ определите знак значения на концах отрезка: a) $[-2; -1]$; b) $[-1;1]$; c) $[1;2]$ и исследуйте, имеет ли уравнение $x^3-3x+1=0$ корень на данном отрезке.

12. Фирма сдает в аренду автомобили на следующих условиях (за каждые 12 дней):
- с 1-го по 5-ый день - ежедневно 28 манат
- в 6-ой и 7-ой день плата не взимается
- с 8-го по 12 день - ежедневно 28 манат.

Функция F(t) выражает сумму за t дней ($0<t\le 12$).
1)Найдите значение функции F(t) в следующих точках.

a) $t=4$ b) $t=5$ c) $t=6$ d) $t=7$ e) $t=8$

2) Найдите пределы: a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \mathrm{F}(t)$ b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \mathrm{F}(t)$

3) При каких значениях t функция F(t) терпит разрыв?

13. По данным исследований было установлено, что изменение массы бройлерной курицы (в граммах) в первые 56 дней можно задать следующей функцией.

$$M(t)=\begin{cases}47{,}68+3{,}6t+0{,}6t^2+0{,}01t^3, & \text{при } 1\le t\le 28\\ -1004+65{,}8t, & \text{при } 28<t\le 56\end{cases}$$

a) Найдите массу 20-ти дневной бройлерной курицы.
b) Найдите левый и правый пределы, удовлетворяющие условию $t\to 28$. Является ли функция M(t) непрерывной в точке $t=28$?
c) Почему исследователи задали зависимость массы бройлерной курицы от количества дней с помощью двух формул?

Пределы тригонометрических функций

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x\to a} \tan x = \tan a \qquad \lim_{x\to a} \cot x = \cot a$$

число a принадлежит области определения тригонометрической функции.

Примеры: $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$

Первый замечательный предел

Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет предел в точке $x = 0$ и этот пердел равен 1.

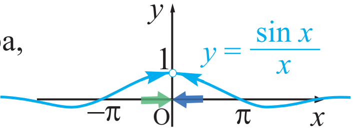
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Учитывая, что x - действительное число или радианная мера угла, по таблице можно установить, что для значений, удовлетворяющих условию $x\to 0^+$, значения функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ стремятся к 1.

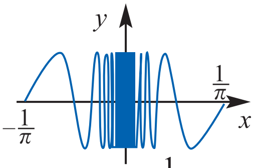
$x\to 0^+$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99833416	0,99998333	0,99999983	0,99999999

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = f(x)$, т.е. так как заданная функция четная, то для значений, удовлетворяющих условию $x\to 0^-$, имеем $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$.

По графику функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, построенному при помощи графкалькулятора, также видно, что $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Отметим, что предел $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует. По графику, построенному при помощи графкалькулятора, видно, что функция нечетная и не имеет периода. При приближении значений x к 0, значения функции изменяются между -1 и 1.



$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

Пример 1. Найдите предел $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

Решение: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$

! Покажите, что $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = k$. Обозначьте $t = kx$, тогда $x = \dfrac{t}{k}$

Замечательные пределы, содержащие тригонометрические функции

Пример 2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x-3\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x-3\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{10x}{x}-\frac{3\sin x}{x}\right]$$ *Выражение записывается в виде разности двух дробей.*

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{x}-3\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}$$ *Применяется свойство предела разности.*

$$=\lim_{x\to 0}10-3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$ *Вычисляется предел.*

$$=10-3\cdot 1=7$$

Пример 3. Покажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$ *Числитель и знаменатель умножается на выражение 1 + cosx*

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$ *Упрощается*

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$ *Учитывается, что* $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Выражение записывается в виде произведения двух выражений.

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$ *Применяется свойство произведения*

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=0$$ *Учитываются значения* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$

Обучающие задания

1. Найдите следующие пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x$ 2. $\lim\limits_{x\to\pi}\tan x$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\cos\dfrac{\pi x}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 3x$ 5. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x}{\cot x}$ 6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

2. Вычислите пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5x}$ 2. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{2t}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

4. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{x}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$

10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin 3h-\sin h}{h}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x-\sin 3x}$

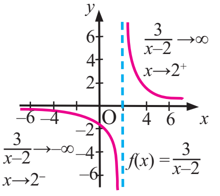
3. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

Бесконечные пределы и предел функции в бесконечности

1. Бесконечные пределы

Пример. По графику функции $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ на рисунке видно, что при приближении значений x справа к 2 значения y **бесконечно растут.** Т.е.

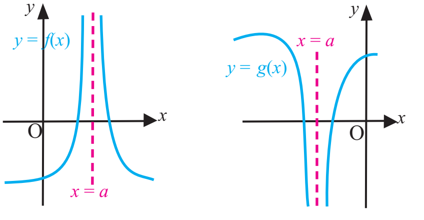


$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

При приближении значений x к 2 слева значения y также **бесконечно увеличиваются по абсолютному значению.** Т.е. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty$

Так как левый и правый пределы различны, то заданная функция не имеет предела в точке $x = 2$.

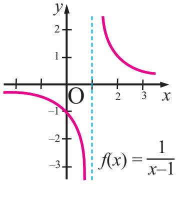
Функция, график которой задан на рисунке, определена для всех значений на множестве действительных чисел, кроме числа a, в интервале, содержащем данное число a и при $x \to a$ имеем $f(x) \to \infty$. Этот предел записывается как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

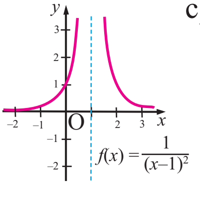


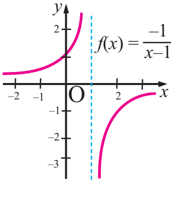
Аналогичным образом можно установить, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, т.е. показывает на бесконечное изменение функции. Бесконечное изменение функции можно записать при помощи следующих 6 пределов:

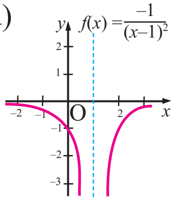
> Если выполняется одно из следующих отношений:
>
> **Вертикальная асимптота.**
>
> $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$
>
> $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = -\infty$
>
> $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = -\infty$
>
> то прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** функции $f(x)$.

Пример. По графику исследуйте левые и правые пределы в точке $x = 1$.

a) 

b) 

c) 

d) 

Решение. a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

Функция не имеет предела, однако правый и левый пределы показывают изменение функции.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

И правый и левый пределы функции $+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{x-1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x-1}=-\infty$

Функция не имеет предела, однако правый и левый пределы показывают изменение функции.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

И правый и левый пределы функции $-\infty$.

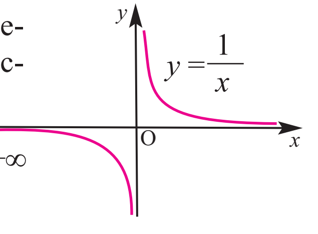
Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой этих функций.

Если функции f и g являются непрерывными на данном интервале, и в точке c из этого интервала $f(c)\neq 0$, $g(c) = 0$ и при $x\neq c$, $g(x)\neq 0$, тогда

прямая $x = c$ является вертикальной асимптотой функции $r(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. Предел функции на бесконечности. Горизонтальная асимптота.

Рассмотрим еще раз по графику, как изменяются значения функции $y=\dfrac{1}{x}$, если значения x изменяются (увеличиваются или уменьшаются) до бесконечности.



Как видно из графика функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$ $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю.Запишем это: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Таким же образом, при $x\to-\infty$ $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$,

и прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$

> **Горизонтальная асимптота.** Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой функции $f(x)$.

Определение: Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, то $f(x)$ при $x\to a$ называется бесконечно малой.

Например, функция $\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ бесконечно малая.

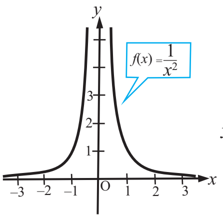
Бесконечные пределы и предел функции в бесконечности. Горизонтальная и вертикальная асимптоты

Если функция f при $x \to \infty$ бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{f}$ бесконечно большая. Например, при $x \to \infty$ функция $\dfrac{1}{x^2}$ бесконечно малая, а x^2 бесконечно большая.

> Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций бесконечно малая. В частности, при $n>0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

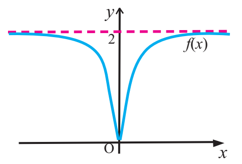
Пример. Нахождение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ по графику.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$



Свойства пределов справедливы и для предела функции в бесконечности.

Пример. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{3x^2-1}$

Решение: разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 и применим свойства пределов.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\cdot 1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2\cdot 0-5\cdot 0}{3-1\cdot 0} = 0$$

> **Теорема.** При $x \to \pm\infty$ функция $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ ведет себя как старший член многочлена, т.е.
>
> $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$$
>
> Аналогично, учитывая, что рациональная функция является отношением двух многочленов для предела рациональной функции имеем:
>
> $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n + \text{члены еще меньшей степени}}{bx^m + \text{члены еще меньшей степени}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$
>
> Здесь $a \neq 0$ и $b \neq 0$

Пример.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3}{3x^3+5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{5}{x^2}} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = +\infty$

Применим теорему к решению:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3}{3x^3+5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

Бесконечные пределы и предел функции в бесконечности. Горизонтальная и вертикальная асимптоты

Обучающие задания

1. Определите вертикальные асимптоты функции.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 8}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 3}$

2. Определите горизонтальную асимптоту (если она существует) при помощи вычисления предела при $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 5}{x^2 - 1}$

3. Применив теорему о пределе рациональной функции, найдите возможные вертикальные и горизонтальные асимптоты.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 5}{x^2 - x}$

4. Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{7x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x + 2}{4x - 5}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 2x}{2x^2 - 2x + 1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 5}{3x^2 + 2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{4x^2 + 5}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x + 2} - \dfrac{x - 1}{2x + 16}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

5. Найдите предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2}, & x > 1 \\ \dfrac{4x}{2x - 5}, & x \le 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x + 3}, & x > 0 \\ \dfrac{2x - 3}{x - 1}, & x \le 0 \end{cases}$

6. Для заданных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ запишите отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и покажите, что предел отношения при условии $x \to \pm\infty$ равен единице.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4$

b) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 6x^3$

7. Разделите многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ и найдите остаток. Что выражает частное согласно теореме о пределе рациональной функции?

$f(x) = 6x^2 - 3x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 3x$

$f(x) = 2x^3 - x^3 + x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

Бесконечные пределы и предел функции в бесконечности. Горизонтальная и вертикальная асимптоты

Прикладные задания

Рассмотрим, как меняется функция при стремлении значений аргумента в бесконечность на следующем примере.

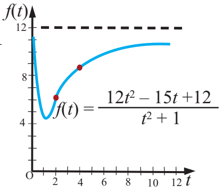
Пример. Нормальная концентрация кислорода в озерной воде равна 12 единицам. При сбросе в озеро отходов, в момент $t = 0$, концентрация кислорода в озере изменяется. Зависимость изменения концентрации кислорода в озерной воде от времени выражается следующим образом:

$$f(t) = \frac{12t^2 - 15t + 12}{t^2 + 1}$$

Объясните как, со временем, изменяется концентрация кислорода? Сможет ли концентрация кислорода вновь стать равной 12 единицам?

Решение: по графику функции, построенному при помощи графкалькулятора, можно увидеть, что при увеличении до бесконечности значений t значение функции приближается к 12, но концентрация, равная 12, не наблюдается. Описать данную ситуацию математически можно при помощи следующего предела

t	$f(t)$
10	10,515
100	11,85
1000	11,985
10000	11,9985
100000	11,99985



$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 12$$

Здесь прямая $y = 12$ является горизонтальной асимптотой.

8. **Среднее значение.** Сумму, которую необходимо заплатить за анализы в больнице, можно вычислить с помощью функции $S(n) = 150 + 30n$. Здесь n показывает количество анализов. Среднюю стоимость одного анализа $\overline{S}(n)$ можно узнать, разделив $S(n)$ на n. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}(n)$ и объясните соответствующую ситуацию.

9. **Медицина.** Зависимость всасывания лекарства в кровь от времени t можно определить по формуле $M(t) = \dfrac{0{,}21t}{t^2 + 2}$. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} M(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.

10. **Производительность труда.** Исследования показали, что производительность труда работников фирмы за n дней изменяется по формуле $P(n) = \dfrac{64n}{n + 8}$. Найдите $\lim\limits_{n\to-\infty} P(n)$ и прокомментируйте данную ситуацию.

11. **Пингвины.** Зависимость числа пингвинов от времени можно вычислить по формуле. $N(t) = \dfrac{400\,000}{1 - 0{,}143e^{-0{,}01t}}$

a) Найдите количество пингвинов через 10 лет ($t = 10$).

b) Известно, что количество пингвинов не увеличивается бесконечно. При стремлении времени t к бесконечности найдите количество пингвинов, вычислив предел, заданный формулой.

Предел числовой последовательности

Запишем несколько первых членов последовательности, общий член которой задан формулой $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$:

$$3;\frac{5}{2};\frac{7}{3};\frac{9}{4};\frac{11}{5};\frac{13}{6};...$$

Как видно, при возрастании n значения членов последовательности уменьшаются и приближаются к 2.

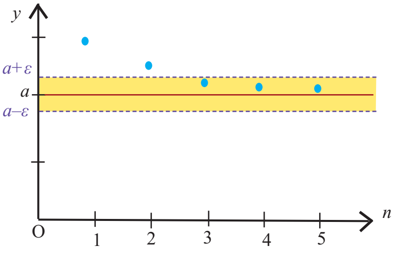
На самом деле, $|a_n - 2| = |\dfrac{2n+1}{n} - 2| = \dfrac{1}{n}$ и при возрастании n абсолютное значение разности $a_n - 2$ становится достаточно близким к 0.

Например, начиная с 11-го члена ($n > 10$) все последующие члены удовлетворяют отношению $|a_n - 2| < 0{,}1$, а с 101 члена ($n > 100$) - отношению $|a_n - 2| < 0{,}01$. Вообще, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - 2| < \varepsilon$. Здесь число 2 является пределом этой последовательности.

Определение. Пусть для последовательности a_n и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех n ($n > N$) после заданного номера выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Тогда число a называется пределом последовательности a_n и это записывается как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Из определения ясно, что если число a является пределом последовательности a_n, то для некоторого числа ε все члены после определенного номера расположены в окрестности $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ и за пределами данной окрестности расположено конечное число членов. Это говорит о том, что при $n > N$ точки $(n;a_n)$ на координатной плоскости расположены в полосе $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$. Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**, а не имеющая конечного предела - **расходящейся**.



Свойство. Если последовательность имеет предел, то он единственен.

Предел числовой последовательности

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то последовательность α_n называется бесконечно малой. Например, последовательность с n-ым членом $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^3}$;...; $\frac{A}{n^k}$ (здесь A – какое-либо число, $k\in N$) является бесконечно малой.

Каждая сходящаяся последовательность равна сумме ее предела и бесконечно малой последовательностью и наоборот:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n,\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Например, для $a_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ последовательность $a_n = \frac{2n+1}{n}$ сходящаяся, и ее предел равен 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

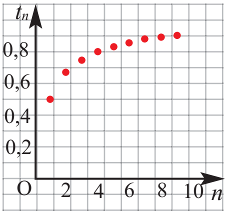
Пример. Найдите предел последовательности (если он существует). Если предела нет, то объясните почему.

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ b) $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27,. . ., 3^{n-2},. . .

Решение: a) для последовательности $t_n = \frac{n}{n+1}$ покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$

При $n \to \infty$ имеем $\left|\frac{1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$,

а это, по определению, означает,что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.



То, что предел последовательности равен 1, можно увидеть, отметив на координатной плоскости точки $(n;\ t_n)$ для достаточных значений n.

b) При бесконечном возрастании n члены последовательности $a_n = 3^{n-2}$ бесконечно увеличиваются, т.е. стремятся к бесконечности. Значит, последовательность не имеет конечного предела. Мы можем убедится в этом, отметив соответствующие точки на координатной плоскости.

Одним из примеров является наличие конечного предела для периодической десятичной дроби.

$$0{,}3333(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots = \frac{1}{3}$$

Для данной периодической десятичной дроби общий член $b_n = 3 \cdot 10^{-n}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{10}$. Если рассмотреть эту бесконечную сумму как предел суммы первых n членов последовательности $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, то

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0{,}3(1-10^{-n})}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}.$$

Предел числовой последовательности

Отметим, что числовая последовательность a_n является функцией, определенной на множестве натуральных чисел. Можно показать, что если $a_n = f(n)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, тогда $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$

Например, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x}{3x^2 + 1} = \dfrac{2}{3}$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2 + n}{3n^2 + 1} = \dfrac{2}{3}$

Многие свойства пределов функции при $x \to +\infty$ справедливы для предела последовательности.

Пусть последовательности x_n и y_n сходящиеся и существуют $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n + \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a + b$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n - \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a - b$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n \to \infty} x_n = c \cdot a$ (здесь c - постоянная)

4) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a \cdot b$

5) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0, y_n \neq 0)$

Пример. Вычислите: $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$

Решение: умножив и разделив выражение внутри скобки на сопряженное иррациональное выражение и применив теорему о пределах, получим:

$$\lim_{n \to \infty}(\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{2}{n})} + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + 1} = 1$$

Обучающие задания

1. Определите, к какому числу сходится числовая последовательность.

a) 0,5; 0,55; 0,555; 0,5555; 0,55555; …

b) 0,36; 0,3636; 0,363636; 0,36363636;...

c) 3; 3,1; 3,14; 3,141;3,1415; 3,14159; 3,141592; …

2. Запишите предел последовательности (если он существует). Если предела не существует, то объясните причину.

a) 1; −1; 1; −1; 1; −1; 1; −1, …
b) 5,9; 5,99; 5,999; 5,999 9; 5,999 99; 5,999 999; …
c) 3,1; 3,01; 3,001; 3,000 1; 3,000 01, …
d) 3; 2,9; 3; 2,99; 3; 2,999; 3; 2,999 9, …

3. Найдите члены последовательности $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ с номерами n = 99; 999; 9999 и сравните полученные значения. Является ли $a_n - 1$ бесконечно малой при $n \to \infty$? Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4. Запишите предел последовательности (если он существует). Если предела не существует объясните причину.

a) $0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \ldots;$ $\qquad f(n) = \dfrac{n-1}{n}$

b) $\dfrac{1}{2}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{9}{4}; \dfrac{16}{5}; \ldots;$ $\qquad f(n) = \dfrac{n^2}{n+1}$

c) $2; 1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \ldots\ldots;$ $\qquad f(n) = 2^{2-n}$

d) $4; 5\dfrac{1}{2}; 4\dfrac{2}{3}; 5\dfrac{1}{4}; 4\dfrac{4}{5}; 5\dfrac{1}{6}; \ldots;$ $\qquad f(n) = 5 + \dfrac{(-1)^n}{\text{n}}$

5. Вычислите предел.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{2}{n}\right)$ $\qquad$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{n}$ $\qquad$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\text{n}-1}{3n+2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$ $\qquad$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^3+1}$ $\qquad$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3n^2}{n^2+1}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(3^n)}{n}$ $\qquad$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{5\sqrt{4^n}}$ $\qquad$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+2n+1}}{1-2n^3}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^{10}+2}{(n^2+1)^5}$ $\qquad$ 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n} - \dfrac{2n-1}{4}\right)$ $\qquad$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot(2n+3)}{(n+2)\cdot(4n+1)}$ $\qquad$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)\cdot n}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$ $\qquad$ 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right)$

Предел монотонной и ограниченной последовательности.

Если для всех значений n выполняется $a_{n+1} > a_n$, то последовательность a_n называется возрастающей, если выполняется $a_{n+1} < a_n$, то последовательность называется убывающей. Например, последовательность $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ является возрастающей. На самом деле,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)} = \frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)} > 0.$$

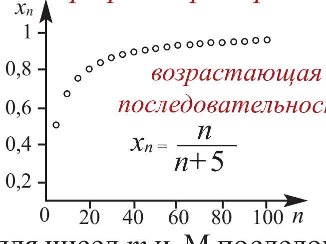
А последовательность $c_n = \dfrac{n}{3^n}$ убывающая. Все члены данной последовательности положительны и

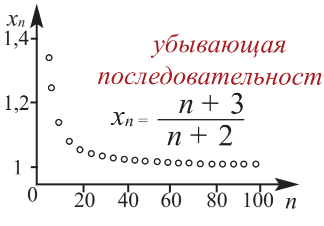
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Тогда получим, что $c_{n+1} < c_n$.

Возрастающая или убывающая последовательность называется **монотонной**.

Графики примеров монотонных последовательностей





Если для чисел m и M последовательность a_n удовлетворяет неравенству $m \leq a_n \leq M$ ($n \in N$), то она является ограниченной последовательностью.

Теорема Вейерштрасса. Для любой монотонной и ограниченной последовательности существует предел.

Второй замечательный предел

Можно показать, что последовательность с общим членом $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастающая и ограниченная и имеет предел равный числу e.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Здесь $e = 2{,}718281828459045\ \ldots$

Примечание: при вычислении многих пределов, связанных с числом e будем учитывать следующее: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$

Пример. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{2n}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{6n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}}=e^6$

В равенстве $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ число n натуральное. Можно показать,

что для любого действительного числа x выполняется отношение
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Если в последнем отношении выполнить замену $\frac{1}{x}=t$, то можно записать следующее: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$. Используя данный предел, можно показать следующее: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$.

Пример. Вычислите предел $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}$.

Решение: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}=\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

Обучающие задания

6. Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{5}{t}}$ e) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3+t}{t}}$ f) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{t+1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}}$

7. Покажите, что последовательность $a_n=\frac{n+3}{n}$ монотонно убывающая и ограниченная и ее предел равен 1.

8. Пусть вклад в размере 1 манат помещен в банк под $\frac{100}{n}$% годовых и вычисления проводятся n раз в течении года.

1. Какая сумма получится при следующих начислениях:

a) годовых, b) полугодовых , c) ежеквартальных, d) ежемесячных, e) ежедневных, f) ежеминутных.

2. Какая связь существует между следующей последовательностью и предыдущими вычислениями?

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\dots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\dots$$

3. Существует ли связь данной последовательности с числом e ?

Обобщающие задания

1. Вычислите предел (если он существует)

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+1)$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}3(1-x)(2-x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+6}$

4. $\lim\limits_{t\to -4}\dfrac{t^2}{4-t}$ 5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ 8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$ 9. $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{1}{4-h^2}$

10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+4h^3}{h^2-h^3}$ 11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$ 12. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 15. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-2t+1}{t^2-1}$

2. Исследуйте непрерывность функции.

1) $f(x)=\pi$ 2) $f(x)=x^2+8x-10$ 3) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-4)}$

4) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+2)(x-5)}$ 5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$

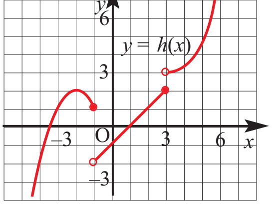
3. При больших по модулю значениях x рациональная функция ведет себя как функция частного старших членов многочленов в числителе и знаменателе. Эта функция также называется моделью, которая показывает изменение рациональной функции в бесконечности. Определите модель следующих функций в бесконечности и найдите горизонтальную асимптоту (если она существует).

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x+3}{x-3}$

4. По графику (если это возможно) найдите:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-}h(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+}h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1}h(x)$ d) $h(-1)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-}h(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 3^+}h(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 3}h(x)$ h) $h(3)$



5. Компания службы такси установила стоимость проезда за первые три километра - 3₼, а за каждый последующий километр – 0,60₼.
а) Запишите функцию зависимости платы от расстояния, и постройте ее график с помощью графкалькулятора.
б) Сколько должен заплатить клиент за 8 км?
c) Исследуйте непрерывность функции плата - расстояние.

6. Докажите геометрически, что периметры правильного 4-х угольника, 8-ми угольника, 10-ти угольника и т.д., вписанных в одну и ту же окружность, образуют возрастающую и ограниченную последовательность.

7. Найдите левый и правый пределы функции $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$ в точке $x=0$.

4

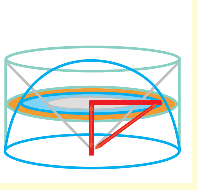
Фигуры вращения
Цилиндр, конус, шар

- **Фигуры вращения**
- **Цилиндр**
- **Площадь поверхности цилиндра**
- **Конус**
- **Площадь поверхности конуса**
- **Усеченный конус. Поверхность усеченного конуса**
- **Шар и его части**
- **Площадь поверхности шара**
- **Площадь поверхности комплексных фигур**
- **Сечение плоскостью фигур вращения**
- **Площадь поверхности подобных фигур**

Математический словарь

- ось вращения
- фигуры вращения
- цилиндр
- конус
- образующая
- шар
- больший круг
- сегмент шара
- шаровой пояс
- шаровой слой

Это интересно!



Великий греческий ученый Архимед был очень взволнован, когда он обнаружил, что отношение площади поверхности шара и описанного около него цилиндра и отношение их объемов равно 2 : 3. Великий математик, физик, инженер Архимед, среди всех своих работ самой значимой считал именно эту. Он завещал на своей могильной плите выгравировать доказательство данной теоремы. Из истории известно, что долгое время его родной город Сиракузы, располагающийся на Сицилии, противостоял римлянам именно благодаря оружию, которое изобрел Архимед. Поэтому при взятии города римский военачальники приказал сохранить ученому жизнь. Но римский воин, который не знал Архимеда в лицо, убил его. Великий философ и писатель Цицерон потратил много времени, чтобы отыскать могилу Архимеда (по сведениям он нашел ее через 137 лет). Это дело Цицерона стало идеей для работ многих художников.

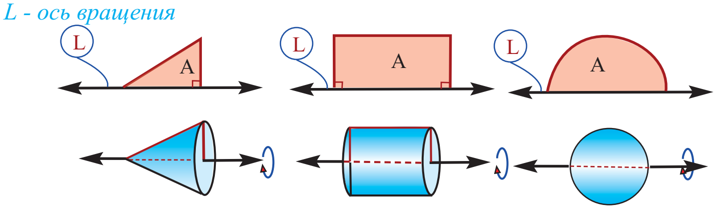
Гончарное ремесло позволяет создавать керамическую посуду из глины. Форму глиняной лепешке придают вращением вокруг оси. Затем полученную форму обжигают. Это ремесло живо и по сей день. В различных районах Азербайджана есть ремесленники, которые изготавливают керамическую посуду. Исследуйте принцип работы по которому кусок глины приобретает какую-либо форму.

https://www.youtube.com/watch?v=4Qiu4iFeXl0

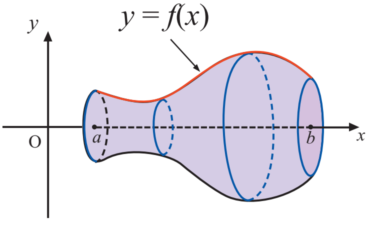
Плоские фигуры (плоская часть ограниченная кривой), совершая один полный оборот вокруг определенной оси, образуют пространственные фигуры. Эта ось называется **осью вращения**.

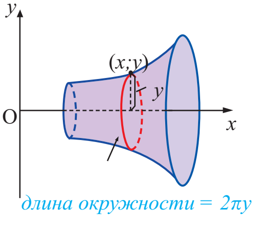
Цилиндр, конус и сфера являются простыми пространственными фигурами, полученными при вращении.

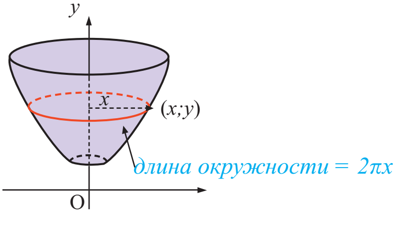
Например, при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов получается конус, при вращении прямоугольника вокруг стороны образуется цилиндр, а при вращении полукруга вокруг диаметра – шар.



Фигуры полученные вращением

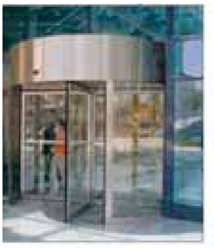




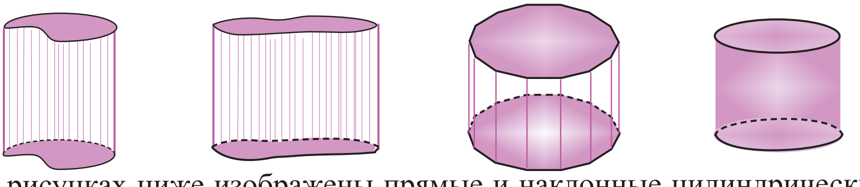


Цилиндр

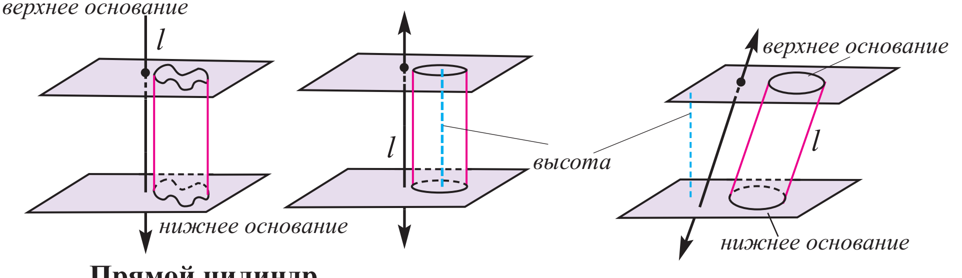
Наглядно образование фигур вращения можно увидеть на примере вращающихся стеклянных дверей, которые мы часто видим в общественных зданиях, отелях и больницах. Прямоугольный слой двери, прикрепленный к неподвижной стойке, при вращении очерчивает цилиндр.



Цилиндром называется пространственная фигура, образованная двумя параллельными и конгруэнтными плоскими фигурами, которые совпадают при паралельном переносе, и отрезками, соединяющими соответствующие точки данных фигур. Плоские фигуры называются **основаниями** цилиндра, отрезки, соединяющие соответствующие точки основания называются **образующими** цилиндра. Если образующая перпендикулярна основанию, то цилиндр называется прямым, иначе – наклонным. Расстояние между основаниями называется **высотой** цилиндра.

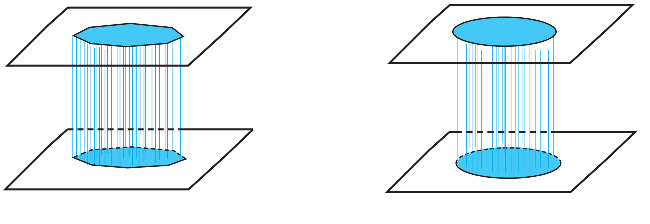


На рисунках ниже изображены прямые и наклонные цилиндрические фигуры.



Прямой цилиндр **Наклонный цилиндр**

Сравнивая рисунки, изображенные ниже, можно сделать вывод, что призму можно рассматривать как частный случай цилиндра.



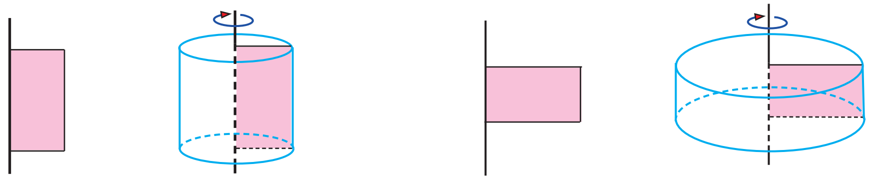
Цилиндр

Прямой цилиндр, в основании которого лежит круг, называют **прямым круговым цилиндром**.

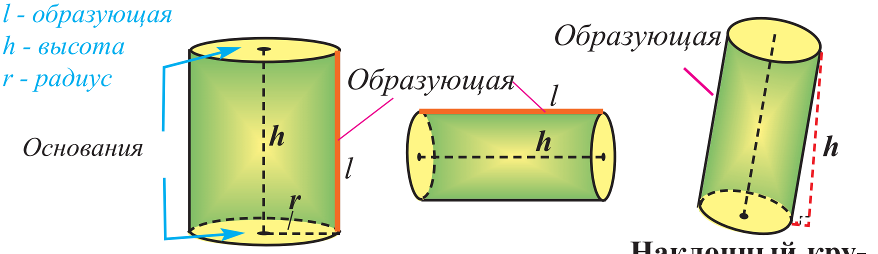
Далее, говоря о цилиндре, мы будем иметь в виду прямой круговой цилиндр. В любом другом случае будут отмечены его особенности.

Прямой круговой цилиндр также можно рассматривать как фигуру, полученную вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Высота прямого кругового цилиндра равна его образующей.
Радиусом цилиндра называется радиус круга в основании.

Вращая прямоугольник вокруг любой стороны, можно получить цилиндр, высота которого равна стороне прямоугольника.



Прямая, проходящая через центры оснований прямого кругового цилиндра, называется **осью цилиндра**.



Прямой круговой цилиндр

Наклонный круговой цилиндр

Обучающие задания

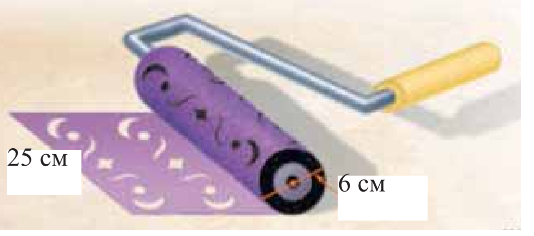
1. Образующая наклонного цилиндра длиной 12 см составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту цилиндра.

2. Найдите высоту и диаметр основания цилиндра, полученного вращением прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см, вокруг одной из сторон (рассмотрите два случая).

3. Прямоугольный лист бумаги, стороны которого равны 20 см и 30 см, свернули в форме цилиндра. Найдите радиус полученного цилиндра (рассмотрите два случая). Результат округлите до сотых.

Площадь боковой и полной поверхностей цилиндра.

Изобразите на листе бумаги рисунки разверток цилиндров различных размеров, вырежьте и склейте цилиндры.

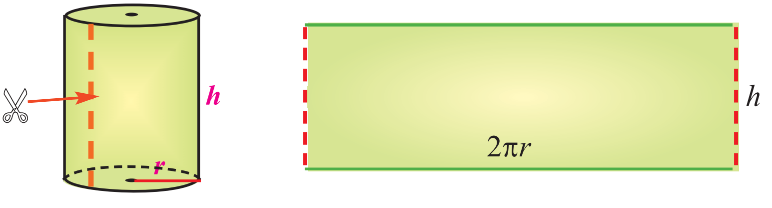


Мустафа красит стену цилиндрической кистью. Чтобы подсчитать время, потраченное на покраску, он захотел узнать, какую площадь покрывает кисть при одном полном обороте? Какие советы вы могли бы дать мальчику?

Так как кисть имеет цилиндрическую форму, то за один полный оборот кисть покрывает площадь в форме прямоугольника, равную боковой поверхности цилиндра.

Полная поверхность цилиндра находится по формуле схожей с формулой полной поверхности призмы. Полная поверхность цилиндра состоит из боковой поверхности и двух конгруэнтных кругов.

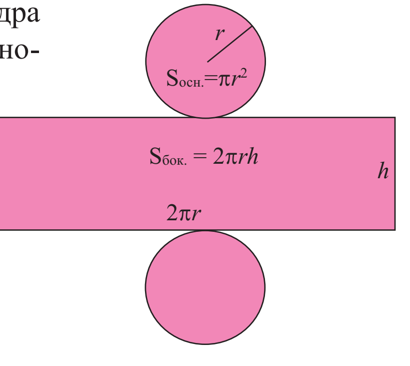
Боковую поверхность цилиндра с высотой h и радиусом r, можно рассматривать как свернутый вокруг окружности прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и h.



Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и высоты.

$$S_{бок.} = 2\pi rh$$

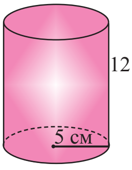
Площадь **полной поверхности** цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований.



$$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$$

$$S_{п.п.} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

Площадь поверхности цилиндра



Пример 1. Найдите площадь полной поверхности цилиндра выстой 12 см и радиусом 5 см.

Решение: $S_{бок.} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\,\pi \approx 376{,}8$ (см^2)

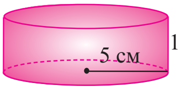
$S_{осн.} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ (см^2)

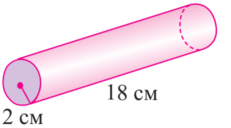
$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 120\pi + 2 \cdot 25\pi = 170\,\pi \approx 533{,}8$ (см^2)

Обучающие задания

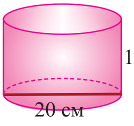
1. Найдите площадь полной поверхности цилиндров на рисунке.

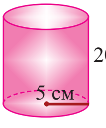
a) 

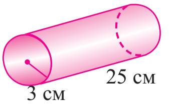
b) 

c) 

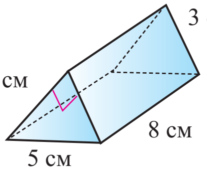
2. Неоходимо покрасить как внутреннюю, так и внешнюю поверхности посуды в форме цилиндра без крышки. Найдите общую площадь, которую надо покрасить.

a) 

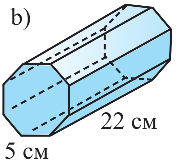
b) 

c) 

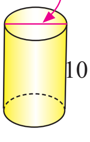
3. Найдите площадь полной поверхности цилиндров и призм.

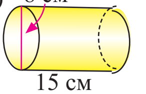
a) 

Прямая треугольная призма

b) 

Правильная шестиугольная призма

c) 

d) 

4. Если радиус и высоту цилиндра увеличить в 2 раза, то:
a) во сколько раз изменится боковая поверхность?
b) во сколько раз изменится полная поверхность?

5. Высота цилиндра на 10 см больше радиуса, а площадь полной поверхности равна 144π см^2. Найдите радиус и высоту цилиндра.

6. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с диагональю 10 см и стороной 6 см. Найдите площадь полной поверхности этого цилиндра. Рассмотрите все возможные случаи.

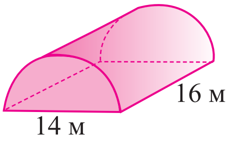
7. Найдите отношение площади боковой поверхности к площади полной поверхности цилиндра, высота которого равна диаметру основания.

8. Коробка имеет форму цилиндра радиусом 6 см и высотой 14 см. При изготовлении коробки картон не использовался только на верхнее основание. Сколько минимально квадратных сантиметров картона было использовано?

Площадь поверхности цилиндра

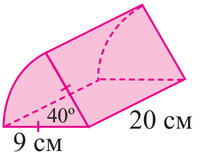
Прикладные задания

Пример. По данным рисунка найдите площадь боковой поверхности прямого цилиндра, основанием которой являются полукруг.



Решение: $S_{\text{бок. сеч.}} = \pi rh + 2rh = \pi \cdot 7 \cdot 16 + 14 \cdot 16 =$
$= 112\pi + 224 \approx 575{,}68$ (м^2)

Пример. По данным на рисунке найдите площадь полной поверхности прямого цилиндра, основанием которой является круговой сектор с углом 40°.



Решение: известно, что $S_{\text{п.п.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$.
По формуле площади сектора:

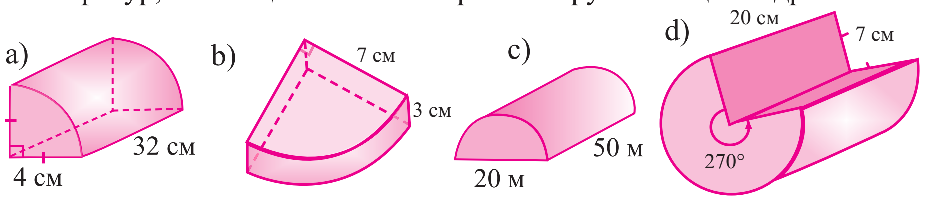
$$S_{\text{осн.}} = \frac{\theta}{360}\pi r^2 = \frac{40}{360} \cdot \pi \cdot 9^2 = 9\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Боковая поверхность фигуры равна $\frac{1}{9}$ части боковой поверхности цилиндра с радиусом 9 см и высотой 20 см плюс площадь двух конгруэнтных прямоугольников размерами 9 см × 20 см.

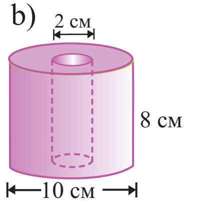
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 9 \cdot 20 + 2 \cdot 9 \cdot 20 = 40\pi + 360 \text{ (см}^2\text{)}$$

Таким образом,
$S_{\text{п.п.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 9\pi + 40\pi + 360 = 58\pi + 360 \approx 542{,}21$(см^2)

9. По данным на рисунке найдите площади боковой и полной поверхностей фигур, являющихся частью прямого кругового цилиндра.



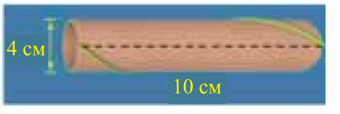
10. Некоторые детали для машин и механизмов, а также трубы, имеют вид полого цилиндра. Боковая поверхность полого цилиндра находится как сумма внутренних и внешних боковых поверхностей, а для площади основания используют разность радиусов. Принимая во внимание все сказанное, найдите: a) площадь боковой и полной поверхностей полого цилиндра на рисунке;
b) запишите формулу нахождения боковой и полной поверхностей полого цилиндра.



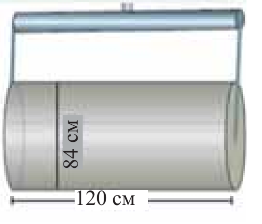
11. Диаметр трубы дымохода в форме цилиндра равен 70 см, а высота 20 м. Сколько квадратных метров железного листа понадобится для изготовления дымохода с указанными размерами, если при этом 5% железа теряется?

12. Машина асфальтоукладчик состоит из двух цилиндрических частей для утрамбовки асфальта. Высота большего цилиндра 1,25 м, а диаметр 1,5 м. Какую площадь поверхности на земле выравнивает эта часть за один оборот?

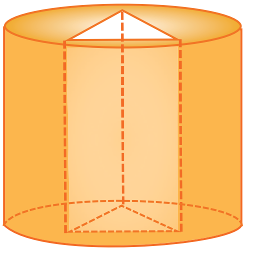
13. Для того, чтобы развернуть подарочную коробку, которая имеет форму цилиндра, на нее нанесена пунктирная разметка. К одному концу пунктирной линии прикреплена цветная веревка, которая намотана на цилиндр (в один слой) и закреплена на другом конце пунктирной линии. Найдите длину веревки, если диаметр основания цилиндра равен 4 см, а высота 10 см. **Указание**: определите геометрический смысл веревки на развертке цилиндра.



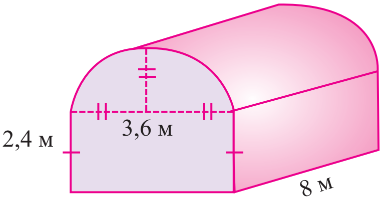
14. Для выравнивания игровой площадки цилиндрический барабан, диаметр которого равен 84 см, а длина 120 см, должен совершить 500 полных оборотов. Какова площадь игровой площадки?



15. Полость цилиндра, радиус которого равен 10 см, а высота 12 см, имеет форму прямой треугольной призмы, как показано на рисунке. Стороны основания призмы 3 см, 4 см и 5 см. Необходимо покрасить полную поверхность данной фигуры. Какую площадь надо покрасить?

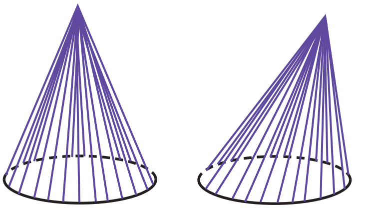


16. Теплицу, размеры которой указаны на рисунке, нужно покрыть полиэтиленовой пленкой. Полиэтилен продается в рулонах шириной 2 м и длиной 15 м. Сколько рулонов полиэтилена надо купить?



Конус

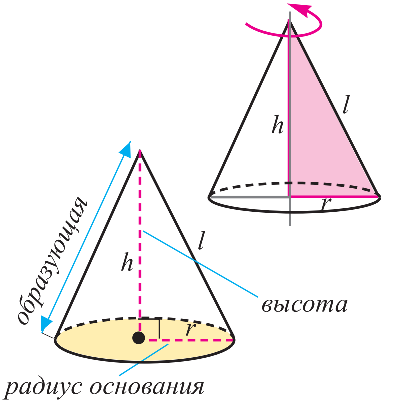
Конусом называется пространственная фигура, образованная всеми отрезками, соединяющими какую-либо плоскую фигуру с точкой, не принадлежащей данной плоскости. Плоскую фигуру называют **основанием** конуса, а точку - **вершиной** конуса. Перпендикуляр, проведенный из вершины конуса на плоскость его основания, называется **высотой** конуса. Конус, в основании которого лежит круг, называется **круговым** конусом. Если ортогональная проекция вершины конуса лежит в центре основания, то конус называется **прямым круговым конусом**. Отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания кругового конуса, называется **образующей** конуса. В дальнейшем, говоря о конусе, будем иметь ввиду прямой круговой конус.



Конус можно рассматривать как фигуру, образованную вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

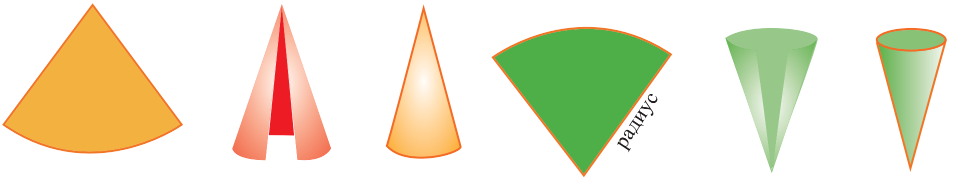
Прямая, выходящая из вершины конуса и проходящая через центр основания, называется **осью конуса**, радиус основания называется **радиусом конуса**. Для образующей, высоты и радиуса конуса справедливо отношение

$l^2 = h^2 + r^2$ (по теореме Пифагора)



Сооружение конуса

Известно, что при сворачивании прямоугольника можно получить цилиндр. Скручивая круговой сектор можно соорудить конус.



Радиус сектора равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания.

Малая проектная работа. Исследование связи кругового сектора с образующей и радиусом основания конуса.

1. Пусть конус сооружен из кругового сектора с радиусом R и центральным углом $\alpha°$. По какой формуле можно вычислить радиус основания конуса?

- Длина дуги сектора равна $\dfrac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$.
- Длина дуги сектора также равна длине окружности основания конуса. Найдите радиус основания.

$$2\pi r = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R, \qquad r = \frac{\alpha}{360} R$$

✔ Найдите длину образующей и радиус основания конуса, образованного из кругового сектора с радиусом 12 см и центральным углом 45°.

2. Пусть r - радиус основания конуса, а l - образующая конуса. Чему равен центральный угол, соответствующий круговому сектору, образующему боковую поверхность конуса? Запишите общую формулу.

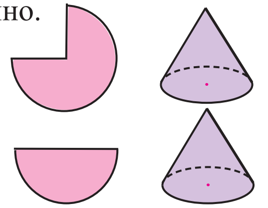
$$\frac{x}{360} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

✔ Сколько градусов составляет центральный угол кругового сектора, из которого образован конус, радиус основания которого равен 10 см, а высота 24 см?

✔ Определите отношение между радиусом и образующей конуса, образованного из полуокружности.

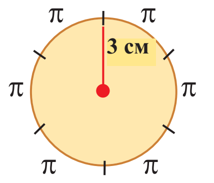
✔ Айша утверждает, что "круговому сектору с центральным углом 60° и радиусом 18 см соответствует конус, радиус основания которого равен 3 см, так как ответ можно получить, разделив 18 на 6." Верно ли решение, предложенное Айшей? Ответ обоснуйте письменно.

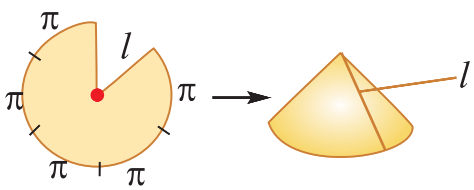
3) Какой конус выше: конус, образованный из половины круга или конус, образованный из трех четвертей того же круга? Ответ обоснуйте.



Практическое занятие. Конус. Площадь поверхности конуса.

- На листе бумаги изобразите круг радиусом 3 см.
- Разделите круг на 6 равных частей.
- Длина окружности круга будет равна $2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Длина каждой дуги равна π. Отметьте эти размеры на окружности.
- Вырежьте одну часть, как показано на рисунке и сделайте конус.

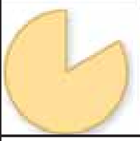
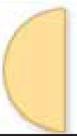




a) Основание конуса должно быть в форме круга. Покажите, что длина этой окружности равна 5π.
b) Найдите радиус основания.
c) Найдите площадь данного круга.
d) Найдите площадь после того, как из круга удалили одну часть.
e) Объясните геометрически полную и боковую поверхность конуса.

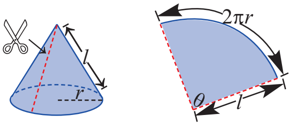
Теперь соорудите различные конусы, деля круг на различное количество равных частей.

a) Измерьте радиус основания конуса.
b) Измерьте образующую конуса.

					
Радиус основания					
Образующая					
Площадь поверхности					

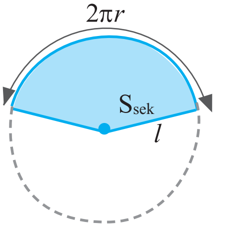
Боковая поверхность конуса, полная поверхность конуса.

Поверхность конуса состоит из боковой поверхности и круга в основании.
На рисунке показаны радиус основания r и образующая l.

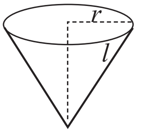


Боковая поверхность конуса - круговой сектор с радиусом l и соответствующим центральным углом θ.
Значит, площадь сектора и есть площадь боковой поверхности.

- Сектор радиуса l является частью круга окружности с длиной $2\pi l$.
- Длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т.е. $2\pi r$.
- Записав отношение длины дуги сектора к длине всей окружности, можно найти какую часть от всего круга составляет сектор.



$$\frac{\text{длина дуги сектора}}{\text{длина всей окружности}} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$



Значит, сектор составляет $\frac{r}{l}$ часть окружности.

- Зная, что площадь круга πl^2, тогда $\frac{r}{l}$ часть площади круга будет $\pi l^2 \cdot \frac{r}{l}$. Значит,

$$S_{\text{бок.}} = \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi lr, \qquad \mathbf{S_{\text{бок.}} = \pi lr}$$

Боковая поверхность конуса равна произведению половины длины окружности основания и образующей.

- Площадь полной поверхности конуса

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \pi lr + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

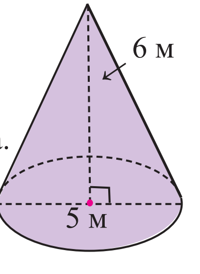
$$\mathbf{S_{\text{п.п.}} = \pi lr + \pi r^2 \text{ или } S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)}$$

Пример. По рисунку найдите площадь боковой и полной поверхностей конуса.

Решение: Дано: $d = 5$ м, $h = 6$ м

Найти: $S_{\text{бок.}}$ и $S_{\text{п.п.}}$

$$S_{\text{бок.}} = \pi lr \text{ и } S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)$$



Чтобы найти образующую l, применим теорему Пифагора.

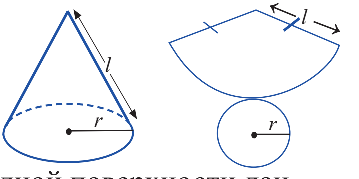
$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = 6{,}5 \text{ (м)}$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot 6{,}5 \cdot 2{,}5 = 16{,}25\pi \text{ (м}^2\text{)}; \quad S_{\text{п.п.}} = 22{,}75\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

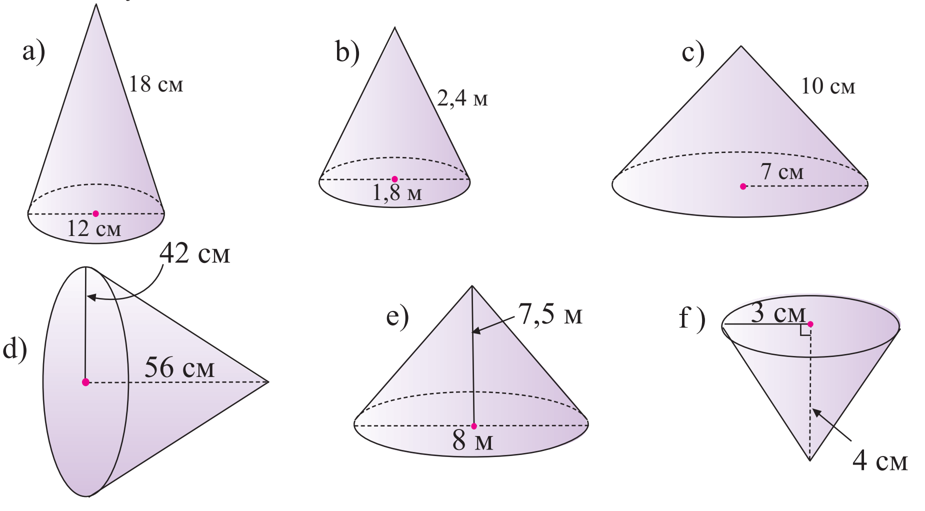
Площадь поверхности конуса

Обучающие задания

1. Дан круговой сектор радиусом 25 см и длиной дуги 14π см.
a) Сколько градусов составляет центральный угол сектора?
b) Найдите радиус основания и боковую поверхность конуса, образованного этим сектором.
c) Найдите высоту конуса.
d) Найдите полную поверхность конуса.



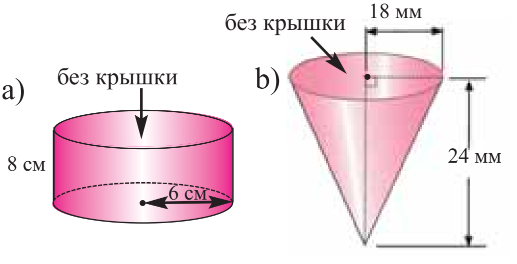
2. По данным рисунка найдите площадь полной поверхности данных конусов.



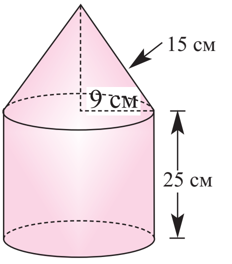
3. Какую формулу удобнее использовать для нахождения полной поверхности конуса при вычислении на калькуляторе:
$\pi lr + \pi r^2$ или $\pi r(l + r)$?Запишите свое мнение.

4. Запишите формулу:
a) выражающую зависимость образующей конуса от боковой поверхности и радиуса;
b) выражающую зависимость радиуса конуса от боковой поверхности и образующей.

5. По данным рисунка найдите площадь внутренней поверхности посуд в виде цилиндра и конуса без крышки.



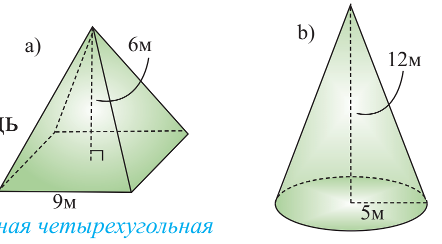
6. **Вопрос открытого типа.** Радиус конуса относится к образующей как $\frac{5}{14}$. Напишите два значения, соответствующие боковой поверхности конуса.



7. На рисунке представлена фигура, состоящая из комбинации цилиндра и конуса. По данным рисунка найдите полную поверхность фигуры.

8. Найдите площадь боковой и полной поверхности конуса, высота которого равна 80 см, а диаметр 120 см.

9. По данным рисунка найдите площадь полной поверхности фигур.



правильная четырехугольная пирамида

10. Найдите поверхность фигуры, полученной вращением прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг гипотенузы.

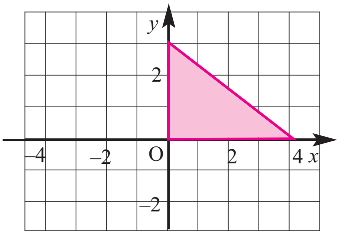
11. Треугольник, изображенный на рисунке, вращается вокруг следующих осей и в каждом случае получается пространственная фигура. Изобразите полученную фигуру и найдите полную поверхность в π единицах.

a) вокруг оси y

b) вокруг оси x

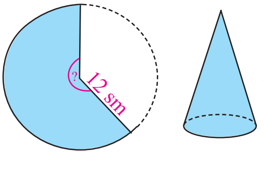
c) вокруг прямой $x = 4$

d) вокруг прямой $y = 3$



12. Боковая поверхность конуса имеет площадь 10 см^2. Развертка боковой поверхности конуса образует сектор с центральным углом 36°. Найдите полную поверхность конуса.

13. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен 12 см. Найдите величину центрального угла, если боковая поверхность конуса равна 96π см^2.

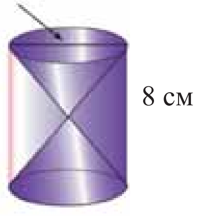


14. Докажите, что площадь боковой поверхности конуса, образованного из полукруга, равна удвоенной площади основания.

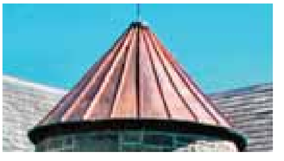
Прикладные задания

15. Лейла хочет сделать шапку для куклы в форме конуса. Чему равна площадь поверхности бумажной шапки в виде конуса, если радиус основания конуса равен 8 см, а образующая 30 см?

16. Песочные часы сделаны из стекла. Их поместили внутрь стеклянного цилиндра, как показано на рисунке. На что было потрачено больше стекла - на конус или на цилиндр? 6 см



17. Крыша сооружения имеет форму конуса, высота которого равна 3 м, а радиус основания 1,5 м. Крыша покрыта черепицей. Найдите площадь крыши, покрытой черепицей.



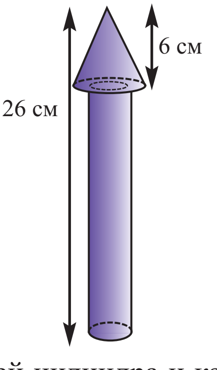
18. В куб с ребром 10 см вписаны следующие фигуры так, что их основания расположены на одной из граней куба, а вершины - на противоположной грани:

a) правильная пирамида (основание - квадрат грани куба)

b) конус (основание - круг, вписанный в грани куба)

Изобразите соответствующий рисунок. Найдите боковую и полную поверхности вписанной фигуры.

19. Модель ракеты на рисунке состоит из цилиндра и конуса. Высота цилиндра 20 см, высота конуса 6 см. Диаметр цилиндра 3 см, диаметр конуса 5 см. Цилиндрическая часть ракеты должна быть покрашена красным цветом, а часть ракеты в виде конуса - оранжевым. Найдите площадь каждой покрашенной соответствующим цветом части.



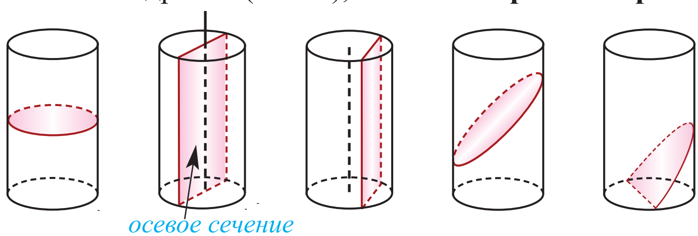
20. Найдите и сравните площади боковых поверхностей цилиндра и конуса, высота которых равна единице, а радиус основания $\sqrt{3}$.

Сечения цилиндра и конуса плоскостью

Сечения поверхности конуса плоскостью (теория конических сечений) считались одной из вершин античной геометрии. Исследования Аполлония (3-й в.до н.э.) показали, что сечением плоскостью конуса, с бесконечной образующей (лучом) является: эллипс (плоскость пересекает все образующие), парабола (плоскость сечения параллельна одной из образующих) или ветвь гиперболы (плоскость сечения параллельна двум образующим).

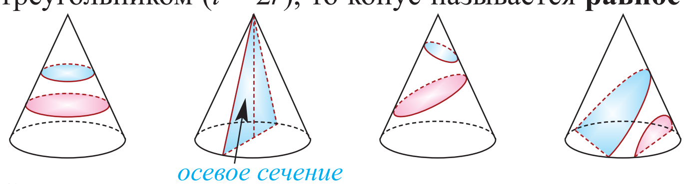
Сечения цилиндра плоскостью

Сечением цилиндра плоскостью, параллельной основанию, является круг. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось симметрии, называется **осевым сечением**. Осевое сечение цилиндра является прямоугольником со сторонами h и $2r$. Значит, $S_{\text{ос.сеч.}} = 2\,rh$.Цилиндр, осевое сечение которого является квадратом ($h = 2r$), называется **равносторонним цилиндром**.

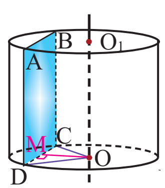


Сечения конуса плоскостью

Сечением конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг. Сечение конуса, проходящее через ось конуса называется **осевым сечением** конуса. Это сечение является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого являются образующими, а основание равно диаметру конуса: $S_{\text{ос.сеч.}}=rh$. Если осевое сечение конуса является правильным треугольником ($l = 2r$), то конус называется **равносторонним конусом.**



Пример. Сечением цилиндра плоскостью, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 3 см от оси, является квадрат, площадь которого равна 64 см^2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

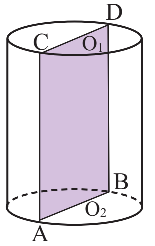


Решение: сначала найдем радиус и высоту цилиндра. По условию CD = AD и $S_{\text{сеч.}} = CD\cdot AD = 64$. Отсюда CD=AD=8, значит $h = 8$ (см). Из ΔOMD:
$r^2 = OD^2 = OM^2 + MD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, отсюда $r = 5$ (см).
Таким образом, $S_{\text{п.п.}} = 2\pi r(h + r) = 2\pi\cdot 5\cdot(8+5) = 130\pi$ (см^2).

Сечения цилиндра и конуса плоскостью

Обучающие задания

1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, осевое сечение которого равно 14 м^2.

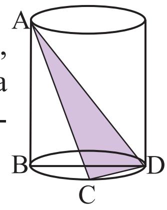


2. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

3. Отношение площади основания к площади осевого сечения конуса равно π. Найдите угол между образующей и плоскостью основания.

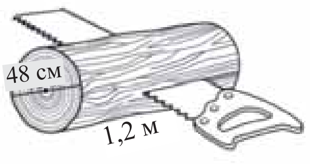
4. Радиус равностороннего конуса равен R. Найдите площадь сечения проходящего через две образующие, угол между которыми составляет 30°.

5. Высота цилиндра AB, диаметр BD. Зная, что AB = 4 см, BD = 6 см и CD = 4 см, найдите площадь треугольника ACD. **Указание**: используя теорему о трех перпендикулярах, докажите, что ΔACD прямоугольный.



6. Высота конуса 20 см, радиус 25 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса, и расположенного на расстоянии 12 см от центра основания.

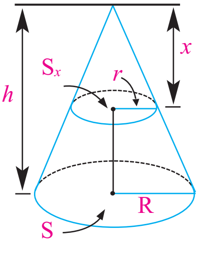
7. Полено имеет форму цилиндра. Диаметр цилиндра равен 48 см, а длина 1,2 м. Полено разрезали пополам, как показано на рисунке. Найдите площадь полной поверхности одной части.



8. Пень, который показан на рисунке, отпилен от высохшего дерева. По данным рисунка найдите площадь основания.

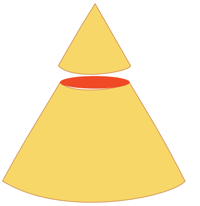
9. Высота конуса равна h, площадь основания S. На расстоянии x от вершины параллельно основанию проведена плоскость, которая рассекает конус. Если площадь сечения равна S_x, то докажите, что .

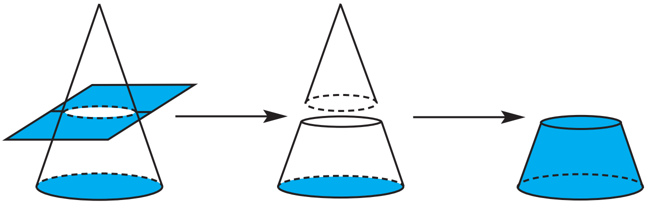
$$\frac{S_x}{S} = \frac{x^2}{h^2}$$

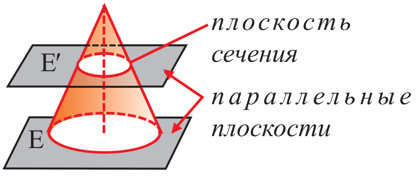


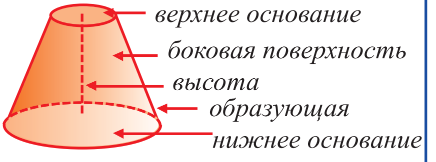
Усеченный конус

Если параллельно основанию прямого кругового конуса провести плоскость, то получим маленький конус и **усеченный конус**.



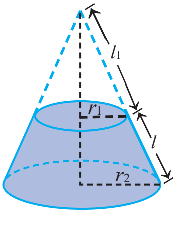






Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Боковая поверхность усеченного конуса равна разности боковых поверхностей большого конуса и маленького конуса, отсеченного плоскостью, параллельной основанию, от большого конуса. Используя обозначения на рисунке, можно записать:



$$S_{бок} = \pi r_2(l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi\,[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Из подобия треугольников запишем следующее отношение $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l + l_1}{r_2}$

Тогда, подставив $l_1 r_2 = r_1(l + l_1)$ или $(r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$ в формулу для нахождения боковой поверхности, получим:

$$\mathbf{S_{бок.} = \pi\,(r_1 l + r_2 l) = \pi\, l(r_1 + r_2)\,.}$$

В данной формуле введем обозначение $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ среднего радиуса усеченного конуса. Тогда

$$\mathbf{S_{бок} = 2\pi\, r l}$$

Полная поверхность усеченного конуса равна сумме боковой поверхности и площадей нижнего и верхнего оснований.

$$\mathbf{S_{п.п.} = \pi\, l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)}$$

Усеченный конус и площадь поверхности

Пример. Конус высотой 8 см и радиусом 6 см рассечен плоскостью, параллельной основанию. Высота полученного усеченного конуса равна 4 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса

Решение: дано: $r_2 = 6$, $h = 8$ см, $h_{\text{ус.кон}} = 4$ см

Найти: $S_{\text{бок.}} = ?$

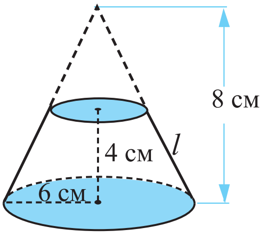
$S_{\text{п.п.}} = ?$

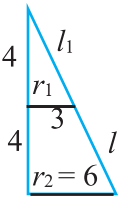
$S_{\text{бок}} = \pi\, l(r_1 + r_2)$, $r_1 = \dfrac{r_2}{2} = 3$,

$l_1 = l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$S_{\text{бок}} = 5(3 + 6)\,\pi = 45\pi$ (см²).

$S_{\text{п.п.}} = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi$ (см²).



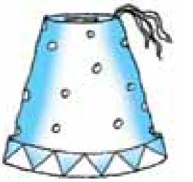


Обучающие задания

1. a) Образующая усеченного конуса 4 см, длины окружностей основания 18 см и 6 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса. Примите $\pi = \dfrac{22}{7}$.

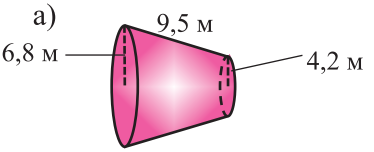
b) Высота усеченного конуса 4 см, радиусы основания 3 см и 6 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса.

2. Шапка из бумаги сделана в форме усеченного конуса без нижнего основания. Радиус нижнего основания равен 10 см, а радиус верхнего основания равен 4 см. Образующая усеченного конуса 15 см. Сколько, минимально, квадратных сантиметров бумаги, было использовано для изготовления шапки?

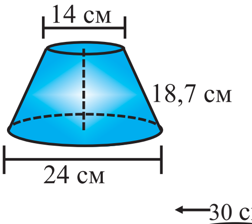


3. По данным рисунка найдите площади боковой и полной поверхностей усеченных конусов.

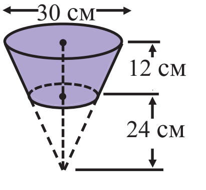
a)



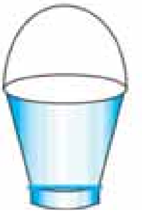
b)



4. По данным рисунка найдите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса.



5. Ведро, без крышки, имеет форму усеченного конуса. Радиус нижнего основания 22 см, радиус верхнего основания 36 см. Высота ведра 24 см. Сколько манат, приблизительно, составляют затраты на изготовление одного ведра, если цена 1 $м^2$ материала равна 5 манат?



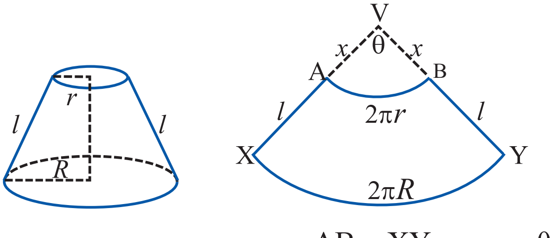
6. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая находятся в отношении 1:4:5. Зная, что высота конуса равна 8 см, найдите площадь боковой поверхности.

7. Полная поверхность усеченного конуса равна 572 $\pi м^2$, а радиусы оснований 6 м и 14 м. Найдите высоту усеченного конуса.

8. Боковая поверхность усеченного конуса равна S, а радиусы оснований R и r. Найдите площадь боковой поверхности полного конуса.

9. Образующая усеченного конуса равна 5 см, а радиусы оснований 1 см и 5 см. Найдите радиус основания цилиндра, высота и площадь боковой поверхности которого соответственно равны высоте и площади боковой поверхности данного усеченного конуса.

10. Фигура ABYX развертка боковой поверхности усеченного конуса.

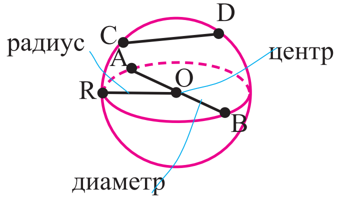


a) Запишите зависимость длин дуг AB и XY от угла θ. Покажите, что для θ в радианах справедливо равенство $\theta = \dfrac{2\pi(R-r)}{l}$.

b) Используя предыдущее равенство и подобие треугольников, покажите, что $x = \dfrac{lr}{R-r}$

c) Найдите площади секторов AVB и XVY и, используя эти площади, найдите площадь ABYX. Другими словами, найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

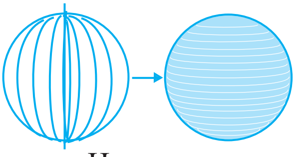
Площадь поверхности шара и его частей



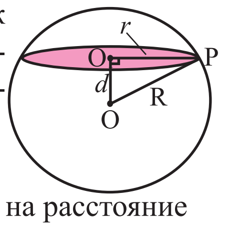
Шаром называется множество всех точек пространства находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного. Данная точка называется **центром шара**, данное расстояние **радиусом (R) шара**.

Множество всех точек, расположенных на расстоянии R от центра шара, образует поверхность шара. Поверхность шара называется **сферой**. Прямая, соединяющая любые две точки на поверхности шара, называется **хордой** (CD). Хорда, проходящая через центр шара называется **диаметром** шара (AB).

Шар получается, при вращении полукруга вокруг диаметра.



Любое сечение шара плоскостью является кругом. Центр этого круга является основанием перпендикуляра, проведенного к плоскости и проходящего через центр шара. Если R-радиус шара, d-расстояние между плоскостью и центром, а r-радиус сечения, то получим:



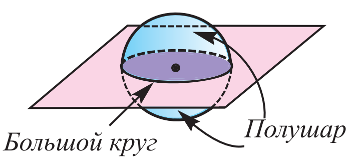
$$r^2 = R^2 - d^2$$

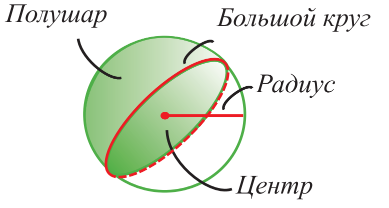
Пример. Шар радиуса 10 см пересечена плоскостью на расстояние 8 см от центра. Вычислите площадь сечения.

Решение: По условию R = 10, d = 8.

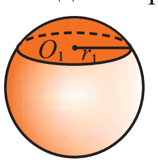
Тогда $S_{\text{сеч}} = \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2) = \pi \cdot (10^2 - 8^2) = 36\pi(\text{см}^2)$

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется **большим кругом**. Центр, радиус и диаметр большого круга равны центру, радиусу и диаметру шара.

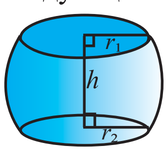




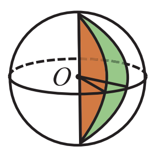
Также для шара известны следующие части:



шаровой сегмент



шаровой слой - часть шара, расположенная между двумя параллельными секущими плоскостями



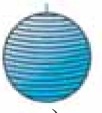
долька шара

Площадь поверхности шара и его частей

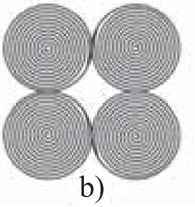
Практическое занятие. Работа в группах

Покрытие поверхности мяча веревкой.

Необходимые материалы: мяч, веревка, лист бумаги.



a)



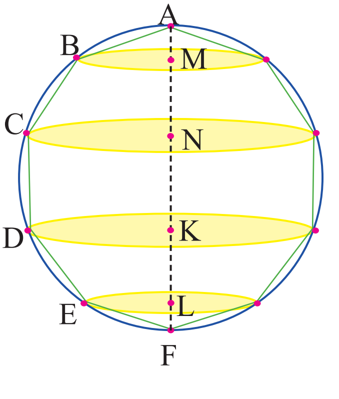
b)

1. Каждой группе дается мяч. Попробуйте обмотать мяч веревкой таким образом, чтобы не было наложений и не оставалось пустот. Мяч из кожи и материи удобнее прикрепить гвоздем и, вращая его, с легкостью проделать эту работу.
2. Проводятся обсуждения, как измерить диаметр мяча. После того, как найден диаметр, вычисляется радиус.
3. На листе изображается 4 круга радиусом, равным радиусу мяча.
4. Раскрывается веревка, которой обмотан мяч. Веревка помещается внутрь четырех кругов, полностью заполнив их. Выдвигается гипотеза для формулы, по которой можно найти площадь поверхности шара.

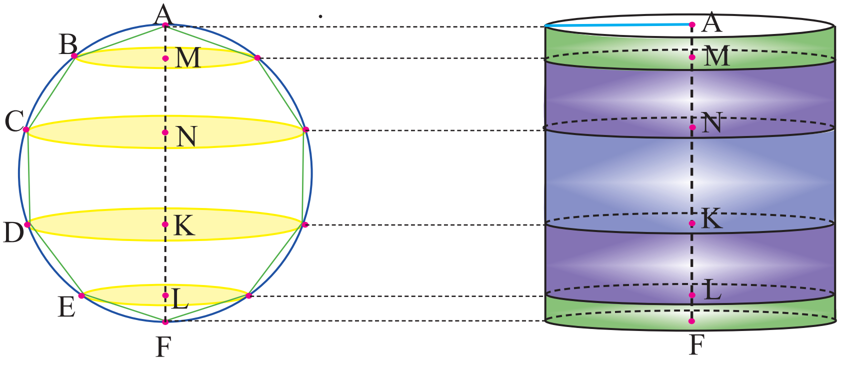
Площадь поверхности шара

Площадь поверхности шара находится по формуле $S = 4\pi r^2$.
Здесь r радиус шара.

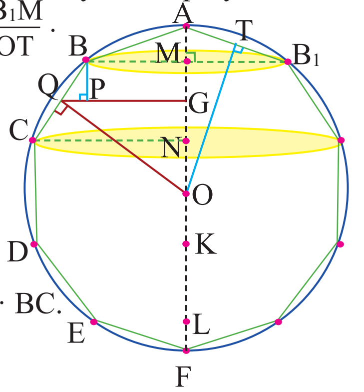
В окружность радиусом r впишем правильный многоугольник. Поверхность шара, полученного при вращении относительно диаметра соответствующих кругов, можно рассматривать как сумму пределов боковых поверхностей фигур - конуса,усеченного конуса и цилиндра, образующие которых являются сторонами данного многоугольника.



Покажем, что при вращении сторон многоугольника вокруг оси получается тело (конус, усеченный конус, цилиндр), площадь боковой поверхности которого равна площади боковой поверхности цилиндра, высота которого равна высоте данного тела, радиус основания равен апофеме многоугольника. Обозначим апофему многоугольника через r_1.



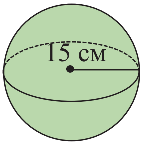
$S_k = \pi \cdot AB \cdot BM$ - площадь боковой поверхности конуса с образующей AB. Так как $\Delta AMB_1 \sim \Delta ATO$, то $\dfrac{AM}{AT} = \dfrac{B_1M}{OT}$.

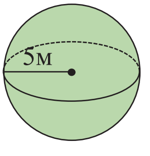


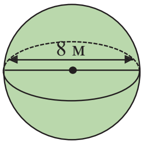
Умножим на 2 обе части равенства
$AT \cdot B_1M = AM \cdot OT$. Учитывая, что $OT = r_1$,
$2 \cdot AT = AB$, получим $AB \cdot B_1M = 2r_1 \cdot AM$.
Значит, $S_k = \pi \cdot AB \cdot B_1M = 2\pi r_1 \cdot AM$
$S_{ус.k} = \pi(B_1M + CN) \cdot BC$ - площадь боковой поверхности усеченного конуса. Зная, что
$QG = \dfrac{BM + CN}{2}$ получим, что $S_{ус.к.} = 2\pi \cdot QG \cdot BC$.
Так как $\Delta BPQ \sim \Delta QGO$, то $\dfrac{BP}{QG} = \dfrac{BQ}{OQ}$
Умножим на 2 обе части равенства $QG \cdot BQ = BP \cdot OQ$. Учитывая,что $2 \cdot BQ = BC$, $2 \cdot BP = MN$ и $OQ = r_1$, получим $QG \cdot BC = r_1 \cdot MN$.
Значит, $S_{ус.к.1} = 2\pi r_1 \cdot MN$.
Понятно, что площадь боковой поверхности цилиндра с образующей CD равна $S_{бок.} = 2\pi r_1 \cdot NK$. Аналогично получаем, что площадь боковых поверхностей усеченного конуса с образующей DE и конуса с образующей EF можно найти по формулам $S_{ус.к.2} = 2\pi r_1 KL$, $S_{k2} = 2\pi r_1 LF$.
Таким образом, поверхность тела, полученного вращением многоугольника вокруг диаметра, равна :
$S = 2\pi r_1 (AM + MN + MK + KL + LF) = 2\pi r_1 \cdot AF = 2\pi r_1 \cdot 2r = 4\pi r r_1$
При бесконечном увеличении количества сторон многоугольника значение r_1 стремится к радиусу, а площадь поверхности полученного тела к площади поверхности шара, т.е. $S_{шар} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.

Обучающие задания

1. Найдите площадь поверхности шаров.

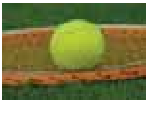
a) 

b) 

c) 

2. Найдите площадь поверхности мячей.


Футбольный мяч $r = 11$ см

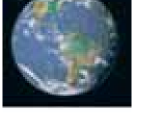

Теннисный мяч $r = 3{,}3$ см


Мяч для боулинга $r = 10{,}9$ см


Мяч для гольфа $d = 4{,}3$ см


Баскетбольный мяч $d = 24{,}3$ см

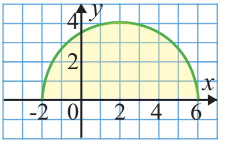
3. Диаметр Луны равен одной четвертой диаметра Земли. Найдите отношение площадей поверхностей этих двух небесных тел.



4. Полукруг на рисунке повернулся на один оборот вокруг оси x .

a) Какая пространственная фигура получилась?

b) По данным рисунка найдите площадь поверхности полученной фигуры.



5. Найдите высоту конуса, если площадь поверхности шара с радиусом 5 см в 5 раз больше площади боковой поверхности конуса с радиусом 4 см.

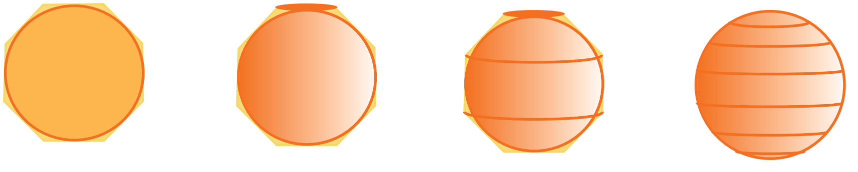
Площадь поверхности шара. Доказательство Архимеда:

Пусть, в правильный многоугольник вписан круг, как показано на рисунке.

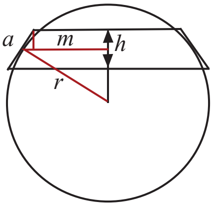
При вращении получается шар и покрывающее шар тело.

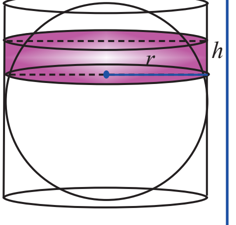
Это тело состоит из двух усеченных конусов и цилиндра.

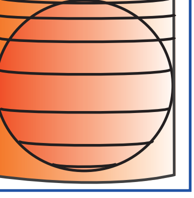
При увеличении количества сторон до бесконечности, тело будет стремится принять форму шара.



Найдя сумму поверхностей усеченных конусов и цилиндра, можно найти площадь поверхности шара. Рассмотрим осевое сечение одного из усеченных конусов. Пусть радиус средней окружности равен m, а высота h, радиус шара r, сторона многоугольника, описанного вокруг большего круга равна a. Площадь боковой поверхности усеченного конуса будет $2\pi ma$, а также $2\pi ma = 2\pi rh$, т.е. боковая поверхность усеченного конуса равна боковой поверхности цилиндра, радиус основания которого равен r и высота h. Значит, фигуру, описанную вокруг шара, можно принять за цилиндр. Отсюда получается, что площадь поверхности шара равна площади боковой поверхности цилиндра с радиусом основания r и высотой $2r$.







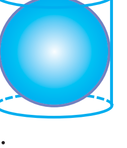
Т.е., $S = S_{\text{бок цил.}} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.

6. Докажите, что отношение площади полной поверхности цилиндра к площади поверхности шара, которое так удивило Архимеда, равно 3 : 2.

a) Найдите площадь поверхности шара.

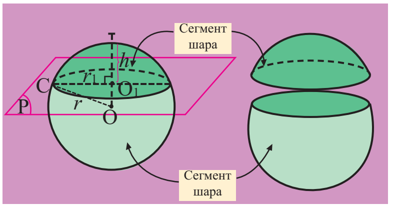
b) Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

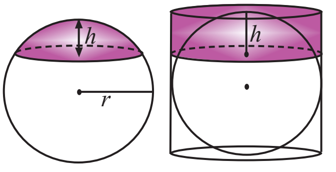
c) Запишите отношение площади цилиндра к площади шара.



Площадь сегмента шара

Часть шара, отсекаемая плоскостью сечения называется **сегментом**. Круг, полученный при сечении плоскостью, называется **основанием сегмента**. Часть диаметра шара, перпендикулярного основанию сегмента, расположенная внутри него, называется **высотой сегмента.** Из доказательства формулы поверхности шара, аналогично, можно показать, что для шара радиуса *r,* площадь сферической поверхности сегмента высотой h, вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$.



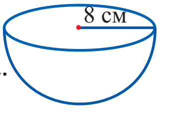


7. Шар радиусом 18 см, на расстоянии 5 см от центра рассечен плоскостью. Найдите площадь сферической поверхности меньшего шарового сегмента.

8. Шар площадью 400π см^2, рассечен плоскостью, отстоящей от центра на расстоянии 6 см. Найдите площадь сферической поверхности большего шарового сегмента.

9. Шар рассечен плоскостью, отстоящей от центра на расстоянии 3 см. Найдите площадь поверхности шара и площадь сферической поверхности каждого сегмента, если длина окружности сечения равна 8π см.

10. a) Найдите площадь плоской поверхности полушара.



b) Найдите площадь сферической поверхности полушара.

c) Найдите площадь полной поверхности полушара.

d) Запишите формулу площади полной поверхности полушара.

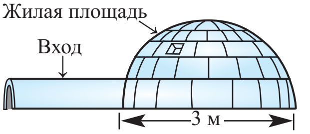
11. Найдите радиус полушара, полная поверхность которого равна 147π см^2.

12. Радиус шара 15 см. Найдите площадь видимой поверхности шара от точки, которая находится на расстоянии 25 см от центра шара.

13. **Этнография**. Люди в Канаде, Орлеане и на Аляске живут в домах, которые называются иглу. Они построены изо льда. Жилая площадь такого дома имеет форму полусферы.

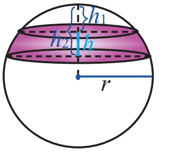
a) По данным рисунка найдите жилую площадь (площадь пола) иглу.

b) Площадь дома, покрытого льдом.



Площадь шарового пояса

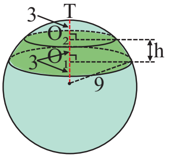
Часть поверхности шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, называется **шаровым поясом**. Расстояние между параллельными плоскостями называется высотой шарового пояса.



Площадь поверхности шарового пояса можно найти, как разность площадей сегментов, отсекаемых параллельными плоскостями.

Площадь поверхности шарового пояса высотой *h*, отсекаемого от шара радиуса *r*, вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$.

Пример. Радиус шара разбит на три равные части и через эти точки проведены перпендикулярные к радиусу плоскости. Зная, что радиус шара $r = 9$, найдите площадь поверхности шарового пояса.



Решение: если $r = 9$ и $h = 3$, то площадь поверхности шарового пояса будет $S = 2\pi rh = 54\pi$.

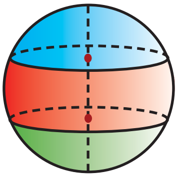
14. Шар радиусом 20 см, рассечен двумя параллельными плоскостями. Расстояние между плоскостями равно 8 см. При этом получился шаровой пояс.

a) Вычислите площадь поверхности шарового пояса.

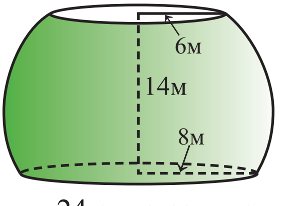
b) Найдите отношение площади поверхности шарового пояса и площади поверхности шара.

15. Площадь поверхности шарового пояса равна 48π см^2. Найдите радиус шара, если высота шарового пояса равна 4 см.

16. Диаметр шара равен 30 см. Он разбит параллельными плоскостями на три равные части. Найдите площади сферических поверхностей отсекаемых фигур.



17. Найдите площадь шарового пояса.



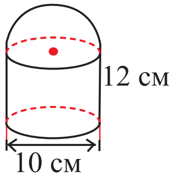
18. Радиусы оснований шарового пояса равны 20 см и 24 см, а радиус шара равен 25 см. Найдите площадь шарового пояса.

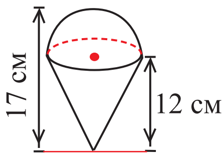
19. Радиусы оснований шарового пояса 16 см и 33 см, а высота равна 7 см. Найдите площадь шарового пояса.

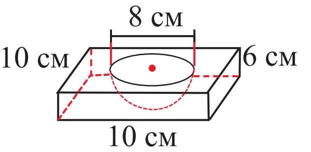
20. Радиус шара равна R. Одним из оснований шарового слоя является большой круг, площадь пояса равна сумме площадей оснований. Найдите высоту шарового слоя.

Площади поверхностей комплексных фигур

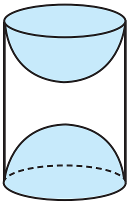
1. Найдите площадь полной поверхности фигур на рисунке.





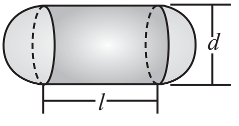


2. Сувенир на рисунке состоит из деревянного цилиндра высотой 10 см и радиусом основания 4 см. С обеих сторон цилиндра сделаны выемки в форме полушара. Найдите площадь полной поверхности сувенира.

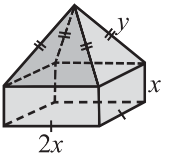


3. Запишите, при помощи переменных, формулы для вычисления площади полной поверхности фигур на рисунке.

a)

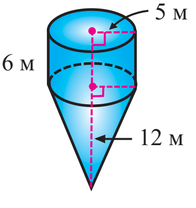


b)

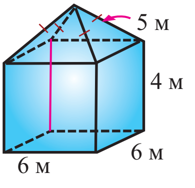


4. Найдите площадь полной поверхности фигур.

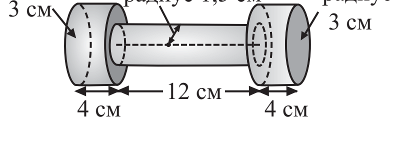
a)



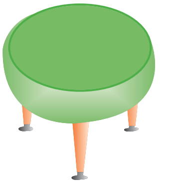
b)



5. Для покрытия лаком металлической конструкции, размеры которой даны на рисунке, применяется специальная технология. Зная, что на 1 кв.м. расходуется 0,25л лака, найдите сколько литров лака будет использовано для покрытия 1000 таких конструкций.



6. Рашид хочет сделать стул, как показано на рисунке. Сиденье стула имеет форму цилиндра радиусом 30 см и высотой 20 см. Верхнее основание и боковая часть стула должны быть покрыты чехлом. При крое и пошиве чехла материала расходуется на 20% больше. У Рашида имеется 1 м^2 ткани. Хватит ли этого материала для чехла?



7. Поверхность футбольного мяча состоит из нескольких сшитых между собой правильных шестиугольников (гексагонов). Размеры шестиугольника указаны на рисунке.

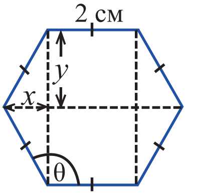
a) Найдите угол θ.

b) Найдите значения переменных x и y.

c) Найдите площадь трапеции на рисунке.

d) Найдите площадь шестиугольника на рисунке.

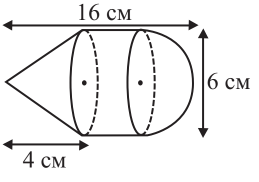
c) Если площадь поверхности мяча равна $192\sqrt{3}$ см^2, то найдите количество шестиугольников, из которых сшит мяч.



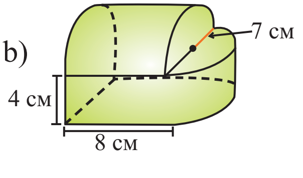
8. Пилюля имеет форму цилиндра и двух полушаров. Высота цилиндра 2 см, диаметр 0,5 см. Для удобства приема пилюли ее покрывают специальным слоем. Найдите площадь поверхности покрытия.

9. Найдите площадь поверхности фигур.

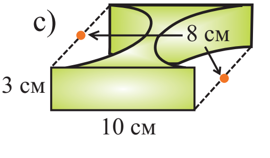
a)



b)



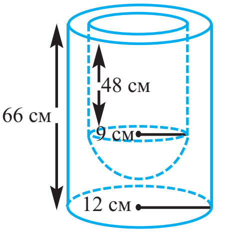
c)



10. Посуда из пластика состоит из двух частей - внешней, в форме цилиндра, высотой 66 см и радиусом основания 12 см, и внутренней, полой части, в форме цилиндра, радиусом 9 см, высотой 48 см, нижняя часть которой представляет собой сферу.

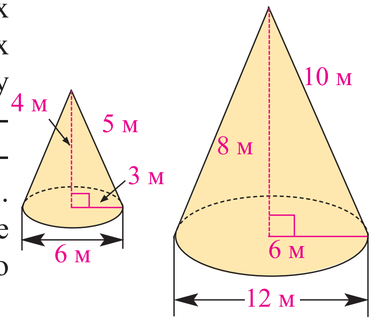
a) Найдите площадь внутренней поверхности.

b) Найдите площадь внешней поверхности.



Площади поверхностей подобных фигур

Отношение соответствующих линейных размеров подобных пространственных фигур постоянно и равно коэффициенту подобия. Например, чтобы проверить подобны ли конусы на рисунке, найдем отношение соответствующих размеров. Если эти конусы подобны, то отношение радиусов должно быть равно отношению высот. $\dfrac{R}{r} = \dfrac{H}{h}$; $\dfrac{12}{6} = \dfrac{8}{4} = 2$



Значит эти конусы подобны и коэффициент подобия равен 2. Это говорит о том, что если все линейные размеры маленького конуса пропорционально увеличить в два раза, то получим конус, конгруэнтный большому конусу. Или наоборот, пропорционально уменьшив размеры большого конуса в два раза, получим конус, конгруэнтный маленькому. Если пропорционально увеличить или уменьшить размеры какой-либо фигуры, то можно получить подобные фигуры.

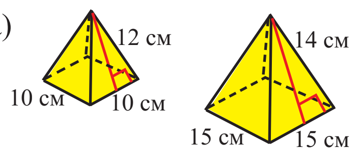
Отношение площадей подобных фигур равно квадрату отношения соответствующих линейных размеров или квадрату коэффициента подобия.

$$F_1 \overset{k}{\sim} F_2 \Rightarrow \frac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$$

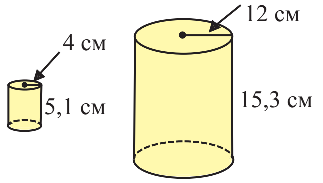
Обучающие задания

1. Определите, являются ли фигуры на рисунках подобными фигурами.

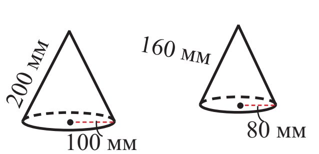
a)



b)



2. Конусы на рисунке подобны. Найдите отношение полных поверхностей конусов. Выразите высоту маленького конуса через высоту большого конуса.



3. Радиусы двух шаров относятся как 1:3. Найдите площадь поверхности меньшего шара, если площадь поверхности большего шара на 15π см^2 больше площади поверхности меньшего шара.

4. Площади поверхностей двух подобных цилиндров равны 48π и 108π (в кв. ед). Высота меньшего цилиндра равна радиусу большего цилиндра. Найдите радиусы и высоты цилиндров.

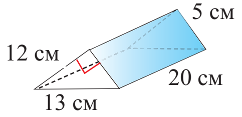
Обобщающие задания

1. Площадь полной поверхности конуса с радиусом 5 см равна площади полной поверхности цилиндра с радиусом 5 см и высотой 4 см. Найдите высоту конуса.

2. Боковая поверхность конуса в два раза больше площади основания.
a) Запишите зависимость образующей (l) от радиуса (r) основания.
b) Чему равна боковая поверхность конуса, если радиус основания равен 6 см?

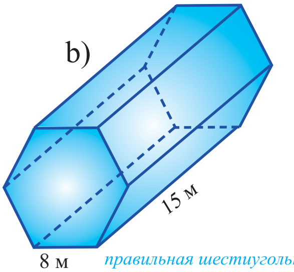
3. Найдите площади полной поверхности призм и цилиндров на рисунке.

a)



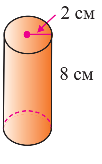
прямая треугольная призма

b)

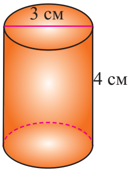


правильная шестиугольная призма

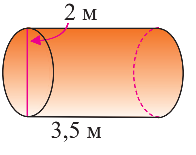
c)



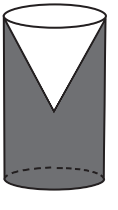
d)



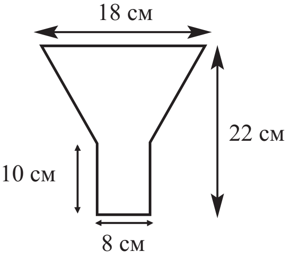
e)



4. Из цилиндрической детали высотой 8 см и диаметром 6 см вырезали конус высотой 4 см. Затем вся поверхность полученной детали должна быть окрашена.
Если для окраски площади 100 см^2 требуется 20 мл краски, хватит ли 4 л краски для окраски 100 таких деталей?

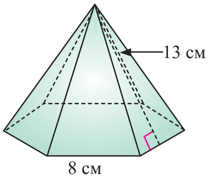


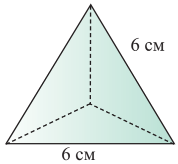
5. Металлическая конструкция на рисунке используется при выгрузке зерна из амбара. Рисунок выполнен в масштабе 1:20. Конструкция состоит из части в виде усеченного конуса и цилиндра. По данным рисунка найдите площадь металлического листа, которая потребуется для изготовления данной конструкции.

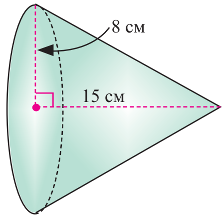


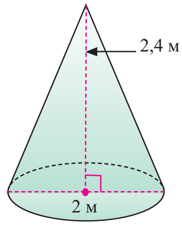
Обобщающие задания

6. Найдите площадь полной поверхности пирамид и конусов.

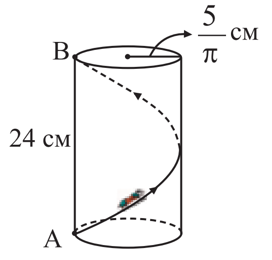








7. Муравей движется по поверхности цилиндра, радиус основания которого равен $\frac{5}{\pi}$ см, а высота 24 см. Он прошел винтажный путь от точки A, расположенной на окружности основания цилиндра, до точки B, на другом основании. Найдите длину пути, пройденного муравьем.



8. Расстояние от некоторой точки, расположенной на плоскости касания шара, до точки касания равно 9 см, а до центра шара 15 см. Найдите площадь поверхности шара.

9. Разверткой конуса является сектор, радиус которого равен 8 см, а угол 90°. Найдите площадь осевого сечения конуса.

10. Образующая цилиндра 10 см. Через образующую цилиндра проведены два перпендикулярных друг к другу сечения площадью 30 см^2 и 40 см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

11. Радиус шара равен R. На расстоянии d_1 и d_2 от центра шара проведены две параллельные плоскости. Найдите площадь поверхности шарового пояса. Рассмотрите 2 случая.

12. Диагональ осевого сечения усеченного конуса равна d и образует с основанием угол α. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

13. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник. Угол при вершине осевого сечения равен 2α, высота H. Найдите: a) Площадь полной поверхности конуса; b) Центральный угол сектора, который является разверткой боковой поверхности конуса.

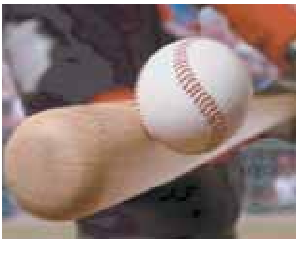
14. В шаре, радиус которого равен 5 см, сделали выемку в форме сегмента и конуса. Вершина конуса находится в центре шара и имеет общее основание с сегментом. Зная, что высота сегмента равна 1 см, найдите площадь поверхности оставшейся части.

5 Производная функции

- Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения
- Производная функции
- Уравнение касательной
- Правила дифференцирования
- Производная произведения
- Производная частного
- Производная сложной функции
- Решение задач с применением производной
- Производная второго порядка
- Производные показательной и логарифмической функций
- Производные тригонометрических функций

Математический словарь

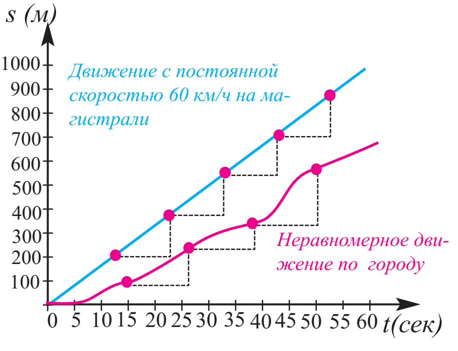
- средняя скорость изменения
- мгновенная скорость изменения
- секущая графика
- касательная к графику
- угловой коэффициент
- функция производной
- дифференциал
- дифференцирование
- производная второго порядка
- маржинальная цена
- маржинальная прибыль
- маржинальный доход



Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

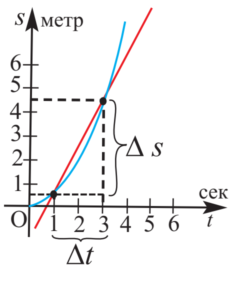
До настоящего времени, используя алгебраические правила, изученные нами, мы могли получать статистические данные, соответствующие реальной жизненной ситуации. Однако, во многих случаях, в производстве, медицине, а также в различных областях науки, возникает необходимость получить более динамическую информацию, другими словами, возникает надобность проследить как изменения одной переменной влияет на скорость изменения другой переменной. Например, рекламный менеджер хочет знать, как изменяется прибыль при изменении затрат, врач - динамику изменения структуры печени при увеличении дозы лекарственного препарата и т.д. Рассмотрим следующий пример определения скорости изменения.

Средняя скорость. На рисунке показаны графики зависимости расстояния от времен при равномерном движении автомобиля по магистральной дороге и неравномерном движении по городу. При равномерном движении, за равные промежутки времени, длина пройденного пути одинакова и на графике движения угловой коэффициент прямой выражает скорость. При неравномерном движении длина пути на одинаковых временных участках может и не быть одинаковой. В этом случае используется значение средней скорости.



Отношение пройденного телом пути к промежутку времени, за которое этот путь пройден, называется **средней скоростью.**

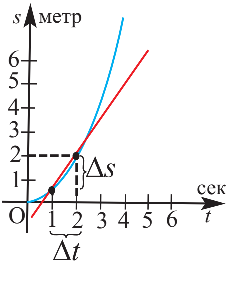
$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Пример 1. Частица движется прямолинейно по закону $s(t) = 0{,}5\ t^2$. Найдите среднюю скорость на промежутке времени: a) [1; 3] , b) [1; 2] (здесь s в метрах, t - в секундах).

Решение: a) Средняя скорость на промежутке времени $1 \le t \le 3$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{4{,}5 - 0{,}5}{2} = 2\ (м/сек)$$



b) Средняя скорость на промежутке времени $1 \le t \le 2$

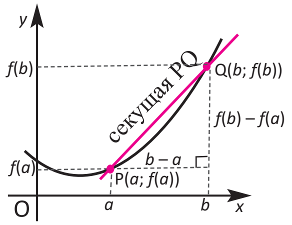
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{2 - 0{,}5}{1} = 1{,}5\ (м/сек)$$

Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

Средняя скорость изменения

Для произвольной функции $y = f(x)$ на промежутке $a \le x \le b$ средняя скорость равна $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Это отношение равно углу наклона секущей графика функции, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.



Мгновенная скорость. Исследуем понятие мгновенной скорости на следующем примере.

Пример 2. В таблице представлены результаты вычислений средней скорости частицы, движущейся прямолинейно по закону $s = 0{,}5\ t^2$ для некоторых малых значений Δt за промежуток времени $[2; 2+\Delta t]$.

интервал времени	*средняя скорость*
$[2; 2{,}1]$	$\dfrac{s(2{,}1)-s(2)}{2{,}1-2} = \dfrac{2{,}205-2}{2{,}1-2} = \dfrac{0{,}205}{0{,}1} = 2{,}05$
$[2; 2{,}01]$	$\dfrac{s(2{,}01)-s(2)}{2{,}01-2} = \dfrac{2{,}02005-2}{0{,}01} = \dfrac{0{,}02005}{0{,}01} = 2{,}005$
$[2; 2{,}001]$	$\dfrac{s(2{,}001)-s(2)}{2{,}001-2} = \dfrac{2{,}0020005-2}{0{,}001} = \dfrac{0{,}0020005}{0{,}001} = 2{,}0005$

По таблице можно установить, что при $t = 2$ мгновенная скорость приблизительно равна 2 м/сек. Вообще, средняя скорость на интервале времени $[2; 2+\Delta t]$ будет:

$$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t} = \frac{0{,}5\cdot(2+\Delta t)^2-0{,}5\cdot 2^2}{\Delta t} = \frac{2\Delta t+0{,}5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2+0{,}5\Delta t$$

Устремляя Δt к нулю путем сокращения временного интервала $[2; 2+\Delta t]$, найдем мгновенную скорость в предельном состоянии в момент $t = 2$: $v(2) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(2+0{,}5\Delta t) = 2$.

Таким образом, при прямолинейном движении по закону $s(t)$, мгновенная скорость в любой момент времени t будет:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

По аналогичному правилу, для любой функции мгновенную скорость изменения при $x = a$ находят по формуле:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

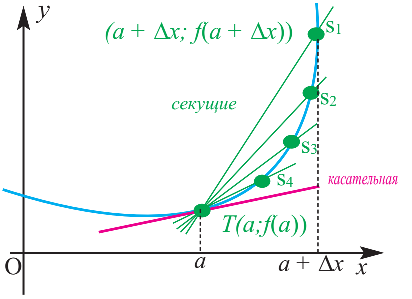
Мгновенная скорость изменения

Предел $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ выражает мгновенное изменение скорости функции f в точке с абсциссой a.

Средняя скорость изменения, мгновенная скорость изменения

Теперь пронаблюдаем, как при изменении положения секущей на кривой, средняя скорость превращается в мгновенную скорость.

На графике точки S_1, S_2, S_3, S_4, ... показывают изменение положения точки S в направлении точки T. Здесь, уменьшая значения Δx путем приближения к 0, точка S, меняя положение вдоль кривой, приближается к точке T, и, наконец, совпадает с ней.



При приближении точки S, остающейся на кривой, к точке T, предельное положение секущей TS (если оно существует), называется **касательной** к кривой в точке T. При $\Delta x \to 0$, предел углового коэффициента секущей, т.е. мгновенное изменение скорости функции $f(x)$ в точке $x=a$, равен угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $T(a, f(a))$.

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Пример 3. Найдем скорость свободного падения в момент $t = 2$ сек.

Решение: Зависимость между пройденным путем и временем t при свободном падении имеет вид: $s(t) = \dfrac{gt^2}{2}$. Здесь g ускорение свободного падения и $g \approx 10$ м/сек^2. Тогда можно написать $s \approx 5t^2$.

Через 2 секунды после начала движения в интервале Δt средняя скорость будет $\dfrac{5\cdot(2+\Delta t)^2 - 5\cdot 2^2}{\Delta t}$ м/сек.

В момент $t = 2$ скорость равна значению предела

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{5\cdot(2+\Delta t)^2 - 5\cdot 2^2}{\Delta t} = 5\cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(2+\Delta t)^2 - 2^2]}{\Delta t} = 5\cdot \lim_{\Delta t \to 0} (4+\Delta t) = 20 \text{ (м/сек)}$$

Пример 4. Дана функция $y = x^2 + 3x$. Найдите: a) среднюю скорость изменения при $1 \le x \le 3$; b) мгновенную скорость при $x = 2$.

Решение: a) При $a = 1$, $b = 3$ средняя скорость будет:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{[3^2 + 3\cdot 3] - [1^2 + 3\cdot 1]}{3-1} = \frac{14}{2} = 7$$

b) Найдем мгновенную скорость при $x = 2$

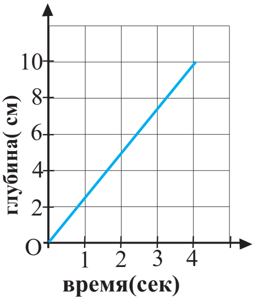
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 3\cdot(2+\Delta x) - (2^2 + 3\cdot 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 2\cdot 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\cdot 2 + 3\Delta x - 2^2 - 3\cdot 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 7) = 7 .$$

Обучающие задания

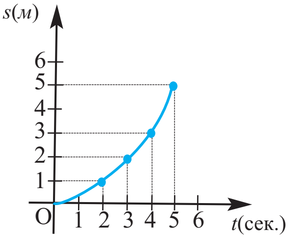
1. Автомат по продаже воды наполняет водой стакан за 4 секунды. График на рисунке, отображает зависимость изменения уровня воды в стакане от времени. Найдите скорость изменения уровня воды. Изменяется ли скорость на каком-либо интервале?



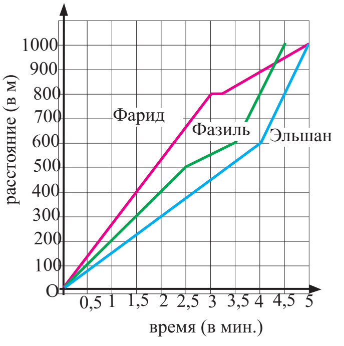
2. На рисунке представлена зависимость пройденного пути s от времени t.
1) Найдите среднюю скорость за следующие промежутки времени.

a) [0; 2] b) [2; 3] c) [4; 5] d) [0; 5]

2) Сравните полученные результаты с результатами 1-го задания. Обобщите результаты.



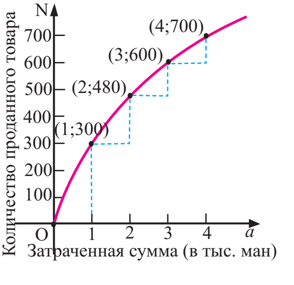
3. На графике представлен результат забега трех спортсменов на дистанции 1000 м.
a) Кто является победителем? Обоснуйте.
b) Для каждого спортсмена запишите информацию об изменении скорости на дистанции.



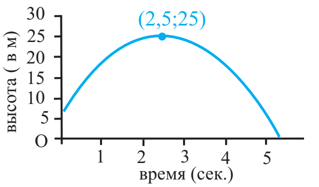
4. По графику найдите среднюю скорость изменения переменной на интервалах: a) $-3 \le x \le -1$; b) $-3 \le x \le 3$; c) $1 \le x \le 7$; d) $3 \le x \le 9$.

x	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
y	7	-5	-3	-1	5	12	21	48

5. График показывает как зависит количество проданного товара N(m) от суммы m (в тыс. манат), потраченной на его рекламу.
a) определите изменение N(m) на интервалах изменения m от 0 до 1; 1 до 2; 2 до 3; 3 до 4
b) Увеличивается или уменьшается средняя скорость при увеличении m ? Объясните на примере реальной ситуации.



6. Зависимость изменения высоты мяча от времени, брошенного вверх, представлена графически.



1) На какую максимальную высоты поднялся мяч?
2) С какой высоты был брошен мяч ?
3) На каком промежутке времени происходит уменьшение высоты?
4) Найдите среднюю скорость изменения высоты полета мяча на следующих промежутках (в сек.): a) от 0 до 1; b) от 3 до 4.

7. В море на нефтяной платформе произошла утечка нефти. За каждые 30 секунд радиус нефтяного пятна увеличивается на 1 м.

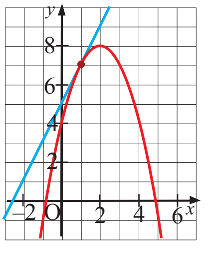
1) Составьте таблицу значений и постройте график зависимости площади распространения нефтяного пятна со 2- ой до 30 минуты.
2) Найдите среднюю скорость распространения нефтяного пятна за данный промежуток времени:
a) за первые 5 минут; b) следующие 10 минут; c) за первые 30 минут
3) Найдите разность скорости распространения на 5-ой и 20-ой минутах. Для чего пригодится данная информация?

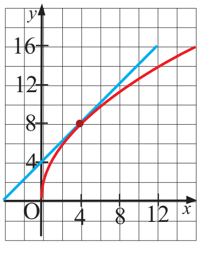
8. Заполните таблицу для каждой функции.
a) $f(x) = 4x^2$
b) $f(x) = -5x^2$
c) $f(x) = x^2 + x$
d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

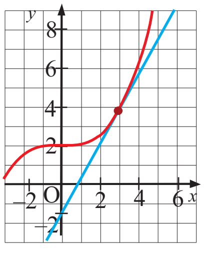
x	h	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
5	2	
5	1	
5	0,1	
5	0,01	

9. Найдите угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x) = 2^x$, проходящей через точки с абсциссами:
a) $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$;
b) $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

10. Определите приблизительно угловые коэффициенты касательных на рисунках. Какую скорость они выражают: мгновенную или среднюю?

a)


b)


c)


11. Функция $s(t) = t^2 + 3t + 2$ (s в метрах, t в секундах) выражает зависимость пути от времени прямолинейно движущегося тела. Найдите скорость тела в момент: a) $t = 1$; b) $t = 5$.

Производная функции

Необходимость вычисления мгновенной скорости изменения в расчетах Исаака Ньютона(1642-1727) и Готфрида Лейбница (1646-1716), привело к формировнию основного и мощного правила - дифференциального исчисления. Как результат, появилось понятие “производная”.

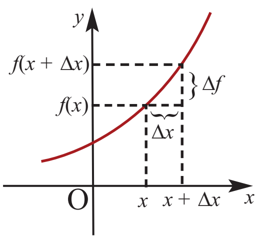
Исаак Ньютон(1642-1727)

Гортфрид Лейбниц(1646-1716)

Задачи на нахождение мгновенной скорости и углового коэффициента касательной имеют одинаковую суть и приводят к нахождению мгновенного изменения определенной функции. Теперь обобщим эти понятия.

Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;b)$. Отметим произвольную точку $x\in(a;b)$ и дадим аргументу такое приращение Δx, что $(x+\Delta x)\in(a;b)$.



Тогда функция соответственно получит приращение $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Производную функции $f'(x)$ также можно записать в виде $\frac{df}{dx}$ (запись по Лейбницу).

Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x, то в этом случае говорят, что функция $f(x)$ **дифференцируема** в данной точке. Если функция дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, то говорят, что она дифференцируема на этом интервале.

Нахождение производной функции называется **дифференцированием**.

Для нахождения производной, согласно определению, необходимо выполнить следующие шаги:

1. Находят $f(x+\Delta x)$.
2. Упрощается разность $f(x+\Delta x)-f(x)$.
3. Записывается и упрощается выражение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
4. Находится предел отношения при $\Delta x\to 0$: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Пример 1. Найдите производную $f'(x)$ функции $f(x) = kx + b$.

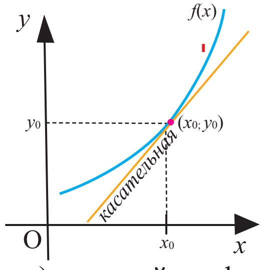
Решение:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x+\Delta x) + b - (kx+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k$$

В общем случае $\boldsymbol{(kx+b)' = k}$. Здесь при $k = 1$, $b = 0$ имеем: $\boldsymbol{(x)'=1}$

Геометрический смысл производной. Уравнение касательной

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в точке $(x_0; f(x_0))$ к графику функции можно провести касательную.



Значение производной функции в точке с абсциссой x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке с абсциссой x_0:

$$\boldsymbol{k_{кас} = f'(x_0)}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент которой равен k, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Учитывая, что абсцисса равна x_0, ордината равна $y_0 = f(x_0)$, угловой коэффициент равен $k = f'(x_0)$, уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}.$$

Пример 2. Для функции $f(x) = x^2$ найдите:

a) производную;

b) значения $f'(-3)$ и $f'(4)$;

c) уравнение касательной в точке с абсциссой $x = -3$.

Решение: a) По определению производная в точке x находится так:

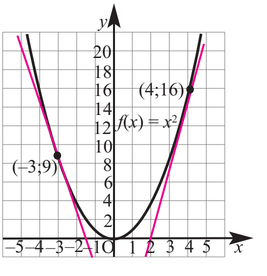
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$



Для функции $f(x) = x^2$ производной является $f'(x) = 2x$. Как видно, производной квадратичной функции является линейная функция: $\boldsymbol{(x^2)' = 2x}$.

b) Так как $f'(x) = 2x$, то $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$; $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$

c) Уравнение касательной запишем при помощи формулы уравнения прямой $y-y_0=k(x-x_0)$. Так как $f'(-3)=-6$, то угловой коэффициент касательной с в точке абсциссой $x_0=-3$ равен $k=-6$. Ордината точки на графике с абсциссой $x_0=-3$ равна $y_0=f(-3)=9$. Запишем данные значения в формулу. Получим уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0=-3$: $y-9=-6(x+3)$; $y-9=-6x-18$; $y=-6x-9$.

Согласно выполненным вычислениям можно сказать, что:

- В точке (–3; 9) угловой коэффициент касательной $k=-6$.
- В точке (4; 16) угловой коэффициент касательной $k=8$.
- В точке $x=-3$ значение мгновенной скорости изменения равно –6.
- В точке $x=4$ значение мгновенной скорости изменения равно 8.
- Уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0=-3$ имеет вид: $y=-6x-9$.

Пример 3. Для функции $f(x)=x^3$ найдите:
a) производную;
b) $f'(-1)$ и $f'(1{,}5)$.

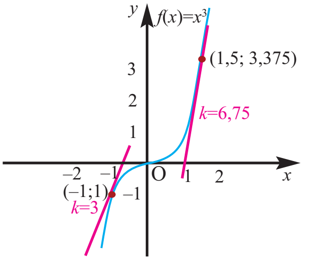
Решение:

a) 1. $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3= x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=(x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$$

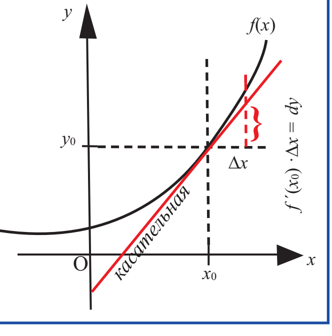
4. $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2$$



Значит, производная функции $f(x)=x^3$ является квадратичной функцией: $\mathbf{(x^3)'=3x^2}$.

b) Так как $f'(x)=3x^2$, то $f'(-1)=3\cdot(-1)^2=3$ $\qquad f'(4)=3\cdot(1{,}5)^2=6{,}75$

Выражение $f'(x_0)\cdot\Delta x$ называется дифференциалом функции и обозначается dy. Как видно, дифференциал функции зависит от Δx. Так как $x'=1$, то для функции $y=x$ получаем, что $dx=\Delta x$.
Поэтому дифференциал функции $f(x)$ обозначается как $df=f'(x)\,dx$. Дифференциал является главной (основной) частью приращения функции $\Delta f\approx f'(x)\cdot\Delta x$.

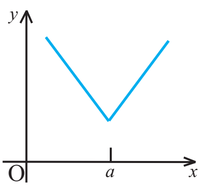


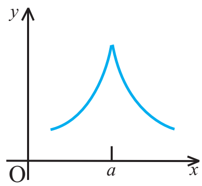
Точки, в которых функция не имеет производной.

Если функция дифференцируема в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta f \to 0$, т.е в этой точке функция непрерывна. Однако, обратное утверждение, вообще, не верно. Непрерывная функция в некоторых точках может не иметь производную.

Графически производная определяется как угловой коэффициент касательной. Кривая, которая имеет касательные в каждой точке, называется **гладкой кривой**. На графике могут быть точки, в которых, или невозможно провести касательную, или касательная вертикальна. В таких точках производная не существует. Ниже представлены примеры точек, не имеющих производных.

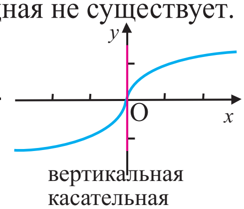
1) Для функций, график которых имеет вид “V” (функция $y = |x|$, некоторые кусочно - заданные функции и т.д.), в точках “преломления” является касательной, но не имеет производной при соответствующих значениях аргумента.





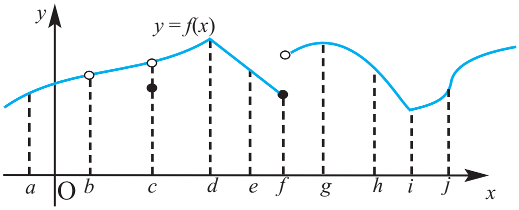
2) Если касательная вертикальна (совпадает или параллельна с осью y), в точке пересечения касательной с осью абсцисс производная не существует.

Например, касательная к графику функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ с абсциссой в точке $x_0 = 0$ является вертикальной прямой, и в этой точке функция не имеет производной.



3) В точках разрыва функция не имеет производную.

Пример 4. На рисунке дан график функции $y = f(x)$. При каких значениях аргумента, отмеченных на оси абсцисс, функция не имеет производной?



Решение: функция $y = f(x)$ не имеет производную в точках:

* b, c, f - точки разрыва функции;

* d и i - “точки преломления ;

* j - касательная вертикальная прямая.

Обучающие задания

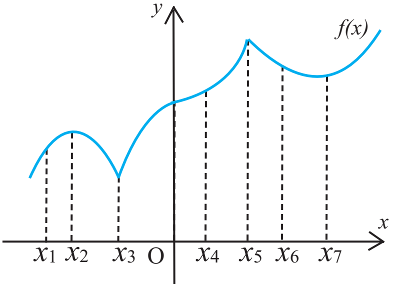
1. Нахождению производной какой функции соответствует каждая из следующих записей? Завершите вычислением предела.

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(x+h)^3 - 3x^3}{h}$

2. a) Найдите производную функции $y = x^2$. Запишите область определения и множество значений данной функции и функции производной.
b) Найдите производные функций $y = 2x^2$, $y = -3x^2$.

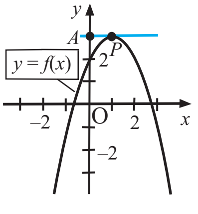
3. Выполните задания для следующих функций:
1) $f(x) = 3x^2$ 2) $f(x) = -2x^2$ 3) $f(x) = -2x + 5$ 4) $f(x) = x^3$
a) схематично изобразите график;
b) изобразите касательную к графику в точках с абсциссами –2; 0; 1 и определите прблизительно угловые коэффициенты касательных;
c) вычислите производную $f'(x)$ по определению при помощи предела;
d) найдите значение производной в точках пункта *b* и сравните с приблизительно найденным угловым коэффициентом касательной.

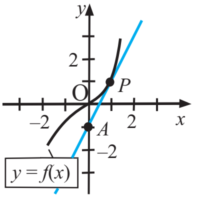
4. Для каких значений аргументов, указанных на оси абсцисс: 1) угловой коэффициент касательной к графику функции:
a) равен нулю;
b) больше нуля;
c) меньше нуля;
2) касательная не существует?

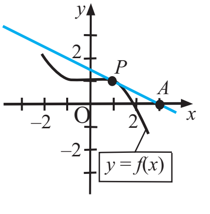


5. a) Изобразите какой-либо график, который не имеет касательную в точке с абсциссой $x = 5$.
b) Изобразите какой-либо график, который имеет горизонтальную касательную в точке с абсциссой $x = 2$.
c) Изобразите график, который имеет горизонтальную касательную в точках с абсциссами $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$ и не имеет касательной в точке $x = 2$.

6. На рисунках изображена касательная к графику функции в точке P с абсциссой $x = 1$. Точка A лежит на касательной. По угловому коэффициенту касательной, найдите $f'(1)$.

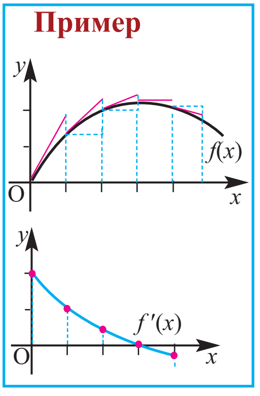
a)


b)


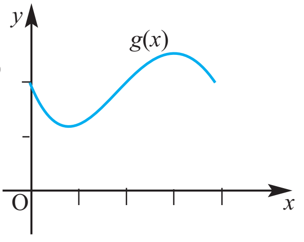
c)


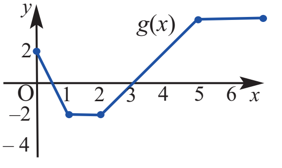
7. Найдите производную функции. Запишите уравнения касательных в заданных точках.

1)	$f(x) = x^2$	a) (2;4)	b) (0;0)	c) (10;100)
2)	$f(x) = x^3$	a) (–1;–1)	b) (2;8)	c) (–2;–8)

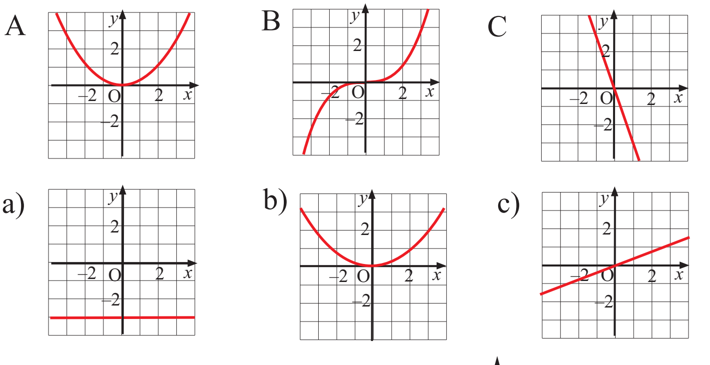
8. 

На примере слева показано, как по значению углового коэффициента касательной к графику функции $f(x)$ можно построить график производной функции $f'(x)$. Изучите пример и для функции $g(x)$ схематично изобразите график производной.

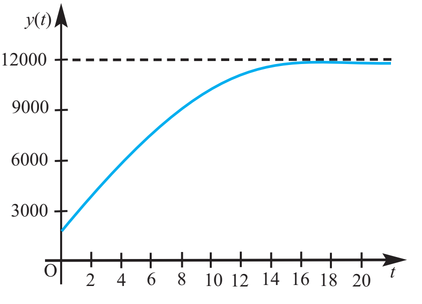
a) 

b) 

9. Установите соответствие между графиками функций A, B, C и графиками производных функций a, b, c.



10. При наблюдении за морскими обитателями были получены результаты прироста численности, которые представили в виде графика. Схематично изобразите график скорости прироста численности данных обитателей моря.



11. При испытании нового корма для телят в течении 6 недель, было установлено, что зависимость веса телят от данного корма выражается функцией $m(t) = \sqrt{t} + 40$. Вычислите предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t}$ и найдите еженедельную скорость изменения функции.

Правила дифференцирования

Используя определение производной, мы нашли производные некоторых степенных функций, например, $y = x^2$ и $y = x^3$.
Для нахождения производных используют следующие правила.

Производная константы	$C' = 0$
Производная степенной функции	$(x^n)' = n x^{n-1},\ n \in \mathrm{N}$
Производная произведения на константу	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Производная суммы (разности)	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

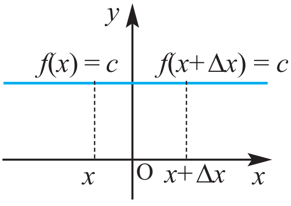
Докажем эти правила, используя определение производной.

1. Если $f(x) = c$, то $f'(x) = 0$, т.е. производная постоянной равна нулю.

Доказательство:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Это видно и по графику постоянной функции. В каждой точке графика угловой коэффициент равен нулю.



2. Если $n \in$ N и $f(x) = x^n$, то $f'(x) = n x^{n-1}$

Для функции $f(x) = x^n$ для значений $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ запишем соответствующие биномиальные разложения.

$$\begin{aligned}
(x+\Delta x)^1 &= x + \Delta x \\
(x+\Delta x)^2 &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \\
(x+\Delta x)^3 &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 \\
(x+\Delta x)^4 &= x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4
\end{aligned}$$

Как видно, в каждом разложении первый член x^n, а второй член $n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x$.
У каждого члена из желтого треугольника присутствует множитель $(\Delta x)^2$.
В упрощенной форме разложение бинома $(x + \Delta x)^n$ перепишем в виде:

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n$$

Запишем и упростим отношение, которое показывает изменение мгновенной скорости функции.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n - x^n}{\Delta x} =$$

$$=\frac{\Delta x\,(nx^{n-1}+\Delta x\cdot A_n)}{\Delta x}= nx^{n-1}+\Delta x\cdot A_n$$

Предел данного выражения при условии $\Delta x \to 0$ является производной функции $f(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(nx^{n-1}+\Delta x\cdot A_n)=n\cdot x^{n-1}$$

Значит, для любого натурального числа n

$$\boldsymbol{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}}$$

В частном случае, при $n = 1,2,3$ получаем

$$x'=1,\ (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2.$$

В общем случае, для функции $\boldsymbol{f(x)'=x^p}$, с любой действительной степенью верно равенство $\boldsymbol{(x^p)'=p\cdot x^{p-1}}$ для всех x, для которых правая часть имеет смысл.

В частном случае: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\ (x\neq 0);\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ (x>0).$

Пример 1. Найдите производную функций:

a) $y=x^4$; b) $y=\frac{1}{x^5}$; c) $y=\sqrt[4]{x}$;

Решение: a) $y'=(x^4)'=4x^3$;

b) $y'=\left(\frac{1}{x^5}\right)'=(x^{-5})'=-5x^{-6}=-5\cdot\frac{1}{x^6}=-\frac{5}{x^6}$;

c) $y'=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;

3. **Если $f(x)$ дифференцируема, то функция $c\cdot f(x)$, где c-постоянная, тоже дифференцируема и $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$,**

т.е. постоянную можно вынести за знак производной.

$$[c\cdot f(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\cdot f'(x)$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то их сумма (разность) также дифференцируема и $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$.

Доказательство: докажем, что формула верна для $h(x)=f(x)+g(x)$

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

Правила дифференцирования

Пример 2. Найдите производную функции $f(x) = x^3 - 2x + 3$.
Решение: $f'(x) = (x^3 - 2x + 3)' = (x^3)' - (2x)' + (3)' = 3x^2 - 2$

Пример 3. Найдите производную $\frac{d}{dx}(3\sqrt{x} + \frac{2}{x})$
Решение:

$$\frac{d}{dx}\left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) = \frac{d}{dx}(3\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) = 3\frac{d}{dx}(x^{1/2}) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1}) =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - 2x^{-2} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$$

Обучающие задания

1. Сначала выберите функции, производная которых равна нулю, а затем найдите производную остальных функций.

$f(x) = \sqrt{11}$ | $f(x) = 2x^{-2}$ | $f(x) = 4{,}5\pi$ | $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ | $f(x) = \frac{5}{x^3}$

2. Найдите производную функции.

a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{4}x^2$ c) $y = x^5$ d) $y = -3x^4$

e) $y = 1{,}5x^3$ f) $y = \sqrt[5]{x^3}$ g) $y = \frac{5}{x}$ h) $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$

3. Найдите производную функции.

a) $f(x) = 2x^2 + x^3$ b) $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x$ c) $b(t) = -1{,}1t^4 + 78$

e) $p(x) = \frac{x^2}{4} - 2\sqrt{x}$ d) $V(r) = \frac{4}{2}\pi r^3$ f) $k(s) = -\frac{1}{s^2} + 7s^2$

4. Найдите производную.

1) $\frac{d}{dx}(5x^2 - 7x + 3)$ 2) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x}\right)$ 3) $\frac{d}{dx}\left(-\sqrt[4]{x^3}\right)$ 4) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

5. Упростите выражения функции и найдите их производную.

a) $f(x) = (x - 3)(x + 1)$ b) $f(x) = x^2 \cdot (3 - x)$ c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - 2\sqrt{x})$

d) $y = \frac{x^3 + x + 2}{x}$ e) $y = \frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^2}$ f) $y = \frac{3x^4 - 6x^3}{x - 2}$

6. Найдите значение производной в заданных точках.

a) $f(x) = x^3 + 4x$, $x = 0$, $x = 2$ b) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$

7. При каких значения x производная функции равна нулю?

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2$

8. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

a) $f(x) = x + \frac{x^2}{4}$; b) $f(x) = 3x^2 - x^3$

9. Для функции $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$ сначала упростите выражение, а затем вычислите производную.

10. Дана функция $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 2$. Найдите a и b, зная что $f(2) = 10$ и $f'(-1) = 14$.

11. Задайте формулой хотя бы одну функцию, производная которой равна:

a) 2; b) $2x + 3$; c) $3x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

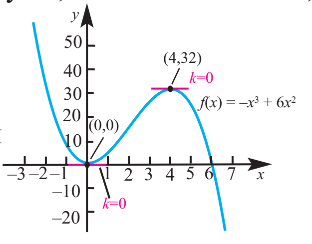
Прикладные задания. ***Уравнение касательной. Угловой коэффициент.***

Пример. a) В каких точках касательные к графику функции $f(x) = -x^3 + 6x^2$ параллельны оси абсцисс?

b) Определите координаты точки, в которой угловой коэффициент касательной к графику равен 9.

Решение: a) Если касательная параллельна оси абсцисс, то угловой коэффициент равен нулю.

Точки, в которых угловой коэффициент равен нулю, являются точками, в которых производная равна 0, т.е. $f'(x) = 0$.



Найдем производную функции $f(x) = -x^3 + 6x^2$

$$f'(x) = (-x^3 + 6x^2)' = -3x^2 + 12x$$

Определим точки, в которых производная равна нулю. $-3x^2 + 12x = 0$, $\quad -3x(x-4) = 0$

$x = 0 \qquad x = 4$

Находим значения функции в этих точках:

$f(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0$; (0; 0) $\qquad f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = 32$; (4; 32)

На графике функции, построенном при помощи графкалькулятора, видно, что в точках (0;0) и (4;32) касательная к графику параллельна оси абсцисс.

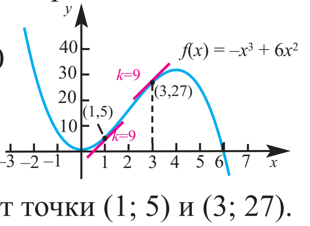
b) Найдем точки, в которых угловой коэффициент равен 9:

$-3x^2 + 12x = 9 \qquad -3x^2 + 12x - 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad (x-1)(x-3) = 0$

$x = 1$; $\quad y = 5$; $\qquad$ (1; 5)

$x = 3$; $\quad y = 27$ $\qquad$ (3; 27)



По графику также видно, что им соответствуют точки (1; 5) и (3; 27).

12. Покажите, что к графику функции $f(x) = 6x^3 + 2x^2$ невозможно изобразить касательную, угловой коэффициент которой равен $k = -5$.

13. Существуют ли горизонтальные касательные следующих функций?

1) $y = x^2 - 3$ $\qquad$ 2) $y = -x^2 + 4$ $\qquad$ 3) $y = -x^3 + 1$

4) $y = x^3 + 2x$ $\qquad$ 5) $y = 3x^2 - 5x + 4$ $\qquad$ 6) $y = 5x^2 - 3x + 8$

14. Для функции $y = -3x^4 + 2x^3 + 5$ найдите угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и запишите уравнение касательной.

15. Найдите точки, в которых угловой коэффициент касательной к графикам следующих функций равен 1.

1) $y = 20 - x^2$ 2) $y = 5x - x^2$ 3) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 10x$

16. a) Для функций $f(x) = 3x^2$ и $g(x) = x^3$ найдите такие значения x, при которых угловые коэффициенты касательных к графикам каждой из двух функций равны. b)Запишите уравнения касательных в точках,найденных в пункте *a* .

17. На параболе $y = x^2 - x + 1$ найдите такую точку, в которой касательная к параболе параллельна прямой $y = 3x + 2$. Запишите уравнение касательной в этой точке

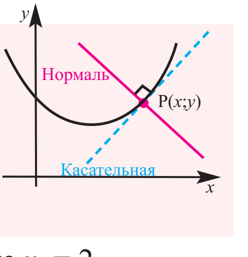
18. Найдите угловой коэффициент касательной в точках пересечения параболы $y = 4x - x^2$ с осью абсцисс.

19. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2$, которая проходит через точку (1;–5).

20. a) Найдите производные функций $g(x) = x^3$, $p(x) = x^3 - 3$, $q(x) = x^3 + 2$.
b) Обобщите свое мнение о производной для функций $f(x) = x^3 + c$, где c-постоянная.
c) Существует ли среди этих функций такая функция, что $f'(x) = 3x^2$ и при x =0 имеет место $f(0) = -2$. Найдите эту функцию.

21. Функции f и g являются функции-многочлены, которые удовлетворяют условиям $f'(x) = g'(x)$ и $f(0) = 1$, $g(0) = 2$. Запишите свое мнение о том, существуют ли точки пересечения графиков данных функций.

22. **Взаимосвязь.** *Нормалью, проведенной к графику функции в точке (x,y), называется перпендикуляр к касательной в этой точке.*



a) Определите угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = 2$ к графику функции
$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 5$
b)Запишите уравнение нормали функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.

23. Парашютист совершил прыжок с самолета, находящегося на высоте 2500 м. Высоту, на которой будет находится парашютист через t секунд, можно найти по формуле $h(t) = 2500 - 5t^2$.

a) Найдите скорость изменения высоты на 5 секунде.
b) Парашют спортсмена раскрылся на высоте 1000 м. В какой момент это произошло?
c) Чему равна скорость изменения высоты для значения, найденного в пункте b?

Производная произведения

Для нахождения производной функции в виде $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 4)$ можно записать функцию в виде многочлена и применить известные нам правила дифференцирования. Однако для функций, заданных в виде произведения, существует более эффективное правило нахождения производной.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то их произведение также дифференцируемо и $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Доказательство: Пусть $p(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$p'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

Прибавив и отняв в числителе дроби член $f(x+\Delta x)\cdot g(x)$, для членов $f(x)$ и $g(x)$ дробь можно записать в виде суммы двух дробей.

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x) + f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Пример. Найдите производную функции $p(x) = (2x - 1)(x^2 - 5)$

Решение:

$f(x) = 2x - 1,\ \ g(x) = x^2 - 5$ — *каждый множитель записывается как одна функция*

$f'(x) = 2,\ \ g'(x) = 2x$ — *для каждой функции находится производная*

$p'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ — *применяется правило дифференцирования произведения*

$p'(x) = 2(x^2 - 5) + 2x\,(2x - 1) =$ — *принимаются во внимание соответствующие выражения*

$= 2x^2 - 10 + 4x^2 - 2x =$ — *упрощается*

$= 6x^2 - 2x - 10$

Решение можно проверить, предварительно упростив вражение функции:

$p(x) = (2x - 1)(x^2 - 5) = 2x^3 - 10x - x^2 + 5 = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$

$p'(x) = (2x^3 - x^2 - 10x + 5)' = 6x^2 - 2x - 10$

Правила дифференцирования

Обучающие задания.

1. Найдите производную функций.

a) $f(x) = (x - 4)(2x + 1)$ c) $p(x) = (x^3 - 1)(3x^2 + 8)$

b) $h(x) = (5x^2 + 3)(1 - 2x)$ d) $g(x) = (2x^2 + 1)(4 + 3x^3)$

2. Найдите производную функций двумя способами: при помощи правила дифференцирования произведения и упростив произведение. Сравните полученные результаты.

$m(x) = x^3 \cdot x^{-2}$ | $y(x) = 5x^2\,(3x - 2)$ | $h(x) = (3x + 2)(5x^2 - 2x + 3)$

3. Запишите уравнение касательной к графику функции в данной точке.

$f(x) = (2x - 1)(x + 4)$ $(1;5)$ $g(x) = (x - 1)(x - 2)$ $(-1;6)$

4. Найдите производную функции $f(x) = kg(x)$ используя правило дифференцирования произведения. Одинаковы ли полученный вами результат и правило дифференцирования произведения функции на постоянную?

5. Зная, что $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ и $f(3) = 7, f'(3) = 12, g(3) = 8, g'(3) = 5$, найдите значение $h'(3)$.

6. Производная функции $p(x)$ задана в виде $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Определите функцию $p(x)$ для каждого случая.

a) $p'(x) = (6x^2 + 8)(3x^2 - 4x) + (2x^3 + 8x)(6x - 4)$

b) $p'(x) = (6x^2 - 1)(0{,}5x^2 + x) + (2x^3 - x)(x + 1)$

7. Запишите уравнение касательной к графику каждой функции в точке с заданной абсциссой.

a) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$, $x_0 = -2$ b) $g(x) = (2x^2 - 1)(-x^2 + 3)$, $x_0 = 2$

c) $h(x) = (x^4 + 4)(2x^2 - 6)$, $x_0 = -1$ d) $p(x) = (-x^3 + 2)(4x^2 - 3)$, $x_0 = 1$

8. Определите, в какой точке угловой коэффициент касательной к графику функции, равен заданному значению.

a) $y = (-4x + 3)(x + 3)$, $k = 0$ b) $y = (5x + 7)(2x - 9)$, $k = 9$

c) $y = (2x - 1)(-4 + x^2)$, $k = -4$ d) $y = (x^2 - 2)(2x + 1)$, $k = 4$

Задания на взаимосвязь

9. Найдите производную функций, используя правило дифференцирования произведения. Какое правило можно установить, опираясь на полученные результаты?

a) $y = (x^2 + 2x)^2$ b) $y = (2x^3 - x)^2$ c) $y = (x^4 - 3x^2)^2$

10. При простое горючее из топливного бака улетучивается. Количество оставшегося в баке горючего через t часов можно смоделировать по формуле $V(t) = 90(1 - \frac{t}{18})^2$.

a) Сколько литров горючего было в топливном баке в момент, когда началась утечка?

b) С какой скоростью улетучивается горючее через 12 часов?

c) С какой скоростью происходит утечка в момент, когда в баке 40л?

Производная частного

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g(x) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема и имеет место равенство:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Доказательство:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} - \frac{f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)}\right] \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right] - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g(x)}\, f'(x) - \frac{f(x)}{[g(x)]^2}\, g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

В частном случае, $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$

Пример. Найдите производную функции $h(x) = \frac{3x - 2}{4x + 3}$

Решение: $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 4x + 3$ *числитель и знаменатель записываются как отдельные функции*

$f'(x) = 3$, $g'(x) = 4$ *находится производная каждой функции*

$h'(x) = \frac{3 \cdot (4x + 3) - (3x - 2) \cdot 4}{(4x + 3)^2}$ *применяется правило дифференцирования частного*

$= \frac{12x + 9 - 12x + 8}{(4x + 3)^2} = \frac{17}{(4x + 3)^2}$ *учитываются соответствующие выражения* *упрощается*

Обучающие задания

1. Найдите производную функции.

1) $f(x) = \frac{6x + 1}{3x + 10}$ 2) $f(x) = \frac{8x - 11}{7x + 3}$ 3) $y = \frac{5 - 3t}{4 + t}$

4) $y = \frac{x^2 - 4x}{x + 3}$ 5) $y = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ 6) $f(t) = \frac{4t^2 + 11}{t^2 + 3}$

2. Найдите производную функции, сначала применив правило дифференцирования частного, а затем, упрощая выражение и применив к нему правило нахождения производной для многочлена. Обратите внимание на равенство результатов.

a) $y = \dfrac{x^4}{x^3}$ b) $y = \dfrac{x^6}{x^4}$ c) $y = \dfrac{t^2 - 16}{t + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^5 + x^2}{x}$ e) $g(x) = \dfrac{3x^7 - x^3}{x}$ f) $h(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 3}$

3. Даны функции $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

a) Найдите $f'(x)$. b) Найдите $g'(x)$.

c) По результатам запишите схожие и отличительные особенности.

4. 1) Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ в точках: a) (0;2); b) (–2;1).

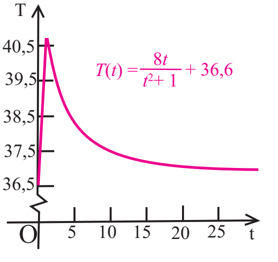
2) Запишите уравнение касательной к графику функции $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 2}$ в точках с абсциссами: a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = \dfrac{1}{4}$

5. При нахождении производной функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3}$ в решении была допущена ошибка. Найдите ошибку и запишите правильное решение.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x^3}\right)' = x^3(2x) - (x^2 - 4)(3x^2) = 2x^4 - 3x^4 + 12x^2 = -x^4 + 12x^2$$

6. Зависимость температуры больного от времени можно смоделировать следующей функцией.

$$T(t) = \frac{8t}{t^2 + 1} + 36{,}6$$



Найдите мгновенную скорость изменения температуры в момент $t = 2$ часам.

7. Исследования показывают, что зависимость между количеством собранных деталей новым работником и количество дней, затраченных на его обучение, моделируется функцией:

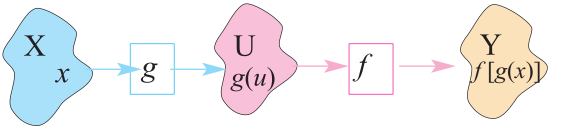
$$N(t) = \frac{100t^2}{3t^2 + 10}$$

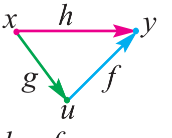
a) Определите функцию скорости сборки деталей работником в любой день.

b) Найдите значения $N'(2)$ и $N'(10)$ и объясните соответствующую ситуацию.

Производная сложной функции

Пусть заданы функции $u = g(x)$, $x \in X$ и $y = f(u)$ $u \in U$ и $E(g) \subset D(f)$. Тогда можно определить сложную функцию $h(x) = f(g(x))$.





$h = f \circ g$

Рассмотрим примеры: 1) Для функции $u = g(x) = 3x + 1$, при $f(u) = u^2$ задайте сложную функцию $y = f(g(x))$ и представьте ее в виде многочлена. $y = f(g(x)) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$

2) Найдите производную этой функции и запишите ее в виде
$$y' = 18x + 6 = 2\cdot(3x + 1)\cdot 3$$
3) Зная, что $f'(u) = 2u$ и $g'(x) = 3$, проверьте справедливость равенства
$y' = f'(u)\cdot g'(x)$

Цепное правило нахождения производной сложной функции:

Пусть, на определенном интервале задана сложная функция $y = h(x) = f(g(x))$ и функция g дифференцируема в точке x, а функция f дифференцируема в точке $u = g(x)$. Тогда сложная функция h также дифференцируема в точке x и для ее производной справедлива формула
$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$
На самом деле, так как функция g дифференцируема в точке x, то при $\Delta x \to 0$ получим,что $\Delta u \to 0$.
$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\cdot g'(x)$$

учитывается, что $\Delta u \neq 0$

Таким образом $\boldsymbol{h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)}$.

Учитывая, что $u = g(x)$, $y = f(u)$ последнее равенство можно записать при помощи записи Лейбница в виде
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
В частном случае, если $g(f(x)) = (f(x))^n$, то
$$\boldsymbol{((f(x))^n)' = n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)}$$
При $f(x) = kx + b$, получим: $\boldsymbol{((kx + b)^n)' = n\cdot(kx + b)^{n-1}\cdot k}$

Пример 1. Найдите производную функции $h(x) = (5x^2 + 3)^4$.
Решение: обозначим $u = 5x^2 + 3$ и $f(u) = u^4$. Тогда заданная функция является композицией этих функций, т.е. сложной функцией и

$$h'(x) = f'(u)\cdot u'(x) = 4u^3\cdot 10x = 40x\cdot(5x^2+3)^3$$

Пример 2. Найдите производную функции $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2}$.
Решение: обозначим $u = 3x^2 + 2$, тогда $f(u) = \sqrt{u}$ и $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

Так как $u'(x) = 6x$, то получим $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+2}}$.

Пример 3. Найдите производную функции $f(x) = 3x(2x - 1)^2$.
Решение: как видно, здесь надо применить как правило дифференцирования сложной функции, так и правило дифференцирования произведения $f'(x) = (3x(2x-1)^2)' = (3x)'\cdot(2x-1)^2 + 3x\cdot((2x-1)^2)' =$

$$= 3\cdot(2x-1)^2 + 3x\cdot 2\cdot(2x-1)\cdot 2 = 3\cdot(2x-1)^2 + 12x\cdot(2x-1) =$$
$$= 12x^2 - 12x + 3 + 24x^2 - 12x = 36x^2 - 24x + 3$$

Обучающие задания

1. Заполните таблицу.

$h(x)=f(g(x))$	$u=g(x)$	$f(u)$	$u'(x)$	$f'(u)$	$h'(x)$
a) $(6x-1)^2$	$6x-1$	u^2	6	$2u$	$12\cdot(6x-1)$
b) $(x^2+3)^3$					
c) $(2-x^3)^4$					
d) $(-3x+4)^{-1}$					

2. Найдите производную функции.
a) $f(x) = 3\cdot(4x+1)^5$ b) $f(x) = (3x^2-1)^4$ c) $f(x) = (x^2-x)^{-3}$

3. Найдите производную функции, выразив ее в виде степени с положительным показателем.

a) $y = \sqrt{5x-1}$ b) $y = \sqrt[3]{2x+1}$ c) $y = \sqrt{x^2+3}$

4. Найдите производную функции, выразив ее в виде степени с отрицательным показателем.

a) $y = \dfrac{5}{(3-2x)^2}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ c) $y = \dfrac{1}{(3x^2-2)^2}$

5. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ запишите сложные функции $h(x) = f(g(x))$ и $z(x) = g(f(x))$ и найдите их производные.

a) $f(x) = x^3$; $g(x) = 6x - 1$ b) $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 1$

6. Найдите:
a) $f'(2)$, если $f(x) = (2x-1)^3$
b) $f'(1)$, если $f(x) = (4-3x)^4$
c) $f'(-2)$, если $f(x) = \sqrt{x^2-3}$

7. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 \cdot (5-4x)^3$ в точке $x = 1$.

8. Дана функция $f(x) = x \cdot (2x-1)^4$. Решите:
a) уравнение $f'(x) = 0$; b) неравенство $f'(x) < 0$.

9. 1) Сначала найдите производную функции, при помощи правила дифференцирования частного, а затем, представив выражение в знаменателе в виде степени с отрицательным показателем, применив правило дифференцирования сложной функции.

a) $q(x) = \dfrac{1}{3x+5}$ b) $q(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ c) $g(x) = \dfrac{6}{7x^2+1}$

2) Запишите правило дифференцирования частного, используя производную сложной функции.

10. Запишите уравнение касательной в точке с заданной абсциссой.
a) $f(x) = \sqrt{x^2+16}$; $x_0 = 3$ b) $f(x) = (x^3+7)^{2/3}$; $x_0 = 1$

11. Найдите абсциссы точек, в которых касательные к графикам функций параллельны оси абсцисс.
a) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+7)^4}$

Прикладные задания

Пример 1. Прибыль от вклада, вложенного в банк под сложный процент на 10 лет с процентной ставкой r % , вычисляется ежемесячно. Сумму вклада через 10 лет можно рассчитать по формуле:

$$S(r) = 500\left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{120}$$

a) Запишите функцию $S'(r)$, которая поможет определить увеличении суммы вклада $S(r)$ в зависимости от процента.
b) Найдите прибыль при $r = 5$ и $r = 7$.

Решение: **a)** $S'(r) = \left(500\left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{120}\right)' =$

$= 500 \cdot 120 \left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{119} \cdot \dfrac{1}{1200} =$ *правило дифференцирования сложной функции*

$= 50\left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{119}$ *упрощаем*

b) прибыль (ежемесячная) через 10 лет при $r = 5$

$$S'(5)= 50\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{119} \approx 82{,}01 \ \text{манат}$$

прибыль (ежемесячная) через 10 лет при $r = 7$

$$S'(7)= 50\left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{119} \approx 99{,}90 \ \text{манат}$$

12. Зависимость скорости прямолинейно движущего тела от времени (м/сек.) имеет вид $v(t) = 2t + 1$. Кинетическая энергия тела массой m вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$. Найдите $\dfrac{dE}{dt}$.

13. Бизнес. Количество проданных электронных устройств нового поколения в зависимости от времени вычисляется по формуле.

$$N(t) = \frac{250\,000t^2}{(2t+1)^2}, \ t > 0$$

a) Найдите производную функции и объясните ситуацию соответствующую данной функции.

b) Найдите значения производной $N'(100)$ и $N'(500)$ и объясните соответствующую ситуацию.

14. Финансы. 1000 манат вложены в банк под сложный процент на 5 лет с процентной ставкой r ежеквартально. Сумма прибыли через 5 лет задается зависимостью от процентной ставки в виде:

$$S(r) = 1000\left(1 + \frac{r}{400}\right)^{20}$$

a) Найдите производную $\dfrac{dS}{dr}$ и объясните соответствующую ситуацию.

b) Найдите ежеквартальное изменение суммы вклада через 5 лет при $r = 4\%$; $r = 7\%$; $r = 12\%$.

15. Распространение утечки нефти. На нефтяной скважине, расположенной в прибрежной зоне, произошла утечка, которая распространяется по закону $r(t) = t^2$ зависимости радиуса от времени в виде круга. $S(r) = \pi r^2$ выражает площадь круга радиуса r. Здесь t измеряется в секундах, а r в дециметрах.

a) Запишите функцию $S[r(t)]$ и объясните ситуацию.

b) Найдите функцию $S'(t)$ и объясните ситуацию.

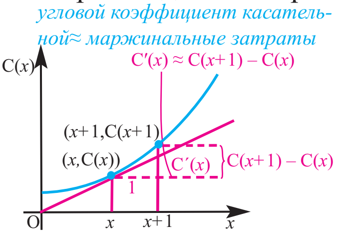
c) Найдите значение $S'(100)$ и объясните ситуацию.

Решение задач при помощи производной

При решении ряда экономических задач используют термин “маржинал”, который отражает скорость изменения экономических показателей.

При этом приняты следующие обозначения:
x - количество единиц произведенной (или выпущенной) продукции,
$C(x)$ - функция затрат на производство (или выпуск) x единиц продукции,
$R(x)$ - функция общей выручки от продажи x единиц продукции,
$P(x)$ - функция прибыли от продажи x единиц продукции: $P(x) = R(x) - C(x)$.

Маржинальные затраты на производство – изменение затрат на призводство продукции в заданный момент. Другими словами, это дополнительные затраты на производство (выпуск) каждой дополнительной единицы продукции. Обозначим через $C(x)$ затраты на производство товара в количестве x единиц, тогда для $x + 1$ единицы затраты будут $C(x + 1)$. Разность $C(x+1) - C(x)$ показывает себестоимость $(x + 1)$-го товара. Эта разность показывает прирост затрат и называется маржинальными затратами на производство. Объем маржинальных затрат равен угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(x;C(x))$, другими словами, производной функции в точке x. Т.е. значение производной $C'(x)$ функции $C(x)$ выражает изменение себестоимости $x + 1$ -го товара. Маржинальные затраты используется для приблизительного определения себестоимости.



Маржинальная выручка. $R'(x)$ изменение выручки в заданный момент в зависимости от количества проданного товара. Другими словами, показывает выручку от продажи каждой дополнительно произведенной (выпущенной) единицы продукции.

Маржинальная прибыль. $P'(x)$ изменение (скорость) полученной прибыли в заданный момент в зависимости от количества проданного товара. Другими словами, прибыль полученную от каждой дополнительно произведенной (выпущенной) единицы продукции.

Пример. Фирма по производству радиаторов может смоделировать затраты на производство x радиаторов функцией $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, а выручку, полученную при продаже радиаторов в количестве x штук функцией $R(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$.

a) Чему равна себестоимость каждого следующего радиатора, произведенного после 10? b) Найдите прибыль, полученную от продажи каждого следующего радиатора после 10 штук проданных.

Решение: $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ - функция, моделирующая затраты.
Производная $C'(x)$ функции $C(x)$ дает возможность найти, приблизительно, в любой момент времени (в зависимости от количества произведенной продукции), затраты на производство радиаторов.

a) $C'(x) = (x^3 - 6x^2 + 15x)' = 3x^2 - 12x + 15$; $C'(10) = 3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10 + 15 = 195$
Т.е. после производства 10 радиаторов, себестоимость каждого следующего радиатора равна 195 ман.
b) Производная $R'(x)$ функции $R(x)$ позволяет в любой момент (в зависимости от количества) найти выручку от продажи.

$$R'(x) = (x^3 - 3x^2 + 12x)' = 3x^2 - 6x + 12$$
$$R'(10) = 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 12 = 252 \text{ манат}$$

16. Пусть $C(x) = 4x + 10$, $R(x) = 50x - 0{,}5x^2$:
a) запишите функцию прибыли $P(x)$;
b) найдите значения $C(40)$, $R(40)$, $P(40)$;
c) запишите производные $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$;
d) найдите значения $C'(40)$, $R'(40)$, $P'(40)$.

17. **Маржинальные затраты на производство.** Пусть затраты на производство стиральных машин в количестве x единиц моделируются функцией $C(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$
a) Какова средняя цена $(C(x)/x)$ стиральной машины при производстве 100 штук?
b) Чему равна маржинальная цена (себестоимость) одной стиральной машины при производстве 100 штук?
c) Покажите, что маржинальная себестоимость (цена) при производстве 100 стиральных машин приблизительно равна цене 101-й стиральной машины.

18. **Маржинальная выручка.** Общую выручку от продажи x единиц складных столов можно смоделировать функцией

$$R(x) = 20x - \frac{x^2}{500}$$

a) Найдите маржинальную выручку от продажи 1000 столов.
b) Найдите маржинальную выручку 1001-го стола по формуле $R(1001) - R(1000)$
c) Сравните результаты, полученные в пунктах a и b.

19. **Маржинальная прибыль.** Прибыль, полученная фирмой за неделю от производства и продажи x единиц станков, выражается функцией
$P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3x^2 + 600x - 800$.
В настоящий момент фирма за неделю продает 9 станков.
b) Если продажа снизится до 8 станков в неделю, как уменьшится еженедельная прибыль?
c) Найдите маржинальную прибыль за 9 станков.
d) Используя результаты пунктов a и c определите, приблизительно, прибыль от продажи 10 станков.

Производная второго порядка. Пройденный путь, скорость, ускорение.

Пусть для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке существует производная $f'(x)$. Если функция $f'(x)$ является дифференцируемой функцией, то ее производная для функции $f(x)$ называется производной второго порядка и обозначается как $f''(x)$.

Известно, что производная показывает мгновенное изменение. Мгновенное изменение пройденного пути в зависимости от времени является скоростью. Отсюда становится ясным физический смысл производной. При прямолинейном движении по закону $s(t)$, мгновенная скорость равна производной функции $s(t)$:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Скорость также изменяется в зависимости от времени. Изменение скорости выражается новой величиной, называемой ускорением. Вообще, находя производную функции зависимости пройденного пути от времени, находят функцию скорости. Находя производную от функции скорости получаем ускорение.Т.е. получая два раза подряд производную от функции пройденного пути можно найти ускорение:

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$$

Из физики известно, что и скорость, и ускорение являются векторными величинами. Если скорость и ускорение имеют одинаковые знаки, то движение ускоренное, если знаки разные, то движение замедленное.
Производная второго порядка используется для решения ряда экономических задач, в том числе задач, моделирующих реальные жизненные ситуации. Умение приблизительно определить является ли скорость изменения положительной или отрицательной имеет важное практическое значение.

Пример 1. Найдите производную второго порядка y''.

a) $y = x^4 + 3x^2 - 5x$ b) $y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$

Решение:

a) $y' = (x^4 + 3x^2 - 5x)' = 4x^3 + 6x - 5$ *находим производную первого порядка*

$y'' = (4x^3 + 6x - 5)' = 12x^2 + 6$ *находим производную второго порядка*

b) $y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$

$y' = (2{,}5(x^2 - 2x)^2)' = 5(x^2 - 2x)(x^2 - 2x)'$

$= 5(x^2 - 2x)(2x - 2) = 10x^3 - 30x^2 + 20x$ *находим производную первого порядка, используя правило дифференцирования производной сложной функции*

$y'' = (10x^3 - 30x^2 + 20x)' = 30x^2 - 60x + 20$ *находим производную второго порядка*

Пример 2. Для функции пройденного пути $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, зависящей от времени t (t время в сек., s расстояние в м, $t \geq 0$), исследуйте связь между функциями расстояния, скорости и ускорения.

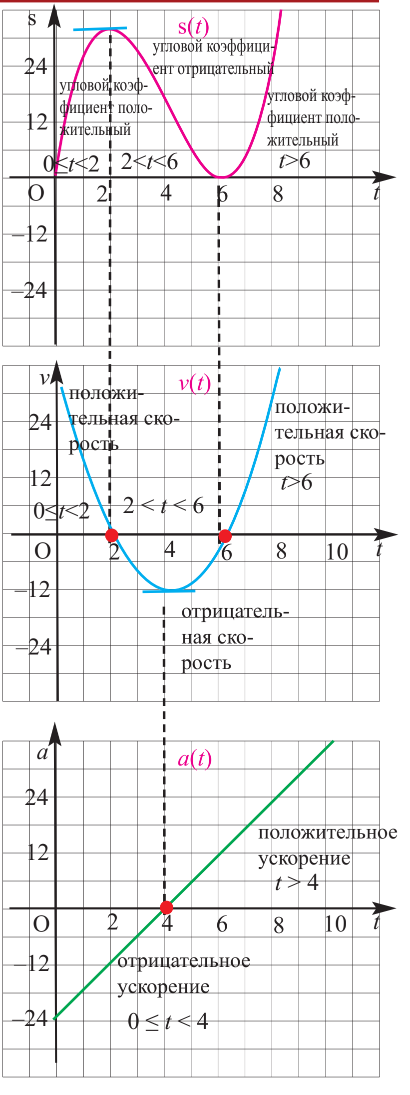
Решение:

Из графика $s(t)$ видно, что угловой коэффициент касательной функции в точках $t = 2$ и $t = 6$ равен нулю. Т.е. функция производной в соответствующих точках обнуляется.

В интервалах (0; 2) и (6; 8) угловой коэффициент касательной к графику функции $s(t)$ положителен и функция $v(t)$ также положительна (расположена выше оси t). В интервале (2;6) угловой коэффициент касательной отрицателен и функция $v(t)$ также отрицательна (расположена ниже оси t).

Из графика функции $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ видно, что в $t = 4$ угловой коэффициент касательной равен нулю. Эта точка является точкой пересечения графика функции $a(t)$ с осью абсцисс.

На интервале [0; 4) угловой коэффициент касательной к графику функции $v(t)$ отрицателен, а на интервале (4; 8) угловой коэффициент положителен и функция $a(t) = v'(t) = 6t - 24$ на интервале [0; 4) принимает отрицательные значения; а на интервале (4; 8) - положительные значения.



Обучающие задания

1. Для следующих функций найдите производную второго порядка.

1) $y = 7x + 2$ 2) $y = 6x - 3$

3) $y = 4x^2 + 3x - 1$ 4) $y = 4x^2 - 5x + 7$

5) $y = 5x^3 + 4x$ 6) $y = 2x^4 - 5x$

7) $y = x^4 - 7$ 8) $y = 7x + 2$

9) $y = \dfrac{1}{x^2}$ 10) $y = \dfrac{1}{x^3}$

11) $y = \sqrt{x}$ 12) $y = \sqrt[4]{x}$

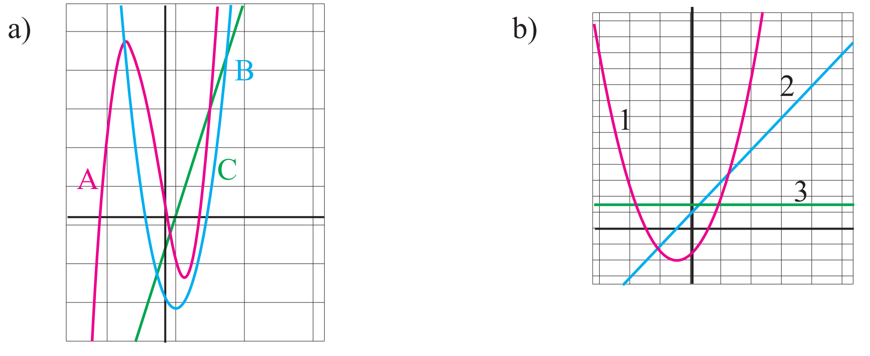
2. Для следующих функций найдите $f''(2)$.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 6$
2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5$
3) $f(x) = (3x^2 + 2)(1 - x)$
4) $f(x) = (6x - 5)(x^2 + 4)$

3. Для следующих функций найдите y'' .

1) $y = (x^2 + 3)(4x - 1)$ 2) $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$ 3) $y = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$

4. По рисункам установите соответствие между графиками и функциями пути $s(t)$, скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$.



5. Высоту, на которой находится тело, брошенное вертикально вверх, можно задать функцией $h(t) = -0{,}5gt^2 + v_0t + h_0$. Здесь $g \approx 9{,}8$ *м/сек*^{2} ускорение свободного падения, v_0 - начальная скорость *м/сек*, h_0 - высота, на которую подброшено тело в *м*, t - время в *сек*.
a) Зная функцию $h(t)$, найдите функцию скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$.
b) Стрела выпущена вертикально вверх с вершины дерева высотой 3 *м* с начальной скоростью 18 *м/сек*. Запишите функции $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$, описывающие движение стрелы.

6. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = -8t^2 + 2t + 3$. Здесь s - м, t - сек. Для функции пройденного пути найдите функции скорости и ускорения. Найдите скорость и ускорение при $t = 2$ *сек.*

7. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$ (x - путь в *м*, t - время в *сек.*). Найдите кинетическую энергию тела через 3 секунды после начала движения.

8. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 4t$ (s - перемещение в метрах, t - время в сек.). Найдите значение силы F, действующей на тело.

Производная показательной функции

Мы уже знакомы со многими задачами реальных жизненных ситуаций, которые можно смоделировать экспоненциальным возрастанием или убыванием. Например, рост населения, увеличение денежного вклада на счету, радиоактивный распад, рост числа бактерий и.т.д. В этих ситуациях важно уметь определять скорость прироста в любой момент. Эту скорость можно найти при помощи производной.

Показательная функция дифференцируема в каждой точке числовой оси.

1. Производная функции $y = e^x$. $\quad (e^x)' = e^x$

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h}$$ *по определению производной* *множитель e^x выносим за скобку*

$$= \lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}$$ *множитель e^x не зависит от h, значит его можно вынести за знак предела.*

$$= e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$ *учитывая, что* $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{e^h-1}{h}=1$

$$= e^x$$

2. Производная сложной функции $y = e^{u(x)}$.

Если функция $u(x)$ дифференцируема, то $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}\cdot u'(x)$

В частном случае, $(e^{kx+b})' = k\cdot e^{kx+b}$

3.Производная функции $y = a^x$. $\quad (a^x)' = a^x\cdot \ln a$

$y' = (a^x)' = (e^{x\ln a})' =$ *по основному свойству логарифма*

$= e^{x\ln a}\ln a =$ *производная сложной функции*

$= (\ln a)\, a^x = a^x\cdot \ln a$ *по основному свойству логарифма*

4. Производная сложной функции $y = a^{u(x)}$.

Если функция $u(x)$ дифференцируема, то $(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot \ln a$

Пример 1. Найдите производную функции $y = e^{x^2+2x}$

Решение: $y' = (e^{x^2+2x})' = e^{x^2+2x}(x^2+2x)' = (2x+2)\,e^{x^2+2x}$

Пример 2. Найдите производную функции $y = 4\cdot 10^{1/x}$

Решение:

$$y' = (4\cdot 10^{1/x})' = 4\cdot\ln 10\cdot 10^{1/x}(1/x)' = 4\cdot\ln 10\cdot 10^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-4\cdot \ln 10\cdot 10^{1/x}}{x^2}$$

Производные показательной и логарифмической функции

Обучающие задания

1. Найдите производную функции.

a) $y = 3e^x + 2$ b) $y = 2x - e^{-x}$ c) $y = e^{x+2}$ d) $y = e^{3x+2}$

e) $y = 2x \cdot e^x$ f) $y = x^2 \cdot e^x$ g) $y = x^3 \cdot e^{2x}$ h) $y' = \dfrac{5}{e^x}$

2. Найдите производную функции.

a) $y = 7^{3x+2}$ b) $y = 4^{-5x+2}$ c) $y = 3 \cdot 4^{x+2}$

d) $y = -10^{3x-4}$ e) $s = 2 \cdot 3^{\sqrt{t}}$ f) $s = 5 \cdot 2^{\sqrt{t-2}}$

3. a) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = e^x$ в точке (0;1).

b) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x}$ в точке (0;1).

c) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{-x}$, проходящей через начало координат.

4. Для функций:

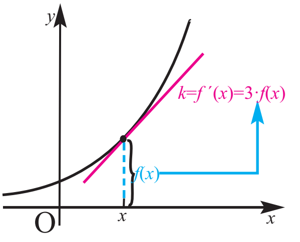
a) $f(x) = 2e^x + 2$ найдите $f'(0)$. b) $f(x) = \sqrt{x}\ e^x$, найдите $f'(1)$

5. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

a) $f(x) = x\ln 3 - 3^x$ b) $f(x) = 2^x + 4 \cdot 2^{-x}$

Прикладные задания

Для функции $f(x) = 2e^{3x}$ производная имеет вид $f'(x) = (2e^{3x})' = (2e^{3x})(3x)' = 3(2e^{3x}) = 3f(x)$. Из этого следует, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в 3 раза больше значения функции в точке с абсциссой x.



Это показывает, что при экспоненциальном изменении скорость изменения роста пропорциональна величине изменения.

Пример. Увеличение денежной суммы при помощи сложного процента. Пусть в банк вложена сумма в размере P_0 под сложный процент при процентной ставке 9% в год.

Количество денег в t год можно найти по формуле $P(t) = P_0 e^{0,09t}$.

a) Какова сумма вклада в конце 3-го года, если первоначально вложили 1000 манат?

b) Какова сумма прироста за 4-ый год, если первоначально вложили 1000 манат?

Решение:

a) При $t = 3$ найдем значение $P = 1000e^{0,09t}$.

$P = 1000e^{0,09 \cdot 3} \approx 1000 \cdot 1,310 = 1310$ ман.

b) При $t = 3$ значение производной функции $P(t)$ соответствует приросту за 4-ый год. Этот прирост равен $\Delta P \approx P'(3) \cdot \Delta t = P'(3) \cdot 1 = P'(3)$.

При $P'(t) = 1000 \cdot 0,09 \cdot e^{0,09t}$, найдем $\Delta P \approx P'(3) = 90 \cdot e^{0,27} \approx 117,9$ ₼.

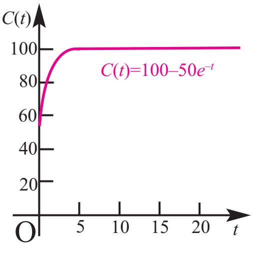
6. **Работа с графкалькулятором.** a) Постройте график функции $f(x) = 4^x$.
b) Изобразите график функции $f'(x)$.
c) Определите, приблизительно форму графика функции $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
d) Постройте график функции $g(x)$ при помощи графкалькулятора и проверьте свои предположения.
e) Изменится ли форма графика функции $y = 4^x$, если она будет иметь вид $y = a^x$? Изменится ли при этом форма графика функции $g(x)$? Запишите мнение о графике функции при частном случае, если $a = e$.

7. **Рост населения.** На основе данных ООН рост населения (млн. человек) начиная с 1960 года можно смоделировать функцией $N(t) = 3100e^{0{,}0166t}$. Найдите скорость роста населения (мгновенный прирост) в: a) 1980; b) 2002; c)2015 гг.

8. **Прибыль от продажи.** Прибыль от продажи новейших компьютеров в зависимости от времени (в годах) можно смоделировать функцией $S(t) =100 - 90e^{-0{,}3t}$. Найдите скорость изменения прибыли через:
a) 3 года; b) 5 лет;

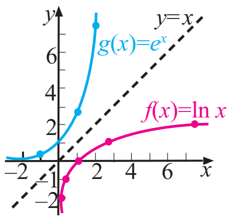
9. **Радиоактивный распад.** Количество оставшегося элемента свинец - 214 (в граммах) в веществе через t лет можно определить по формуле $A(t) = 500e^{-0{,}31t}$.
1) Как уменьшится масса (мгновенное изменение) через:
a) 4 года b) 7 лет c) 10 лет
d) Запишите свое мнение о скорости изменения количества вещества.
e) Исчезнет ли вещество вовсе?

10. **Бизнес.** Затраты на производство изделия А в млн. ман. завода по производству полимерных изделий, с момента запуска производства, можно смоделировать функцией
$C(t) = 100 - 50e^{-t}$.



Найдите следующее:
a) Маржинальные затраты .
b) Значение $C'(0)$.
c) Значение $C'(4)$ (с точностью до сотых)
d) Значение $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} C'(t)$. Объясните на примере реальной ситуации, что при дальнейшем изменении затрат на производство они постепенно уменьшаются до нуля.

Производная логарифмической функции



Функция $y = \ln x$ дифференцируема на интервале $(0; +\infty)$ и $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

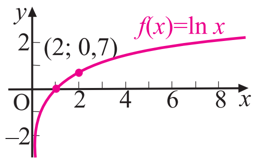
$e^y = x$ *выполним эквивалентную замену*

$(e^y)' = (x)'$ *получим производную*

$(e^y)\, y' = 1$ *производная сложной функции*

$y' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e^y}$ *выполним замену*

$y' = \dfrac{1}{x}$, т.е. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$



Производную функции $y = \ln x$ можно представить геометрически. Проведите касательную в какой-либо точке, начиная слева. На эту касательную поместите линейку и смоделируйте следующие касательные, двигаясь вправо. Каждая следующая касательная изменяется в горизонтальном направлении и угловой коэффициент стремится к нулю.

Если $u(x) > 0$ и дифференцируема, то: $\mathbf{(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} u'(x)}$

В частном случае, $\mathbf{(\ln(kx + b))' = \dfrac{k}{kx + b}}$

Пример. Найдите прозводную функции: a) $y = \ln 5x$; b) $y = \ln(x^3 + 2)$

Решение: a) $(y)' = (\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

b) $y' = (\ln(x^3 + 2))' = \dfrac{1}{x^3 + 2}(x^3 + 2)' = \dfrac{3x^2}{x^3 + 2}$

Производная функции $y = \log_a x$: $\mathbf{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}}$

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ *перейдем к основанию e*

$(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$

получим производную

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ *применим правила дифференцирования*

Если $u(x) > 0$ и дифференцируема, то: $\mathbf{(\log_a u(x))' = \dfrac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)}$

Пример. Найдите прозводную функции: a) $y = \log_5 x$; b) $y = \log_3(x^2 + 1)$

Решение: a) $(y)' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{\ln 5} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$

b) $y' = (\log_3(x^2 + 1))' = \dfrac{1}{\ln 3} \dfrac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' = \dfrac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 3}$

Производные показательной и логарифмической функции

Обучающие задания

1. Найдите производную заданной функции.
a) $y = 4\ln x$ b) $y = 3\ln(2x)$ c) $y = \ln(2x + 1)$ d) $\ln(x^2 + 1)$

2. Найдите производную функции.
a) $y = x^2 \cdot \ln x$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln^3 x$ d) $y = \sqrt{\ln x}$

3. Найдите производную функции $y = \ln x$, заменив эквивалентной записью при помощи показательной функции.

4. Найдите производную функции.
a) $y = \log_2(x^2 + x + 3)$ b) $y = \log_3 \dfrac{x-2}{x+1}$ c) $y = \lg\sqrt{x^2 + 3}$

5. Вычислите значение производной в заданной точке.
a) $f(x) = \log_2(4 + 3x)$, $x_0 = -1$ b) $f(x) = x^3 \cdot \ln(3 + 2x)$, $x_0 = -1$

6. 1) Если $f(x) = x - \ln x$, то решите неравенство $f'(x) > 0$
2) При каких значениях x производная равна нулю?
a) $f(x) = \ln(x + 2) - 2x + 2$ b) $f(x) = x^3 - \ln x$

7. a) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x\ln x$ в точке $x_0 = e$.
b) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2\ln\dfrac{2}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Прикладное задание

8. **Увеличение количества бактерий.** Исследования показали, что количество бактерий $N(t)$ в колбасе при температуре 32°С в момент времени t удовлетворяет соотношению

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = 0{,}2t$$

Здесь N_0 - начальное количество бактерий, t - время, в часах.

a) Используя свойства логарифма, запишите функцию $N(t)$, приняв $N_0 = 100$.
b) Найдите производную функции $N(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.
c) Найдите $N'(t)$ при $t = 12$.

9. **Маржинальные затраты.** Пусть затраты (в манатах) на производство x единиц музыкальных инструментов тутек можно смоделировать функцией $C(x) = 5\log_2 x + 10$. Найдите маржинальные затраты на производство тутека в следующем количестве:

a) 10 b) 20

10. **Амплитуда землетрясения.** Сила землетрясения (магнитуда) определяется по формуле:

$$M = \lg\frac{A}{A_0}$$

Здесь A_0 - наименьшая возможная амплитуда подземного толчка, A - амплитуда произошедшего землетрясения.

a) Найдите изменение dM/dA.

b) Объясните ситуацию, соответствующую изменению dM/dA. Как изменяется dM/dA при увеличении значения A?

11. **Размножение пчел.** Пусть зависимость количества пчел от времени t можно смоделировать функцией $N(t) = (t + 200)\ln(t + 2)$.

Здесь t - время в часах.

Найдите скорость увеличения на 5-ый и 10 день.

12. **Рост вклада.** Денежный вклад вложен под сложный процент при процентной ставке r%. Следующая формула показывает время, за которое сумма вклада удвоится.

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}$$

Найдите dT/dr при $r = 5$ и объясните соответствующую ситуацию.

13. Ляман говорит, что для каждой из функций $y = \ln 5x$ и $y = \ln x$ производной является выражение $\frac{1}{x}$. А это значит, что эти функции равны. Как вы можете объяснить ошибку Ляман.

14. **Размножение форели.** В озеро для размножения помещено 400 рыб форели. Нынешние условия в озере позволяют увеличить их количество по крайней мере до 2500 штук. Приблизительно зависимость количества рыбы от времени t (в месяцах) можно задать функцией:

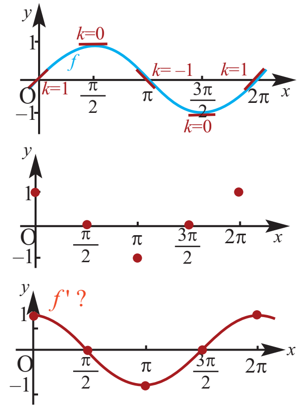
$$P(t) = \frac{2500}{1 + 5{,}25\,e^{-0{,}32t}}$$

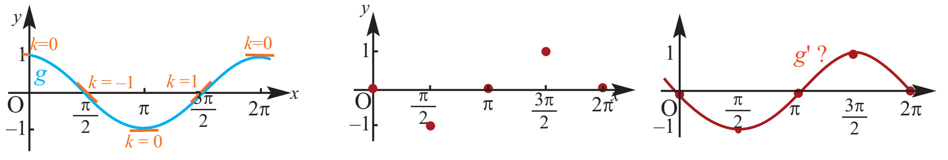
a) Найдите количество форели через 3 месяца, через 5 месяцев.

b) Найдите $P'(t)$ и объясните соответствующую ситуацию.

Исследование. ***Производная функции y = sinx***

1. В тетради изобразите график функции $y = \sin x$. Отметьте угловой коэффициент касательной к графику в указанных точках.
2. Изобразите новую систему координат и отметьте точки, соответствующие указанным угловым коэффициентам.
3. Соедините полученные точки. Учитывая, что угловой коэффициент равен производной функции в данных точках, сделайте соответствующие выводы по поводу производной данной функции.
4. Такие же действия выполните для функции $y = \cos x$ и сделайте соответствующие выводы.





Производные тригонометрических функций

Тригонометрические функции дифференцируемы в любой точке области определения.

Производная функции $y = \sin x$: $\quad (\sin x)' = \cos x$

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$ *по определению производной*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$ *тригонометрические тождества*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *вынесение общего множителя за скобку*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin\Delta x}{\Delta x}\right] =$$ *свойство дроби*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *свойство пределов*

$$= \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *так как sinx и cos x не зависят от Δx*

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$ *учитывая* $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0 \quad \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Производные тригонометрических функций

Производная сложной функции $y = \sin u(x)$:
если $u(x)$ дифференцируемая функция, то $(\sin u(x))' = u'(x) \cdot \cos u(x)$
В частном случае, $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx + b)$
Пример. Найдите производную функции $y = \sin 2x$
Решение: здесь $u = 2x$, $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$

Производная функции $y = \cos x$: $(\cos x)' = -\sin x$

Найдем производную функции $y = \cos x$ используя тождество
$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

$$y' = (\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}_{\sin x} \cdot \underbrace{(\frac{\pi}{2} - x)'}_{-1} = -\sin x$$

Производная сложной функции $y = \cos u(x)$:
если $u(x)$ дифференцируемая функция, то $(\cos u(x))' = -u'(x) \cdot \sin u(x)$
В частном случае: $(\cos(kx + b))' = -k \cdot \sin(kx + b)$
Пример. Найдите производную функции $y = \cos 4x$
Решение: здесь $u = 4x$, $y' = (\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot (4x)' = -4\sin 4x$

Производная функции $y = \tan x$: $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Найдем производную функции $y = \tan x$, используя тождество $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Производная сложной функции $y = \tan u(x)$:
если $u(x)$ дифференцируемая функция, то $(\tan u(x))' = \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$

В частном случае: $(\tan(kx + b))' = \dfrac{k}{\cos^2(kx + b)}$

Аналогично можно показать, что

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\cot u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x),$$

В частном случае: $(\cot(kx + b))' = -\dfrac{k}{\sin^2(kx + b)}$

Пример 1. Найдите производную функции $y = 3\sin 2x - 4\cos 3x$
Решение: $y' = (3\sin 2x - 4\cos 3x)' = (3\sin 2x)' - (4\cos 3x)' =$
$= 3\cos 2x(2x)' + 4\sin 3x(3x)' = 6\cos 2x + 12\sin 3x$
Пример 2. Найдите производную функции $y = 4\sin^3 2x$.
Решение: $y' = (4\sin^3 2x)' = 4 \cdot 3 \cdot \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' = 12 \cdot \sin^2 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x =$
$= 24 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$

Производные тригонометрических функций

Обучающие задания

1. На рисунке дан график функции $y = -2\cos x$.

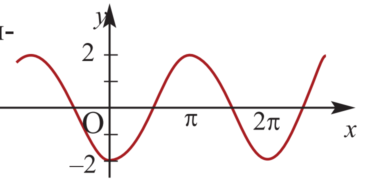
1) По графику найдите угловые коэффициенты касательных в заданных точках.

a) в нулях функции

b) в точках максимума

c) в точках минимума

2) Изобразите график функции производной.



2. Найдите производную функции.

a) $y = 2\sin x$ b) $y = 3\cos x$ c) $y = 2\cot x$

d) $y = 3\sin 2x$ e) $y = 2\cos 3x$ f) $y = 4\tan 2x$

g) $y = x^2 \cdot \sin x$ h) $y = x \cdot \sin 2x$ i) $y = x^2 \cdot \cos 2x$

3. Найдите значение производной в заданной точке.

a) $f(x) = 4x - 2\tan x,\quad f'(\frac{\pi}{4})$ b) $f(x) = x \cdot \cos 2x,\quad f'(\pi)$

4. Найдите производную функции и вычислите угловой коэффициент в точке $x = \frac{\pi}{3}$

a) $y = \cos x$ b) $y = 2\sin x$ c) $y = \cos x - \sin x$

d) $y = -\sin 3x$ e) $y = \cos(\pi - 2x)$ f) $y = \cos(3x + 2\pi)$

5. Найдите производную функции.

a) $y = \sin x \cos x$ b) $y = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x$

c) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ d) $y = \cos 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \cos x$

6. a) Покажите, что производная функции $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ равна нулю.

7. Найдите производную функции.

1) $y = \sin^2 x$ 2) $y = \cos^2 x$ 3) $g(t) = \dfrac{\cos t}{t}$

4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 5) $y = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ 6) $y = x^2 \cdot \cos \dfrac{1}{x}$

7) $y = e^{2x} \cdot \sin 2x$ 8) $y = e^{-x} \cdot \cos \dfrac{1}{x}$ 9) $y = 3\sin^2 2x$

8. Решите уравнение $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = x - \cos x$ b) $f(x) = \sin x + \dfrac{x}{2}$ c) $f(x) = x + \cos 2x$

9. Задайте ходя бы одну функцию $f(x)$, производная которой равна:

a) $f'(x) = 2 + \sin x$; b) $f'(x) = \cos 2x$.

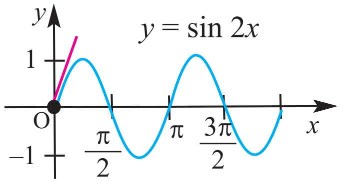
10. **Задания открытого типа.** Запишите одну сложную функцию вида $y = \sin^n u(x)$ и найдите ее производную.

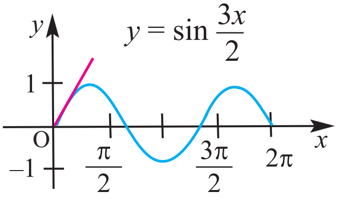
11. a) Найдите абсциссы всех точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin^2 x$ равен нулю.

b) Определите, в каких точках касательная к графику функции $f(x)=2\sin x - \sin^2 x$ горизонтальна.

c) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \sin 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

12. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции, проходящей через начало координат. Сравните полученное значение со значением углового коэффициента касательной к графику в точке $x = 2\pi$.

a) 

b) 

13. Для функции $y = x^2 \sin 2x$ найдите производную второго порядка.

14. Какая из функций является $P'(x)$ для функции
$P(x) = 1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \tan^6 x + \ldots$, если $0 \le x < \frac{\pi}{4}$?

a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $-\tan 2x$ d) $-\sin 2x$ e) $-\cos 2x$

15. Изменение глубины (в м) воды на берегу моря в зависимости от приливов и отливов можно смоделировать функцией:
$D(t) = 1{,}5 + 0{,}5\cos\frac{\pi t}{6}$.

a) Запишите функцию dD/dt.

b) Найдите значение dD/dt при $t=5$ и $t=10$. Объясните ситуации, соответствующие данным значениям.

c) Когда вода в прибрежной зоне будет иметь наибольшую глубину?

16. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2\cos x \sin 2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$.

17. Найдите производную функции относительно θ.

a) $f(\theta) = -3\cos\theta - 2\sin\theta$

b) $f(\theta) = \frac{\pi}{2}\sin\theta - \pi\cos\theta + 2\pi$

c) $f(\theta) = 15\cos 3\theta + \theta - 6$

d) $f(\theta) = \frac{\pi}{4}\cos 4\theta - \frac{\pi}{3}\sin 3\theta$

Обобщающие задания

1. Найдите производную функций.

a) $h(t) = t^3 - 2t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ b) $p(n) = -n^5 + 5n^3 + \sqrt[3]{n^2}$ c) $p(r) = r^6 - \dfrac{2}{5\sqrt{r}} + r - 1$

2. Объем шара, заполняемого воздухом, равен $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Здесь r - радиус шара (в сантиметрах).

Найдите мгновенное изменение объема шара при $r = 1{,}5;\ 6;\ 9$.

3. a) Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Изобразите касательную в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и запишите уравнение этой касательной.
b) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = (6x - 3)(-x^2 + 2)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

4. Найдите $f''(x)$ для функции $f(x) = (4 - x^2)(3x + 1)$.

5. Найдите значение производной функции в заданной точке.

a) $g(x) = \dfrac{2 - 7x}{(4x + 3)^3}$, $x_0 = -1$ b) $f(x) = \dfrac{8x^3}{\sqrt{3x - 2}}$, $x_0 = 1$ c) $m(x) = \dfrac{(-x + 2)^2}{(5 + 2x)^4}$, $x_0 = -2$

6. Найдите значение производной $\dfrac{dy}{dx}$ в заданной точке.

a) $y = u^2 + 3u$; $u = \sqrt{x} - 1$; $x_0 = 5$ b) $y = \sqrt{2u}$; $u = 6 - x$; $x_0 = -3$

7. Найдите производную функций.

a) $y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x$

d) $y = \sin^4\theta$ e) $y = \sin^3 4\theta$ f) $y = 3\cos^2 2\theta$

8. Найдите производную функций.

a) $y = -2e^{-\frac{1}{2}x}$ b) $f(x) = -3x^2e^{-2x}$ c) $g(x) = 2xe^{\sin x}$ d) $y = x^3 \cdot \ln 2x$

9. Если сегодня купить самый современный компьютер, то через некоторое время можно увидеть, что его цена уменьшится. Изменение цены компьютера в зависимости от времени можно задать функцией $A(t) = 900e^{-t/3}$.
a) Найдите начальную цену компьютера.
b) Сколько будет стоить компьютер через 1 год ?
c) Через сколько лет цена компьютера станет в 2 раза меньше первоначальной цены? Найдите на тот момент скорость, с которой дешевеет компьютер?

6 Объем фигур вращения

- **Объем цилиндра**
- **Объем конуса**
- **Объем усеченного конуса**
- **Объем шара и его частей**
- **Объемы подобных фигур**

Математический словарь

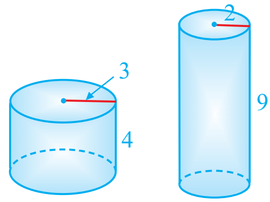
- объем конуса
- объем цилиндра
- объем шара
- объем полушара
- объем шарового сегмента
- объем шарового слоя
- объем шарового сектора

Это интересно!

Здание Музея Ковра занимает особое место среди образцов современной архитектуры Баку. В здании, которое имеет форму свернутого ковра, хранятся коллекции ковров и ковровых изделий, изделий из металла, одежды и вышивки, керамики, ювелирных украшений, книг и фотографий. Концепция выставки в музее отличается от обычных выставок. Основные экспонаты, ковры, висят на арочных стенах и их видно с любых точек, расположенных на верхних этажах. Благодаря этому большую часть выставки можно наблюдать с разных ракурсов.

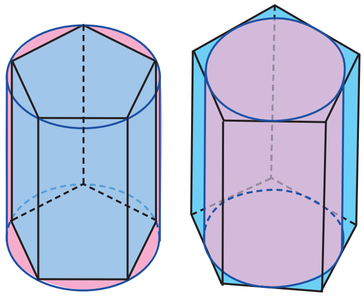
Объем цилиндра

Говоря об объеме, имеют ввиду вместимость пространственной фигуры. Как вы думаете, емкость какого из цилиндров на рисунке больше?

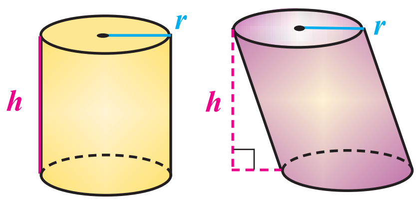


Объем цилиндра

Призмой, вписанной (описанной) в цилиндр, называется призма, основания которой вписаны (описаны) в основания цилиндра. Пусть в цилиндр с радиусом r и высотой h вписана и около цилиндра описана правильные n - угольные призмы. При бесконечном возрастании n площадь оснований данных призм приближаются к площади основания ($S_{осн.}$) цилиндра, а их объемы к объему цилиндра:



$S_{осн.} \cdot h$.



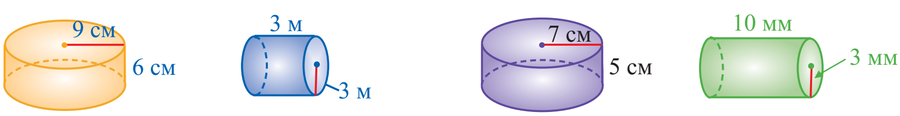
Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{осн.} h \text{ , } S_{осн.} = \pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

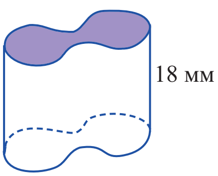
Обучающие задания

1. По данным рисунка найдите объем цилиндров на рисунке.



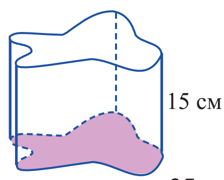
2. По данным рисунка найдите объем фигур.

a)



Площадь основания: 25 мм²

b)

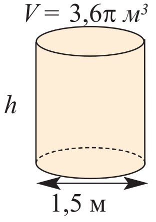


Площадь основания: 35 см²

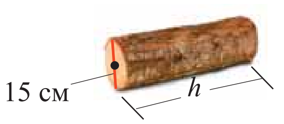
Объем цилиндра

3. По данным рисунка, найдите неизвестные величины.

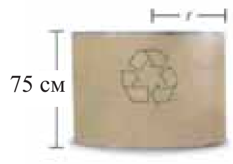
a) $V = 3{,}6\pi$ *м³*



b) $V = 1800\pi$ *см³*



c) $V = 1{,}2\pi$ *м³*

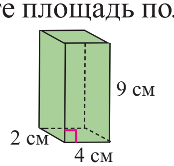


4. Найдите объем цилиндра, площадь боковой поверхности которого 20π, а высота 10 единиц.

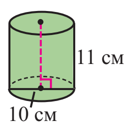
5. Найдите объем цилиндра, высота которого равна 5 см, а площадь полной поверхности равна 72π см^2.

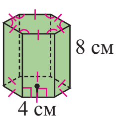
6. Высота цилиндра 25 см, а диаметр основания равен 8 см. Как изменится объем этого цилиндра, если высоту уменьшить на 5 см, а радиус основания увеличить на 1 см?

7. Найдите площадь полной поверхности и объем фигур на рисунках.



прямоугольный параллелепипед





правильная призма

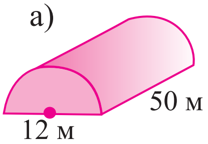
8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S, длина окружности в основании равна C. Найдите объем цилиндра.

9. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна 4. Найдите объем цилиндра.

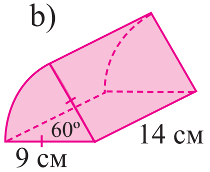
10. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, в которую, в свою очередь, вписан цилиндр. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

11. На рисунке представлены части цилиндра, полученные при сечении плоскостью. По данным рисунка найдите объемы данных частей.

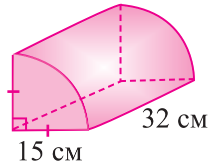
a)



b)

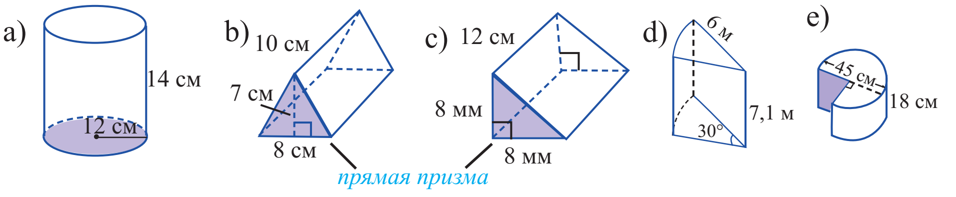


c)



Объем цилиндра

12. По данным рисунка найдите объем фигур.



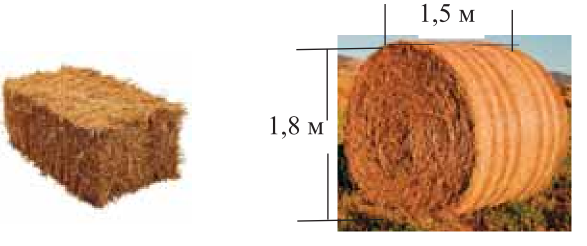
13. a) Как надо изменить высоту цилиндра, не изменяя основания, чтобы объем цилиндра увеличился в два раза?
b) Найдите диаметр цилиндра, площадь боковой поверхности которого (в кв. ед.) численно равна объему (в куб.ед).

Прикладные задания

14. В сосуд, имеющий форму цилиндра, радиус основания которого равен 15 см, а высота 20 см, налит сок. Продается сок в стакане, радиус основания которого равен 3 см, а высота 6 см. Сколько денег выручат от продажи полного сосуда, если цена одного стакана сока равна 3 маната?

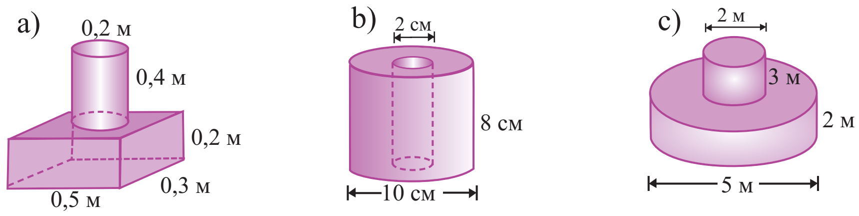
15. Найдите массу трубы длиной 35 см, изготовленной из материала, плотность которого равна 0,6 г/см^3, если внутренний диаметр равен 24 см, внешний диаметр равен 28 см.

16. Сено продают в виде спрессованного параллелепипеда, размеры которого обычно равны 40 см × 40 см × 90 см. Однако иногда сено собирают в форме цилиндра. Сколько параллелепипедов можно получить из стога сена цилиндрической формы, размеры которого указаны на рисунке?



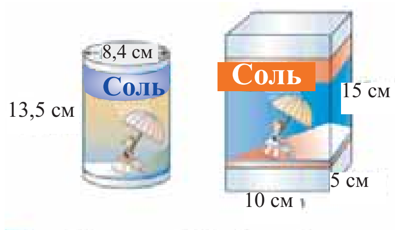
17. Карандаш состоит из деревянной части в форме цилиндра, радиус которого равен 7 мм и графита, радиусом 1 мм. Найдите объем деревянной части карандаша, длина которого равна 14 см.

18. Найдите объем комплексных фигур на рисунках



19. Гюльзар утверждает, что для того, чтобы в 2 раза увеличить вместимость бака, имеющего форму цилиндра с радиусом основания 0,75 м и высотой 0,5 м, надо, соответственно, в два раза увеличить его размеры. Выразите свое отношение об утверждении Гюльзар, подтвердив их соответствующими вычислениями. a) Сколько литров вмещает бак с данными размерами? b) Какие размеры будет иметь бак, объем которого будет в 2 раза больше?

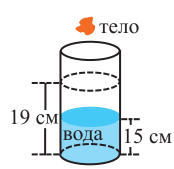
20. На рисунке изображены две коробки в форме цилиндра и прямоугольного параллелепипеда.
a) Объем какой коробки больше?
b) Как по вашему, коробки какой формы более удобны с точки зрения сборки и транспортировки?
Обоснуйте свое мнение.



21. Из массы теста в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами 20 см ×15 см × 6 см сделали кексы, в форме цилиндра, радиус основания которого равен 1 см, а высота 5 см. Сколько таких кексов можно сделать из данной массы?

22. Если из наполненной посуды в форме цилиндра, высота которого равна 10 см, вылить 25 см^3 воды, то уровень воды в посуде уменьшится на 2 см. Найдите объем посуды.

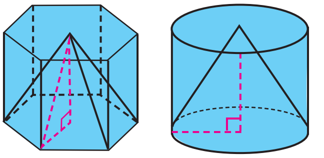
23. В сосуд с водой, в форме цилиндра, радиус основания которого равен 4 см помещается нерастворимое в воде тело. При этом, уровень воды увеличивается с 15 см до 19 см. Найдите объем тела, помещенного в воду.



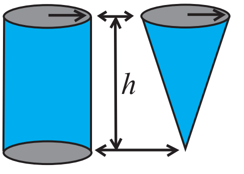
24. Цилиндрический поршень водяного насоса диаметром 60 мм, совершает движение на расстоянии 150 мм. За 1 минуту поршень совершает движение 40 раз. Найдите объем жидкости, которую перекачивает насос за 1 час работы.

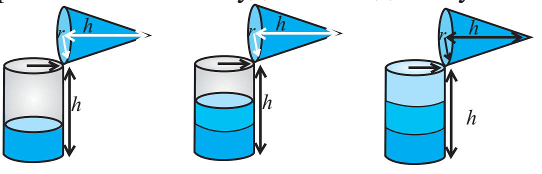
Объем конуса

Практическая работа. Какая связь существует между объемами призмы и пирамиды, если они имеют одинаковые высоты и основания? Можно ли эту связь применить для объемов цилиндра и конуса?



Сделайте из картона модели сосудов в виде конуса и цилиндра, радиусы оснований и высоты которых одинаковы. Заполните цилиндрический сосуд при помощи сосуда в виде конуса (песком, рисом, и т.п.). Сколько таких сосудов понадобится, чтобы заполнить цилиндрический сосуд? Верно ли утверждение, что цилиндрический сосуд можно заполнить тремя полными сосудами в виде конуса?





Обобщите соответствующую информацию о вычислении объема призмы, цилиндра, пирамиды и конуса, записав ответ в закрашенные ячейки.

Объем призмы и цилиндра:

Объем = площадь основания × $\boxed{\quad}$

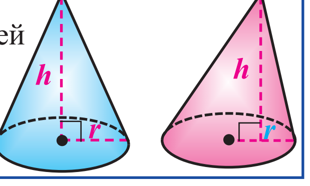
Объем пирамиды и конуса:

Объем = $\boxed{\quad}$ × объем призмы или цилиндра, имеющих одинаковые основание и высоту.

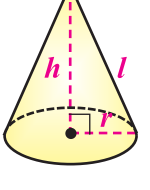
Объем конуса

Объем конуса равен произведению одной третьей площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} h\ ,\ S_{осн.} = \pi r^2 \qquad \mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$



Пример. Образующая конуса 9 см, высота 6 см. Найдите объем конуса.



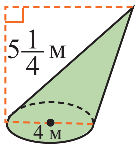
Решение: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$ $\quad l = 9$ см; $\quad h = 6$ см

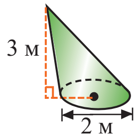
$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

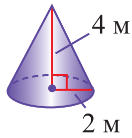
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 45 \cdot 6 = 90\pi\ (см^3)$$

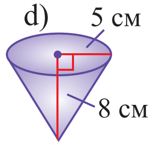
Объем конуса

1. Найдите объем конусов.

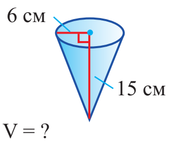
a) 

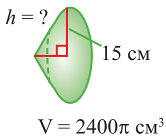
b) 

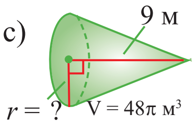
c) 

d) 

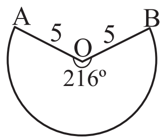
2. По данным рисунка найдите неизвестные измерения.

a) 

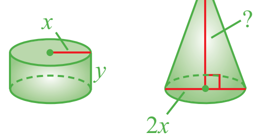
b) 

c) 

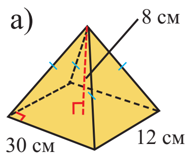
3. На рисунке изображена развертка боковой поверхности конуса. По данным рисунка найдите объем конуса.

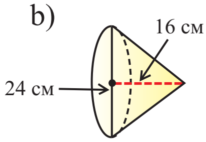


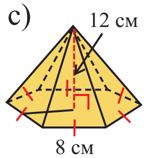
4. Объем цилиндра на рисунке равен объему конуса. Найдите высоту конуса.



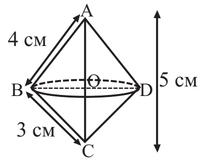
5. Найдите площадь полной поверхности и объем фигур на рисунке.

a) 

b) 

c) 

6. Найдите площадь поверхности и объем фигуры, полученной при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг гипотенузы.

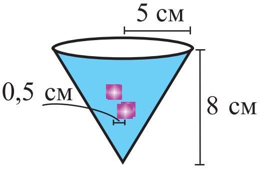


7. Найдите площадь полной поверхности конуса объем которого равен 96π см^3, а отношение высоты и образующей равно 4 : 5.

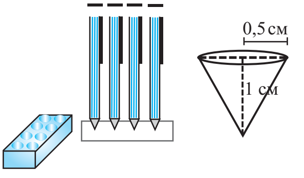
8. Найдите объем конуса высотой 6 см, если площадь его боковой поверхности равна 80π см^2.

9. Образующая конуса длиной l составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.

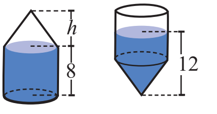
10. В сосуд с заполненной водой, имеющий форму конуса, радиусом 5 см и высотой 8 см, помещается кубики. Длина ребра кубика равна 0,5 см. При этом из сосуда вылилась одна четвертая часть жидкости. Сколько кубиков было помещено в сосуд?



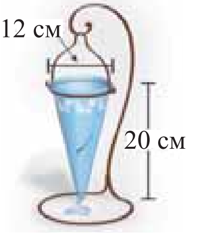
11. Размеры деревянной подставки в форме прямоугольного параллелепипеда для карандашей равны 15 см×5 см×2,5 см. Найдите объем деревянной подставки, если для острия карандаша делается 8 выемек в виде конуса радиусом 0,5 см и глубиной 1см.



12. Цилиндрическая часть сосуда имеет высоту 8 см. К ней прикреплена часть в виде конуса высотой h, как показано на рисунке. Если сосуд перевернуть, то уровень жидкости составит 12 см. Найдите высоту конуса h.

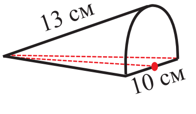


13. За минуту из сосуда в форме конуса, по каплям, вытекает 4 см^3 воды. За какое время полный сосуд опустошится на 80%? Зная, что 1 см^3 = 0,001 *л*, выразите объем сосуда в литрах.

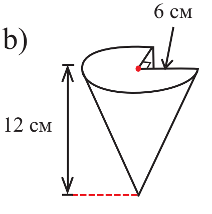


14. По данным на рисунке найдите площадь полной поверхности и объем фигур.

a)



b)

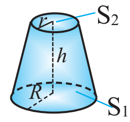


15. Конус диаметром 12 см и высотой 15 см, на расстоянии 9 см от основания разрезан плоскостью, параллельной основанию. Найдите разность объемов данного конуса и маленького конуса, отсеченного от данного.

16. Объем усеченного конуса равен 52 см^3, а отношение площадей оснований равно 9. Найдите объем целого конуса, полученного дополнением данного усеченного конуса.

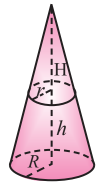
Объем усеченного конуса

17. Выполнив следующую последовательность шагов, докажите формулу для нахождения объема усеченного конуса

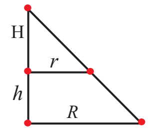


$$\mathbf{V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)}$$

1. Дополните усеченный конус до полного конуса. Обозначьте высоту дополненного маленького конуса через H.



2. Запишите объем, полученного дополнением конуса и маленького конуса.
3. Запишите разность этих объемов в виде $V = \frac{\pi}{3}(R^2h + H(R - r)(R + r))$.
4. Из подобия треугольников, образованных радиусами и высотами, покажите, что $H(R - r) = hr$.

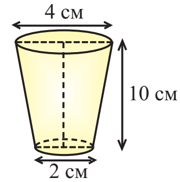


5. Равенство, полученное в пункте 4, подставьте в равенство пункта 3. Покажите, что формулы

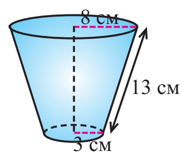
$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \quad \text{или} \quad V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

являются формулами для нахождения объема усеченного конуса. Здесь S_1 и S_2 - площади оснований.

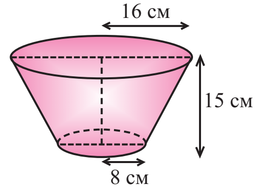
18. Размеры стакана в форме усеченного конуса указаны на рисунке.
a) Вычислите, сколько воды вмещает стакан в кубических сантиметрах.
b) Зная, что $1\ m^3 = 1000\ l$, вычислите вместимость стакана в миллилитрах.



19. Найдите площадь полной поверхности и объем усеченного конуса, образующая которого равна 13 см, а радиусы оснований 8 см и 3 см.



20. Емкость для молока выполнена в виде усеченного конуса без крышки высотой 15 см и радиусами оснований 8 см и 16 см. Сколько денег выручат от продажи полной емкости, если 1 литр молока стоит 1,35 манат? Сколько денег потратят на изготовление данной емкости, если цена 100 см^2 материала, из которого сделана емкость, равна 0,95 манат?

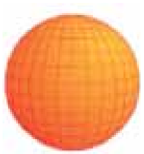


Объем шара и его частей

Практическая работа.

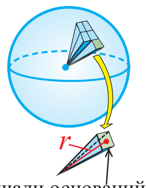
1. Возьмите мяч. Определите его диаметр.
2. Изобразите на бумаге развертку цилиндра, диаметр и высота которого равны диаметру шару.

3. Вырежьте и сверните полученную развертку в цилиндр без верхней крышки. Скрепите развертку при помощи клейкой ленты. Разделите высоту цилиндра на 3 равные части и сделайте соответствующие разметки.
4. Оберните мяч фольгой или плотным материалом и сделайте мешок сферической формы. Наполните его песком.
5. Пересыпьте песок в цилиндр. Какая часть цилиндра заполнится?



Если разделить поверхность шара сеткой из вертикальных и горизонтальных линий и маленький “прямоугольный” кусочек сферы соединить с центром шара, то можно представить, что шар состоит из множества “маленьких пирамид”.

Объем шара можно выразить через сумму объемов “маленьких пирамид” ($\frac{1}{3}$ $S_{осн.}r$), высота которых равна радиусу шара. Бесконечно уменьшая размеры оснований, количество пирамид будет бесконечно расти. Сумма площадей оснований “маленьких пирамид” будет равна площади поверхности шара. Учитывая, что площадь поверхности шара равна $4\pi r^2$, получим формулу для нахождения объема шара:

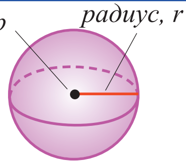


$$V = \frac{1}{3}S\cdot r = \frac{1}{3}\,4\pi r^2\cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Объем шара

Объем шара равен произведению $\frac{4}{3}$ π и куба радиуса.

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

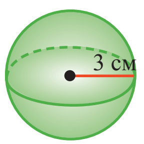


Пример. Найдите:

a) объем шара радиуса 3 см

b) радиус шара объемом 288 см^3

Решение: a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



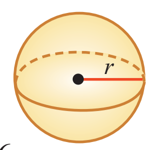
$r = 3$ см

$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 36\pi$ (см^3)

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

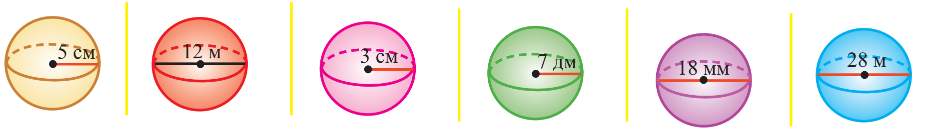
$\frac{4}{3}\pi r^3 = 288$

$r^3 = \frac{288\cdot 3}{4\pi} = \frac{216}{\pi}$, $r = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ (см).



Объем шара и его частей

1. Найдите объем шаров на рисунке.



2. Найдите требуемые размеры по данным на рисунке.

3. a) Сколько кубических сантиметров по крайней мере должна иметь коробка в форме куба, чтобы в нее можно было поместить шар радиусом 3 см?

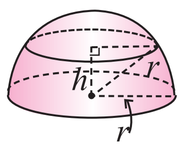
b) Шар радиусом 2,4 см сплавили в цилиндр, радиусом 4 см. Найдите высоту цилиндра.

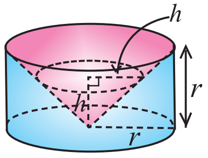
c) Три металлических шара радиусами 3 см, 4 см и 5 см сплавили в один большой шар. Найдите радиус полученного шара. Полученный шар сплавили в цилиндр радиусом 4 см. Найдите высоту цилиндра.

d) Найдите, сколько кубических сантиметров коробки, в форме куба с ребром 24 см останутся пустыми, если в него поместить мяч диаметром 22 см.

4. Определите формулу объема шара по методу Архимеда, выполнив следующую последовательность:

полушар с радиусом r





В цилиндре, радиус и высота которого равны r, сделана выемка в форме конуса.

1. Покажите, что площадь кругового сечения полушара на высоте h равна $\pi(r^2 - h^2)$.

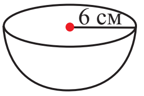
2. Покажите, что площадь кругового сечения цилиндра на высоте h с выемкой в виде конуса, равна $\pi(r^2 - h^2)$.

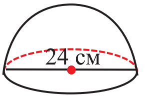
3. Объясните равенство объем этих фигур по принципу Кавальери и выведите формулу для объема полушара.

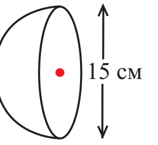
5. 1) Запишите формулу объема полушара.

2) Найдите объемы полушаров.

a) b) c)



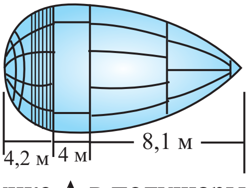




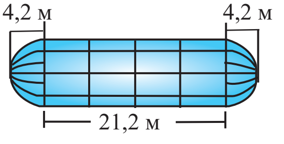
6. **Для обеспечения топливом космических кораблей используются шаттлы. Они доставляют необходимые грузы на корабли, которые вращаются по орабитам вокруг Земли. Шаттлы, в отличие от других космических кораблей обладают возможностью возвращаться на орбиту несколько раз.**

У них есть цистерны с жидким кислородом и жидким водородом. Цистерна для жидкого кислорода имеет форму соединенных полусферы, цилиндра и конуса. Цистерна для жидкого водорода - цилиндр, на конце которого расположены полусферы. Найдите объемы цистерн по рисунку.

Цистерна для жидкого кислорода



Цистерна для жидкого водорода

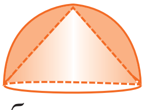


7. На рисунке **A** в полушары радиуса 8 см сделана выемка в форме конуса. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры.

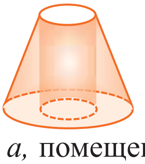
На рисунке **B,** в усеченном конусе с диаметрами оснований 10 см и 4 см сделана выемка в форме цилиндра, высота которого равна высоте конуса. Основание цилиндра совпадает с меньшим основанием усеченного конуса. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры, если высота усеченного конуса равна 4 см.

На рисунке **C** в полушаре с диаметром 6 см сделана выемка, в форме полушара, с диаметром 4 см. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры.

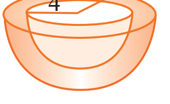
A.



B.



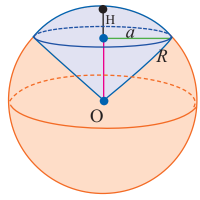
C.

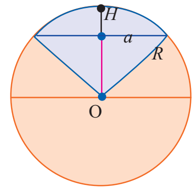


8. В куб, ребро которого равно a, помещен шар, который касается всех граней куба. Найдите расстояние от центра шара до грани куба и объем шара. Выполните соответствующий рисунок.

Сектор шара и сегмент шара

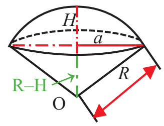
Шаровой сектор — это часть шара, ограниченная конической поверхностью с вершиной в центре шара. Шаровой сектор – объеденение конуса и шарового сегмента. Так как шаровой сектор можно рассмотреть как предел суммы объемов маленьких пирамид, вершины которых находятся в центре шара, а основания касаются его поверхности, то





$$V_{\text{сект.}}=\frac{1}{3}S_{\text{сегм}}\cdot R=\frac{1}{3}\cdot 2\pi RH\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^2H.$$

Здесь R-радиус шара, H-высота соответствующего сегмента



С другой стороны,

$a^2 = R^2 - (R-H)^2 = 2RH - H^2$ и т.к.

$$V_{kon}=\frac{1}{3}\pi a^2(R-H)=\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)$$

$$V_{\text{сегм.}}=V_{\text{сект.}}-V_{\text{кон.}}=\frac{2}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)$$

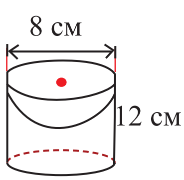
9. Диаметр шара 10 см. Найдите площадь основания сегмента высотой 1 см и объем соответствующего шарового сектора.

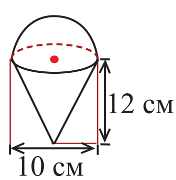
10. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на 2 части: 3 см и 9 см. На какие части при этом делится объем шара?

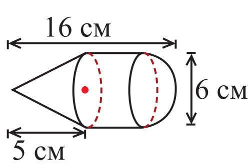
11. Радиус основания сегмента, соответствующего шаровому сектору, равен 60 см, а радиус шара равен 75 см. Найдите объем сектора.

12. Радиусы окружностей оснований шарового слоя 3 м и 4 м, а радиус шара равен 5 м. Найдите объем шарового слоя (рассмотреть два случая).

13. Найдите объем фигур.

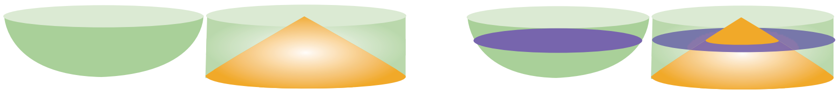




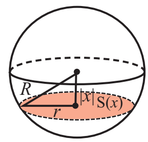


Проектная работа. Отношение между объемами цилиндра, конуса и шара, которое получил Архимед.

Архимед нашел формулу для нахождения объема шара, исследовав связь между объемом цилиндра, описанного вокруг шара радиуса *r,* и объемом конуса, вписанного в данный цилиндр. Попробуйте и вы выполнить это исследование.



Если x - расстояние от центра шара до плоскости сечения, то для шара радиуса R = 5 представьте зависимость площади сечения от x, выполнив следующие шаги.



a) Вычислите следующие значения функции $S(x)$.

$$S(0)\ ;\ S(1);\ S(3);\ S(4);\ \ S(5)$$

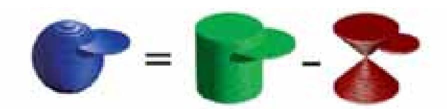
Для примера найдено значение S(1) :

$$S(1)=\pi r^2=\pi(R^2-1^2)=\pi(5^2-1^2)=24\pi$$

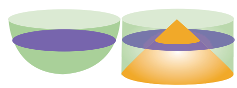
b) Представьте свои суждения о значениях S(0) и S(5) сечений.

c) Запишите общую формулу для определения площади сечения, расположенного на расстоянии x от центра шара радиуса R.

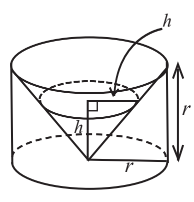
d) Свяжите формулу, полученную в пункте *c*, и следующий рисунок.

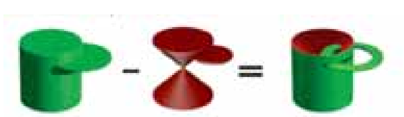


e) Чтобы понять умозаключения Архимеда, вернемся к начальному рисунку.

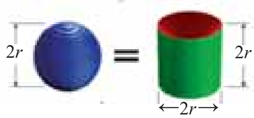


При “извлечении” конуса из цилиндра в поперечном сечении получаем кольца, параллельные основанию. На одном и том же уровне поперечное сечение шара является кругом. Из подобия треугольников можно доказать, что площадь кольца каждого слоя равна $\pi(r^2-h^2)$. Поскольку площади этих плоских сечений равны, по принципу Кавальери равны и объемы этих тел.





$$\pi r^2 2r - 2\frac{1}{3}\pi r^2 r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

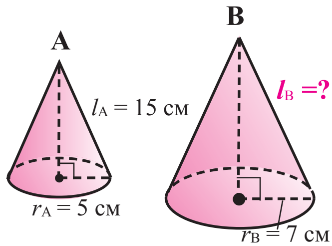


$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Объемы подобных фигур

Отношения соответствующих линейных размеров подобных пространствнных фигур должны быть равны.
По заданным соответствующим размерам подобных пространственных фигур можно найти неизвестные размеры.

Пример. Конусы A и B подобны. По данным рисунка найдите образующую конуса B.



Решение: Запишем отношение линейных размеров:

$$\frac{\text{Радиус A}}{\text{Радиус B}} = \frac{\text{Образующая A}}{\text{Образующая B}}$$

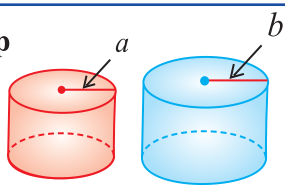
$$\frac{5}{7} = \frac{15}{l_B} \qquad l_B = 21 \text{ см}$$

Известно, что отношение площадей поверхностей двух подобных пространственных фигур равно квадрату отношения соответствующих линейных размеров или квадрату коэффициента подобия:

$$A \overset{k}{\sim} B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$$

Объемы подобных пространственных фигур

Отношение объемов подобных пространственных фигур A и B равно кубу отношения соответствующих линейных размеров или кубу коэффициента подобия:



$$A \overset{k}{\sim} B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = k^3$$

Пример. Отношение боковых поверхностей двух подобных цилиндров равно 4:9. Зная, что разность объемов равна 38π куб.ед., найдите объемы цилиндров.

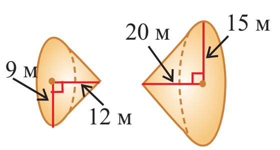
Решение: по условию $\frac{S_A}{S_B} = k^2 = \frac{4}{9}$, тогда $k = \frac{2}{3}$. Значит $\frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

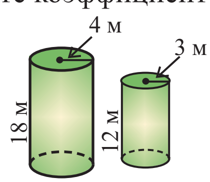
С другой стороны, принимая во внимание, что $V_B - V_A = 38\pi$, получим:

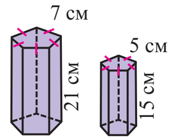
$$V_A = 16\pi; \; V_B = 54\pi$$

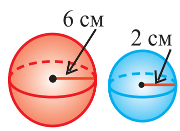
Обучающие задания

1. Определите, являются ли данные фигуры подобными. Если фигуры подобны, то запишите коэффициент подобия.



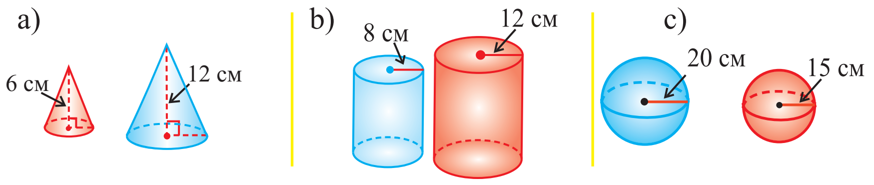




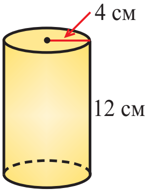


Объемы подобных фигур

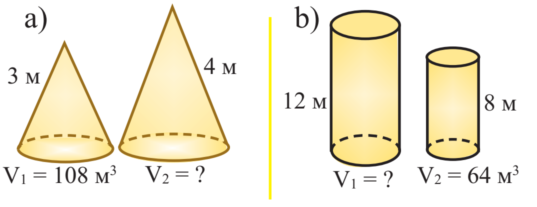
2. Две фигуры на рисунке подобны. Найдите отношение их объемов.



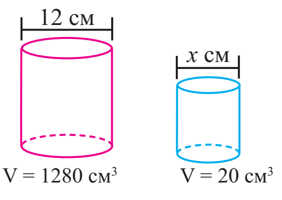
3. Как изменится объем цилиндра радиуса 4 см и высотой 12 см, если его размеры:
a) увеличить в 2 раза; b) увеличить в 3 раза?
Изобразите увеличенный цилиндр и запишите новые размеры. Будут ли данные цилиндры подобными?



4. Найдите требуемые размеры, зная, что фигуры подобны.

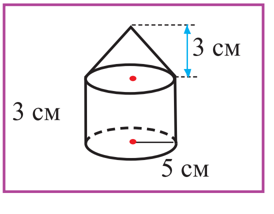


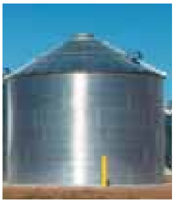
5. Найдите диаметр маленького цилиндра, зная, что цилиндры подобны.



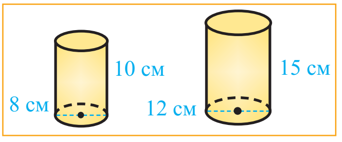
6. Линейные размеры конуса увеличили в два раза.
a) Во сколько раз увеличилась площадь поверхности конуса?
b) Во сколько раз увеличился объем конуса?
c) Найдите отношение объемов двух подобных конусов, если площади поверхностей этих конусов относятся как 9:16.

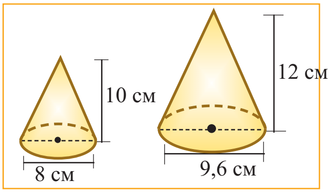
7. На рисунке дан план зернохранилища в масштабе 1 : 100. Найдите действительный объем зернохранилища.

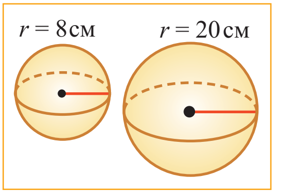




8. Если линейные размеры маленькой фигуры увеличить в определенное количество раз, то можно получить соответствующие размеры большей фигуры. Найдите площади поверхностей этих фигур. Определите, во сколько раз увеличились линейные размеры, полная поверхность и объем?



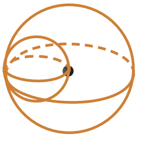




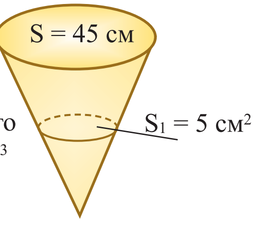
9. Найдите объем маленькой пространственной фигуры, если фигуры на рисунке подобны.

a)

Объем большого шара: 10 литров



b)



Объем большого конуса: 270 см^3

10. Радиус одного из шаров равен диаметру другого. Запишите отношение: a) объемов; b) полных поверхностей.

11. Для изготовления контейнера для жидкости объемом 125 см^3 в форме цилиндра было использовано 240 см^2 материала. Фирма хочет увеличить радиус и высоту контейнера в одинаковое количество раз, чтобы объем достиг 1 *л* (1000 см^3). Сколько материала понадобится для изготовления новых контейнеров?

12. 1) Даны площади поверхностей двух подобных конусов и объем большего конуса. Найдите объем меньшего конуса.

a) $S_1 = 24$ см^2
$S_2 = 96$ см^2
$V_2 = 96$ см^3

b) $S_1 = 36$ дм^2
$S_2 = 324$ дм^2
$V_2 = 432$ дм^3

2) Даны объемы двух подобных цилиндров и площадь поверхности меньшего цилиндра. Найдите площадь поверхности большего цилиндра.

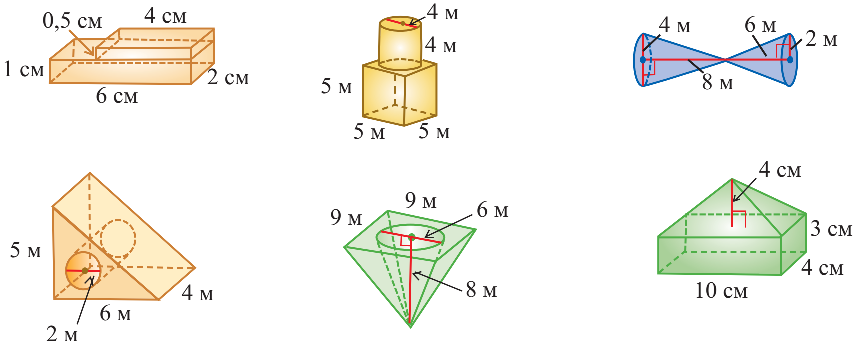
a) $V_1 = 36$ см^3
$V_2 = 288$ см^3
$S_1 = 20$ см^2

b) $V_1 = 18$ м^3
$V_2 = 488$ м^3
$S_1 = 36$ м^2

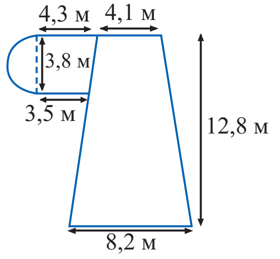
Обобщающие задания

1. Высоты всех фигур на рисунке равны 8 см. Какая из фигур имеет наибольший объем?

2. Найдите объем фигур.



3. Сколько кубических метров бетона толщиной 10 см понадобится, чтобы покрыть площадь поверхности на рисунке?

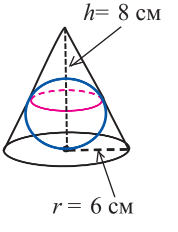


4. Чтобы каток для утрамбовки асфальта был тяжелее его наполняют водой. Найдите сколько тонн воды вмещает барабан, высотой 1,85 м и радиусом 0,45 м?

5. Длина металлической трубы в форме цилиндра равна 10 м, а внутренний и внешний диаметры соответственно равны 15 см и 17 см. Найдите массу трубы, если плотность металла 7,8 т/м^3.

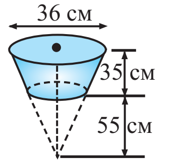
6. Осевое сечение цилиндра квадрат. Найдите радиус основания цилиндра, если его объем равен 169,56 куб. ед.

7. а) Найдите объем шара с наибольшим радиусом, помещенного в конус, радиус которого равен 6 см, а высота равна 8 см.
б) Найдите радиус шара с наибольшим объемом, помещенного внутрь сосуда в виде конуса, если радиус основания конуса r, а высота h.

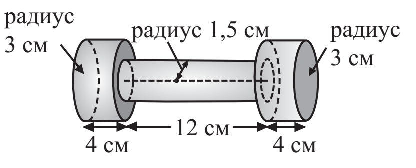


Обобщающие задания

8. Сосуд в форме усеченного конуса, размеры которого указаны на рисунке, заполнен водой. Однако в сосуде есть дырка, через которую за секунду выливается 1,2 *мл* воды. Сколько воды останется в сосуде через 3 часа?



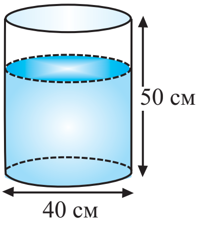
9. Спортивный снаряд, гантель, состоит из металлических цилиндров. Радиус цилиндров на концах равен 3 см, высота 4 см. Радиус цилиндра посередине равен 1,5 см, а высота 12 см. Найдите объем гантели.



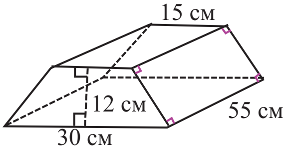
10. В аквариум в форме цилиндра с размерами, указанными на рисунке, налили 55 литров воды.

a) Найдите высоту уровня воды в аквариуме.

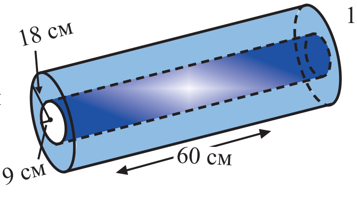
b) В аквариум хотят поместить цветные шары диаметром 12 мм. Сколько шаров можно поместить в аквариум, чтобы вода не перелилась?

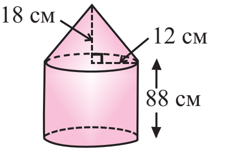


11. Найдите объем фигур.



прямая призма

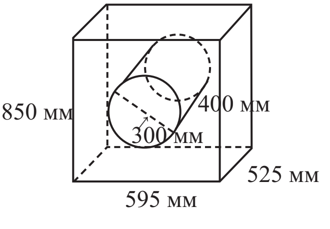




12. Размеры стиральной машины 850 мм × 595 мм × 525 мм. Стирка осуществляется при помощи нержавеющего барабана.

a) Найдите сколько литров воды вмещает барабан.

b) Определите объем стиральной машины без объема барабана.



7

Применение производной к исследованию функции

- **Нахождение промежутков возрастания и убывания функции**
- **Критические точки и экстремумы функции**
- **Исследование функции и построение графиков с применением производной**
- **Решение задач на нахождение экстремумов. Оптимизация**

Математический словарь

- **промежутки возрастания и убывания функции**
- **критические точки**
- **стационарные точки**
- **точки экстремума**
- **локальный максимум**
- **локальный минимум**
- **экстремумы функции**

Это интересно!

В маркетинге информация о каком-либо товаре представляется в виде графика “жизненного цикла товара”. За указанное время различают 5 фаз: 1 - выход на рынок; 2 - рост; 3 - зрелость; 4 - упадок; 5 - самообновление.

Нахождение промежутков возрастания и убывания функции

Практическая работа. Возрастание и убывание функции.

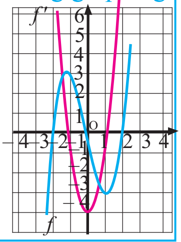
В одной системе координат, при помощи графкалькулятора, постройте графики функций $f(x) = x^3 - 4x$ и $f'(x) = 3x^2 - 4$.

- На каком интервале функция $f(x)$ возрастает?
- На каком интервале функция $f(x)$ убывает?
- Определите вид угла, который образует касательная к графику функции $f(x)$ с осью абсцисс на интервале возрастания.
- Определите вид угла, который образует касательная к графику функции $f(x)$ с осью абсцисс на интервале убывания.

https://www.geogebra.org/graphing

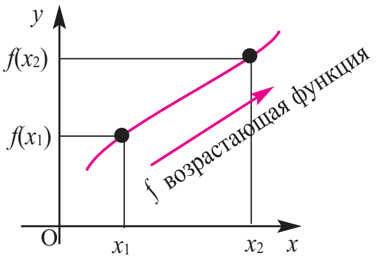
$f(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 4$



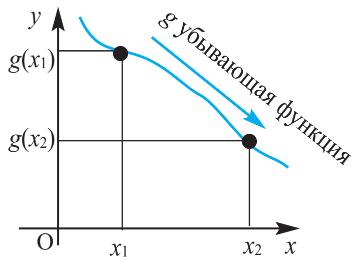
Интервалы возрастания и убывания функции

возрастающая функция



Если для любых x_1 и x_2 из некоторого промежутка области определения при $x_2>x_1$ выполняется условие $f(x_2)>f(x_1)$, то на этом промежутке функция возрастающая.

убывающая функция

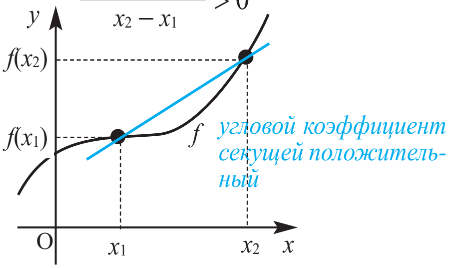


Если для любых x_1 и x_2 из некоторого промежутка области определения при $x_2>x_1$ выполняется условие $g(x_2) < g(x_1)$, то на этом промежутке функция убывающая.

Связь промежутков возрастания и убывания функции с угловым коэффициентом секущей можно выразить следующим образом.

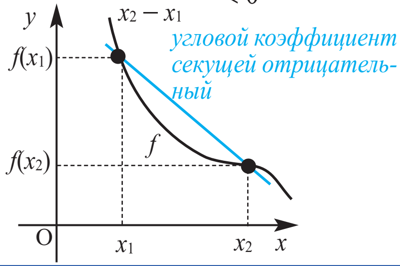
Если на заданном промежутке угловой коэффициент любой секущей положителен, то на этом промежутке функция *f* возрастает.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



Если на заданном промежутке угловой коэффициент любой секущей отрицателен, то на этом промежутке функция *f* убывает.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



Промежутки возрастания и убывания функции

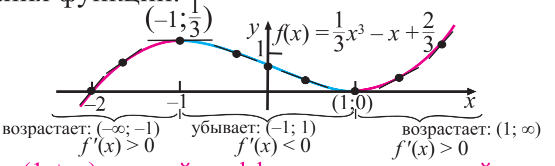
Пусть на определенном промежутке производная функции $y = f(x)$ положительна, т.е. $f'(x) > 0$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, то угловой коэффициент касательной будет положительным. А это значит, что касательная с положительным направлением оси абсцисс образует острый угол и на заданном промежутке график "поднимается", т.е. функция возрастает. Если $f'(x) < 0$, тогда касательная с положительным направлением оси абсцисс образует тупой угол, график "спускается", т.е. функция убывает.

Теорема. Если функция f дифференцируема в каждой точке заданного промежутка, то:

- Если $f'(x) > 0$, то функция f на данном промежутке возрастает.
- Если $f'(x) < 0$, то функция f на данном промежутке убывает.
- Если $f'(x) = 0$, то функция f на данном промежутке постоянна.

Примечание: если функция f непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку.

По графику функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3}$, исследуйте промежутки возрастания и убывания функции.



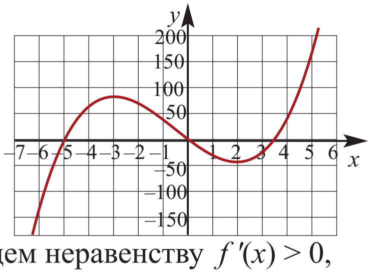
На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ угловой коэффициент касательной положительный, поэтому на каждом из промежутков $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$ функция f возрастает.

На интервале $(-1; 1)$ угловой коэффициент касательной отрицателен, поэтому на промежутке $[-1; 1]$ функция f убывает.

Пример 1. При помощи производной определите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$.

https://www.desmos.com/calculator

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$



Решение: 1. Алгебраический метод.

Найдем производную функции

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

$f'(x) = (4x^3 + 6x^2 - 72x + 1)' = 12x^2 + 12x - 72$

Функция $f(x)$, на промежутке удовлетворяющем неравенству $f'(x) > 0$, т.е. $12x^2 + 12x - 72 > 0$, возрастает.

Для решения неравенства сначала надо решить соответствующее уравнение $12x^2 + 12x - 72 = 0$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 2, x_2 = -3$.

Значит, при $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$ $f'(x) = 0$. Точки $x_1 = 2, x_2 = -3$ разбивают область определения функции на три интервала: $x < -3$, $-3 < x < 2$ и $x > 2$. В каждом из интервалов выберем контрольную точку для проверки и установим знак производной.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
Контрольная точка	$x = -5$	$x = -3$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$
$f'(x)$	$f'(-4) = 72$ положительна	0	$f'(0) = -72$ отрицательна	0	$f'(-4) = 72$ положительна
$f(x)$	возрастает		убывает		возрастает

Из таблицы и непрерывности функции $f(x)$ видно, что данная функция возрастает на промежутках $x \leq -3$ и $x \geq 2$ и убывает на промежутке $-3 \leq x \leq 2$. Из графика так же видно, что задания решение верно.

2. Промежутки возрастания и убывания функции можно определить по графику производной.

На рисунке изображен график производной $f'(x) = 12x^2 + 12x - 72$.

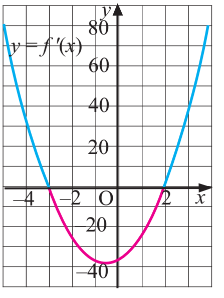


График производной $f'(x)$ при $x < -3$ и $x > 2$ расположен выше оси x, значит, $f'(x) > 0$. При $-3 < x < 2$ график производной расположен ниже оси x, значит $f'(x) < 0$. Так как функция $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ в точках $x = -3$ и $x = 2$ непрерывна, то на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[2; +\infty)$ она возрастает, а на промежутке $[-3;2]$ убывает.

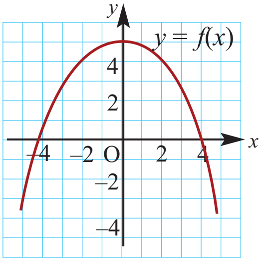
Пример 2. Изобразите схематично график непрерывной функции согласно следующим условиям:

a) при $x < 0$ $f'(x) > 0$, при $x > 0$ $f'(x) < 0$, $f(0) = 5$

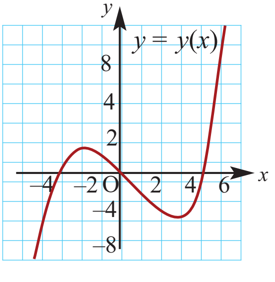
b) при $x < -2$ или $x > 3$ $f'(x) > 0$, при $-2 < x < 3$ $f'(x) < 0$, $f(0) = 0$

Решение:

a) при $x < 0$ знак производной положительный: $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает. При $x > 0$ знак производной отрицательный: $f'(x) < 0$, значит, функция убывает, при $x = 0$ значение функции равно 5.



b) При $x < -2$ и $x > 3$ знак производной положительный: $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает. При $-2 < x < 3$ знак производной отрицательный: $f'(x) < 0$, значит, функция убывает, при $x = 0$ значение функции равно 0.



Нахождение промежутков возрастания и убывания функции

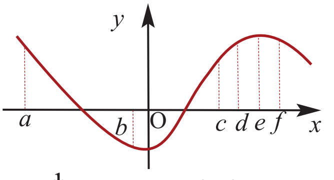
Обучающие задания

1. a) Функция убывает на интервале $0 < x < 12$. Значение какого выражения больше: $f(3)$ или $f(10)$? Обоснуйте свое мнение.

b) Как можно определить интервалы возрастания и убывания функции при помощи производной?

c) Верно ли, что "Линейная функция всегда или возрастает, или убывает"? Обоснуйте свое мнение на примерах.

2. При каких значениях аргумента по графику на рисунке производная функции:
a) равна нулю; b) больше нуля;
c) меньше нуля?



3. Определите интервалы возрастания и убывания функции, используя производную и контрольные точки.

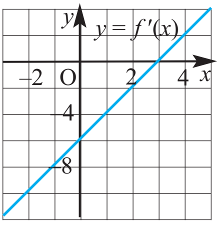
a) $f(x) = 4x + 3$ b) $f(x) = (2x - 3)^2$

c) $f(x) = 2x - x^2$ d) $f(x) = 6x^2 - x^3 + 2$

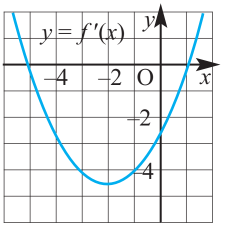
e) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ f) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

4. По графику производной $f'(x)$ найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$.

a)



b)



5. Изобразите график производной функции $f(x)$ и, по графику, определите промежутки возрастания и убывания функции.

a) $f(x) = -2x + 1$ b) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$ c) $f(x) = (x - 4)^2$

d) $f(x) = x^2 - 4x$ e) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ f) $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + 6$

6. a) При помощи построения графика производной $f'(x)$ функции, обоснуйте, что функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает на всей действительной оси.

b) Докажите, что функция $f(x) = -x - x^5$ убывает на всей числовой оси.

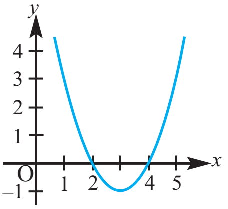
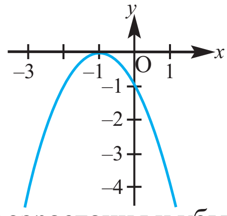
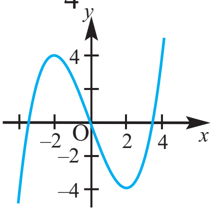
7. Изобразите схематично график функции, дифференцируемой на всей числовой оси, используя промежутки возрастания и убывания, заданные в таблице.

	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f'(x)$	отрицательна	0	положительна	0	отрицательна
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

Нахождение промежутков возрастания и убывания функции

8. a) По графику функции запишите промежутки возрастания и убывания.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ 2) $f(x) = -(x^2 + 1)^2$ 3) $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3x$

b) Определите промежутки возрастания и убывания функции при помощи производной.

9. a) Найдите, при каких значениях аргумента производная функции равна нулю.

b) Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

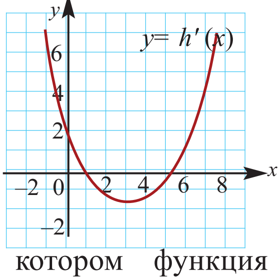
1) $f(x) = x^2 + 6x - 3$ 2) $g(x) = 2 - 3x - 2x^2$

3) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 4) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

5) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$ 6) $g(x) = 8x^2 - x^4$

7) $f(x) = xe^x$ 8) $g(x) = x\ln x$

10. На рисунке дан график функции $h'(x)$. По графику для каждой заданной пары значений определите большее значение функции $h(x)$.



a) $h(3)$, $h(4)$ b) $h(-1)$, $h(0)$

c) $h(6)$, $h(8)$ d) $h(2)$, $h(4)$

11. a)Существует ли такое значение a, при котором функция $f(x) = ax^2 + 2x + 5$ убывает на всей числовой оси?

b) Найдите такое значение b, при котором функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ возрастает на всей числовой оси.

Указание: запишите производную функции выделив полный квадрат.

12. **Задания открытого типа.** Согласно следующим условиям схематично изобразите график.

a) Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$.

b) Функция $g(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; -3]$ и возрастает на промежутке $[-3; +\infty)$.

c) Функция $h(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; 3]$ и $[8; +\infty)$ и возрастает на промежутке $[3; 8]$.

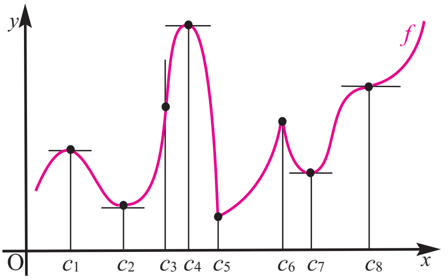
d) Производная непрерывной функции $\varphi(x)$ положительна на промежутке $(-\infty; -2)$ и отрицательна на промежутке $(-2; +\infty)$.

e) Производная функции $m(x)$ отрицательна на промежутке $(-\infty; 1)$ и положительна на промежутке $(1; +\infty)$.

Критические точки и экстремумы функции

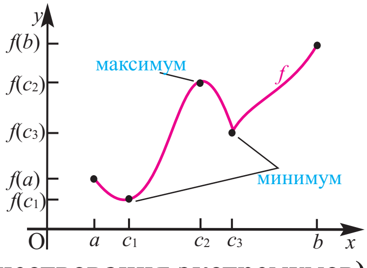
В некоторых точках из области определения производная функции может быть равна нулю или вообще может не существовать. Такие точки из области определения называются **критическими точками** функции. Покажем критические точки на графике заданной функции.

1. Для значений x, равных c_1, c_2, c_4, c_7, c_8 угловой коэффициент касательной к графику равен 0. Т.е. $f'(x) = 0$. Эти точки являются критическими точками функции.
2. В точках c_3, c_5, c_6 функция не имеет производной. Эти тоже критические точки функции.



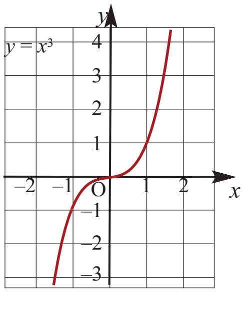
3. Для рассматриваемой нами функции критические точки c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7 делят ее область определения на чередующиеся интервалы возрастания и убывания. Точки c_3, c_8 - критические точки, которые не изменяют возрастание и убывание (или наоборот).

По графику видно, что в точках внутреннего экстремума(c_1 и c_2) производная функции равна нулю, а в точке (c_3) производная не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю, также называются **стационарными точками**.



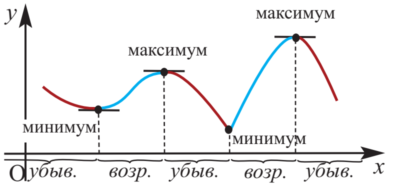
Теорема Ферма **(Необходимое условие существования экстремумов)**

Во внутренних точках экстремума производная либо равна нулю, либо не существует.



Примечание. Точка, в которой производная равна нулю, может и не быть точкой экстремума. Например, в точке $x = 0$ производная функции $y = x^3$ равна нулю, но эта точка не является ни точкой максимума, ни точкой минимума.

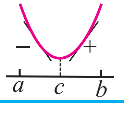
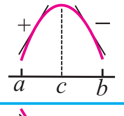
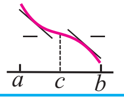
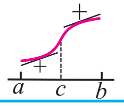
На отрезке непрерывности функция может иметь несколько критических точек, точек максимума и минимума. Существование экстремума в точке зависит от значения функции в данной точке и в точках, близких к данной, т.е. имеет смысл локального (местного) значения. Поэтому иногда используют термин локальный максимум и локальный минимум.



Критические точки функции и экстремумы

Достаточное условие существования экстремума.
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$.
Если x_0 является критической точкой, в окрестности которой функция дифференцируема, то, если в этой окрестности:
1) $f'(x)$ слева от точки x_0 положительна, а справа - отрицательна, то точка x_0 является точкой максимума.
2) $f'(x)$ слева от x_0 отрицательна, а справа - положительна, то точка x_0 является точкой минимума
3) $f'(x)$ с каждой стороны от точки x_0 имеет одинаковые знаки, то точка x_0 не является точкой экстремума.
Чтобы найти наибольшее (абсолютный максимум) или наименьшее (абсолютный минимум) значение функции, имеющей конечное число критических точек на отрезке, надо найти значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее.
Соответствующие наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ записываются как $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ниже представлены примеры определения максимума и минимума в соответствии со знаком производной первого порядка.

графики функций на отрезке $[a;b]$	$f(c)$	знак $f'(x)$ на интервале $(a; c)$	знак $f'(x)$ на интервале $(c; b)$	Возрастание или убывание
	минимум	−	+	на $[a; c]$ убывает, на $[c; b]$ возрастает
	максимум	+	−	на $[a; c]$ возрастает, на $[c; b]$ убывает
	ни максимум и ни минимум	−	−	на $[a; c]$ убывает, на $[c; b]$ убывает
	ни минимум и ни максимум	+	+	на $[a; c]$ возрастает, на $[c; b]$ возрастает

Пример 1. Для функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ определите максимумы и минимумы и схематично изобразите график.

Решение: Для решения задания сначала надо найти критические точки. Для данной функции этими точками являются точки (стационарные), в которых производная равна нулю.

Критические точки функции и экстремумы

1. Производная функции: $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$
2. Критические точки функции: $3x^2 - 3 = 0$, $x = \pm 1$
3. Точки $x = -1$ и $x = 1$ разбивают область определения функции на три промежутка.

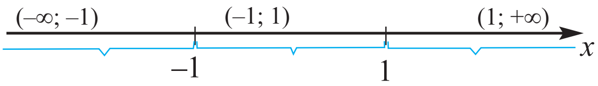
Проверим знак $f'(x)$ на интервалах, выбрав пробные точки:

$x = -2$ для интервала $(-\infty; -1)$; $f'(-2) = 3\,(-2)^2 - 3 = 9 > 0$

$x = 0$ для интервала $(-1; 1)$; $f'(0) = 3\,(0)^2 - 3 = -3 < 0$

$x = 2$ для интервала $(1; +\infty)$; $f'(2) = 3\,(2)^2 - 3 = 9 > 0$

Интервал



Пробные точки	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Знак $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Возрастание и убывание	на $(-\infty;-1]$ возрастает	на $[-1; 1]$ убывает	на $[1; +\infty)$ возрастает

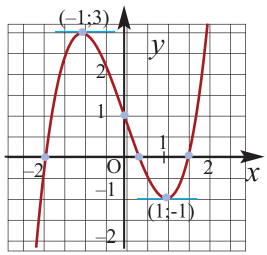
в $x = -1$ максимум   в $x = 1$ минимум

При $x = -1$ имеем $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$. $(-1;3)$ - максимум

При $x = 1$ имеем $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$ $(1;-1)$ - минимум

4. Используя полученные для функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ данные и найдя координаты нескольких дополнительных точек, построим график функции.

x	-1	$-0{,}5$	0	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	3	$1{,}2$	1	-1	$-0{,}125$	3



Пример 2: Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение: Сначала найдем критические точки.

Так как $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$, то критические точки можно найти из уравнения $3x^2 + 6x - 9 = 0$: $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Критическая точка $x = -3$ не принадлежит данному отрезку $[-1; 2]$, и поэтому мы ее не рассматриваем. Вычислим значение заданной функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка.

$f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 1 = -4$,

$f(-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 1 = 12$,

$f(2) = 2^3 + 3\cdot 2^2 - 9\cdot 2 + 1 = 3$.

Из этих значений наименьшее -4, наибольшее 12. Таким образом:

$\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 12$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = -4$

Критические точки функции и экстремумы

Пример 3. Найдите экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - x^4$.

Решение: 1. Производная функции: $f'(x) = (2x^3 - x^4)' = 6x^2 - 4x^3$

2. Критические точки: $6x^2 - 4x^3 = 0$,

$2x^2(3 - 2x) = 0$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1{,}5$

3. Интервалы, на которые критические точки делят область определения функции:

$$(-\infty; 0),\ (0; 1{,}5) \text{ и } (1{,}5; \infty)$$

Проверим знак $f'(x)$ на интервалах, выбрав пробные точки.

Для промежутка $(-\infty; 0)$ возьмем $x = -1$: $f'(-1) = 6\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1)^3 = 10 > 0$

Для промежутка $(0; 1{,}5)$ возьмем $x = 1$: $f'(1) = 6\cdot 1^2 - 4\cdot 1^2 = 2 > 0$

Для промежутка $(1{,}5; \infty)$ возьмем $x = 2$: $f'(2) = 6\cdot 2^2 - 4\cdot 2^3 = -8 < 0$

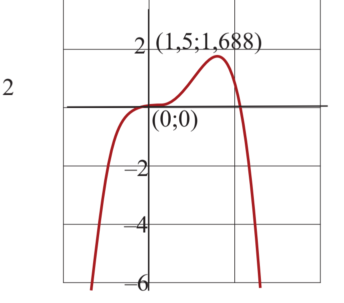
Интервал	$(-\infty; 0)$	$(0; 1{,}5)$	$(1{,}5; +\infty)$
Пробные точки	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
Знак $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Возрастание - убывание	на $(-\infty;0]$ возрастает	на $[0; 1{,}5]$возрастает	на $[1{,}5; +\infty;)$убывает

не изменяется   *$x = 1{,}5$ максимум*

Используя полученную для функции $f(x) = 2x^3 - x^4$ информацию и найдя значение функции еще в нескольких точках, можно построить график функции. При этом следует учитывать, что в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 1{,}5$ касательная к графику горизонтальна. Построение графика можно проверить при помощи графкалькулятора.

https://www.desmos.com/calculator

x	$f(x)$, приблизительно
–1	–3
–0,5	–0,31
0	0
0,5	0,19
1	1
1,25	1,46
1,5	1,69
2	0



- Функция f на промежутке $(-\infty; 0]$ возрастает.
- Точка $x = 0$ критическая точка функции f, но не является экстремумом.
- Функция f на промежутке $[0; 1{,}5]$ возрастает.
- Функция f на промежутке $[1{,}5; \infty)$ убывает.
- $x_{max} = 1{,}5$; $f_{max} = f(1{,}5) \approx 1{,}688$

Пример 4. Найдите экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Решение: 1. Производная $f'(x) = (\sqrt[3]{(x-2)^2})' = ((x-2)^{\frac{2}{3}})' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$, $x \neq 2$.

2. Критические точки: для этого надо решить уравнение $f'(x) = 0$ или найти точки, в которых производная не существует. В точке $x = 2$ функция не имеет конечной производной. Однако точка $x = 2$ принадлежит области определения. Значит, точка $x = 2$ является критической точкой функции.

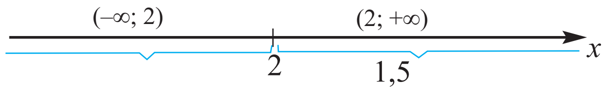
3. Промежутки, на которые критическая точка делит область определения функции: $(-\infty; 2)$ и $(2; \infty)$

Определим знак $f'(x)$, выбрав пробные точки для каждого промежутка:

Для $(-\infty; 2)$ возьмем $x = 0$: $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{0-2}} < 0$

Для $(2; +\infty)$ возьмем $x = 3$: $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(3-2)}} > 0$

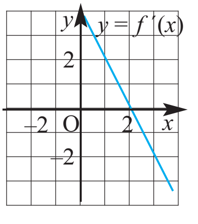
Интервал



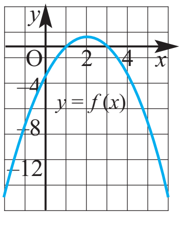
Пробные точки	$x = 0$	$x = 3$
Знак $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Возрастание - убывание	на $(-\infty;2]$ убывает	на $[2; +\infty)$ возрастает

$x = 2$ точка минимума

- Функция f на промежутке $(-\infty; 2]$ убывает.
- Функция f на промежутке $[2; +\infty)$ возрастает.
- $x_{\min} = 2$ и $f_{\min} = f(2) = 0$



Пример 5. По графику функции производной $f'(x)$ схематично изобразите график самой функции.

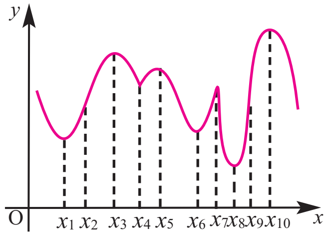


Решение: Производная $f'(x)$ в точке $x = 2$ равна нулю, а при $x > 2$ отрицательна, значит, на интервале $[2; +\infty)$ функция убывающая. При $x < 2$ производная положительна, а это говорит о том, что функция f на промежутке $(-\infty;2]$ возрастает. Точкой перехода от возрастания к убыванию функции является точка $(2; f(2))$. Соответствующий график представлен на рисунке.

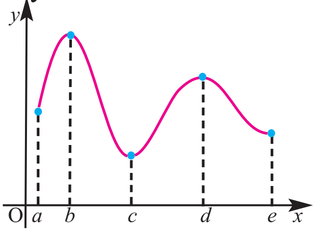
Критические точки и экстремумы функции

Обучающие задания

1. По графику определите критические точки.



2. По графику найдите промежутки возрастания и убывания функции, знак производной в этих интервалах, точки максимумов и минимумов.



3. a) Всегда ли верно утверждение: "Если $f'(c) = 0$, то точка $x = c$ является точкой экстремума"?
b) Функция f непрерывная и убывающая на отрезке $[-3; 8]$. При каких значениях аргумента функция принимает наибольшее и наименьшее значение на данном отрезке?

4. Представьте, что вы двигаетесь к вершине горы по дороге, имеющей спуски и подъемы. Функция $h(t)$ показывает зависимость высоты, на которую вы поднялись, от времени. Почему в определенные моменты времени $h'(t) = 0$? Как вы сможете связать свое движение с понятиями локального максимума и локального минимума?

5. $f'(x) = x^3 - 2x^2$ производная некоторой функции.
a) При каких значениях x значение $f'(x) = 0$?
b) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.
c) Как вы определите, по производной $f'(x)$, что данная функция имеет единственный экстремум?

6. Найдите критические точки, промежутки возрастания и убывания и схематично изобразите график функции.

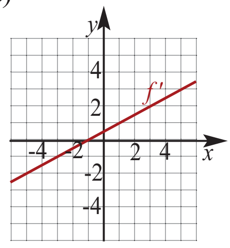
a) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ b) $f(x) = x^3 - 3x$
c) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ d) $y = x^4 - 4x^3 + 5$

7. Для следующих функций найдите критические точки, максимумы и минимумы.

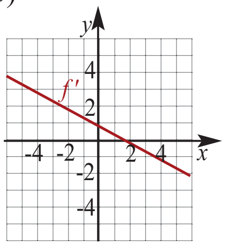
1) $f(x) = x^2 - 4x$ 2) $f(x) = x^2 + 4x + 10$
3) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ 4) $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$
5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 6) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$
7) $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ 8) $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$
9) $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{3}$ 10) $f(x) = x^4 - 32x + 4$

8. По графику производной функции найдите промежутки возрастания и убывания и определите абсциссы точек экстремумов. Изобразите схематично график функции.

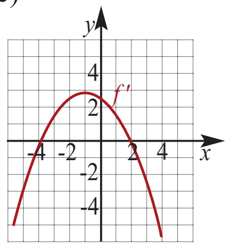
a)



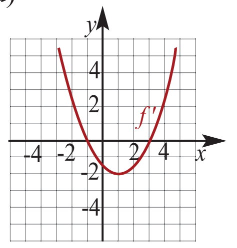
b)



c)



d)



9. f - дифференцируемая функция. В таблице для определенных значений x-ов заданы значения $f'(x)$.

x	-1	$-0{,}75$	$-0{,}50$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}50$	$0{,}75$	1
$f'(x)$	-10	$-3{,}2$	$-0{,}5$	$0{,}8$	$5{,}6$	$3{,}6$	$-0{,}2$	$-6{,}7$	$-20{,}1$

По таблице значений:
a) постройте схематично график функции;
b) определите, приблизительно, место точек экстремума.

10. Найдите критические точки заданных функций. Установите, какие из них являются точками минимума, а какие точками максимума. Найдите экстремумы функций.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$ 2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

5) $f(x) = (x-2)^3$ 6) $f(x) = x^5 - 5x$

7) $f(x) = (x^2-1)^3$ 8) $f(x) = (x-2)^4$

9) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ 10) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

11. Найдите экстремумы функции $f(x)$ и схематично изобразите график функции. По графику определите, сколько действительных корней имеет уравнение $f(x) = 0$

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$

12. Найдите критические точки функции.
a) $f(x) = x - \sin 2x$ b) $f(x) = \cos x - x$

Критические точки функции и экстремумы

13. Для функции $f(x)$ на заданном отрезке найдите: а) локальные экстремумы; b) наибольшее и наименьшее значения функции.

a) $f(x) = 3 - 2x$, $[-1;2]$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[-1;3]$
c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $[-1;1]$
d) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $[0;4]$
e) $f(x) = x^3 - 6x$, $[-1;2]$
f) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$, $[0;1]$
g) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, $[-1;1]$
h) $f(x) = x - \ln x$, $[\frac{1}{e};e]$

14. a) При помощи производной докажите, что абсцисса экстремума функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ равна $x = -\dfrac{b}{2a}$. Найдите экстремум.

b) Сколько экстремумов может иметь функция $y = x^3 + px + q$?

Прикладные задания

15. Затраты на x единиц продукции за неделю можно задать функцией $C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$. Запишите функцию, выражающую маржинальные затраты $MC(x) = C'(x)$. В одной системе координат изобразите графики этих функций при помощи графкалькулятора.

16. Периметр прямоугольника со сторонами x и $\dfrac{50}{x}$ можно смоделировать функцией $P(x) = 2x + \dfrac{100}{x}$

a) Найдите экстремумы функции $P(x)$.

b) Объясните ситуацию, соответствующую пункту а.

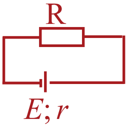
17. a) Найдите положительное число, сумма которого с обратным к нему числом будет наименьшей.

b) Найдите положительное число, разность которого с его кубом будет наибольшей.

c) Найдите число, сумма которого с его квадратом будет наименьшей.

d) Представьте число 18 в виде суммы трех положительных слагаемых, таких, чтобы второе слагаемое было в два раза больше первого, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

18. Силу, генерируемую в замкнутой электрической цепи, можно рассчитать по формуле $P = \dfrac{E^2R}{(R+r)^2}$. Здесь r-внутреннее сопротивление, E-электродвижущая сила, R-внешнее сопротивление. При каком значении R мощность, выделяемая во внешней части цепи будет максимальной?



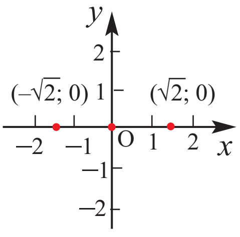
19. В результате наблюдений было установлено, что изменение температуры больного T (по Фаренгейту) в течении t дней определялось при помощи функции $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$; $0 \leq t \leq 12$. Найдите наибольшее и наименьшее значение данной функции и объясните соответствующую ситуацию.

Построение графиков функции с помощью производной

Функция - многочлен определена и непрерывна на всей числовой оси. **Чтобы построить график функции - многочлен надо выполнить следующие шаги.**

- Определите точки пересечения с осями координат.
- Найдите критические точки.
- Найдите промежутки возрастания и убывания функции.
- Найдите максимумы и минимумы.
- Постройте график.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = x^4 - 2x^2$.



- Точки пересечения с осями координат :

$x^4 - 2x^2 = 0,\ x = 0,\ x = \pm\sqrt{2},$ $(-\sqrt{2};\ 0),\ (0;\ 0),\ (\sqrt{2};\ 0)$

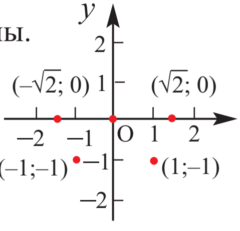
- Критические точки (точки, в которых производная равна нулю): $f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x$

$4x^3 - 4x = 0,\quad 4x(x^2 - 1) = 0,\ \ x = 0,\ x = \pm 1$

$f(0) = 0,\ f(-1) = -1,$ и $f(1) = -1,$

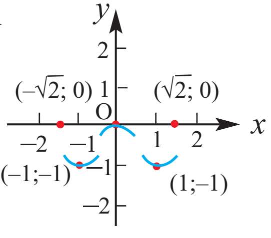
значит, точки $(0;\ 0)$, $(-1;\ -1)$ и $(1;\ -1)$ расположены на графике.

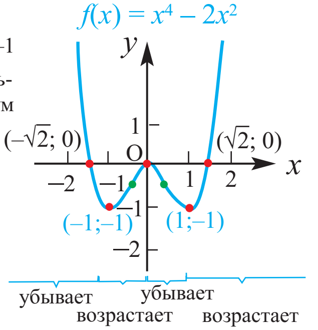
- Промежутки возрастания и убывания. Экстремумы.



Критические точки $x = -1,\ x = 0,\ \ x = 1$ делят область определения функции на четыре промежутка. Проверим знаки производной $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0;1)$	1	$(1; \infty)$
Контрольные точки	-2		$-0{,}1$		$0{,}1$		2
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗
Экстремумы		переход с убывания на возрастание		переход с возрастания на убывание		переход с убывания на возрастание	
		$x_{min} = -1$ $f_{min} = f(-1) = -1$ $(-1;-1)$ локальный минимум		$x_{max} = 0$ $f_{max} = f(0) = 0$ $(0;0)$ локальный максимум		$x_{min} = 1$ $f_{min} = f(1) = -1$ $(1;-1)$ локальный минимум	





- Используя полученную информацию, построим график функции.

► График функции $g(x) = x^4 - 8x^2$ постройте самостоятельно.

Построение графиков функции с помощью производной

Чтобы построить график рациональной функции надо выполнить следующие шаги.

- Найдите область определения.
- Найдите асимптоты (если они есть).
- Определите точки пересечения с осями координат.
- Найдите критические точки.
- Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы.
- Постройте график.

Пример 5. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

- Область определения функции: $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
- Асимптоты: $\lim\limits_{x\to 3^-} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} x = +\infty$

Прямая $x = 3$ вертикальная асимптота функции.

Так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе, рациональная функция не имеет горизонтальной асимптоты. Однако, записав следующее: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3} = x + 3 + \dfrac{9}{x-3}$, при условии $x \to \infty$ имеем $\dfrac{9}{x-3} \to 0$

т.е. график функции $f(x)$ бесконечно приближается к прямой $y = x + 3$. В этом случае прямая $y = x + 3$ является **наклонной асимптотой** функции $f(x)$. Вообще, если степень многочлена $P(x)$ на 1 единицу больше степени многочлена $Q(x)$, то рациональная функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ имеет наклонную асимптоту.

- Точки пересечения с осями координат: $\dfrac{x^2}{x-3} = 0$, $x = 0$, (0;0)
- Критические точки: $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)' = \dfrac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$, $\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2} = 0$,

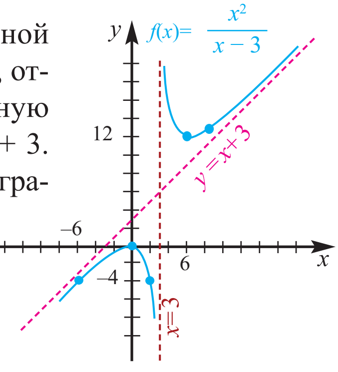
$x^2 - 6x = 0$, $x(x-6) = 0$, $x = 0, x = 6$, $f(0) = 0$, $f(6) = 12$, (0;0) и (6;12)

- Промежутки возрастания и убывания: в точке $x = 3$ функция не определена, точки $x = 0$ и $x = 6$ являются критическими точками функции. Определим знаки производной в каждом полученном интервале.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 6)$	$(6; \infty)$
Пробные точки	-1	2	4	7
$f'(x) = \dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$	$f'(-1) = 7/16 > 0$	$f'(2) = -8 < 0$	$f'(4) = -8 < 0$	$f'(7) = 7/16 > 0$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
Экстремумы	*переход от возрастания к убыванию* $x_{max=0}$ $f_{max} = f(0) = 0$ (0;0) *локальный максимум*	*знак не меняется*	*переход от убывания к возрастанию* $x_{min=6}$ $f_{min} = f(6) = 12$ (6; 12) *локальный минимум*	

Точки 0, 3, 6 отмечены на числовой оси.

● Построим график. Отметим на координатной плоскости точки (−6;−4), (0;0), (6;12), (9;13,5), относящиеся к графику. Проведем вертикальную асимптоту $x = 3$ и наклонную асимптоту $y = x + 3$. Используя полученные результаты, изобразим график функции.



Обратите внимание! В области, близкой к точке $x = 0$, график функции ведет себя как парабола $y = \dfrac{x^2}{3}$

Обучающие задания

1. Постройте график функции - многочлен, согласно следующим данным.

a) $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -5$, $f'(7) = 0$, $f(7) = 10$ и $f(3) = 2$

b) $f'(-3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f'(9) = 0$, $f(9) = -6$; $f(2) = 1$

2. По данным таблицы постройте график функции.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
Проба	$x = -4$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$f'(x)$	отрицательна	0	положительна	0	отрицательна	0	положительна
$f(x)$	убывает	мин.	возрастает	макс.	убывает	мин.	возрастает

3. Постройте график функции.

a) $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$

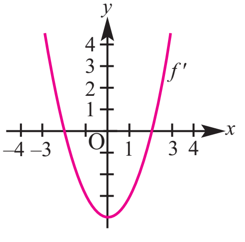
b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

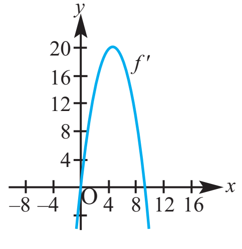
d) $g(x) = -x^4 + 2x^2$

4. По графику производной постройте график какой-либо функции.

a)



b)



5. Дана функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 7$.
a) Как вы думаете сколько экстремумов может иметь данная функция?

b) Найдите критические точки функции, проведите классификацию экстремумов на точки максимума и минимума. Определите интервалы возрастания и убывания функции.

c) Изобразите график функции. Сравните результаты пунктов a) и b). Запишите свое мнение.

6. Исследуйте функцию при помощи производной и постройте график.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = x^3 - 3x + 6$
c) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
d) $t(x) = 4x^5 - 5x^4$

7. Постройте график функции.

a) $f(x) = 2x^2 - x^4$
b) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$
d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
e) $f(x) = x^4 - 2x^3$
f) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

8. Укажите, как график функции $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ отличается от графика функции $g(x) = \frac{1}{x^2}$, записав соответствующие преобразования, и постройте график. Постройте график функции $f(x)$ при помощи производной.

9. Постройте график функции при помощи производной.

a) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ b) $y = \frac{x}{1+x^2}$ c) $y = \frac{x^2}{x-3}$ d) $y = x + \frac{1}{x}$

10. В одной системе координат постройте графики себестоимости $C(x) = 4x + 10$, общего дохода $R(x) = 50x^2 - 0{,}5x$ и, соответствующей данным функциям, функции прибыли.

11. **Работа в группах.** **Задания открытого типа.** Для функции $f(x)$ используя следующие данные, выполните следующее:
a) Постройте какую-либо функцию согласно условиям.
b) Найдите экстремумы.

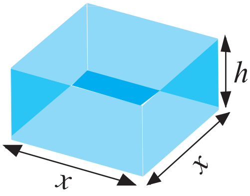
x	0	1	2	3
f	0	2	0	–2
f'	3	0	нет	–3

В реальной жизненной ситуации возникает необходимость выбора оптимального варианта и нахождения экстремумов определенной функции. Ежедневно, при решении проблем в различных областях, мы сталкиваемся с терминами наибольшая прибыль, наименьшие затраты, наибольшее напряжение, наибольший объем, наибольшая площадь и т.д. Большое экономическое значение в промышленности, при определении дизайна упаковки, имеет вопрос, как подобрать размеры упаковки с наименьшими затратами. Такого рода задания связаны с нахождением максимального или минимального значения величины. Задачи на нахождение максимального и минимального значения величины называются задачами на оптимизацию. Для решения данных задач применяется производная.

Замечание 1: На интервале $(a; b)$ должны учитываться предельные значения функции на концах.

Замечание 2: В рассматриваемом интервале может быть одна стационарная точка: или точка максимума, или точка минимума. В этом случае, в точке максимума функция принимает наибольшее значение, а в точке минимума - наименьшее значение.

Пример 1. Максимальный объем. Фирма планирует выпуск коробки без крышки, с квадратным основанием и площадью поверхности 192 см². Найдите размеры коробки, при которых она будет иметь наибольший объем?



Решение: Так как основанием коробки является квадрат, то ее объем можно вычислить по формуле $V = x^2h$. Используя другие данные задачи, выразим объем только через одну переменную x.

Вычислим площадь поверхности коробки. Она равна 192 см² и состоит из 4 площадей боковых граней + площадь основания.

$S_{п.п.} = 4xh + x^2 = 192$. Тогда выразим $h = \dfrac{192 - x^2}{4x}$ и подставим в формулу $V = x^2h$. Зависимость объема коробки от переменной x можно выразить следующим образом:

$$V(x) = x^2\left(\frac{192 - x^2}{4x}\right) = 48x - \frac{x^3}{4}$$

Теперь найдем область определения функции $V(x)$, согласно условию задачи.

Понятно, что длина не может быть отрицательной, т.е. $x > 0$. Площадь квадрата в основании коробки должна быть меньше 192, т.е. $x^2 < 192$ или $x < \sqrt{192}$. Значит, $0 < x < \sqrt{192}$.

Найдем максимальное значение функции $V(x)$ на интервале $(0; \sqrt{192})$

Для этого используем производную первого порядка:

$$V'(x) = \left(48x - \frac{x^3}{4}\right)' = 48 - \frac{3x^2}{4} = \frac{3}{4}(8 - x)(8 + x)$$

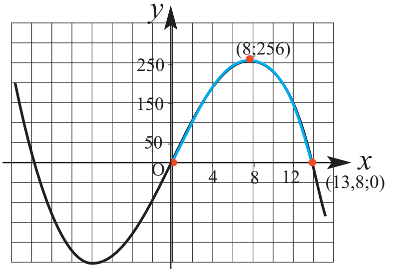
При $x = 8$ и $x = -8$ имеем, что $V'(x) = 0$.

Однако, $-8 \notin (0;\sqrt{192})$. Значит, в рассматриваемом интервале критической точкой является $x = 8$.
При $0 < x < 8$ имеем $V'(x) > 0$, при $8 < x < \sqrt{192}$ имеем $V'(x) < 0$, функция $V(x)$ в точке $x = 8$ принимает максимальное значение.
Если длина основания коробки будет 8 см, то высота будет равна

$$h = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4 \text{ см.}$$

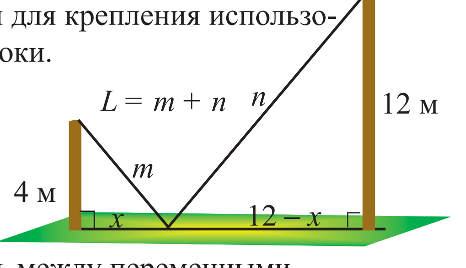
Значит, максимальный объем будет иметь коробка с размерами
8 см × 8 см × 4 см.

Построив при помощи графкалькулятора график функции $V(x) = 48x - \frac{x^3}{4}$, также можно увидеть, что при $x = 8$ объем имеет максимальное значение. Постройте график функции при помощи производной и убедитесь в правильности решения.



Пример 2. Минимальное потребление. Два столба высотой 4 м и 12 м находятся на расстоянии 12 м друг от друга. Самые высокие точки столбов соединены с металлической проволокой, каждая из которых, в свою очередь крепится на земле в одной точке. Выберите такую точку на земле, чтобы для крепления использовалось наименьшее количество проволоки.

Решение: 1) Изобразим рисунок, соответствующий условию задачи, и обозначим соответствующие данные на рисунке.



2) Аналитически выразим зависимость между переменными.
• Длину проволоки обозначим через L. Часть проволоки от каждого столба обозначим соответственно через m и n, тогда $L = m + n$.
• Величина L изменяется в зависимости от точки крепления на земле. Обозначим одно из них через x, тогда другое будет равно $12 - x$.
Выразим величины m и n через переменную x.
По теореме Пифагора: $x^2 + 4^2 = m^2$, $\quad m = \sqrt{x^2 + 16}$

$(12 - x)^2 + 12^2 = n^2$, $\quad n = \sqrt{x^2 - 24x + 288}$

$L = m + n = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}$

зависимость функции $L(x)$ от переменной x будет

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}\ , \quad 0 \le x \le 12.$$

Производная функции $L(x)$:

$$L'(x) = (\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}}$$

Найдем критические точки функции $L(x)$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}} = 0,$$

$$x\sqrt{x^2 - 24x + 288} = (12 - x)\sqrt{x^2 + 16}\ ,$$

$$x^2(x^2 - 24x + 288) = (12 - x)^2(x^2 + 16),$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = (144 - 24x + x^2)(x^2 + 16),$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = 144x^2 - 24x^3 + x^4 + 16\cdot144 - 16\cdot24x + 16x^2,$$

$$128x^2 + 16\cdot24x - 16\cdot144 = 0,$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0, \qquad x_1 = 3, \quad x_2 = -6.$$

Сравнивая значения функции $L(x)$ в точках $x = 0$, $x = 12$, $x = 3$ (это проверьте самостоятельно), получим, что наименьшее количество проволоки используется при $x = 3$: $L(3) = 20$ (метр)

При решении задач на экстремумы обратите внимание на следующее!

1. Внимательно читайте условие. Сделайте соответствующий рисунок.
2. Задайте список соответствующих переменных и констант, которые менялись и оставались неизменными и какие единицы использовались. Если на рисунке есть размеры, обозначьте их.
3. Выберите соответствующий параметр x и выразите искомую величину функцией $f(x)$. Найдите экстремумы данной функции.
4. Полученные значения объясните экспериментально.

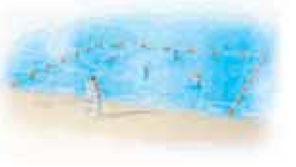
Обучающие задания

1. Представьте число 24 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

2. Из проволоки длиной 60 м смоделировали прямоугольник. Какие размеры должен иметь этот прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей?

3. Площадь прямоугольника равна 64 см². Какие размеры должен иметь этот прямоугольник, чтобы его периметр был наименьшим?

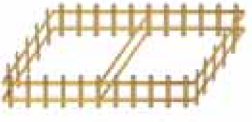
4. **Максимальная площадь.** Туристы планируют провести соревнования по волейболу на воде. Для ограждения части моря у них есть специальная веревка длиной 200 метр с пластиковыми фонариками. Какие размеры будет иметь участок прямоугольной формы, одна сторона которого расположена вдоль берега, чтобы площадь была наибольшей?



5. Основанием бака без крышки в форме параллелепипеда является квадрат. Объем бака 108 л. Какие размеры должен иметь бак, чтобы для его изготовления расходовалось как можно меньше материала?

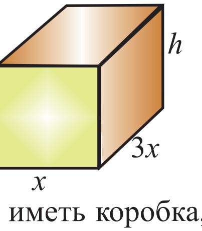
6. **Максимальная площадь.** Участок для посева имеет форму прямоугольника. Фермер планирует разделить данный участок на прямоугольные площадки, используя для этого уже имеющийся у него в сарае материал для ограждения. Сколько, по крайней мере, квадратных метров можно оградить, используя данный материал?

a) Хочет разделить на два одинаковых по размеру участка, имея 1000 м материала для ограждения.

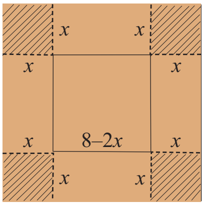


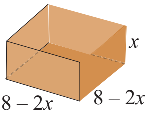
b) Хочет разделить на три одинаковых по размеру участка, имея 1200 м материала для ограждения.

7. **Уменьшения затрат до минимума.** Для коробки, объем которой должен быть 60 см^3, предусмотрено, что длина основания будет в 3 раза больше ширины. 1 см^2 материала для изготовления основания стоит 10 манат, 1 см^2 материала для боковых граней стоит 6 манат. Какие оптимальные размеры должна иметь коробка, чтобы затраты на ее изготовление были минимальными?



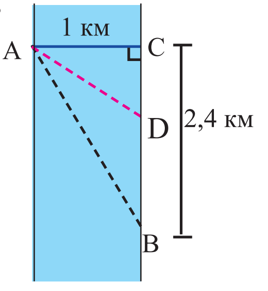
8. **Максимальный объем.** От картона квадратной формы, со стороной 8 см, с четырех сторон вырезали одинаковые по размеру квадраты и склеили коробку, как показано на рисунке. Какую высоту, в сантиметрах, должна иметь коробка из картона с данными размерами чтобы она имела максимальный объем?





9. **Максимальная площадь.** Окно имеет форму конструкции, состоящей из прямоугольника и полукруга. Если всего имеется 12 м рамы, то какие размеры нужно выбрать, чтобы площадь попадания света была наибольшей? (Площадь окна должна быть максимальной).

10. **Минимальное время.** Расул должен на лодке из точки A на одном берегу канала, шириной 1 км, попасть в точку B на другом берегу. Для этого он может выбрать следующие варианты:

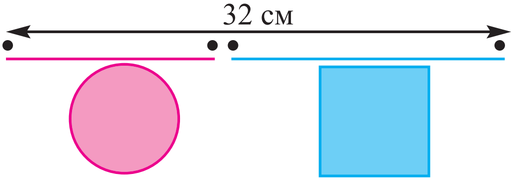


1) Переплыть канал на лодке из точки A в точку C, а потом пешком добраться до точки B.
2) Переплыть канал из точки A в точку B сразу.
3) Переплыть на лодке из точки A в некоторую точку D, расположенную между точками B и C, а потом из точки D пешком дойти до точки B.

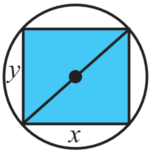
Если Расул за час переплывает на лодке 3 км и проходит пешком 5 км, то какой путь он должен выбрать, чтобы, как можно быстрее, добраться до точки B?

Задачи на конструирование

11. Ученики из проволоки длиной 32 см должны смоделировать квадрат и круг. На отрезки какой длины они должны разрезать проволоку, чтобы сумма площадей полученных фигур была: a) наибольшей; b) наименьшей.

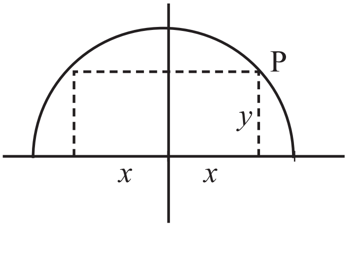


12. Решите задачи по рисункам.



a) Найдите четырехугольник наибольшей площади, вписанный в окружность радиуса 4 см.

b) В полукруг, радиуса 6 см вписан прямоугольник, одна сторона которого лежит на диаметре. Какую наибольшую площадь может иметь данный прямоугольник?



Пример. Минимальное потребление материала. Для мясных консервов планируется использовать банку в форме цилиндра объемом 250 см^3.

a) Каких размеров должна быть банка, чтобы для ее изготовления использовалось как можно меньше материала?

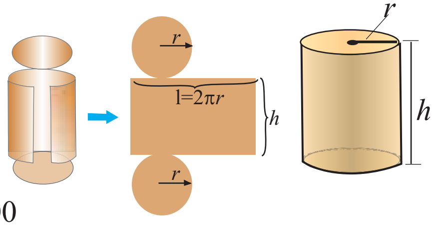
b) Для круглого основания используется материал, цена 1 см^2 которого равна 0,05 гяпик, а для боковой поверхности используется материал цена 1 см^2 которого равна 0,12 гяпик. Какие размеры должна иметь банка, чтобы затраты на ее изготовление были минимальными?

Решение: a) По условию задачи объем равен 250 см^3. Эти данные дают нам возможность найти зависимость между r и h.

$$\pi r^2 h = 250, \quad h = \frac{250}{\pi r^2}$$

$$S_{п.п.} = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{основания}} + 2\pi r h$$

развертка боковой поверхности прямоугольной формы



$$S_{п.п.} = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$$

Для функции, выражающей площадь поверхности, область определения представляет собой незамкнутый интервал, и мы должны найти, при каком значении r , где $r > 0$, функция имеет наименьшее значение. Найдем производную функции $S_{п.п.}$.

$$S'_{пп} = \left(2\pi r^2 + \frac{500}{r}\right)' = 4\pi r - \frac{500}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{125}{\pi}\right)$$

Критическая точка функции: $\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}} \approx 3{,}4$

При $0 < r < \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}}$ имеем $S'_{пп}(r) < 0$, при $r > \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}}$ $\quad S'_{пп}(r) > 0$.

Значит, $r_{мин} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}}$.

Подставим значение $r \approx 3{,}4$ в формулу для высоты $h \approx \dfrac{250}{\pi r^2}$,

получим $h \approx 6{,}9$.

Итак, минимальные затраты на материал будет иметь банка цилиндрической формы с размерами $r \approx 3{,}4$ см и $h \approx 6{,}9$ см.

b) $C(r) = 0{,}1\pi r^2 + 0{,}12 \cdot \dfrac{500}{r} = 0{,}1\pi r^2 + \dfrac{60}{r}$, $r > 0$

$C'(r) = \left(0{,}1\pi r^2 - \dfrac{60}{r}\right)' = 0{,}2\pi r - \dfrac{60}{r^2}$,

$0{,}2\pi r - \dfrac{60}{r^2} = 0, \quad 0{,}2\pi r = \dfrac{60}{r^2}, \quad 0{,}2\pi r^3 = 60,$

$r \approx 4{,}57, \quad h = \dfrac{250}{\pi r^2} = \dfrac{250}{\pi(4{,}57)^2} \approx 3{,}8.$

Размеры, при которых затраты на материал будут минимальными $r \approx 4{,}57$ см, $h \approx 3{,}8$ см.

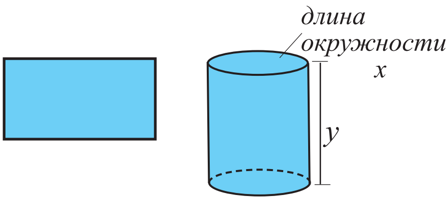
Должны ли совпадать результаты, полученные в пунктах a) и b)? Проведите обсуждение.

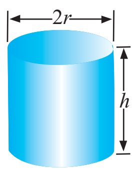
13. а) Из всех цилиндров с площадью полной поверхности 24π см^2, найдите высоту цилиндра с максимальным объемом,

б) Из всех цилиндров с объемом 54π см^3, найдите радиус цилиндра с минимальной площадью поверхности.

14. а) Какие размеры x и y должен иметь прямоугольник, отрезанный от металлического прямоугольного листа с периметром 36 см, чтобы цилиндр, свернутый из данного прямоугольника, имел максимальный объем?

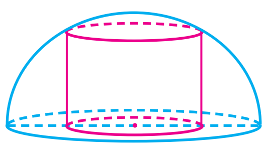
b) Какие размеры h и r нужно выбрать для закрытого сосуда цилиндрической формы объемом в 1 литр, чтобы для его изготовления было израсходовано как можно меньше материала?





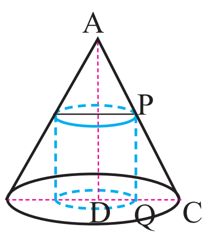
15. Найдите наибольшее значение объема конуса, образующая которого равна 15 см.

16. Найдите наибольшее значение объема цилиндра, вписанного в полушар, радиус которого равен 4 см.



17. Найдите радиус и высоту цилиндра, имеющего наибольший объем, из всех вписанных в конус цилиндров с высотой AD = a и радиусом DC = b.

Указание: обозначьте радиус цилиндра DQ = x, высоту PQ = y и используйте подобие ΔADC и ΔPQC.



Обобщающие задания

1. Постройте график функции.

1) $f(x) = 4 - 3x - x^2$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

4) $f(x) = \dfrac{2}{3}x(x-2)^3$

5) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 8$

6) $f(x) = 3x^{2/3} - x$

7) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

8) $f(x) = \dfrac{-8x}{x^2+1}$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

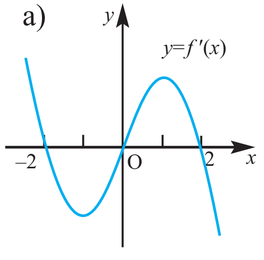
a) $y = -2x + 7, \quad -3 \le x \le 4$

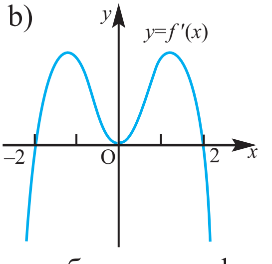
b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7, \quad 0 \le x \le 3$

c) $f(x) = x^3 - 3x, \quad -2 \le x \le 0$

d) $y = \sqrt{x} - 0{,}5x, \quad 0 \le x \le 4$

3. Используя график производной функции f, найдите:
a) интервалы возрастания и убывания;
b) приблизительные точки экстремума.

a) 

b) 

4. Согласно заданным условиям схематично изобразите график непрерывной функции.

a) если $x < 2$, то $f'(x) > 0$, если $x > 2$, то $f'(x) < 0$ и $f(2) = 5$.

b) если $-1 < x < 4$, то $f'(x) > 0$, если $x < -1$ и $x > 4$, то $f(x) < 0$ и $f(-1) = 0, f(4) = 6$

c) если $x \ne 1$, то $f'(x) > 0$ и $f(1) = 2$

d) если $x > -3$, то $f'(x) = 2$, если $x < -3$, то $f'(x) = -2$ и $f(-3) = 1$

5. Для $f(x) = x^4 + x - \sqrt{3}$ и $y(x) = 8x^2 + x + \sqrt{3}$ решите неравенство $f'(x) < g'(x)$.

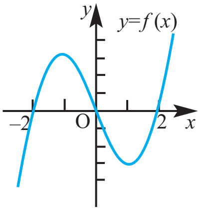
6. Найдите точки, в которых производная функции $f(x) = x \cdot e^{x^2-3x}$ обращается в нуль.

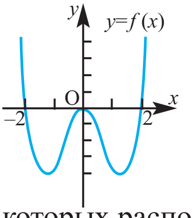
7. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$, параллельной прямой $y = 2x$.

8. На параболе $y = x^2$ найдите такую точку, чтобы расстояние между ней и точкой M$(2; \frac{1}{2})$ было наименьшим.

9. В арифметической прогрессии $a_6 = 3$. Найдите, при каком значении разности прогрессии произведение $a_1 \cdot a_4 \cdot a_5$ будет наибольшим?

10. По графику функции, приблизительно, определите интервалы, в которых производная положительна и отрицательна.

a) 

b) 

11. Среди всех прямоугольников, вершины которых расположены в начале координат, на положительных полуосей Ox и Oy и на параболе $y = 4 - x^2$, найдите прямоугольник, который имеет наибольшую площадь.

12. Из всех цилиндров с объемом 128π см^3, найдите высоту цилиндра с минимальной площадью поверхности.

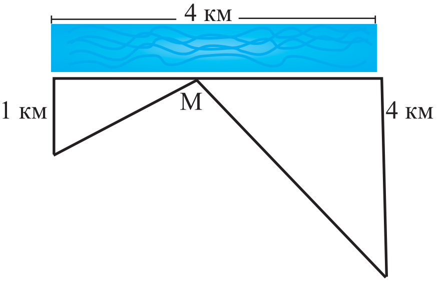
13. **Медицина. Максимальная концентрация.** Функция $C(t) = \dfrac{0{,}08t}{t^2+2t+2}$ показывает изменение концентрации лекарственного препарата в крови через время t. Здесь t показывает количество часов после момента принятия препарата. За какое время достигается максимальная концентрация?

14. Найдите критические точки и экстремумы функции.

1) $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$ 2) $y = x^2\sqrt{3 - x}$ 3) $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

15. Для обеспечения водой двух зданий, расположенных на берегу реки, были установлены специальные насосы. Расстояние между зданиями 4 км, расстояние от одного здания до реки 4 км, от другого - 1 км. В какой точке, вдоль реки, нужно расположить насос, чтобы при прокладке было использовано минимум труб?



8

Интеграл

- **Первообразная функция. Неопределенный интеграл**
- **Площадь, ограниченная кривой**
- **Определенный интеграл**
- **Формула Ньютона-Лейбница**
- **Свойства определенного интеграла**
- **Определенный интеграл и объем фигур вращения**

Математический словарь

- первообразная функция
- неопределенный интеграл
- знак интеграла
- интегрирование
- постоянная интегрирования
- определенный интеграл
- пределы интегрирования
- основная теорема интегрирования

Это интересно!

Центр Гейдара Алиева славится своим архитектурным стилем и является уникальной архитектурной работой. Красота архитектуры была достигнута при помощи решения многих систематических задач. Стены здания выполнены в виде волны и можно сказать, что в проекте не использовались прямые линии. Структура здания крыши, касаясь земли, формирует гладкое и гармоничное изображение. Такая структура представляет собой постмодернистскую архитектуру, а также эффект бесконечности. Линии здания символизируют связь прошлого и будущего. Для построения здания были использованы конструкции в виде металлической решетки, общая длина которой составила 90 км. При установки крыши, общая площадь которой составила 4 га, были использованы 12027 штук специальных панелей, имеющих форму треугольников, прямоугольников, трапеций и параллелограммов различных размеров. Если мы захотим найти площадь какой-либо части здания в виде волны, то нам придется прибегнуть к интегрированию.

Первообразная функция. Неопределенный интеграл

Исследование. Путь, пройденный свободно падающим телом за время t находится по формуле $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Эта формула была открыта Галилеем экспериментально. Дифференцируя, находим скорость:
$s'(t) = v(t) = gt$. Дифференцируя второй раз, найдем ускорение:
$v'(t) = a(t) = g$. А как, зная ускорение, найти закон, по которому изменяется скорость $v(t)$, а также закон движения $s(t)$?

Дифференцирование - это нахождение производной функции. Нахождение функции с заданной производной является действием, обратным к дифференцированию. В этом случае, зная производную или дифференциал, надо найти саму функцию, т.е для функции $f(x)$, заданной на определенном интервале, нужно найти такую функцию $\mathrm{F}(x)$, что на этом интервале выполнялось $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ или $d\,\mathrm{F}(x) = f(x)\,dx$.

Определение. Функция $\mathrm{F}(x)$, удовлетворяющая равенству $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ для всех точек на заданном промежутке, называется первообразной для функции $f(x)$, заданной на том же промежутке.

Например, функция $\mathrm{F}(x) = x^2$ есть первообразная для функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как для всех $x \in (-\infty; +\infty)$ справедливо

$$(x^2)' = 2x \qquad d(x^2) = 2xdx$$

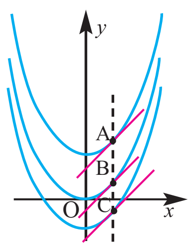
дифференцирование

$d\mathrm{F}(x) = f(x)\,dx$

$\mathrm{F}(x) = x^2$
первообразная функция

$f(x) = 2x$

интегрирование



С другой стороны, $(x^2)' = (x^2 + 3)' = (x^2 - 2)' = 2x$, вообще для любой постоянной C имеем $(x^2 + C)' = 2x$, поэтому каждая из функций $x^2, x^2 + 2, x^2 - 3, x^2 + C$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$. Таким образом, для заданной функции первообразная функция не является единственной.

Если, функции $\mathrm{F}_1(x)$ и $\mathrm{F}_2(x)$ первообразные функции $f(x)$ на определенном промежутке, то для функции $g(x) = \mathrm{F}_1(x) - \mathrm{F}_2(x)$ на этом же промжутке выполняется тождество $g'(x) = \mathrm{F}_1'(x) - \mathrm{F}_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.Тогда касательная к графику функции в каждой точке параллельна оси абсцисс. Значит график функции $g(x)$ будет параллелен оси абсцисс, т.е на том же промежутке $g(x) = C$ (здесь C произвольная постоянная). Отсюда $\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{F}_2(x) + C$.

Таким образом получаем, что если функция $\mathrm{F}(x)$ на заданном промежутке является первообразной для функции $f(x)$, то для любой постоянной C:

- Функция $\mathrm{F}(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке.
- Любая первообразная функция для функции $f(x)$ на заданном промежутке имеет вид $\mathrm{F}(x) + C$.

$\mathrm{F}(x) + C$ называется общим выражением для первообразных функций.

Неопределенный интеграл

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом, обозначается $\int f(x)dx$ и читается как **"интеграл эф от икс де икс"**.
Если функция $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$, то по определению $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.
Здесь $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, x - переменная интегрирования, C - постоянная интегрирования. За переменную интегрирования можно принять любую переменную.
Нахождение функции по производной называется **интегрированием**.

Пример 1. По определению найдите неопределенные интегралы.

a) $\int 5dx$ b) $\int 3x^2dx$ c) $\int \cos x\,dx$

Решение: $\int 5dx = 5x + C$ $\int 3x^2dx = x^3 + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Так как: $(5x + C)' = 5$ $(x^3 + C)' = 3x^2$ $(\sin x + C)' = \cos x$

Пример 2. Найдите интеграл $\int x^3\,dx$.
Решение: подумаем, производной какой функции является функция x^3. Например, известно, что производной функции x^4 является функция $4x^3$. Значит, множителем искомой функции является дробь $\frac{1}{4}$, которая потом сократиться с коэффициентом 4 и получится x^3. Такой функцией является функция $g(x) = \frac{1}{4}x^4$. Значит, $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

Обучающие задания

1. Покажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке.

a) $F(x) = \frac{1}{6}x^4$, $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $x \in (-\infty;+\infty)$

b) $F(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0;+\infty)$

c) $F(x) = (2x-1)^3$, $f(x) = 6\cdot(2x-1)^2$, $x \in (-\infty;+\infty)$

d) $F(x) = 3x - \cos x$, $f(x) = 3+\sin x$, $x \in (-\infty;+\infty)$

2. Найдите одну из первообразных функций для заданных на числовой оси функций.

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x^2$ c) $f(x) = 8x^3$ d) $f(x) = 5x^4$

3. Из заданных функций найдите такую, что две другие являются для нее производной и первообразной функциями.

$f(x) = 2$ $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = x^2 + x$

4. Используя определение, найдите неопределенный интеграл.

a) $\int 4\,dx$ b) $\int 2x\,dx$ c) $\int 4x^3\,dx$ d) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Интеграл постоянной и степенной функции

Интеграл постоянной: $\int k dx = kx + C$

Интеграл степенной функции

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int kx^n dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

Используя определение, самостоятельно проверьте справедливость данных формул!

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k(n+1)}(kx+b)^{n+1} + C,\quad n \neq -1$$

Пример 1. Найдите неопределенный интеграл $\int 5\sqrt{x}\,dx$

Решение: $\int 5\sqrt{x}\,dx = \int 5x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{5}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{5}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{10}{3}\sqrt{x^3} + C$

Пример 2. Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = 3\cdot(2x+1)^4$.

Решение: Так как функция x^4 одна из первообразных функции $\frac{x^5}{5}$, то одна из первообразных функции $f(x) = 3\cdot(2x+1)^4$ будет

$3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{4+1}}{4+1} = \frac{3}{10}(2x+1)^5$. Тогда общий вид первообразных имеет вид:

$F(x) = \frac{3}{10}(2x+1)^5 + C$. Значит, $\int 3\cdot(2x+1)^4 dx = \frac{3}{10}(2x+1)^5 + C$

5. Найдите неопределенный интеграл.

a) $\int(-4)\,dx$ b) $\int 6\,dx$ c) $\int(-4x)\,dx$ d) $\int \frac{2}{3}x\,dx$

6. Найдите первообразные функций.

a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = 7x^5$ c) $f(x) = 9x^8$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

7. Найдите неопределенный интеграл, представив подынтегральную функцию в виде x^m.

a) $\int \frac{1}{x^3}dx$ b) $\int \frac{1}{x^5}dx$ c) $\int \frac{dx}{x^2}$ d) $8\sqrt{x}\,dx$

e) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\int 5x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}dx$ g) $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}dx$ h) $\int\left(-\frac{3x}{\sqrt{x}}\right)dx$

8. a) Покажите, что $((2x+3)^4)' = 8(2x+3)^3$ и найдите неопределенный интеграл $\int 8(2x+3)^3 dx$.

b) Покажите, что $\frac{d}{dx}\sqrt{4x+1} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$

и найдите неопределенный интеграл $\int \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx$.

9. Найдите первообразные функций.

a) $f(x) = (2x + 3)^5$ b) $f(x) = (7 - 3x)^8$ c) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$

d) $f(x) = (5x + 2)^{-6}$ e) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$ f) $f(x) = (x + 3)^{-3}$

Свойства неопределенного интеграла

При интегрировании используют следующие свойства:

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

2. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$

3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

4. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \ \ (k \neq 0)$

Пример 1. Найдите интеграл $\int(3x^5 + 9x^2 - 5)dx$.

Решение: $\int(3x^5 + 9x^2 - 5)dx = \int 3x^5dx + \int 9x^2dx - \int 5dx =$

$$= 3\frac{x^{5+1}}{5+1} + 9\frac{x^{2+1}}{2+1} - 5x + C \ = \frac{1}{2}\ x^6 + 3x^3 - 5x + C$$

10. Найдите общий вид первообразных функций $f(x)$.

a) $f(x) = 7 - 4x$ b) $f(x) = 5 + 6x - 9x^2$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

11. Найдите:

a) $(\int 3x^2\,dx)'$ b) $\int (x^3)'\,dx$ c) $(\int \sqrt{x}\,dx)'$

12. Найдите неопределенный интеграл.

a) $\int \frac{3}{4}x^7dx$ b) $\int(1 - x)\,dx$ c) $\int(2 + x^2)\,dx$

d) $\int(2x - 3x^2)\,dx$ e) $\int(x^3 - 9)\,dx$ f) $\int(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,dx$

g) $\int(3x^2 - x^{-3})dx$ h) $\int(8x^2 + 3x^{-4})dx$ i) $\int(4x^{-2} - x^{-3})dx$

j) $\int(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}x^2)\,dx$ k) $\int(\frac{3}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})\,dx$ l) $\int(\frac{5}{2}\sqrt{x^3} + 8x)\,dx$

В отличие от производной у интеграла нет формулы для интегрирования произведения и частного. Поэтому, если это возможно, функцию представляют в виде суммы или разности, а потом находят первообразную.

Пример. Найдите первообразную функции $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

Решение: запишем заданную функцию в виде

$$f(x) = \frac{3x^2}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = 3x - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

Тогда получим, $\quad F(x) = 3\cdot\dfrac{x^2}{2} - 2\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}x^2 - 4\sqrt{x} + C$.

13. Упростите выражения, которыми заданы функции, и найдите первообразные функций, применяя правила интегрирования.

a) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ b) $f(x) = (x^2 - 3x)(x + 1)$ c) $f(x) = (x - 3)^3$

d) $f(x) = (x + 2x^3)(x + 1)$ e) $f(x) = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$ d) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

14. Найдите неопределенный интеграл.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4u^3 + 5u^2 - 1}{u^2}\,du$ c) $\displaystyle\int \frac{(x + 2)^2}{x^4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{(t^2 + t)^2}{t}\,dt$

15. Упростите и найдите первообразные функций.

a) $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 5\right)$ b) $f(x) = (\sqrt[4]{x} - 2x)(\sqrt[4]{x} + 2x)$

16. Для заданных функций найдите первообразные функции.

a) $f(x) = (3x + 2)^4$ b) $f(x) = (2x - 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3}{(1 - 2x)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{(3x + 1)^3}$

e) $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ f) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x}$

17. Упростите подинтегральную функцию и вычислите неопределенные интегралы.

a) $\int (x + \sqrt{x})\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Интегралы показательной функции и функции $1/x$

Интеграл показательной функции

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\qquad$ $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k\ln a} a^{kx} + C$

Интеграл функции $1/x$:

При $x > 0$ $\qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

При $x < 0$ $\qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$

При $x \neq 0$ в любом промежутке $\qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

В общем случае: $\int \frac{1}{kx+b} dx = \frac{1}{k} \ln|kx+b| + C$

Используя определение, самостоятельно, проверьте справедливость данных формул!

Пример. Найдите неопределенные интегралы: a) $\int e^{4x} dx$; b) $\int \frac{2}{3x+4} dx$

Решение: a) $\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$

$$\text{b)} \int \frac{2}{3x+4} dx = 2\int \frac{1}{3x+4} dx = \frac{2}{3} \ln|3x+4| + C$$

18. Найдите неопределенные интегралы.

a) $\int 3e^{2x} dx$ $\quad$ b) $\int (-12)e^{3x} dx$ $\quad$ c) $\int \frac{2}{3} e^{-3x} dx$ $\quad$ d) $\int 4\cdot 2^x dx$

e) $\int \frac{5}{x} dx$ $\quad$ f) $\int \frac{5}{x\ln 3} dx$ $\quad$ g) $\int \frac{1}{5x+4} dx$ $\quad$ h) $\int \frac{-2}{2x+1} dx$

19. Найдите первообразные заданных функций.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad$ b) $f(x) = \frac{4}{2x-3}$ $\quad$ c) $f(x) = 4\cdot e^{3-2x}$ $\quad$ d) $f(x) = 6\cdot 2^{3x+1}$

20. Найдите неопределенные интегралы.

a) $\int (e^x - ex)\, dx$ $\quad$ b) $\int (2^x - \frac{2}{x})\, dx$ $\quad$ c) $\int (e^x + 2x) dx$ $\quad$ d) $\int (e^{-2x} - \frac{5}{x\ln 2}) dx$

Интегралы тригонометрических функций

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 kx}\,dx = \frac{1}{k}\tan kx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 kx}\,dx = -\frac{1}{k}\cot kx + C$$

Используя определение самостоятельно проверьте справедливость данных формул!

Пример 1. Найдите интеграл $\int 2\sin\frac{x}{2}dx$

Решение: $\int 2\sin\frac{x}{2}\,dx = -2\cdot\frac{\cos(x/2)}{1/2} + C = -4\cos\frac{x}{2} + C$

При интегрировании тригонометрических функций удобно использовать тригонометрические тождества.

Пример 2. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Решение: Так как $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, то

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Пример 3. Найдите интеграл $\int \sin^2 x\,dx$.

Решение: Воспользуемся тождеством $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Тогда,

$$\int \sin^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 4. Найдите интеграл $\int \sin 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

Решение: Воспользуемся формулой

$$\sin ax\cdot\cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x):$$

$$\int \sin 5x\cos 3x\,dx = \int\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x)dx = \frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx + \frac{1}{2}\int\sin 8x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

21. Найдите первообразные заданных функций.

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x - \cos x$ b) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ c) $f(x) = \frac{6}{\sin^2 x}$

22. Найдите неопределенные интегралы.

a) $\int(3\sin x + 2\cos x)\,dx$ b) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$ c) $\int\frac{4}{\cos^2 2x}dx$

Первообразная функция. Неопределенный интеграл

23. Найдите первообразные заданных функций.

a) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ b) $f(x) = \sin^2 3x$ c) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$

24. Найдите неопределенные интегралы.

a) $\int \sin^2 x\, dx$ b) $\int \cos^2 x\, dx$ c) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$

d) $\int \sin 3x \sin x\, dx$ e) $\int \sin x \cos 3x\, dx$ f) $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$

25. Найдите первообразные, используя тригонометрические тождества

a) $\int (1 + \tan^2\theta)\, d\theta$ b) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx$ c) $\int \cot^2 x\, dx$

26. Найдите неопределенные интегралы.

a) $\int (\sin 2x + 3x)dx$ b) $\int (\cos 3x - 2x + 1)dx$

c) $\int (e^{-x} + 2\cos x + 5x^2)dx$ d) $\int (e^{3x} - 8\sin 2x + x^{-4})dx$

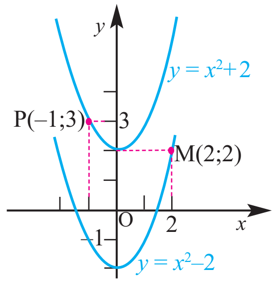
Прикладные задания

Задания на нахождение постоянной интегрирования

Пример. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x$, график которой проходит через точку: a) M(2;2); b) P(–1;3).

Решение: Сначала запишем общий вид первообразных функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$: $F(x) = x^2 + C$.

a) По условию $F(2) = 2$. Тогда $4 + C = 2$, отсюда $C = -2$. Значит, первообразная функции $f(x) = 2x$, график которой проходит через точку M(2;2), имеет вид $F(x) = x^2 - 2$.



b) По условию $F(-1) = 3$. Тогда $1 + C = 3$, отсюда $C = 2$. Значит, первообразная функции $f(x) = 2x$, график которой проходит через точку P(–1;3), имеет вид: $F(x) = x^2 + 2$.

27. Найдите первообразную функции $f(x)$, удовлетворяющую условию.

a) $f(x) = x^2$, $F(3) = 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $F(4) = -2$

28. Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через заданную точку.

a) $f(x) = x$, M(–1;2) b) $f(x) = 4x^3$, M(–1;3)

29. Найдите первообразную функции $f(x)$, удовлетворяющую условию:

a) $f(x) = e^{2x}$, $F(0) = 1$ b) $f(x) = 3e^{x-2}$, $F(2) = 0$ c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $F(e) = 5$

d) $f(x) = 2\sin 2x$, $F(\frac{\pi}{2}) = 0$ e) $f(x) = 2\cos x$, $F(\frac{\pi}{6}) = 3$

30. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через заданную точку.

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $M(1; \dfrac{1}{6})$ b) $f(x) = (2x-1)^3$, $M(2; 4)$

31. Запишите функцию, соответствующую условию.

a) $f'(x) = 2x + 1$; $f(1) = -2$ c) $f'(x) = x^2 - 4$; $f(0) = 7$

e) $f'(x) = 8x^2 + 4x - 2$; $f(0) = 6$ f) $f'(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $f(1) = 3{,}5$

32. Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x) = 2x + 1$ и её график проходит через точку $M(1;0)$. При каких значениях x:

a) $F(x) > 0$; b) $F(x) < 0$?

33. Определите формулу функции, график которой проходит через точку (3;4), зная, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x, равен $2x - 2$. Постройте график функции.

Задания на реальную жизненную ситуацию

Пример 1. Движение. Скорость мяча, брошенного с высоты 1 м вверх, можно выразить как $v(t) = -9{,}8t + 12$. Здесь t показывает время в секундах. Запишите функцию, которая позволит найти на какой высоте находится мяч через t секунд после начала движения и найдите на какой высоте окажется мяч на 2 секунде.

Решение: так как $h'(t) = v(t)$, то для функции $v(t)$ неопределенным интегралом является функция $h(t)$:

$$h(t) = (\int(-9{,}8t + 12)dt = -4{,}9t^2 + 12t + C$$

Как можно найти постоянную C?

Мяч брошен с высоты 1 м. Т.е. в момент $t=0$ мяч находился на высоте 1 м и $h(0) = 1$. Тогда $1 = -4{,}9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + C$, отсюда $C = 1$.

Значит, в момент t высоту на которой находится мяч, можно найти по формуле $h(t) = -4{,}9t^2 + 12t + 1$. При $t = 2$ получим

$$h(2) = -4{,}9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 1 = 5{,}4$$

Т.е. в момент $t = 2$ секундам мяч будет находится на высоте 5,4 м.

34. Частица совершает прямолинейное движение со скоростью $v(t)$. x_0 – координата точки в начальный момент t_0. Найдите координату $x(t)$, как функцию от времени :

a) $v(t) = 4$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ b) $v(t) = 6$, $t_0 = 0$, $x_0 = 2$ c) $v(t) = 2t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 3$

35. Движение. Скорость материальной точки движущейся прямолинейно, задана формулой $v(t) = 2t - 3$. Зная, что в начальный момент $t = 0$ точка находится в начале координат, запишите функцию зависимости координаты x от времени t.

Пример 2. Прирост населения. Статистические исследования показывают, что при помощи отношения $P'(t) = 11{,}7e^{0{,}026t}$ можно найти прирост городского населения за год. Здесь t показывает количество лет после 1960 года, $P(t)$ - численность населения в данный (t-ый) год в тыс. человек. Если в 1990 году в городе было 820 тыс. человек, то сколько, приблизительно, тыс. человек будет в городе в 2020 году?

Решение: найдем первообразную для функции $P(t)$, показывающую численность населения, соответствующую функции $P'(t) = 11{,}7e^{0{,}026t}$:

$$P(t) = \int 11{,}7e^{0{,}026t}dt = \frac{11{,}7}{0{,}026}\ e^{0{,}026t} + C = 450e^{0{,}026t} + C$$

$$P(t) = 450e^{0{,}026t} + C$$

Теперь найдем постоянную C.

Например, по условию при $t = 30$ (1960 - 1990) численность населения достигла 820 тыс. человек. Подставим (30; 820) в формулу функции.

$820 = 450e^{0{,}026\cdot 30} + C$. Тогда $C \approx -161{,}7$ и $P(t) = 450e^{0{,}026t} - 161{,}7$.

Численность населения в 2020 году соответствует значению функции $P(t)$ в $t = 60$: $P(60) = 450e^{0{,}026\cdot 60} - 161{,}7 \approx 1979{,}8$

Т.е. в 2020 году численность городского населения будет приблизительно равна 1979800 человек.

36. Размножение бактерий. Наблюдения показывают, что скорость размножения бактерий $P'(t)$ равна $\frac{dP}{dt} = 200e^{0{,}1t} + 150e^{-0{,}03t}$.

Здесь t показывает время (час). Если в начале наблюдения количество бактерий равно 200 000, то сколько их будет через 12 часов?

37. Экология. Скорость изменения поголовья оленей, установленная группой наблюдателей, описывается уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = 3t^3 + 2t \quad 0 \le t \le 5,$$

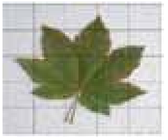
N показывает количество оленей, t показывает время (год).

Если в начале наблюдения поголовье состояло из 200 оленей, то сколько оленей будет в конце периода наблюдения?

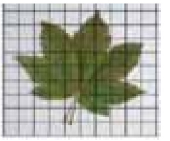
38. Затраты. Маржинальные затраты на производство x единиц товара задано функцией $C'(x) = 50 - 0{,}05x$. Если затраты на единицу продукции равны 40 манат, то каковы затраты на 150 единиц товара?

Площадь, ограниченная кривой

Представьте, что вы проводите следующее исследование: определение количества солнечной энергии, которую получает растение. Для этого вам необходимо узнать площадь поверхности листа. Разместите лист на бумаге в клетку и приблизительно найдите площадь.



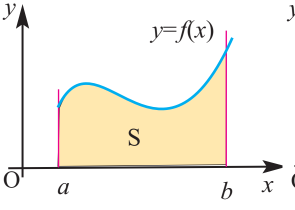
1 клетка 1 кв.см
Количество полных клеток - 1 шт.
Количество неполных клеток - 18 шт.
$1 \leq$ количество клеток ≤ 19
1 кв.см $\leq$ площадь листа $\leq$ 19 кв.см

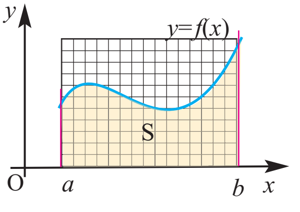


1 клетка 1/4 кв.см
Количество полных клеток - 16 шт.
Количество неполных клеток - 34 шт.
$16 \leq$ количество клеток ≤ 50
4 кв.см $\leq$ площадь листа $\leq$ 12,5 кв.см

Если продолжить уменьшать размер клеток, то площадь листа можно найти, подсчитав сумму клеток, и, уменьшая приближения, можно достаточно точно найти значение действительной площади.
Применяя этот способ, можно найти площади фигур различной формы

Например, можно найти площадь, ограниченную графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$ и ограниченной осью абсцисс x, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$.

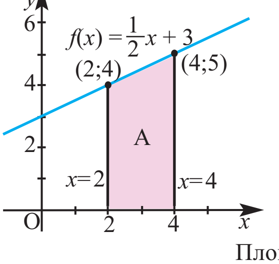




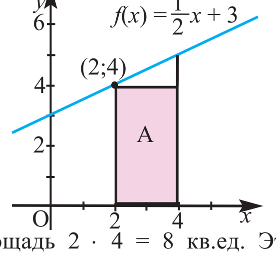
Пример 1. Определите, приблизительно, площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \frac{1}{2}x + 3$, осью абсцисс и прямыми $x = 2$ и $x = 4$.

Решение: На рисунке изображена площадь, ограниченная графиком функции $y = \frac{1}{2}x + 3$, осью абсцисс и прямыми $x = 2$ и $x = 4$.

Показанную площадь можно приблизительно найти при помощи прямоугольников высотой $f(2) = 4$ и $f(4) = 5$.

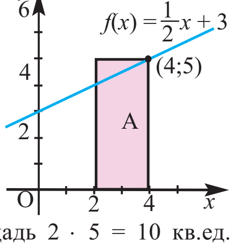


Прямоугольник шириной $4 - 2 = 2$ и высотой $f(2) = 4$ единиц



Площадь $2 \cdot 4 = 8$ кв.ед. Это меньше действительной площади

Прямоугольник шириной $4 - 2 = 2$ и высотой $f(4) = 5$ единиц

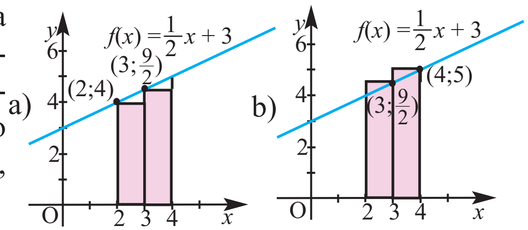


Площадь $2 \cdot 5 = 10$ кв.ед. Это больше действительной площади

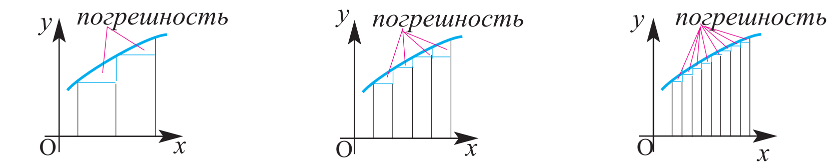
Площадь: $8 < S < 10$

Площадь, ограниченная кривой

Разбивая показанную площадь на еще более маленькие прямоугольники и найдя сумму площадей полученных прямоугольников, можно достаточно точно найти значение, близкое к реальному.



Если отрезок [2; 4] разделить на две части ([2;3] и [3;4]) (рис.a и b), то площадь, приблизительно, равна сумме площадей двух прямоугольников.
a) площадь, приблизительно, равна сумме площадей прямоугольников шириной, равной 1, с высотами $f(2) = 4$ и $f(3) = 4{,}5$: $1 \cdot 4 + 1 \cdot 4{,}5 = 8{,}5$.
b) площадь, приблизительно, равна сумме площадей прямоугольников шириной равной 1 с высотами $f(3) = 4{,}5$ и $f(4) = 5$: $1 \cdot 4{,}5 + 1 \cdot 5 = 9{,}5$.
Значит реальное значение площади удовлетворяет соотношению $8{,}5 < S < 9{,}5$.
В рассмотренном случае площадь точно можно найти по формуле площади трапеции: $S = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2(4+5) = 9$ и дать оценку погрешности, проведенных вычислений.
В 1-ом случае количество интервалов $n = 1$ и вычисления отличаются от действительных размеров площади на 1 кв.ед., во 2-ом случае $n = 2$ и разность уменьшается до 0,5 кв.ед. Если заданный интервал разделить на еще большее количество малых интервалов, то площадь можно найти как сумму более маленьких прямоугольников и получить значение, достаточно близкое к точному.

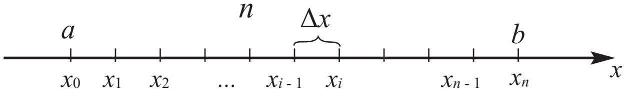


число делений $n = 2$ *число делений $n = 4$* *число делений $n = 8$*

Под площадью фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, понимают площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (эту фигуру также называют криволинейной трапецией). В заданиях мы коротко будем называть это как “площадь, ограниченная кривой”.
Здесь функция f должна удовлетворять условиям.

- функция f должна быть непрерывна на отрезке $[a; b]$
- функция f на отрезке $[a; b]$ должна принимать неотрицательные значения

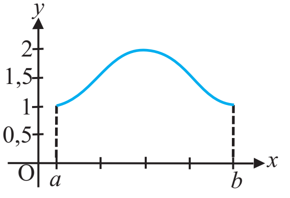
Отрезок $[a; b]$ делится на n одинаковых не перекрывающих друг на друга, промежутков длиной $\Delta x = \frac{b-a}{n}$: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{i-1}; x_i], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$

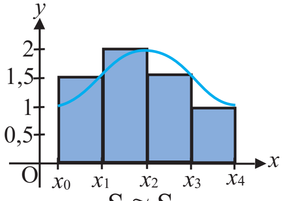


Определенный интеграл и площадь

Площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$ приблизительно находится как сумма площадей прямоугольников шириной Δx и высотой $f(x_i)$.

Пример 2. Площадь, ограниченная кривой на рисунке, приблизительно равна площади 4 прямоугольников, полученных при делении данного отрезка на $n = 4$ равные части.





$S \approx S_4$

$S \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x = S_4$

Геометрически эта сумма равна площади ступенчатой фигуры на рисунке и называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если увеличить количество точек деления, то можно записать:

$S \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = S_n$. Это можно коротко записать при помощи знака $\sum$ “сигма”.

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = S_n$$

Для непрерывной функции f для достаточно больших значений n (т.е. при достаточно малых значениях Δx) сумма площадей построенных прямоугольников и является интересующей нас площадью, “можно сказать, что они равны”, т.е. при $n \to \infty$ получим $S_n \to S$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Отметим, что в интегральной сумме вместо значений $f(x_i)$ можно взять значение $f(c_i)$ в произвольной точке c_i интервала $[x_i; x_{i+1}]$.

Определенный интеграл

Можно показать, что для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f при $n \to \infty$ последовательность интегральных сумм S_n стремится к определенному числу. Это число называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a; b]$ и записывается как $\int_a^b f(x)\,dx$. Т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Числа a и b являются пределами интегрирования, a- нижний предел, b- верхний предел. $\int$-знак интеграла. f - подынтегральная функция, переменная x - переменная интегрирования.

Таким образом, при $f(x) \geq 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, выражается формулой $S = \int_a^b f(x)dx$

Определенный интеграл и площадь

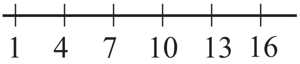
При нахождении площади, ограниченной кривой обратите внимание на следующее:

1. Схематично изобразите график функции.
2. Заданный отрезок $[a;b]$ делится на n отрезков, каждый из которых имеет длину $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
3. При вычислении определитесь в выборе значения $f(x_i)$ в левом или правом конце отрезков, полученных при делении.
4. Вычисления можно проводить для прямоугольников, не превышающих кривой или превышающих кривой.

Пример 3. Найдите, приблизительно, площадь криволинейной трапеции, находящейся под графиком функции $f(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}3x^2 + 12x + 25$ на отрезке $[1;16]$, разделив его на 5 равных частей.

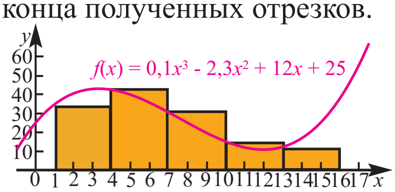
Решение: на рисунке представлен график данной функции, построенный при помощи графкалькулятора.

В рассматриваемом случае $\Delta x = \dfrac{16-1}{5} = 3$



Для $f(x_i)$ выберем значение в точке левого конца полученных отрезков.

Сумма площадей 5 прямоугольников, шириной 3 ед. и высотой $f(x_i)$, приблизительно равна значению площади криволинейной трапеции:



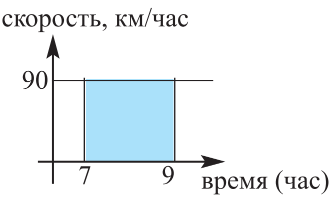
$$S \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x = f(1)\cdot 3 + f(4)\cdot 3 + f(7)\cdot 3 + f(10)\cdot 3 + f(13)\cdot 3 =$$
$$= 34{,}8\cdot 3 + 42{,}6\cdot 3 + 30{,}6\cdot 3 + 15\cdot 3 + 12\cdot 3 = 405$$

$\boxed{f(1) = 0{,}1\cdot 1^3 - 2{,}3\cdot 1^2 + 12\cdot 1 + 25 = 34{,}8}$

$S \approx 405$ (кв. ед.)

Пример 4. Поезд с 07:00 до 09:00 двигался со скоростью 90 км/час.
a) Выразите путь поезда в виде определенного интеграла; b) Найдите значение определенного интеграла, вычислив соответствующую площадь.

Решение: a) Значение пути, которое требуется найти, численно равно закрашенной на рисунке площади.

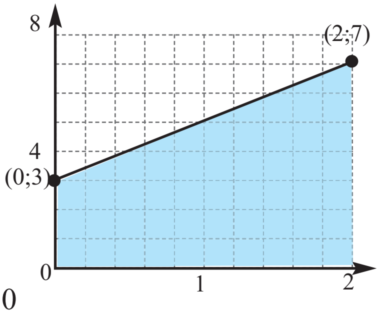


Эта площадь выражается интегралом $\int_7^9 90dt$

b) Значение пути, проделанного поездом на заданном временном промежутке равна площади прямоугольника, ограниченного графиком постоянной функции $f(x) = 90$ на отрезке $[7; 9]$. Так как высота данного прямоугольника 90, а шрина $\Delta x = 9 - 7 = 2$, то площадь равна: $90 \cdot 2 = 180$, т.е. $\int_7^9 90dt = 180$.

Пример 5. Вычислите интеграл $\int_0^2 (2x+3)\,dx$.

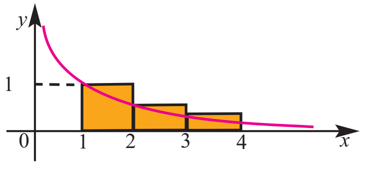
Решение. Значение заданного определенного интеграла равно числовому значению площади ограниченной графиком функции $f(x) = 2x + 3$ на отрезке [0;2]. Данная фигура имеет форму трапеции и ее площадь можно вычислить при помощи геометрических формул.

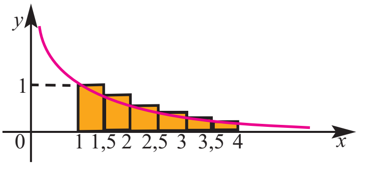


$$S = \frac{3+7}{2}\cdot 2 = 10, \text{ значит } \int_0^2 (2x+3)\,dx = 10$$

Обучающие задания

1. Найдите площадь, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ на отрезке [1; 4], как сумму площадей прямоугольников на рисунках. Результат округлите до сотых. Сравните полученные результаты.





2. Постройте трапецию, ограниченную линиями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
a) Найдите площадь трапеции по известным вам формулам.
b) Разделите отрезок [1;2] на 5 равных частей. Найдите приближенное значение площади трапеции как сумму площадей вписанной ступенчатой фигуры и найдите абсолютную погрешность полученного значения.

3. Изобразите график функции $y = \dfrac{1}{4}x^2$ на отрезке [0; 4].
1) Разделив заданный отрезок сначала на $n = 4$, а затем $n = 8$ одинаковых по длине отрезков, найдите приближенное значение площади, ограниченной кривой на заданном отрезке, как:
a) Сумму площадей прямоугольников, не превышающих кривой.
b) Сумму площадей прямоугольников, превышающих кривой.
2) Выразите данную площадь через интеграл.

4. Найдите значение определенного интеграла, вычислив площадь, ограниченную графиком на заданном отрезке.

a) $\int_0^5 3\,dx$ b) $\int_0^4 2x\,dx$ c) $\int_0^5 \frac{1}{2}x\,dx$ d) $\int_0^3 (2x+3)\,dx$

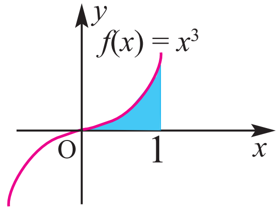
e) $\int_2^5 (10-2x)\,dx$ f) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$ g) $\int_0^3 |x-1|\,dx$ h) $\int_{-2}^3 |x+1|\,dx$

5. Запишите следующие суждения в виде определенного интеграла. Изобразите схематично соответствующую площадь:

a) Путь, пройденный автомобилем, движущимся с постоянной скоростью 75 км/час с 11:00 до14:00;

b) Объем воды, закачиваемой насосом за первый час, если за 1 минуту он закачивает 5 литров воды.

6. Для $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$ на рисунке схематично представлена площадь, ограниченная кривой. Найдите значения следующих интегралов, изобразив схематично соответствующую площадь.

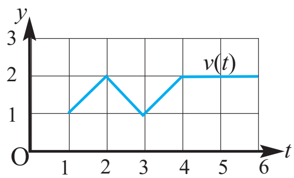


a) $\int_0^1 (x^3+3)\,dx$ b) $\int_1^2 (x-1)^3\,dx$

Указание: Используйте параллельный перенос, знания об определенном интеграле и площади.

Прикладные задания

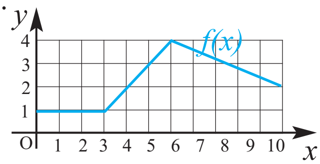
7. На графике представлена скорость (м/сек) движения частицы. Найдите значение определенного интеграла $\int_1^6 v(t)dt$, выражающего проделанный частицей путь на временном интервале [1;6], как площадь соответствующей фигуры и среднюю скорость движения.



8. Пусть $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ некоторая определенная функция.

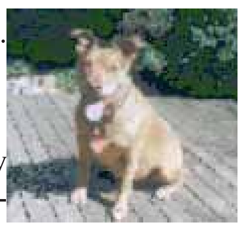
a) Заполните таблицу для функции g(x) по графику функции $f(x)$;

b) По значениям функции g(x) постройте ее график.



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$											

9. **Скорость и пройденный путь.** Юсиф составил таблицу скорости, с которой бежит собака за 4 секунды.



t	0	1	2	3	4
v (м/сек.)	0	8	12	17	18

a) По таблице постройте график; b) Найдите длину пути, который пробежала собака, вычислив площадь, ограниченную графиком на отрезке [0;4].

Указание: Для этого сначала используйте значение в точке левого конца интервала (меньше действительного значения), а потом значение в точке правого конца интервала (больше действительного значения).

10. Общие затраты на основе маржинальных затрат. Установлено, что функция $MC(x) = 0{,}5\,x^2 - 5x + 600$ показывает маржинальные затраты на асфальтирование x км пути. Найдите общие затраты на асфальтирование дороги, длиной 40 км. **Указание:** Вычислите площадь, ограниченной графиком функции $MC(x)$, разделив отрезок [0;40] на 4 равные части.

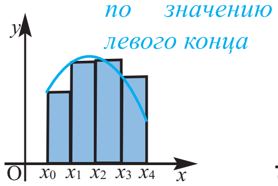
11. Долгосрочное задание. Для приблизительного нахождения площади существуют различные методы.

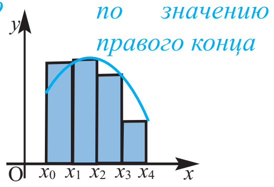
Метод прямоугольников

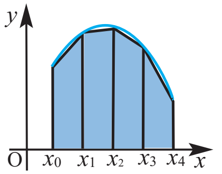
Площадь выражается как сумма площадей прямоугольников.

Метод трапеций

Площадь выражается как сумма площадей трапеций.





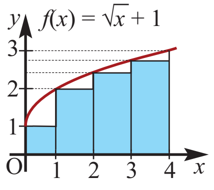


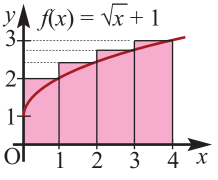
1. Разделив отрезок [0;4] на $n = 4$ равные части, найдите приближенное значение площади, ограниченной кривой $f(x) = \sqrt{x} + 1$ на отрезке [0;4], как сумму площадей:

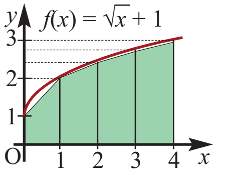
a) прямоугольников, если высота равна значению в левом конце;

b) прямоугольников, если высота равна значению в правом конце;

c) маленьких трапеций.







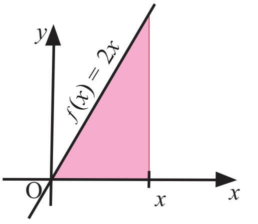
Зная, что $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)\, dx = 5\frac{1}{3}$, запишите свое мнение о том, как полученные результаты для каждого метода отличаются от действительного значения. Какой из методов дает наиболее точный результат?

2. Изобразите график функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Найдите приближенное значение определенного интеграла как площадь криволинейной трапеции. Для этого разделите отрезок на $n = 6$ равных частей и найдите площадь методом: a) прямоугольников, b) трапеций.

1) $\int_0^6 2^x\, dx$ 2) $\int_1^4 \ln x\, dx$

Практическое занятие

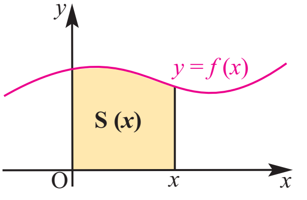
1) Постройте в тетради график функции $f(x) = 2x$ и выразите закрашенную площадь на рисунке в виде функции, зависящей от x.
2) Покажите, что $S'(x) = f(x)$.



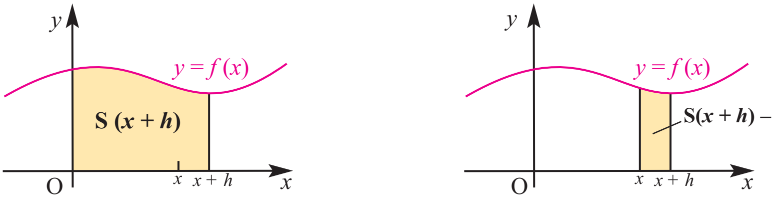
Если для непрерывной на отрезке $[0; x]$ неотрицательной функции $f(x)$ площадь полученной фигуры будет $S(x)$, то $S'(x) = f(x)$.

Для нахождения производной функции $S(x)$ используем определение производной.

$$S'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$$



Если $S(x + h)$ есть площадь под графиком функции f, построенном на отрезке $[0; x + h]$, то площадь $S(x + h) - S(x)$ соответствует площади под графиком той же функции f на отрезке $[x; x + h]$.



При стремлении h к нулю площадь $S(x + h) - S(x)$ стремится к площади прямоугольника, шириной h и высотой $f(x)$.

$S(x + h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$ Отсюда, $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x)$ и

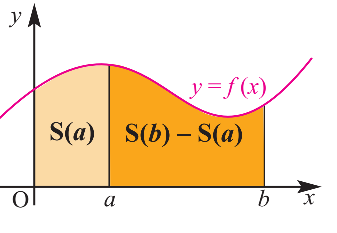
$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$$

Эта запись показывает, что $S'(x) = f(x)$.

Значит, если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, то $S(x) = F(x) + C$

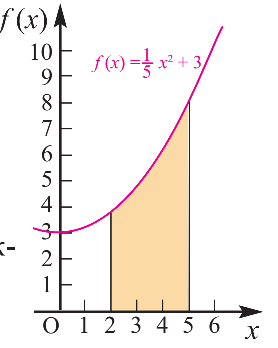
По графику также видно, что площадь на отрезке $[a; b]$ равна площади на отрезке $[0; b]$ минус площадь на отрезке $[0; a]$.

Т.е., площадь на отрезке $[a; b]$ равна
$S(b) - S(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.



Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Пример 1. Найдите площадь, ограниченную графиком функции $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$ на отрезке [2;5].



Решение: Мы уже знаем, что $S'(x) = f(x)$.

Значит, $S'(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$. Найдем общий вид первообразных для функции $S'(x)$.

$S(x) = \frac{1}{15}x^3 + 3x + C$.

Постоянная C не влияет на разность значений функции. Тогда искомая площадь равна:

$S = S(5) - S(2) = \frac{125}{15} + 15 - (\frac{8}{15} + 6) = 16\frac{4}{5}$ кв. ед.

Сравнивая формулы $S = F(b) - F(a)$ и $S = \int_a^b f(x)\,dx$ площади, ограниченной кривой, получаем следующий результат: для неотрицательной непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Полученная формула верна для любой непрерывной функции.

Формула Ньютона- Лейбница

Основная теорема интегрального исчисления. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и функция F одна из первообразных функции f, то справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Эта формула называется формулой Ньютона - Лейбница.

Эта формула также записывается как $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

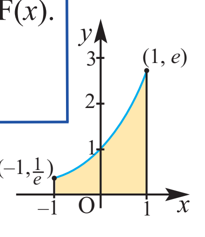
Таким образом, определенный интеграл произвольной функции на отрезке $[a;b]$ равен приращению первообразной на данном отрезке $[a;b]$. В частном случае, если верхняя и нижняя границы определенного интеграла совпадают, то значение определенного интеграла равно нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Для вычисления определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx$

1. Для функции $f(x)$ находится какая-либо первообразная $F(x)$.
2. Вычисляются значения $F(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$.
3. Находится разность $F(b) - F(a)$.

Пример 2. По рисунку найдите площадь, ограниченную графиком функции $y = e^x$ на отрезке $[-1;1]$.



Решение: $S = \int_{-1}^{-1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e^1 - \frac{1}{e} \approx 2{,}35$(кв.ед.)

Пример 3. Вычислите определенный интеграл.

a) $\int\limits_{-2}^{1} x^2\,dx$ b) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos x\,dx$

Решение: a) $\int\limits_{-2}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Пример 4. Объясните ситуацию, соответствующую определенному интегралу.

Функция $\mathrm{P} = \mathrm{P}(t)$ выражает численность (в миллионах) населения через t лет. Какую информацию выражает значение интеграла $\int\limits_{0}^{8} \mathrm{P}(t)dt = 2$?

Решение: $\int\limits_{0}^{8} \mathrm{P}(t)dt = 2$ Данный интеграл показывает, что численность населения за 8 лет выросла 2 млн. человек

Обучающие задания

1. Вычислите определенные интегралы.

1) $\int\limits_{-1}^{3} dx$ 2) $\int\limits_{0}^{2} 2\,dx$ 3) $\int\limits_{-2}^{4} x\,dx$ 4) $\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx$

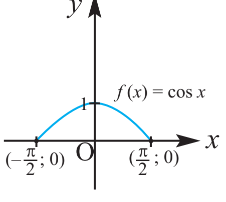
5) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^3}dx$ 6) $\int\limits_{2}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx$ 7) $\int\limits_{2}^{8} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 8) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x^2}\,dx$

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$ 11) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ 12) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

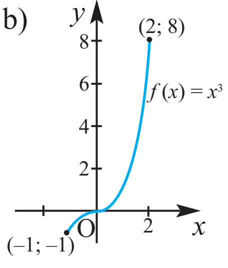
13) $\int\limits_{0}^{2} e^x\,dx$ 14) $\int\limits_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$ 15) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx$ 16) $\int\limits_{-1}^{8} x^{\frac{2}{3}}dx$

2. Вычислите интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ для функции $f(x)$, график которого задан на отрезке $[a;b]$.

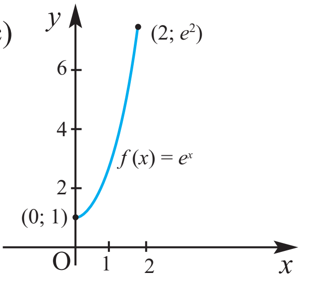
a)



b)



c)



3. Вычислите определенные интегралы.

a) $\int_1^3 (1-2x)\,dx$ b) $\int_0^2 (2+3x)\,dx$ c) $\int_{-1}^2 (3x^2-2x+1)\,dx$

d) $\int_{-2}^1 (x-x^3)dx$ e) $\int_0^1 x^3(x+1)dx$ f) $\int_1^3 (x^2-\frac{3}{x^4})dx$

g) $\int_1^2 (x-\frac{1}{x})^2dx$ h) $\int_1^2 \frac{6x^3+2x}{x}\,dx$ i) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

j) $\int_0^4 (\sqrt{x}-1)^2dx$ k) $\int_{-1}^1 (x+1)(x^2-1)dx$ l) $\int_0^1 (2x-1)^3dx$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ n) $\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx$ p) $\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx$

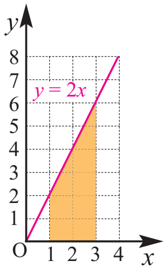
4. Найдите:

a) Площадь, ограниченную кривой $y=x^2+2x$ на отрезке $[0; 2]$.

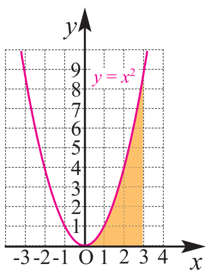
b) Площадь, ограниченную кривой $y=x^3-1$ на отрезке $[1; 3]$.

5. По рисунку, при помощи определенного интеграла, найдите площадь закрашенной части, ограниченной графиком функции.

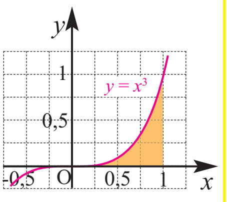
$y=2x$; $[1; 3]$



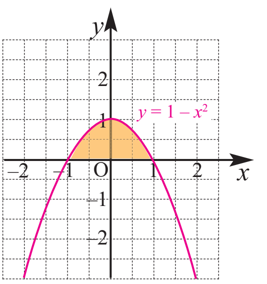
$y=x^2$; $[0; 3]$



$y=x^3$; $[0; 1]$



$y=1-x^2$; $[-1; 1]$



6. При помощи определенного интеграла, вычислите площадь ограниченную линиями.

a) $y=x^2+1,\ y=0,\ x=2,\ x=3$ b) $y=9-x^2,\ y=0,\ x=2,\ x=3$

c) $y=\sin 2x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ d) $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$

Прикладные задания

Работа переменной силы. Работа, совершаемая на пути s постоянной силой F, направленной вдоль прямой, вычисляется по формуле $A = F \cdot s$. Если принять, что переменная сила остается постоянной на отрезке $[x; x+dx]$ и обозначить ее через $F(x)$, то получим, что на отрезке длиной dx работа будет равна $dA = F(x)\,dx$.
Тогда на пути (отрезке) $[a;b]$ работа силы $F(x)$ вычисляется по формуле $A = \int_a^b F(x)\,dx$

Пример. По закону Гука, сила, растягивающая пружину на *x см,* вычисляется по формуле $F = kx$. Здесь k коэффициент пропорциональности. При растяжении пружины на 5 см, сила эластичности равна 3Н. Какую работу надо совершить для растяжения пружины на 5 см?
Решение: По условию $3 = k \cdot 0{,}05$. Таким образом, $k = 60$, $F = 60\,x$ и

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0{,}05} = 30 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}075 \text{ (Джоуль)}$$

7. Запишите, какие данные выражает определенный интеграл.

a) Функция $R = R(t)$ показывает объем продаж (сто тыс. манат) фирмы в зависимости от времени (год). Что выражает определенный интеграл $\int_0^2 R(t)dt = 12$?

b) Функция $v = v(t)$ показывает мгновенную скорость (м /сек) в момент времени t. Что выражает определенный интеграл $\int_0^{10} v(t)dt = 4{,}5$?

8. Физика. Функция зависимости скорости частицы от времени $v(t) = -0{,}3t^2 + 9\,t$ была получена экспериментально. $v(t)$ измеряется в м/сек.

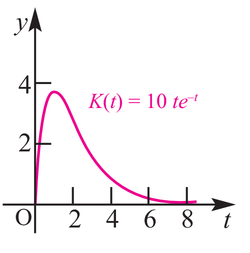
a) Какой путь пройдет частица за первые 5 секунд?

b) Какой путь пройдет частица за следующие 5 секунд?

9. Использование электрической энергии. Зависимость потребления энергии (киловатт) небольшого предприятия за день от времени t можно смоделировать функцией $K(t) = 10\,te^{-t}$. Здесь t - время, в часах, принадлежит промежутку [0;24].

a) Сколько киловатт-часов электрической энергии использует предприятие в первые T часов (от $t = 0$ до $t = T$)?

b) Сколько киловатт-часов электрической энергии было использовано в первые 4 часа?



Указание: Функция $y = -10\,(t+1)e^{-t}$ является одной из первообразных для функции $K(t) = 10\,te^{-t}$.

10. **Объем продаж.** По прогнозам маркетологов изменение объема продаж продукции можно выразить непрерывной функцией $S'(t) = 20\,e^{0,2t}$. $S'(t)$ показывает увлечения объема продаж в t-ый день в манатах.
a) Какой, приблизительно, объем продаж будет в первые 5 дней?
b) Определите объем продаж со 2-го по 5-ый день.
Указание: в этом случае границы интегрирования будут от 1 до 5.

11. a) Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 4 - 2t$ (м/сек). Здесь $0 \leq t \leq 2$. Найдите путь, пройденной частицей за 2 секунды.
b) Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t^2 + 2t$ (м/сек). Найдите пройденный путь за первые 3 секунды.
c) Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = |2t - 6|$ (м/сек). Здесь $0 \leq t \leq 6$. Найдите пройденный путь за 6 сек.

12. Частица движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 100 - 10t$ (м/сек). Найдите пройденный путь за первые 15 секунд.
Указание: пройденный путь запишите как сумму путей от 0 до 10 секунды и от 10 до 15 секунды.

13. **Изменение объема.** Вода заполняет бак со скоростью $r(t) = 200 - 10t$ (*л*/мин). Выразите увеличение объема воды в баке за первые 10 минут при помощи определенного интеграла и найдите его значение.

14. **Изменение количества.** Скорость изменения количества пользователей платежных терминалов в зависимости от времени можно смоделировать функцией $F(t) = 12 + 6\cdot\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Здесь t показывает количество минут. Найдите количество людей, воспользовавшихся платежными терминалами за 60 минут, округлив полученный результат до целого.

15. **Очистка озера.** Изменение объема (тонн/год) мусора, извлеченного из озера, можно смоделировать функцией $y = 20\,e^{-0,5t}$. Здесь t показывает количество лет начиная с 2000 года.Найдите объем мусора при очистке озера с 2000 по 2010 года.

16. **Физика. Закон Гука.** a) Сила в 2 Н сжимает пружину на 1 см. Какую работу нужно совершить, чтобы сжать пружину на 2 см?
b) Сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см.

Свойства определенного интеграла

Отметим следующие свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Значение определенного интеграла не зависит от переменной интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

Свойство 2. Для любого числа k справедливо равенство

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Пример. $\int_1^2 3x^3dx = 3\int_1^2 x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{3}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{45}{4}$

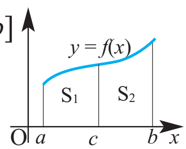
Свойство 3. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Пример. $\int_0^1 (e^x + x^2)\,dx = \int_0^1 e^xdx + \int_0^1 x^2dx = e^x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = (e^1 - e^0) + \frac{1}{3} = e - \frac{2}{3}$

Свойство 4. Для $a \le c \le b$ и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

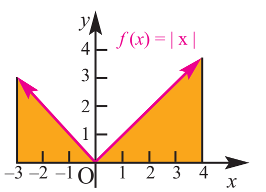


площадь ограниченная функцией $f(x)$ на интервале $[a; b]$ равна сумме площадей $S = S_1 + S_2$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример. Вычислите определенный интеграл $\int_{-3}^4 |x|dx$

Так как $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, то



$$\int_{-3}^4 |x|dx = \int_{-3}^0 (-x)dx + \int_0^4 x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(0^2 - (-3)^2) + \frac{1}{2}(4^2 - 0^2) = \frac{9}{2} + 8 = 12{,}5$$

Свойство 5. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, знак интеграла меняется на противоположный.

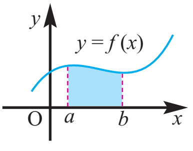
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

На самом деле, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$

До настоящего момента говоря о площади, которую ограничивает график функции, мы имели ввиду, что функция принимает неотрицательные значения. Что же будет, если площадь, ограниченная графиком функции, будет находится как ниже, так и выше оси x? Сможем ли мы найти эту площадь при помощи определенного интеграла? В этом случае надо использовать свойство, представленное выше.

Площадь расположена выше оси x !

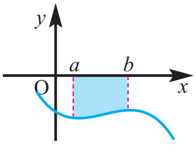
Если при условии $b > a$ на промежутке $a \le x \le b$ функция $f(x) \ge 0$, то график функции f расположен выше оси x и значение интеграла положительно.



$$S = \int_a^b f(x)dx > 0$$

Площадь расположена ниже оси x !

Если при условии $b > a$ на промежутке $a \le x \le b$ функция $f(x) \le 0$, то график функции f расположен ниже оси x и значение интеграла отрицательно.

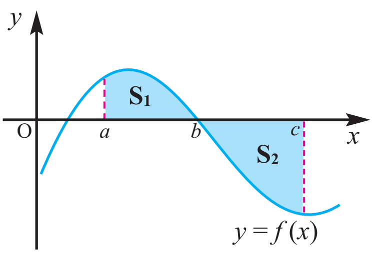


Понятно, что числовое значение площади не может быть отрицательным, поэтому при нахождении этого интеграла берется его абсолютное значение.

$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

Площадь функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[a;c]$, состоит из двух частей - площади S_1 на отрезке $[a;b]$ и площади S_2 на отрезке $[b;c]$.



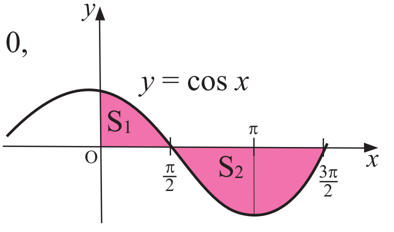
На отрезке $[a;b]$ интеграл $\int_a^b f(x)dx > 0$

На отрезке $[b;c]$ интеграл $\int_b^c f(x)dx < 0$

Общая площадь: $S = S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx + \left|\int_b^c f(x)dx\right|$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример . Найдите площадь закрашенной части.



Решение: Зная, что на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$ $\cos x \geq 0$,

а на отрезке $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ $\cos x \leq 0$, имеем:

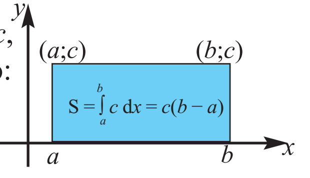
$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = (\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}) =$$

$$= (1-0) - (-1-1) = 3 \text{ (кв.ед.)}$$

Свойство 5. Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x) = c$, то справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b c\, dx = c(b-a)$$



Обучающие задания

1. Вычислите, применяя свойства определенного интеграла.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \cos x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin x\, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \sin x\, dx$

c) $\int_1^2 (\ln x - 2x) dx - \int_2^1 (3t^2 - \ln t)\, dt$ d) $\int_1^e (xe^x - \frac{1}{x})\, dx + \int_e^1 (1 + te^t)\, dt$

2. Вычислите.

a) $\int_0^5 |2x-5|\, dx$ b) $\int_1^4 (3 - |x-3|)\, dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|\, dx$

3. Найдите площадь, ограниченную заданными линиями.

a) $y = x^2 - 5x + 4$ и $y = 0$ b) $y = 4x - x^2$ и $y = 0$

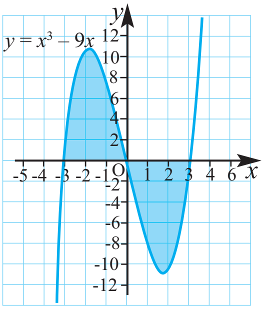
4. Найдите площадь, расположенную между заданным графиком и осью абсцисс.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 3 \\ 8-x, & x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$

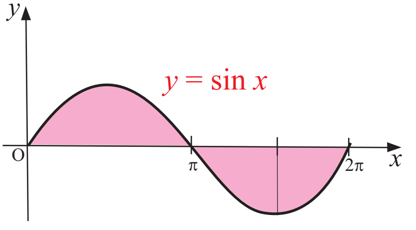
5. Используя свойства определенного интеграла, покажите справедливость следующих равенств.

a) $\int\limits_{3}^{11} f(x)\,dx - \int\limits_{7}^{11} f(x)\,dx = \int\limits_{3}^{7} f(x)\,dx$ b) $\int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int\limits_{5}^{3} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{5} f(x)\,dx$

6. a) При помощи определенного интеграла найдите площадь, между графиком функции $y = x^3 - 9x$ и осью абсцисс.

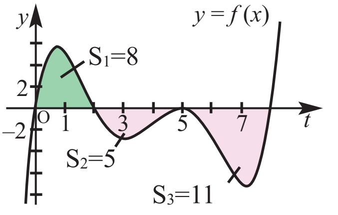


b) Найдите закрашенную площадь, ограниченную функцией $y = \sin x$ и осью абсцисс.



7. По данным рисунка и зная, что $F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)dt$, найдите:

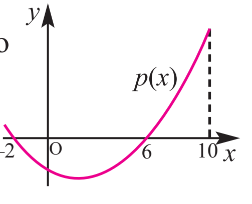
a) F(2) b) F(5) c) F(8)



8. a) На рисунке дан график функции $p(x)$. Зная, что

$\int\limits_{-2}^{6} p(x)dx = -10$ и $\int\limits_{-2}^{10} p(x)dx = 2$,

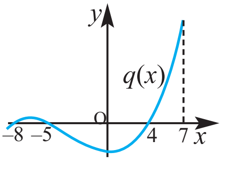
найдите интеграл $\int\limits_{6}^{10} p(x)dx$.



b) На рисунке дан график функции $q(x)$. Зная, что

$\int\limits_{-8}^{7} q(x)dx = -3$, $\int\limits_{4}^{7} q(x)dx = 5$ и $\int\limits_{-5}^{7} q(x)dx = -11$,

найдите значение определенного интеграла $\int\limits_{-8}^{-5} q(x)dx$.



9. При каких положительных значениях c:

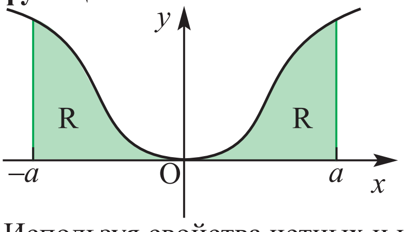
a) площадь, ограниченная линиями $y = 2x$, $y = 0$ и $x = c$, равна 4?

b) площадь, ограниченная линиями $y = x^2 + c$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, равна 15?

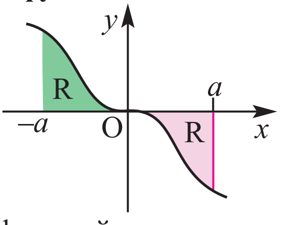
10. Задание для долгосрочного выполнения. Определенный интеграл четной и нечетной функции на симметричном отрезке.

Известно, что четная функция удовлетворяет равенству $f(-x) = f(x)$ и ее график симметричен относительно оси ординат.
Например, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^n$ $(n = 2k,\ k \in Z)$ четные функции.
Нечетная функция удовлетворяет равенству $f(x) = -f(x)$ и ее график симметричен относительно начала координат.
Например, $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^n$, $(n = 2k + 1,\ k \in Z)$ нечетные функции. Для четных и нечетных функций, имеющих симметричные относительно начала координат границы интегрирования, справедливы следующие равенства:

Для четной функции: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$



Для нечетной функции: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



Используя свойства четных и нечетных функций, вычислите:

a) $\int\limits_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx$ b) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x - 4\sin^3 x)dx$

a) $$\int\limits_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx = \int\limits_{-2}^{2} x^4\,dx - 2\int\limits_{-2}^{2}x^3dx = 2\int\limits_{0}^{2}x^4dx - 2\underbrace{\int\limits_{-2}^{2}x^3dx}_{0} = 2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{64}{5}$$

b) $$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x - 4\sin^3 x)dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx - 4\underbrace{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^3 x\,dx}_{0} = 2\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2(1 - 0) = 2$$

Выполните следующие задания.

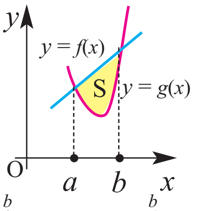
1. Запишите свое мнение о том, четной или нечетной является производная четной или нечетной функции.

2. Вычислите интеграл, используя четность или нечетность подынтегральной функции.

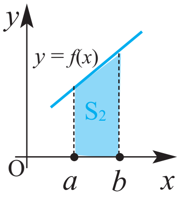
a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$ b) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$ c) $\int\limits_{-2}^{2}x^3\,dx$ d) $\int\limits_{-1}^{1}(1 - |x|)\,dx$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми

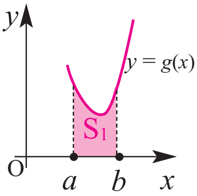
Пусть требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций f и g . Площадь требуемой фигуры S на рисунке можно найти, вычитая из площади S_2 площадь S_1. Каждую площадь можно вычислить как определенный интеграл на заданном промежутке.



$$S = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{S_2} - \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{S_1}$$

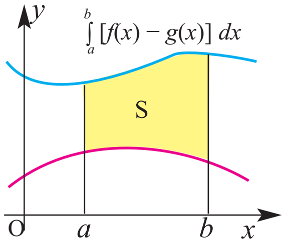


$$S_2 = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$S_1 = \int_a^b g(x)\,dx$$

Эти суждения можно обобщить следующим образом. Так как функции f и g непрерывны на отрезке $[a;\ b]$ и на этом отрезке выполняется условие $f(x) \geq g(x)$ (т.е.график функции $f(x)$ расположен выше графика функции $g(x)$), то площадь ограниченная графиками функций $f(x)$, $g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, можно выразить следующим выражением: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$



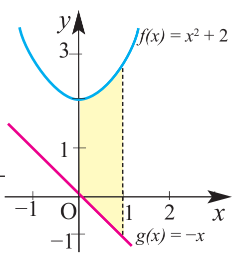
Графики функций не имеют общих точек.

Пример 1. Найдите площадь, ограниченную графиками функций $f(x) = x^2 + 2$ и $g(x) = -x$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$.

Решение:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$$



Графики функций пересекаются в двух точках.

Пример 2. Найдите площадь, ограниченную графиками функций $y = 2x - 1$ и $y = x^2 - 4$.

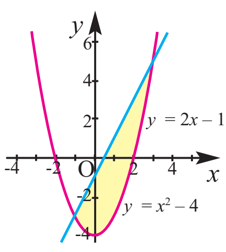
Решение: Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций.

$$2x - 1 = x^2 - 4,\quad x^2 - 2x - 3 = 0,\quad x = -1 \text{ и } x = 3.$$

Полученные значения x являются границами определенного интеграла.

$$S = \int_{-1}^3 [(2x - 1) - (x^2 - 4)]\,dx = \int_{-1}^3 (2x - x^2 + 3)\,dx =$$

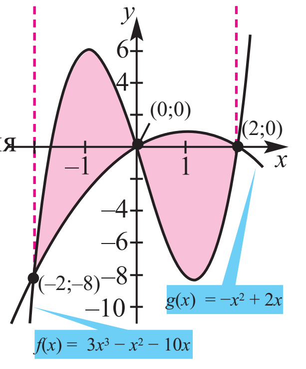
$$= x^2\Big|_{-1}^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^3 + 3x\Big|_{-1}^3 = 10\frac{2}{3} \text{ кв.ед.}$$



Площадь фигуры, ограниченной кривыми

Функции имеют более двух точек пересечения.

Пример 3. Найдите площадь, заключенную между графиками функций $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ и $g(x) = -x^2 + 2x$.



Решение: Найдем абсциссы точек пересечения графиков.

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$

$3x^3 - 12x = 0$

$3x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0,\ x = 2,\ x = -2,$

Значит, графики пересекаются в точках с абсциссами $-2;\ 0;\ 2$.

По графикам функций также видно, что площадь, которую мы должны найти, состоит из площади, ограниченной графиками на промежутке $[-2;\ 0]$ и на промежутке $[0;\ 2]$. На промежутке $[-2;\ 0]$ выполняется условие $f(x) \geq g(x)$, на промежутке $[0;\ 2]$ выполняется условие $g(x) \geq f(x)$ (разность функций учитываются при записи интеграла).

$$S = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\, dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\, dx =$$

$$= \left(\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24$$

! Вычислите требуемую площадь при помощи интеграла

$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx$. Какой результат вы получили?

Пример 4. Члены школьного клуба юных конструкторов работают над созданием нового двигателя для автомобиля, который будет меньше засорять окружающую среду. Для нового мотора изменение количества частиц (млрд), загрязняющих атмосферу, в t-ый год можно выразить следующим образом: $E(t) = 2t^2$. Количество загрязняющих частиц, выбрасывамых старым мотором имеет вид: $C(t) = 9 + t^2$.

a) В какой год они будут выбрасывать в атмосферу одинаковое количество частиц?

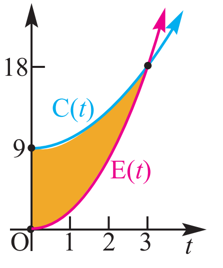
b) Какова разница между количеством вредных частиц, выброшенных в атмосферу, за этот период?

Решение: а) при t удовлетворяющего условию $E(t) = C(t)$, количество вредных частиц будет одинаково.

$$2t^2 = 9 + t^2,$$
$$t^2 = 9, \quad t = 3, \quad t = -3.$$

Значение $t = -3$ не соответствует смыслу задачи. На 3-ий год новый мотор будет давать такое же количество вредных частиц, как и старый.

b) Разность количества вредных частиц равна разности площадей на промежутке $[0;3]$.



$$\int_0^3 [C(t) - E(t)]\, dx = \int_0^3 [(9 + t^2) - 2t^2]\, dx =$$

$$= \int_0^3 (9 - t^2)\, dx = \left(9t - \frac{t^2}{3}\right)\Big|_0^3 = 27 - 9 = 18 \text{ (млрд. частиц)}$$

Обучающие задания

1. Найдите площадь, ограниченную заданными линиями. Изобразите графически.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $x = -1$, $x = 2$

b) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x + 2$, $x = -2$, $x = 2$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $x = 2$, $x = 3$

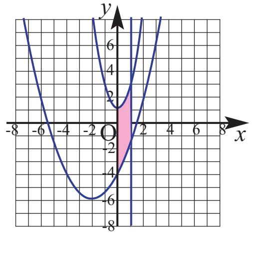
d) $f(x) = 4$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$

2. Найдите площадь закрашенной части на рисунке.

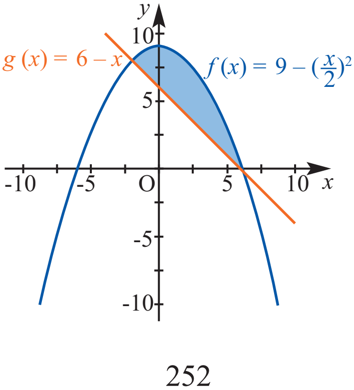
a)

$y = 2x^2 + 1$, $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 4$

$x = 0$, $x = 1$

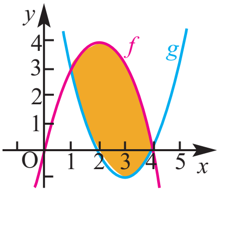


b)



c)

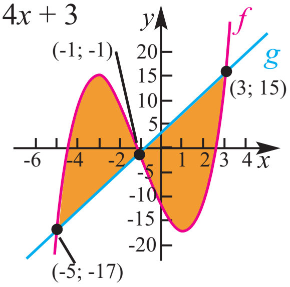
$f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$



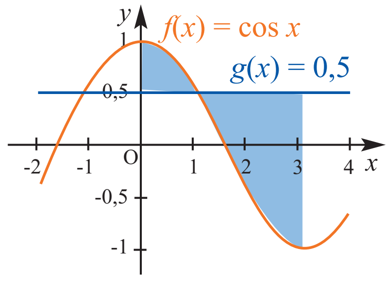
3. Вычислите площадь закрашенной части.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$

$g(x) = 4x + 3$



b) $f(x) = \cos x$ və $y = 0{,}5$, $0 \le x \le \pi$



4. Изобразите графически и вычислите площадь, ограниченную заданными линиями.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x$, $x = -1$ b) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

c) $y = x^3$, $y = -x$, $x = 2$ d) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$

5. Найдите площадь, ограниченную графиками функций.

a) $y = x^2 - 2$ и $y = 2$ b) $y = 2x - x^2$ и $y = -3$

c) $y = 2x - x^2$ и $y = x$ d) $y = -x^3 + 6x$ и $y = -x^2$

6. Постройте графики функций на заданном отрезке и найдите ограниченную ими площадь.

a) $y = x^3$ и $y = x^2 - 2x$, $x \in [-1; 1]$

b) $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$, $x \in [-1; 3]$

c) $y = \sqrt{x}$ и $y = 1$ $x \in [0; 4]$

d) $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$

7. Постройте графики функций и найдите ограниченную ими площадь.

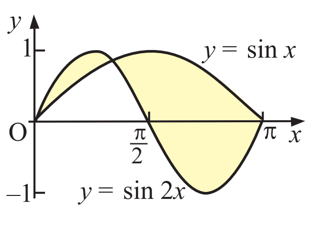
a) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$ c) $y = e$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$

b) $y = x^3$, $y = 2 - x$, $y = 0$ d) $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = e$

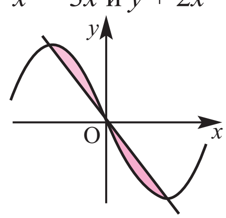
8. При помощи определенного интеграла найдите площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $(2;-3)$, $(4; 6)$, $(6; 1)$.

9. Найдите закрашенную площадь.

a)



b) $y = x^3 - 3x$ и $y + 2x = 0$



10. Два тела одновременно начали двигаться прямолинейно из одной точки в одинаковом направлении. Одно из тел движется со скоростью $v_1(t) = 9t^2 + 2t$ (м/сек), а другое - $v_2(t) = 2t$ (м/сек).
a) Найдите расстояние между ними через 4 секунды от начала движения.
b) Через сколько секунд от начала движения расстояние между телами будет равно 81 м?

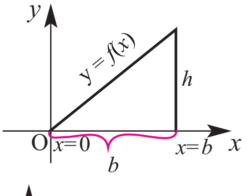
11. Затраты на производство телефонов в количестве x единиц выражается функцией $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, доход - функцией $R(x) = 429 - 2x$. Найдите площадь, образованную графиками этих функций и прямой $x = 0$. Объясните значение данной площади на примере реальной ситуации.

12. Проектная работа. Определенный интеграл и площадь

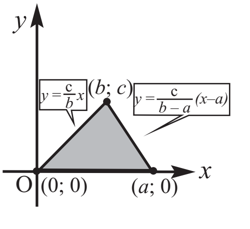
1. Решите задачу при помощи определенного интеграла.
2. Представьте геометрическое доказательство.
3. Придумайте еще несколько задач, которые можно решить при помощи интегрирования.

1) Докажите, что площадь данного треугольника, равная половине произведения основания и высоты, можно найти при помощи вычисления площади ограниченной линиями.

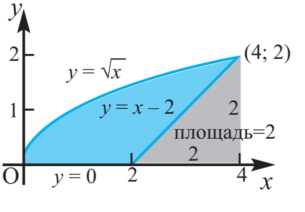
a) Прямоугольный треугольник. Указание: учитывая, что функцию $y = f(x)$ можно выразить через уравнение прямой $y = kx + b$, найдите функцию f.



b) Произвольный треугольник. Запишите и объясните, как вы получили уравнения прямых, содержащих стороны треугольника.



2) Найдите площадь закрашенной части как разность площади функции $y = \sqrt{x}$ на заданном интервале и площади треугольника.

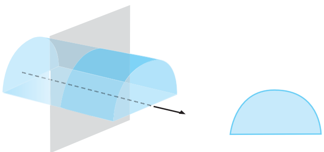


Определенный интеграл и объем фигур вращения

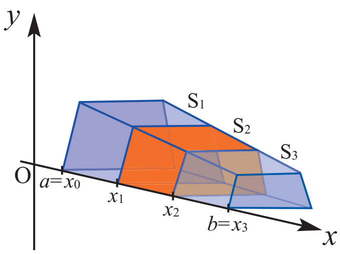
Как известно, площадь является числовой мерой фигур на плоскости. Объем является числовой мерой пространственных тел. Для вычисления объемов ряда пространственных фигур были найдены геометрические формулы. Например, нам известны формулы для вычисления объемов прямоугольного параллелепипеда $V=abc$, пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{осн.}h$, цилиндра $V=\pi r^2h$, а также шара $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ и конуса $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Формулы для нахождения объемов можно доказать как геометрически, так и при помощи интеграла.

Существуют различные способы нахождения объемов фигур. Один из них - способ расслойки (сложение сечений). С этим способом мы познакомились на примере принципа Кавальери. При помощи этого способа можно найти как объем фигуры, сечения которых не изменяются, как, например, цилиндра, так и объемы фигур с изменяющимися сечениями, например, пирамиды.



одинаковые сечения



различные сечения

Объем фигуры можно найти, найдя сумму объемов каждого слоя. Пусть $S(x_i)$ - площадь сечения, проходящего через точку x_i. Значит, если фигура состоит из $i=1,2,3,\ldots$ сечений и высота каждого сечения равна Δx, то зная, что $S(x_i)$ площадь основания, объем фигуры можно выразить как сумму объемов расслоек (V_i).

$$V \approx \sum S(x_i)\Delta x$$

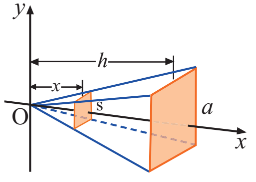
По определению интеграла объем пространственных фигур можно найти по формуле:

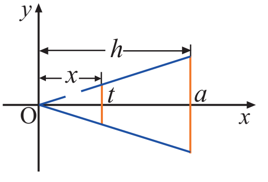
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x=\int_a^b S(x)dx,$$

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

Для нахождения объема фигур при помощи метода расслойки, надо:
1. Изобразить соответствующий рисунок и определить форму поперечного сечения (слоя).
2. Записать площадь поперечного сечения как функцию от определенной переменной.
3. Для данной функции, на заданном отрезке, записать и вычислить определенный интеграл.

Пример 1. Методом расслойки определите формулу объема правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна *a*, а высота *h*.





1) Любое сечение, параллельное основанию данной пирамиды, является квадратом.
2) Обозначим площадь сечения, проходящего на расстоянии x от вершины через $S(x)$.
Из подобия полученных пирамид получим:

$$\frac{S(x)}{a^2} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

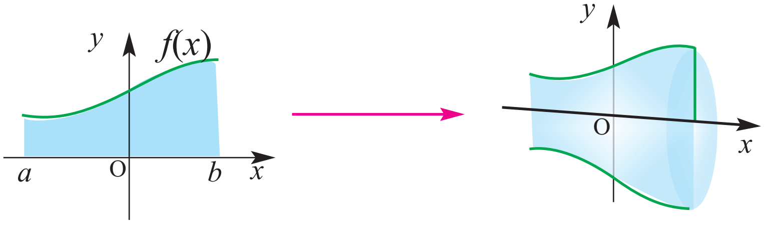
Отсюда: $S(x) = \left(\frac{ax}{h}\right)^2$

3) Объем пирамиды:

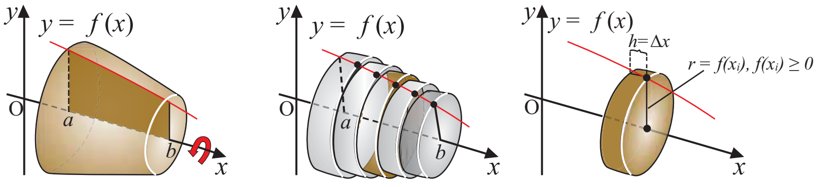
$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{a^2}{3} h$$

Фигуры вращения, поперечным сечением которых является круг, и их объемы.

Фигура на рисунке получена вращением плоскости, ограниченной функцией $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, вокруг оси x.



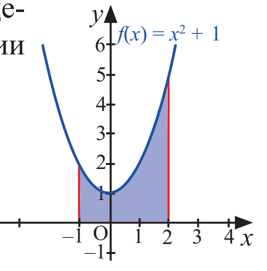
Рассмотрим другой пример, где нужно найти объем фигуры вращения.



Тело вращения на рисунке получено вращением вокруг оси x части плоскости, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Объем фигуры можно, приблизительно, найти как сумму объемов бесконечно маленьких цилиндров, если разделить отрезок $[a; b]$ на одинаковые по длине отрезки Δx. Объем каждого маленького цилиндра, полученного вращением фигуры, можно выразить как $\pi[(f(x)]^2\Delta x$ и поэтому объем тела вращения находится по формуле:

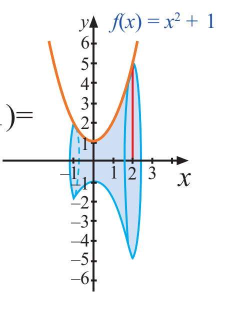
$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

Пример 2. Найдите объем фигуры, полученной вращением плоской части, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 2]$, вокруг оси x.



Решение: объем искомой фигуры, согласно формуле объемов фигур вращения, находится так:

$$V = \pi\int_{-1}^{2}(x^2+1)^2dx = \pi\cdot\int_{-1}^{2}(x^4+2x^2+1)dx =$$

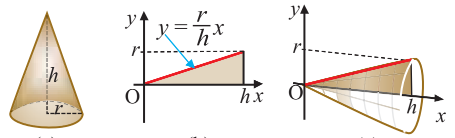


$$= \pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{2} = \pi\cdot\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+2\right) - \pi\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{33}{5}+\frac{18}{3}+3\right) = \frac{234\pi}{15} = \frac{78\pi}{5} \text{ куб ед.}$$

Пример 3. Найдите объем конуса, радиус которого равен r, а высота равна h.

Решение: так как $f(x)=\dfrac{r}{h}x$, то



(a) (b) (c)

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{rx}{h}\right)^2dx=\pi\int_0^h\frac{r^2x^2}{h^2}\,dx=$$

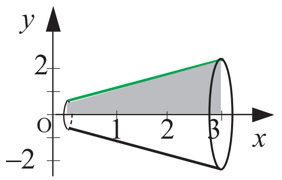
$$=\pi\frac{r^2x^3}{3h^2}\Bigg|_0^h=\frac{\pi r^2h}{3}.$$

Объем конуса: $\dfrac{\pi r^2h}{3}$

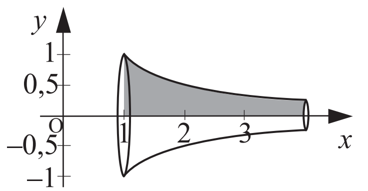
Обучающие задания

1. На рисунке представлены пространственные тела, полученные вращением вокруг оси x плоской фигуры, ограниченной графиком функции на заданном отрезке. Найдите объемы этих тел.

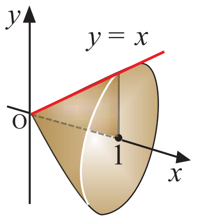
a) $f(x)=x+1$, $[0;3]$



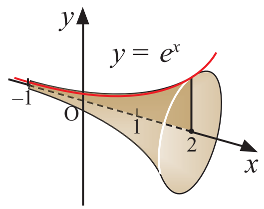
b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $[1;4]$



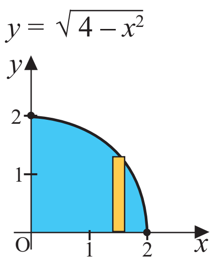
c) $f(x)=x$, $[0;1]$

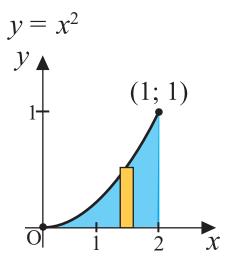


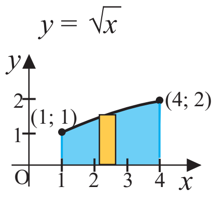
d) $f(x)=e^x$, $[-1;2]$

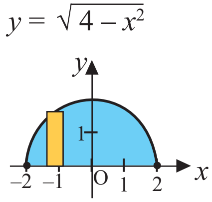


2. Изобразите пространственные фигуры, полученные вращением закрашенной части вокруг оси x, и найдите их объемы.









3. Найдите объемы тел, полученной вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной заданными линиями.

1) $y = 5, y = 0, x = 1, x = 3$

2) $y = x, y = 0, x = 0, x = 2$

3) $y = x + 1, y = 0, x = 0, x = 2$

4) $y = \dfrac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 3$

5) $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$

6) $y = e^x, y = 0, x = -2, x = 5$

7) $y = \sqrt{x}, y = x$

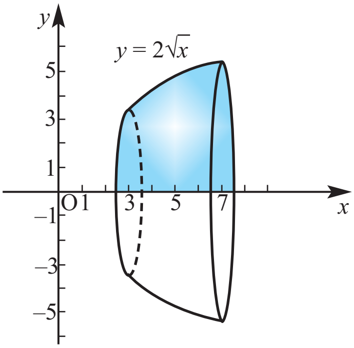
8) $y = 2 - x^2, y = 1$

9) $y = x^2, y = x$

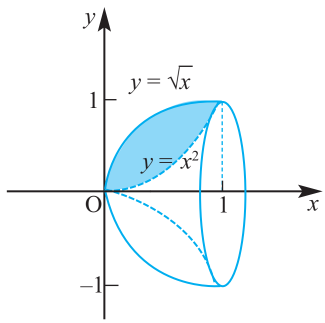
10) $y = x + 3, y = 2, x = 0, x = 4$

4. Найдите объемы тел, полученной вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной заданными линиями.

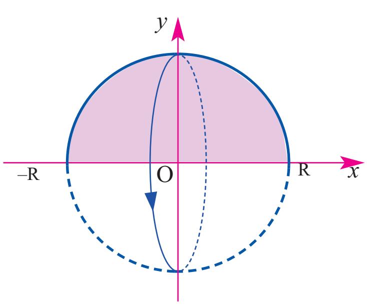
a) $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 3, x = 7$



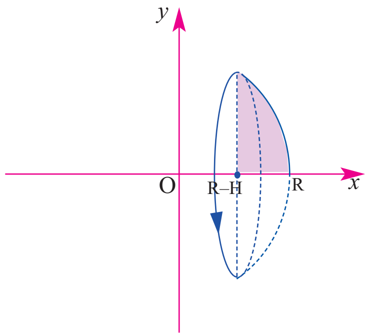
b) $y = \sqrt{x}, y = x^2$



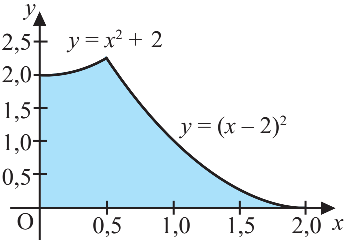
5. a) Выведите формулу нахождения объема шара, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$, и $y=0$, вокруг оси x.



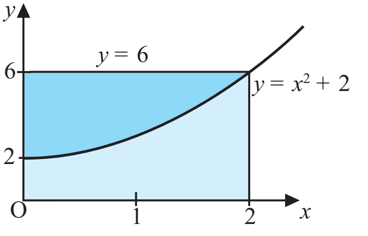
b) Выведите формулу нахождения объема шарового сегмента, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R-H \le x \le R$, $y=0$ и $x=R-H$ $(0<H<R)$, вокруг оси x.



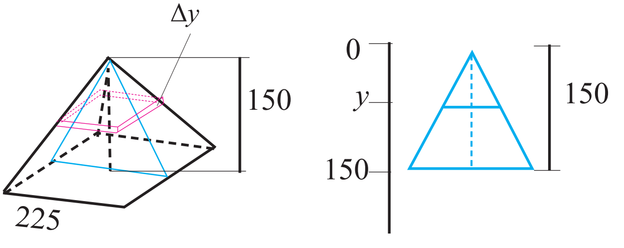
6. a) Найдите объем тела, полученной вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = (x - 2)^2$, вокруг оси x. **Указание**. Вычислите объем как сумму двух интегралов на промежутках [0; 0,5] и [0,5; 2].



b) Найдите объем тела, полученной вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 6$ и $y = x^2 + 2$ вокруг оси x. **Указание**. Найдите объем, вычислив разность интегралов.



7. **Долгосрочные задания.** 1) Большая пирамида Гизы находится в Египте и ее размеры на рисунке заданы в фитах (feet). По данным на рисунке найдите объем пирамиды при помощи определенного интеграла.



Выполните задание по решению Примера 1 на стр. 253.

1) Сторона основания правильной пирамиды 5 м, высота 3 м. Как будет отличаться объем пирамиды, размеры которой равны половине данных размеров?

2) Сечения крыши дома, параллельные плоскости земли, имеют форму прямоугольников, а сечения, перпендикулярные плоскости земли, имеет форму треугольника. Размеры прямоугольника в основании крыши 1 м × 2 м, основание треугольника 1 м, высота 0,5 м. Найдите объем чердака.

Обобщающие задания

1. Найдите первообразную функции, применяя правила интегрирования.

a) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$ b) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$ c) $f(x) = \dfrac{9}{3 - 6x}$

2. Найдите интегралы.

a) $\int (x + \sqrt{x})^2\, dx$ b) $\int \dfrac{x-5}{\sqrt[4]{x}}\, dx$ c) $\int (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$

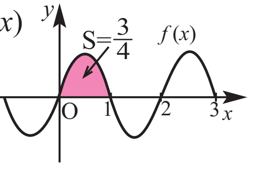
3. Известно, что $\int_1^3 f(x)dx = 5,\ \int_1^3 g(x)dx = -2,\ \int_3^5 f(x)dx = 2,\ \int_3^5 g(x)dx = 1.$

Согласно данным выше, найдите требуемые интегралы.

a) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$ b) $\int_1^3 [5f(x) - 3g(x)]dx$ c) $\int_1^5 [2f(x) - 3g(x)]dx$

4. Выполните следующие задания.

Зная, что основной период нечетной функции $f(x)$ равен 2 и $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{4}$, найдите следующее:



a) $\int_0^{-1} f(x)dx$ b) $\int_{-1}^1 f(x)dx$ c) $\int_0^3 f(x)dx$ d) $\int_0^{21} f(x)dx$

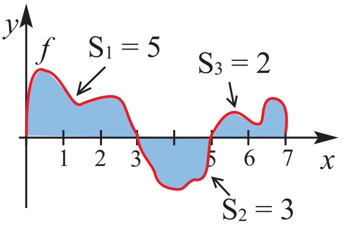
5. Вычислите определенные интегралы.

a) $\int_{-1}^2 (x^3 - x^2 + 4x)\, dx$ b) $\int_0^1 (x^{99} + 1)\, dx$ c) $\int_1^4 (x - \sqrt{x})\, dx$

6. Вычислите объем тела, полученной вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной заданными линиями.

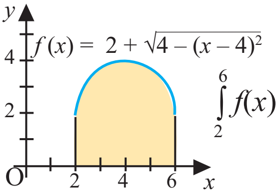
a) $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ b) $y = 3 - |x|,\ y = 0$

7. Вычислите, используя график функции f.

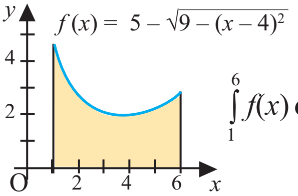


a) $\int_0^3 f(x)\, dx$ b) $\int_0^5 f(x)\, dx$ c) $\int_3^7 f(x)\, dx$

8. Основываясь на геометрическом смысле, вычислите заданный интеграл.

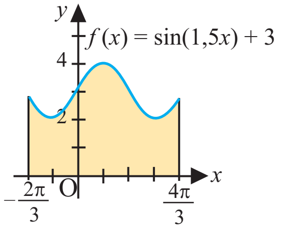
a) 

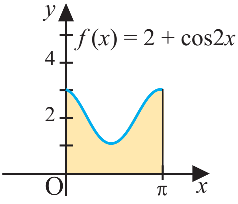
$\int_2^6 f(x)\,dx$

b) 

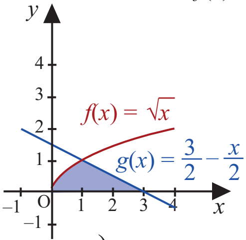
$\int_1^6 f(x)\,dx$

9. При помощи определенного интеграла вычислите закрашенную площадь.

a) 

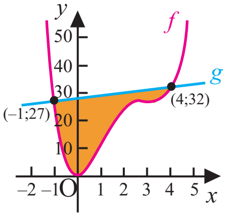
b) 

10. Найдите закрашенную площадь, расположенную между графиками.

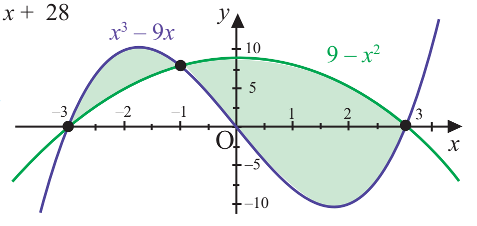


a)

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$, $g(x) = x + 28$

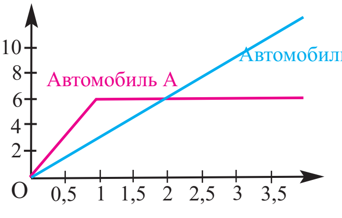


b)



c)

11. **Движение автомобиля.** На графике показана зависимость скорости (м/сек.) от времени двух автомобилей, которые начали движение по сигналу светофора. Автомобиль A начал движение с большей скоростью, чем автомобиль B.



a) Какой путь прошел автомобиль A за первые 2 секунды? **Указание:** используйте геометрические формулы.

b) За какое время, приблизительно, автомобиль B догонит автомобиль A?

12. Точка массой m движется вдоль оси Ox под действием силы направленной вдоль данной оси. Зная, что в момент $t = t_0$ скорость равна v_0, а координата равна x_0, запишите формулу $x(t)$. Здесь F(t) измеряется в ньютонах, t - в секундах, v - в $\frac{м}{сек}$, m - в кг.

a) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$

b) $F(t) = 14 \sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$

9 Статистика и вероятность

- Статистические показатели
- Формы распределения информации
- Нормальное распределение
- Диаграмма “ящик с усами”
- Случайные события и вероятность
- Условная вероятность

Математический словарь

- Совокупность
- Выборка
- Среднее арифметическое
- Мода
- Медиана
- Наибольшая разность
- Отклонение
- Среднеквадратичное отклонение
- Дисперсия
- Диаграмма “ящик с усами”
- Событие
- Случайное событие
- Эксперимент
- Элементарное событие
- Пространство элементарных событий
- Независимые события
- Зависимые события
- Условная вероятность

Дисперсия. Стандартное отклонение

До настоящего момента для анализа статистических данных мы использовали такие показатели, как среднее арифметическое, мода и медиана.

- Среднее арифметическое находится использованием всех значений данных.

- Значения, которые выходят за пределы, могут привести к ложным результатам о совокупности.

- Медиана является средним значением упорядоченных данных.

- Медиана делит данные на две половины - нижнюю и верхнюю.
- Она является более надежным показателем, если присутствует резких отклонений от среднего значения.
- Пригодна для анализа ограниченного количества данных.

- Мода определяет характер данных для совокупности.

- Дает возможность создать мнение о среднем арифметическом.
- Очень удобна для анализа категориальных данных (гендер, цвет и т.д.).
- Данные могут иметь более одной моды или вообще не иметь моду.

При обработке статистической информации для получения более точного результата используются такие характеристики, как ***отклонение, дисперсия, стандартное отклонение.***

Отклонением называется разность значения данных и среднего арифметического: $\boldsymbol{x_{\text{откл.}} = x - \bar{x}}$, здесь x - числовое значение данных информации, $\boldsymbol{\bar{x}}$ - среднее арифметическое.

Дисперсия равна отношению суммы квадратов отклонений к количеству значений данных

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}$$, здесь n количество данных.

Стандартным отклонением называется квадратный корень из дисперсии и обычно обозначается буквой σ - “сигма”: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Стандартное отклонение – один из важных показателей, отвечающий за характер распределения.

✔ Стандартное отклонение показывает распределение данных относительно среднего арифметического.

✔ Чем больше (длиннее) промежуток, на котором расположены друг от друга значения данных, тем больше будет стандартное отклонение.

✔ Чем меньше промежуток, на котором расположены друг от друга значения данных, тем меньше будет стандартное отклонение. Другими словами, если данные сконцентрированы вокруг среднего арифметического, то стандартное отклонение будет маленьким.

Пример. Ниже представлена еженедельная заработная плата (в ман.) случайным образом выбранных 10 работников фирмы:
120, 160, 90, 175, 110, 80, 220, 150, 300, 95 . Найдите отклонения, дисперсию и стандартное отклонение. Объясните соответственно к ситуации.

Решение: 1. Построим таблицу, соответствующую зарплате.

2. Вычислим среднее арифметическое: $\overline{x} = 1500 : 10 = 150$ (манат).

3. Вычитая из каждой зарплаты среднее арифметическое, найдем **отклонение** от среднего арифметического**.**
Например, 120 –150 = –30, это на 30 манат меньше средней зарплаты за неделю. Для каждой зарплаты вычислим отклонение $(x - \overline{x})$ и запишем результат в новый столбик таблицы. Сумма значений отклонений различных данных равна нулю. Это всегда так и не дает новой информации. Поэтому мы используем сумму квадратов отклонений.

4. Вычислим все $(x_i - \overline{x})^2$, отметим в новом столбце и найдем сумму :
$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 42150$. Чтобы найти **дисперсию**, надо полученную сумму разделить на количество данных n: $(n = 10)$

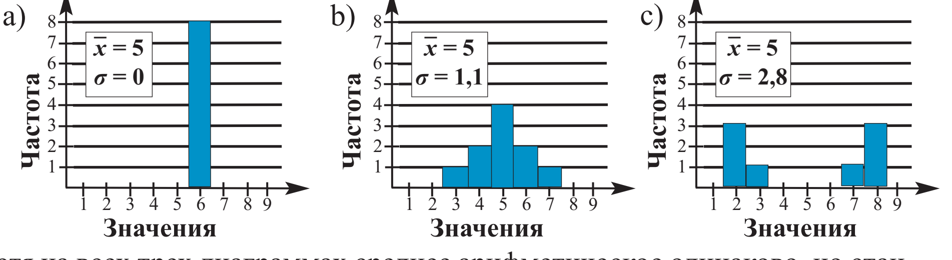
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{42150}{10} = 4215$$

Зарплата x_i	Откл-е.: $(x_i - \overline{x})$	Квадраты: $(x_i - \overline{x})^2$
Арифм. средн. $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 150$		
120	–30	900
160	10	100
90	–60	3600
175	25	625
110	–40	1600
80	–70	4900
220	70	4900
150	0	0
300	150	22500
95	–55	3025
Сумма: $\sum x_i = 1500$	Сумма: $\sum (x_i - \overline{x}) = 0$	Сумма: $\sum (x_i - \overline{x})^2 = 42150$

5. Чтобы найти **стандартное отклонение** заработной платы надо извлечь квадратный корень из дисперсии: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4215} \approx 64{,}92$

Объяснение: при помощи стандартного отклонения можно оценить изменение зарплаты. Например, человек, который получает зарплату 300 манат, получает зарплату больше средней еженедельной зарплаты (150 манат) на 2 стандартных отклонения (2 × 65). Человек, который получает еженедельно 90 манат, приблизительно, получает меньше еженедельной средней заработной платы на 1 стандартное отклонение (65).

Сформировать мнение о стандартном отклонении можно, представляя данные в форме гистограммы или полигона частот.
Ниже представлены соответствующие рисунки.



Хотя на всех трех диаграммах среднее арифметическое одинаково, но стандартное отклонение различно. На первом графике стандартное отклонение 0. Значение всех 8 данных равно 5. Стандартное отклонение на втором графике меньше, чем на третьем, так как данные сконцентрированы вокруг среднего арифметического.

Пример. Нахождение стандартного отклонения сгруппированной информации. В таблице представлена ежедневная информация об учеников, пропустивших уроки в течении 50 дней в одном из классов. Найдите стандартное отклонение.

Количество учеников, пропустивших уроки в течении 50 дней					
1	3	1	1	1	1
5	0	1	2	2	1
0	1	1	0	0	0
3	6	2	3	0	1
1	3	0	3	1	1
1	1	6	0	1	3
4	1	1	6	6	1
2	2	2	0	3	0
2	4				

Решение:

1. Сначала сгруппируем данные о пропущенных уроках и запишем их в таблице частоты. Например, количество дней, в которых вообще уроков не пропущено - 10, в которых 1 ученик пропустил уроки - 19 и т.д.

2. По данным таблицы найдем среднее арифметическое.

$$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n} = \frac{91}{50} \approx 1{,}8$$

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	10	0
1	19	19
2	7	14
3	7	21
4	2	8
5	1	5
6	4	24
	$\sum = 50$	$\sum = 91$

3. Для каждого значения данных найдем:

a) отклонение от среднего значения: $(x_i - \overline{x})$

b) возведем его в квадрат $(x_i - \overline{x})^2$

c) Полученный результат умножаем на количество, складываем и делим на n. После чего находим квадратный корень.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 f_i}{n}} = \sqrt{\frac{145{,}4}{50}} \approx 1{,}71$$

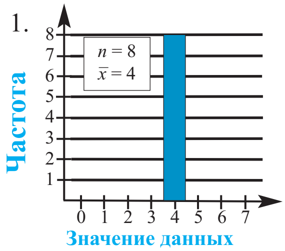
$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 f_i$
–1,8	3,24	32,40
–0,8	0,64	12,16
0,2	0,04	0,28
1,2	1,44	10,08
2,2	4,84	9.68
3,2	10,24	10,24
4,2	17,64	70,56
		$\sum = 145{,}40$

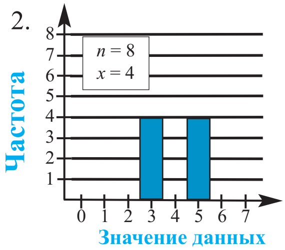
Как видно, стандартное отклонение количества детей не посещающих школу, 1,71, при среднем значении 1,8.

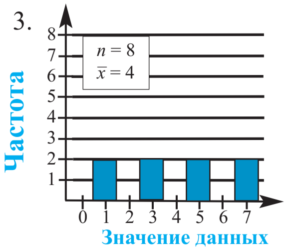
Использование калькулятора. Чтобы вычислять статистические данные на калькуляторе, надо перейти в статистический режим. Для вычисления среднего арифметического $\overline{x}$, дисперсии и стандартного отклонения σ на калькуляторе имеются специальные клавиши. При решении заданий используйте следующие кнопки.

$\boxed{\overline{x}}$ $\boxed{\overline{x^2}}$ $\boxed{\sum x}$ $\boxed{\sum x^2}$ $\boxed{\sigma_n}$ $\boxed{\sigma_{n-1}}$

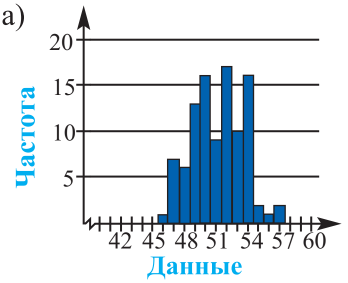
1. Сначала, без помощи письменных вычислений, по графику, найдите, приблизительно, стандартное отклонение. Потом проверьте полученное приближенное значение, здесь n - количество данных совокупности, $\overline{x}$ - среднее арифметическое.

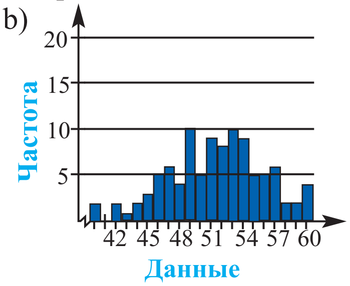
1.


2.


3.


2. Среднее арифметическое данных по каждому графику равно 50. Однако стандартное отклонение первого равно 2,2, а второго - 6,8. Установите соответствие между графиком и стандартным отклонением.

a)


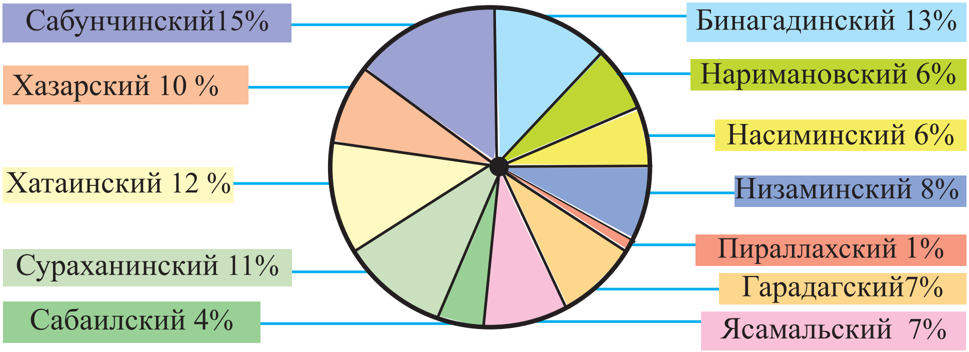
b)


3. Выполните задания для следующих данных
100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000;
a) Найдите среднее арифметическое $\overline{x}$ и стандартное отклонение (σ) .
b) Значение всех данных умножьте на 10. Для новых данных найдите x и стандартное отклонение (σ)
c) Разделите все данные на 10. Найдите $\overline{x}$ и σ.
d) Обсудите полученные результаты. По значению стандартного отклонения объясните является ли среднее арифметическое надежным показателем для оценивания ситуации?

4. Ниже представлены результаты, случайным образом выбранных 8 девочек и 8 мальчиков, сдающих экзамен по программе SAT (Scholastic Aptitude Test).
Баллы SAT мальчиков: 1059; 1328; 1175; 1123; 923; 1017; 1214; 1042
Баллы SAT девочек: 1226; 965; 841; 1053; 1056; 1393; 1312; 1222
a) Для каждой группы найдите наибольшую разность, дисперсию и стандартное отклонение.
b) Объясните результаты на примере реальной жизненной ситуации.

5. Запишите такое числовое множество из 10 данных, чтобы среднее арифметическое было равно 10, а стандартное отклонение приблизительно 3.

6. На круговой диаграмме представлено распределение учеников, получающих образование в городе Баку по районам в 2016 году.



Источник. *Министерство Образования Азербайджанской Республики. Годовой отчет за 2016 год.*

a) Найдите среднее арифметическое, наибольшую разность, дисперсию и стандартное отклонение.
b) Какому району соответствует наибольшее отклонение?
c) Представьте данные в виде гистограммы.
d) Известно, что количество учащихся Сабунчинского района составляет 59088 человек. Найдите общее количество учеников города Баку.

7. Для следующих данных найдите наибольшую разность, среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение.
a) 11 10 11 7 8 11 6 4 6 7
b)13 15 13 17 18 13 15 14 13 20 20 18 23 20

8. Следующие данные отражают заработную плату, случайным образом выбранных работников двух фирм.

Фирма A: 220 265 290 320 350 230 280 310 180
Фирма B: 210 180 200 210 260 270 240 250 220

a) Найдите наибольшую разность, среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение
b) Объясните ситуацию на реальном жизненном примере.

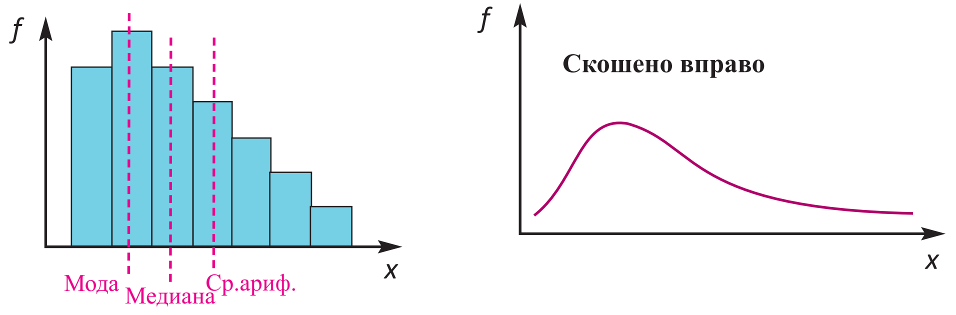
9. В таблице показаны число забитых голов двух игроков, которые принимали участие во всех играх чемпионата страны в течении 5 лет. Какой из футболистов имеет более стабильный результат?

гола	1	2	3	4	5
1-ый футболист	23	19	17	23	18
2-ый футболист	20	16	23	19	22

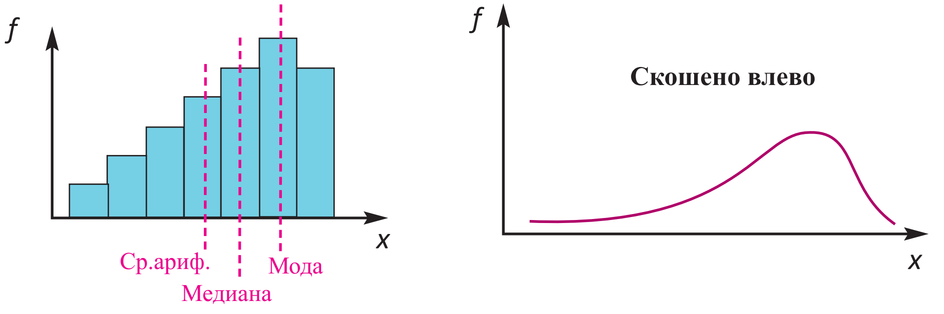
Нормальное распределение

Как видно из рисунка, формы графического представления распределения частот (гистограмма или полигон частот), могут быть симметричными или асимметричными.

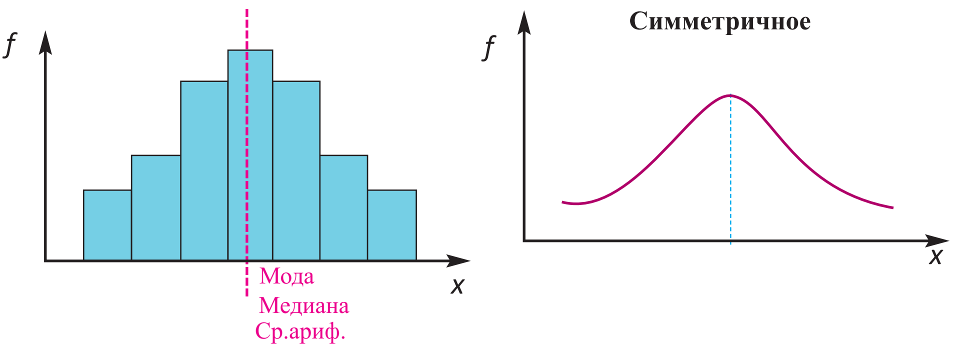
Асимметричное распределение



Асимметричное распределение



Симметричное распределение

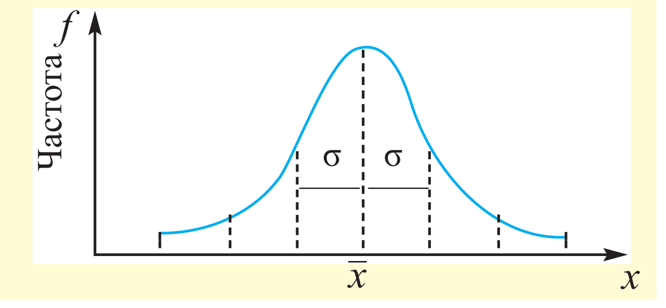


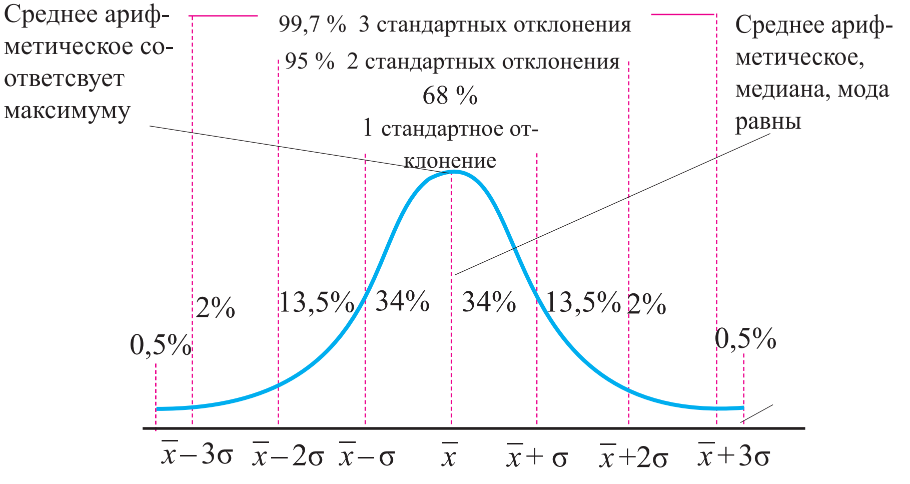
Примером нормального распределения могут служить данные о росте и массе новорожденных.

Рассмотрим более подробно формы нормального распределения.

Нормальное распределение

- Кривая нормального распределения симметрична относительно среднего арифметического.
- Среднее арифметическое, мода и медиана при нормальном распределении равны.
- График нормального распределения строится при помощи среднего арифметического ($\overline{x}$) и стандартного отклонения (σ).
- Нормальное распределение отображает данные, расположенные в окрестности трех стандартных отклонений.

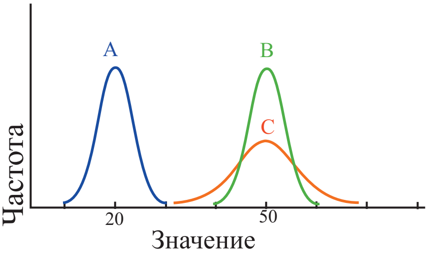




При нормальном распределении:

- Около 68% данных находятся в пределах одного стандартного отклонения от среднего
- Около 95% данных находятся в пределах двух стандартных отклонений от среднего
- Около 99,7% данных находятся в пределах трех стандартных отклонений от среднего значения.

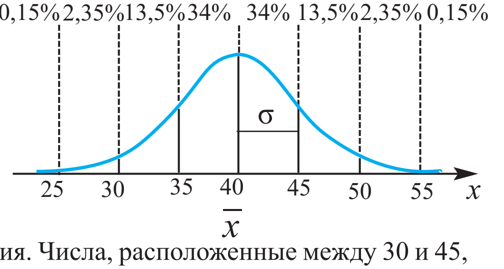
Нормальное распределение



В зависимости от среднего значения график нормального распределения может перемещаться вправо или влево. При изменении стандартного отклонения, для одних и тех же значений среднего арифметического, график сжимается или растягивается. Например, среднее арифметическое для графика B больше среднего арифметического для графика A, а стандартное отклонение одиноковы. Для графиков B и C среднее арифметическое одинаково, а стандартное отклонение графика C больше стандартного отклонения графика B.

Пример. Среднее арифметическое нормального распределения, соответствующего совокупности X, равно 40, а стандартное отклонение равно 5. Сколько процентов данных совокупности: a) меньше 45; b) находятся между 30 и 45?

Решение: по условию $\overline{x} = 40$, $\sigma = 5$. Отметим данные среднего арифметического и стандартного отклонения на оси x и изобразим кривую нормального распределения.



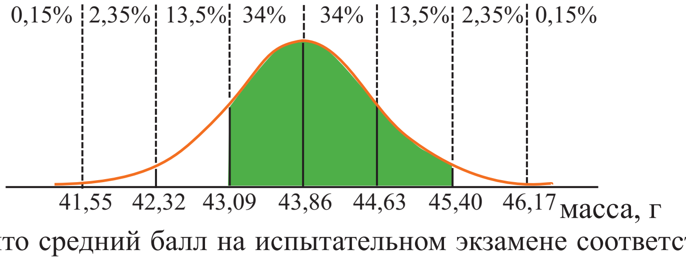
Для каждого интервала отметим соответствующие проценты и ответим на вопросы.

a) Значения данной совокупности меньше 45, приблизительно составляют 34%+34%+13,5%+2,35% + 0,15% = 84%.

b) Число 30 расположено на 2σ стандартных отклонения слева, 45 - на σ стандартное отклонение справа от среднего значения. Числа, расположенные между 30 и 45, составляют 34% + 34% + 13,5% = 81,5%.

Обучающие задания

1. На рисунке показан график нормального распределения, полученного орнитологами по результатам измерения массы яиц одного вида птиц. Средняя масса яиц $\overline{x} = 43{,}86$ (гр), стандартное отклонение $\sigma = 0{,}77$(гр). Представьте информацию о закрашенной части графика.



2. Известно, что средний балл на испытательном экзамене соответствующий нормальному распределению, равен 72 (балла), а стандартное отклонение 6 (баллов). 1) Запишите следующие данные:

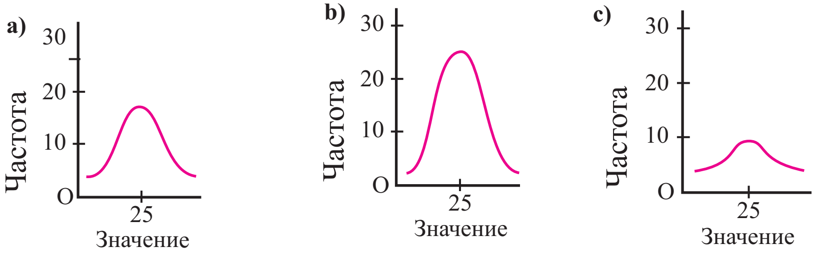
a) удаленные на 1 стандартное отклонение от среднего значения

b) удаленные на 2 стандартных отклонения от среднего значения

c) удаленные на 3 стандартных отклонения от среднего значения

2) Изобразите кривую, соответствующую нормальному распределению. Покажите каждый интервал в виде процента.

3. 1) По графикам нормальных распределений определите в каком из них стандартное отклонение является наибольшим, а в каком - наименьшим?

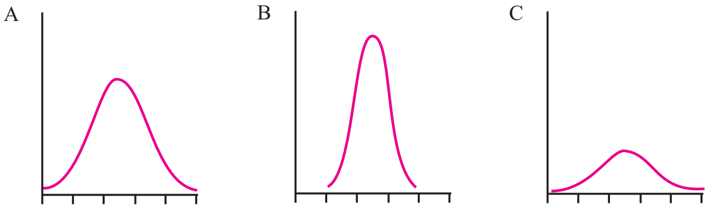


2) Каждой ситуации соответствует один график. Установите соответствие.

a) Действительная масса одной пачки чая.

b) Годовая прибыль 16-летней молодежи в Азербайджане.

c) Результаты оценивания учащихся по разделу.



4. В одной системе координат постройте кривые нормального распределения. Объясните общие и отличительные черты данных графиков.

a) среднее значение 50, стандартное отклонение 10
   среднее значение 50, стандартное отклонение 20

b) среднее значение 50, стандартное отклонение 5
   среднее значение 40, стандартное отклонение 10

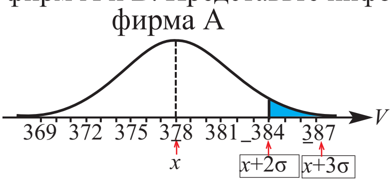
5. Изменение объема одной коробки сока соответствует нормальному распределению.

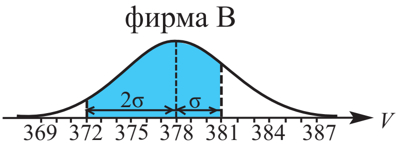
Проверка показала, что средний объем производимого фирмой A продукта 378 мл, стандартное отклонение 1 мл, средний объем производимого фирмой B продукта также равен 378 мл, а стандартное отклонение 3 мл.

a) Сколько процентов продукта каждой фирмы соответствует объему 375 мл и меньше?

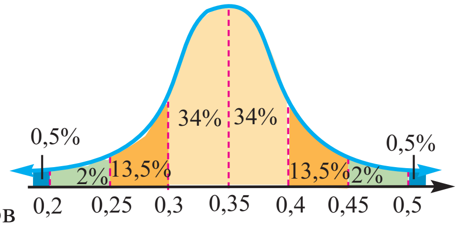
b) Сколько процентов продукта каждой фирмы соответствует объему больше 372 мл и меньше 382 мл?

c) На рисунке ниже представлены графики нормального распределения фирм A и B. Представьте информацию о данных закрашенной части.





6. На рисунке, в виде нормального распределения, показаны результаты тестов на координацию, проведенных среди 1800 подростков, при среднем значении 0,35 секунд и стандартном отклонении 0,05 секунды.



a) Про какое количество подростков можно сказать, что их реакция между 0,25 и 0,45 секундами?

b) Какова вероятность, что реакция случайно выбранного подростка составляет более 0,4 секунд?

7. Результаты экзаменов представлены в виде нормального распределения, среднее значение которого равно 70, стандартное отклонение 4,5. Если в экзамене участвовало 360 человек, для случайно выбранного учащегося найдите вероятность того, что :

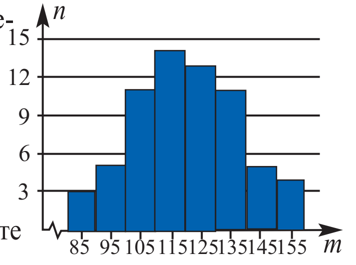
a) он окажется среди тех, кто набрал 65-80 баллов;

b) он окажется среди тех, кто набрал 75 или больше 75 баллов;

c) он окажется среди тех, кто набрал меньше 62 баллов.

d) Найдите интервал баллов, которые набрали 90% экзаменующихся.

8. На гистограмме отображена информация о количестве (n) и массе (m) коров, предназначенных для мясного разведения.



a) По гистограмме найдите среднее значение и стандартное отклонение.

b) Постройте кривую нормального отклонения.

c) По кривой нормального распределения,составьте два примера, в которых надо найти вероятность.

9. Брошены два зара. Информация, о распределения вероятности суммы выпавших очков, представлена в виде таблицы и гистограммы. Гистограмма показывает, что распределения вероятности является нормальным распределением.

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

a) Вероятность выпадения какой суммы наибольшая? Найдите ее.

b) Чему равна вероятность, что сумма выпавших очков больше 10?

c) Верно ли утверждение, что “наиболее часто выпадает сумма меньше 8?”

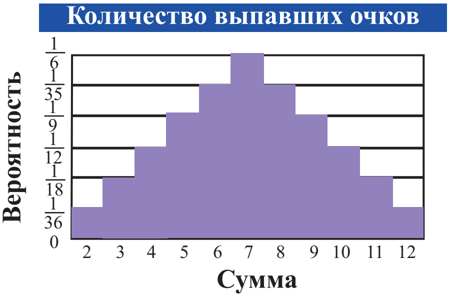


Диаграмма “ящик с усами”

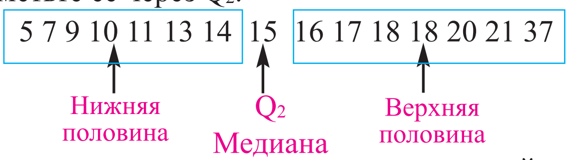
Построение диаграммы “Ящик с усами” рассмотрим на следующем примере.

Пример 1. 15 работников фирмы при сдаче экзамена по технике безопасности, получили следующие баллы:

13 9 18 15 14 21 7 10 11 20 5 18 37 16 17.

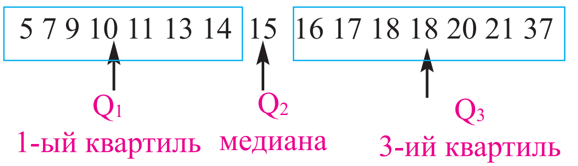
Представьте данную информацию в виде диаграммы “ящик с усами”.

Решение: 1. Расположите данные в порядке возрастания, определите медиану и отметьте ее через Q_2.



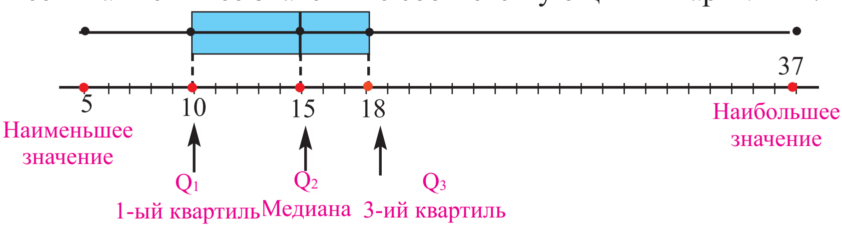
2. Данные слева от медианы расположены в первой нижней половине, справа от медианы - в верхней половине. Т.е. медиана делит данные на две половинки.

3. Медианы половинок, называемые квартилями (здесь $Q_1 = 10$, $Q_3 = 18$), разбивают данные на 4 части.



4. Определяют изменение между квартилями $Q_1 - Q_3 = 18 - 10 = 8$

5. Отметим на числовой оси наименьшее и наибольшее значения, квартили и медиану - 5 важных точек. Нарисуем прямоугольник, длина которого равна разности изменению между квартилями. Этот прямоугольник делится медианой на две части. Теперь нарисуем “усы”, соединив наибольшее и наименьшее значения с соответствующими квартилями.



Мы построили диаграмму “ящик с усами” в соответствии с представленными данными. Теперь, по диаграмме, представим данные.

Из диаграммы видно, что приблизительно половина, 50 % , из 15 человек набрали от 10 до 18 баллов, 25% - меньше 10 баллов и 25% - больше 10 баллов.

Разница длин левого и правого “уса” зависит от разницы значений данных в соответствующих частях.

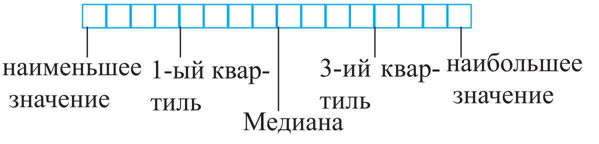
Диаграмма “ящик с усами”

Для построения диаграммы “ящик с усами” из заданной совокупности выделяют 5 значений:

Медиану Q_2, квартиль Q_1,, значение которого меньше медианы и является медианой нижней половины, квартиль Q_3, значение которого больше медианы и является медианой верхней половины множества данных, наибольшее и наименьшее значения.

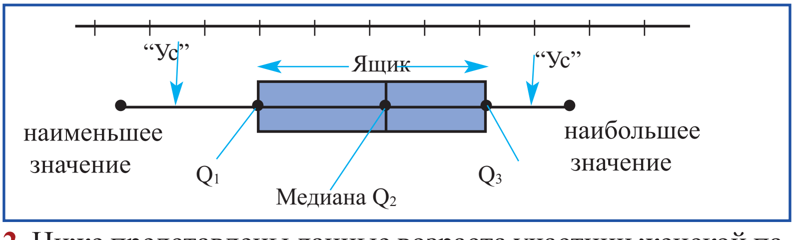
5 значений
- Наименьшее значение
- 1-ый квартиль: Q_1
- Медиана: Q_2
- 3-ий квартиль: Q_3
- Наибольшее значение

Схематическое представление диаграммы “ящик с усами”



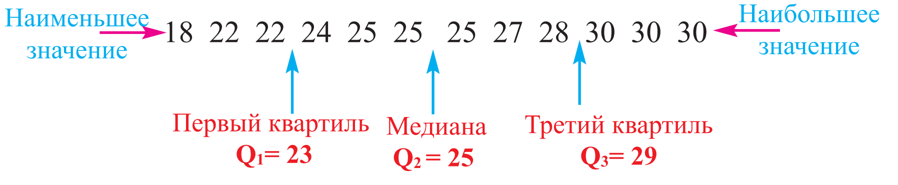
Шаги построения диаграммы “ящик с усами”

1. Проводится горизонтальная прямая.
2. В зависимости от диапазона изменения данных проводится деление.
3. На прямой отмечают 5 значений – Q_1,Q_2,Q_3, наименьшее значение, наибольшее значение.
4. От Q_1 до Q_3 рисуется ящик.
5. Рисуем “усы” от Q_1 до минимального значения и от Q_3 до максимального значения.



Пример 2. Ниже представлены данные возраста участниц женской паралимпийской команды по волейболу
24, 30, 30, 22, 25, 22, 18, 25, 28, 30, 25, 27.
Представьте данные в виде диаграммы “ящик с усами”.

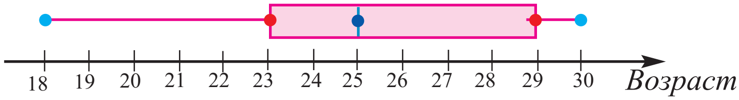
Решение: 1. Расположим данные и найдем медиану и квартили.



2. Изобразим числовую ось и отметим эти следующие данные.

Диаграмма “ящик с усами”

3. При помощи разности квартилей $Q_3 - Q_1 = 29 - 23 = 6$ нарисуем ящик и разделим его на две части (при помощи медианы). Соединим ящик с наибольшим и наименьшим значением.



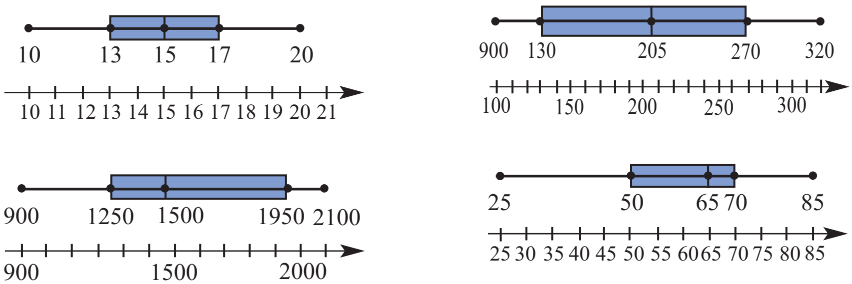
4. Представление диаграммы. Возраст 50% баскетболисток между 23-29 годами, 25% меньше 23 лет, 25% - больше 29 лет. Длинными или короткими являются “усы” ящика показывает, близко ли или далеко расположены друг от друга данные внутри 25% - го интервала. Например, левый “ус” длиннее, правый - короче. Так как в 25%-интервале значения изменяются между 18-23, а в левом “усе” мы встречаем только два значения 29-30.

Данные, которые сильно отличаются от основных данных совокупности, называются **выбросами**. Выбросы можно определить относительно верхнего и нижнего квартиля. В этом случае выбросом считается, значение в 1,5 раза больше или меньше разности $Q_3 - Q_1$. Например, в рассмотренном нами примере нижний квартиль 23, верхний квартиль 29, разность квартилей 6. Тогда значения $23 - 1{,}5 \cdot 6 = 14$ и $29 + 1{,}5 \cdot 6 = 38$ считаются граничными значениями. Все значения, которые больше 38 и меньше 14, называются выбросами.

Обучающие задания

1. Для каждой из следующих диаграмм “ящик с усами” определите данные:

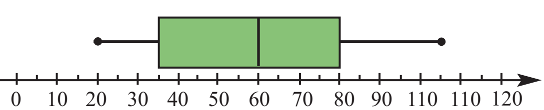
a) наименьшее значение
b) наибольшее значение
c) первый квартиль, Q_1
d) медиану
e) третий квартиль Q_3
f) разность квартилей $Q_3 - Q_1$.



2. Представьте данные в виде диаграммы “ящик с усами”и объясните на примере реальной жизненной ситуации.

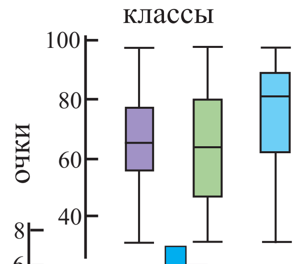
206, 173, 198, 241, 179, 236, 181, 231, 215, 222, 228

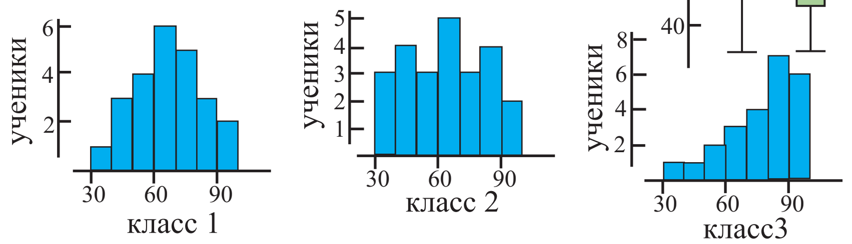
3. На диаграмме “ящик с усами” представлены результаты оценивания класса. Максимальный балл 120.



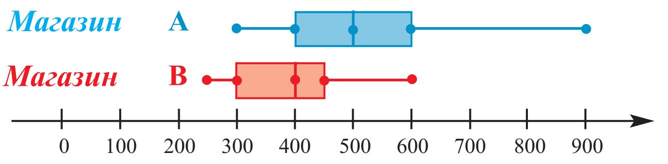
a) Каким результатам соответствует медиана?
b) Какова разность между самым высоким и самым низким результатом.
c) Сколько процентов класса набрало более 35 баллов?
d) Сколько баллов составляет разность квартилей? ($Q_3 - Q_1$)
e) В каком интервале находятся 25% учащихся, набравших максимальный балл?
f) Принадлежит ли ученик, набравший 63 балла, к 25 % учащихся, набравших наибольшее количество баллов?
g) Объясните, почему правый “ус” длиннее левого “уса” на реальном примере.

4. Установите соответствие между диаграммами ”ящик с усами” и гистограммой.





5. На диаграмме показана цена телевизора в двух разных магазинах. Создайте презентацию, о значении цены телевизора в магазинах.



6. Найдите границы выбросов данных, если медиана равна 32, значение первого квартиля 24, третьего квартиля 43. Проверьте, являются ли выбросами значения 63, 20, 12, 53.

7. Представьте диаграмму ствол - листья, содержащую данные о возрасте 45 Президентов Соединенных Штатов Америки в виде диаграммы “ящик с усами”.

4	2 3 6 6 7 7 8 9 9
5	0 0 1 1 1 1 2 2 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 7 8
6	1 1 1 1 2 4 4 5 8 9
7	0

Самым пожилым президентом является 70-летний Дональд Трамп, а самым молодым - Теодор Рузвельт, которому было 42 года. Можно ли считать их возраст выбросом?

Случайные события и вероятность

В повседневной жизни мы можем наблюдать различные события, многочисленные опыты, испытания и результаты наблюдений. Неразделимый результат опыта, испытания и наблюдения называется **элементарным событием**. Множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий (ПЭС) и обозначается буквой U. Например, обозначим через E_k событие, что при бросании зары на верхней грани выпадет очко k. Тогда $U = \{ E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

Событием называется любое подмножество множества элементарных событий. Например, если событие А - “выпадение четного числа очков”, то $A = \{ E_2, E_4, E_6\}$.

Если количество элементарных событий ПЭС равно n, тогда количество элементарных подмножеств 2^n и количество возможных событий также 2^n. Так как каждое событие является подмножеством ПЭС, то действия, определенные над множествами, определяются аналогичным образом и для событий. При этом пустое множество Ø будет невозможным событием, U является достоверным событием.

Результаты, принадлежащих хотя бы одному из событий А или В, называется **объединением** этих событий и пишется как $A \cup B$.

Результаты, принадлежащие как событию А, так и событию В, называются **пересечением** событий: $A \cap B$.

События, не имеющие общих результатов, называются **несовместными** событиями. Если события А и В несовместные, то $A \cap B = Ø$.

Множество всех событий, не принадлежащих множеству **А** называются **противоположным** событием или **дополнением**: **А**.

Если наступление события В порождает событие А, то событие В называется **благоприятным** событием для события А.

В опыте с равновозможными исходами **вероятность** события А равна отношению количества благоприятных исходов для этого события к количеству всех возможных исходов.

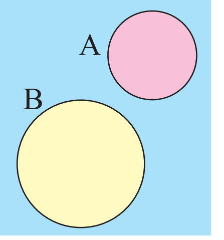
$$\boxed{P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{количество всех возможных исходов}}}$$

При решении задач на вероятность обратите внимание на следующее:

1. Для любого случайного события А справедливо $0 \le P(\mathbf{A}) \le 1$.
2. Сумма вероятностей наступления элементарных событий равна 1: $\sum P(E_i) = 1$
3. Справедлива формула $P(\mathbf{A}) = 1 - P(\bar{\mathbf{A}})$.

Вероятность несовместных событий. Для любых несовместных событий $A \subset U$ и $B \subset U$ справедливо равенство.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Пример. В мешке шары желтого, красного и белого цветов. Вероятность, того, что из мешка вытащат белый шар 0,25, красный шар - 0,3. Найдите вероятность того, что вытащенный шар желтый.
Решение: если из мешка вытащить один шар, то вероятность того, что он будет красным или белым равна: P(кр. или бел.) = 0,25 + 0,30 = 0,55. Появление желтого шара означает событие, при котором не появляется ни красный, ни белый шар. Значит, P(желт.) = P (не кр. или бел.). Вероятность наступления событий A или B с наступлениями других событий равна 1. Тогда P(желт.) = 1 – P (кр. или бел.) = 1 – 0,55 = 0,45.

Обучающие задания

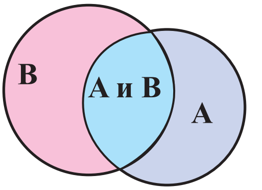
1. Для каждого события запишите пространство элементарных событий
a) Одновременно бросили две монеты
b) 3 ребенка в семье: мальчики или девочки.

2. По информации, данной комитетом по защите прав потребителей, в первый год эксплуатации новых автомобилей 17% нуждаются в ремонте один раз, 7% - два раза и 4% - более трёх раз. Используя эти данные, для случайно выбранного автомобиля, найдите вероятность того, что:
a) вообще не было необходимости в ремонте;
b) ремонтировался максимум один раз;
c) хотя бы один раз пришлось обратиться для ремонта.

3. Группы крови обозначаются следующим образом: O (I группа), A (II группа), B (III группа) и AB (IV группа). По данным организации Красного Полумесяца в городе, где произошла авария, 45% жителей имеют группу крови O, 40% - A, 11% - B, остальные - AB.
Найдите вероятность того, что добровольный донор имеет группу крови:
a) AB (IV группа); b) A (II группа) или B (III группа) ; c) не O (I группа).

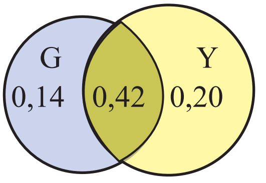
4. В ящике 7 белых, 3 черных шара. Найдите вероятность того, что из случайно вынутых двух шаров по крайней мере 1 будет белым.

Вероятность двух событий



В общем случае для любых событий $A \subset U$ и $B \subset U$ справедлива формула $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Пример. 56% студентов института проживают в студенческом городке, 62% там только обедают, а 42% и проживают, и обедают в городке. Найдите вероятность, что случайно выбранный студент:



a) проживает, но не обедает в студенческом городке;

b) не проживает и не обедает в студенческом городке.

Решение: а) пусть G ={студенты проживающие в городке},
Y ={ студенты, обедающие в городке}.
Из диаграммы видно, что пересечение равно $P(G \cap Y) = 0,42$.
Зная, что $P(G) = 0,56$, найдем $P(G \cap \overline{Y}) = 0,56 - 0,42 = 0,14$. Тогда $P(\overline{G} \cap Y) = 0,62 - 0,42 = 0,20$; сумма $0,14 + 0,42 + 0,20 = 0,76$ показывает вероятность того, что выбранный студент проживает или обедает в городке. b) вероятность, что студент не проживает и не обедает в городке равна $P(\overline{G} \cap \overline{Y}) = 1 - 0,76 = 0,24$.

Условная вероятность. Иногда дополнительная информация может повлиять на результат испытания. Например, если известно, что при бросании зар выпадет четное очко, то вероятность события равна $\frac{1}{3}$.
Если эта информация отсутствует, то вероятность выпадения любого очка, в том числе и четного, равна $\frac{1}{6}$.
Значит, при вычислении вероятности какого-либо события надо учитывать события, которые могут повлиять на данное событие.
Вероятность события А, при условии, что событие В уже наступило, называется **условной вероятностью**: $P(A|B)$

Пример. Психологи провели опрос среди случайно выбранных 478 школьников, 1/3 часть которых учится в деревне, 1/3 - в пригороде и 1/3 - в центре города. Один из вопросов и варианты представлены ниже.

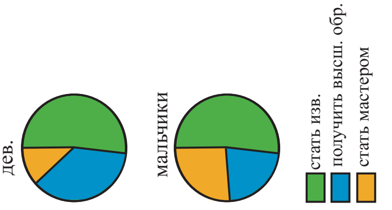
Что для вас важнее?

Стать известным Получить высшее образование Стать мастером

Результаты опроса представлены в таблице:

	Стать известным	Получить высшее образование	Стать мастером	**Всего**
Мальчики	117	50	60	227
Девочки	130	91	30	251
Всего	247	141	90	478

●Вероятность того, что случайно выбранный ученик из участников опроса:



девочка $P(\text{дев.}) = \dfrac{251}{478} = 0{,}525$

девочка, которая хочет стать известной $P(\text{изв.}|\text{дев.}) = \dfrac{130}{478} \approx 0{,}271$,

хочет стать мастером $P(\text{мастер}) = \dfrac{90}{478} \approx 0{,}188$

●Вероятность того, что случайно выбранная девочка хочет стать мастером $P(\text{мастер}|\text{дев.}) = \dfrac{30}{251} \approx 0{,}120$

●Вероятность того, что случайно выбранный мальчик хочет стать мастером $P(\text{мастер}|\text{мальчик}) = \dfrac{60}{227} \approx 0{,}264$

Вычислим заново некоторые вероятности, которые были вычислены выше. Например,

$$P(\text{мастер}|\text{дев}) = \frac{30/478}{251/478} = \frac{30}{251}$$

Значит, $P(\text{мастер}|\text{дев}) = \dfrac{P(\text{дев. и мастер.})}{(\text{дев.})}$ или

$$P(\text{дев.}|\text{выс. обр. }) = \frac{91/478}{141/478} = \frac{91}{141}$$

Значит, $P(\text{дев.}|\text{выс. обр. }) = \dfrac{P(\text{ высш. обр и дев.})}{P(\text{выс.обр.})}$

Обобщая полученные примеры, запишем формулу условной вероятности.

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

здесь $P(B) > 0$

Из формулы условной вероятности получаем:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Формула умножения вероятностей.

Пример. В семье два ребенка. Если один из них мальчик, то найдите вероятность того, что мальчиками окажутся оба ребенка.

Решение: введем обозначения мальчик - м, девочка - д. Найдем пространство элементарных событий U = {мм, мд, дм, дд}и обозначим через E событие, что оба ребенка мальчики, а через F - событие, что хотя бы один ребенок мальчик. Тогда,

E = {мм}, F = {мм, мд, дм}, $E \cap F$ = {мм}

$$P(F) = \frac{3}{4}, \quad P(E \cap F) = \frac{1}{4}, \quad P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Формула условной вероятности не связана с тем являются ли события зависимыми или независимыми. По данной формуле можно вычислить вероятность любого события.

Пример. В общежитии студенческого городка на 3 этаже расположены самые комфортабельные комнаты, 3 из которых пустые. Всего в общежитии 12 пустых комнат и студенты, чтобы получить право занять комнату, тянут номера. Сначала номер вытянул Эльмир, а затем его друг. Какова вероятность того, что они оба попадут на 3-й этаж. .
Известно, что номер, который вытянул Эльмир не возвращается и его друг будет выбирать не из 12 номеров, а уже из 11. Вероятность того, что Эльмир попадет на 3-й этаж равна $\frac{3}{12}$, тогда шанс того, что его друг тоже попадет на 3-й этаж будет $\frac{2}{11}$.
Найдем по формуле вероятность того, что друг Эльмира так же попадет на 3-й этаж, если Эльмир уже выбрал 3-ий этаж .

$$P(\text{Эл. и Д.}) = P(\text{Эл.}) \times P(\text{Д} \mid \text{Эл.}) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \approx 0{,}045$$

Если $P(A|B) = P(A)$, т.е. вероятность события B не влияет на вероятность события A, то события A и B называются **независимыми событиями.** Если A и B являются независимыми событиями, то справедливо следующее $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Пример. Ежедневно фирма по обеспечению продуктами должна завозить в столовую свежий хлеб. Директор столовой утверждает, что вероятность этого события равна 0,85. Если вы 4 дня подряд будете завтракать в данной столовой, то найдите вероятность того, что каждое утро на завтрак вы получите свежий хлеб.
Решение: вероятность, что на завтрак будет свежий хлеб не зависит от того, привезут ли свежий хлеб в другой день и равна:

$$0{,}85 \times 0{,}85 \times 0{,}85 \times 0{,}85 \approx 0{,}522.$$

Пример. В мешке 3 белых и 7 черных шаров. Из мешка извлекают два шара (без возврата). Найдите вероятность того, что второй шар будет белого цвета.
Решение: обозначим через A_1 и A_2 соответственно события, что первый и второй шар будут белыми. Событие A_2 происходит в том случае, если или оба шара белые, или 1-й шар черный, а 2 -ой белый.
Значит, $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2)$.
Тогда $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2|\overline{A}_1) =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

Случайные события и вероятность

Обучающие задания

1. В семье двое детей. Найдите верятность того, что оба мальчики, если известно:
a) младший ребенок девочка; b) одна девочка

2. 70 % детей, которые обращаются к врачу имеют жалобы на озноб, а 30% - на боль в горле. Найдите вероятность того, что у случайно выбранного ребенка и горло болит, и озноб.

3. Пусть вероятность того, что какой-либо человек доживет до 80 лет (событые B) равна P (B) = 0,3, а до 90 лет (событые A)
P (A) = P (A ∩ B) = 0,2.
a) Найдите вероятность того, что человек доживший до 80 лет, доживет и до 90 лет.
b) Вероятность P(B|A) равна 1. Обоснуйте высказывание и объясните на примере конкретной ситуации.

4. Зар брошен 3 раза. При этом получились следующие события:
Событие A : при каждом третьем броске выпадает 4 очка;
Событие B : каждый первый бросок дает 6 очков, каждый второй - 5 очков. Найдите вероятность события **A** при условии события **B**.

5. Фирма по изготовлению автомобильных колес распространила информацию о возможном деффекте 2% продукции. Найдите вероятность того, что из 4 купленных вами колес данной фирмы, как минимум, одно будет иметь дефект.

6. Из коробки, в которой находятся одинаковые по формату карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, последовательно вытаскивают две из них. Найдите вероятность того, что если цифра на первой карте:
a) четная; b) нечетная,
то на второй карте изображена нечетная цифра.

7. Вероятность того, что цель будет поражена с первого выстрела, для первого стрелка равна 0,8, а для второго 0,6. Стрелки выполнили по одному выстрелу (независимо друг от друга). Найдите вероятность:
a) того, что цель поражена только первым стрелком;
b) того, что цель поражена обоими стрелками;
c) того, что цель не поражена;
d) того, что цель поражена одним из стрелков;
e) того, что цель поражена по крайней мере одним из стрелков.

8. В одном из двух одинаковых ящиках 2 белых и 1 черный шар, во втором 1 белый и 4 черных шара. Случайным образом выбирается один из ящиков, из которого вытаскивают шар. Найдите вероятность того, что шар окажется белым.

1. Для заданной совокупности, найдите среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение.

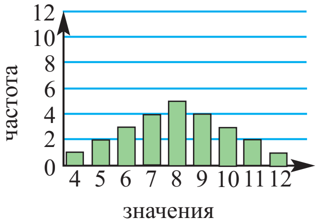
a) 11 10 8 4 6 7 11 6 11 7

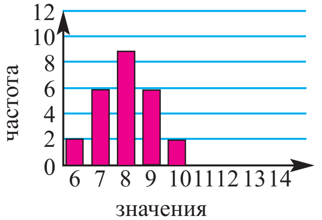
b) 13 23 15 13 18 13 15 14 20 20 18 17 20 13

c) 15 8 12 5 19 14 8 6 13

d) 24 26 27 23 9 14 8 8 26 15 15 27 11

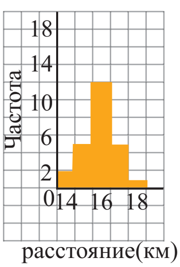
2. На графиках ниже данные распределены симметрично.
a) Не производя вычислений, определите, для каких статистических данных стандартное отклонение имеет большее значение.
b) Для каждого случая найдите среднее арифметическое и стандартное отклонение.
c) Изобразите диаграмму нормального распределения.



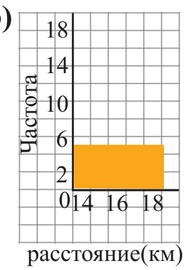


3. Не прибегая к вычислениям, выскажите свое мнение о том, на каком из графиков стандартное отклонение имеет большее значение.

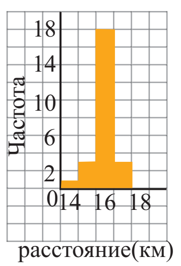
a)



b)



c)



4. Продукты в магазине расфасовывают в вакуумные упаковки. Срок хранения таких продуктов в магазине соответствует нормальному распределению, в среднем равному 180 суткам, и стандартному отклонению, равному 30 суткам. Сколько процентов продуктов имеют срок хранения:
a) между 150 и 210 сутками;
b) между180 и 210 сутками;
c) менее 90 суток;
d) более 210 суток?

5. В мешке 10 черных и 5 белых шаров. Из него, не глядя, вытаскивают два шара подряд, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

6. Результаты опроса о том, сколько времени в сутки они смотрят телевизор, среди 28 человек, представьте в виде диаграммы “ящика с усами”

2	4	3	1	5	7	1	4	3	2	6	4	5	5
2	0	3	5	9	4	5	2	1	3	6	7	2	4

a) Сколько процентов опрошенных смотрят телевизор более 4-х часов?

b) Какова вероятность того, что случайно выбранный из опрошенных людей человек, не смотрит телевизор более 2- х часов?

7. В школе 1000 учащихся, 430 из которых - девочки. 10% девочек учатся в 8 классе. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик является девочкой, которая учится в 8 классе?

8. Еженедельная заработанная плата 100 случайным образом выбранных работников фирмы по производству пластиковых игрушек представлена в виде таблицы частот.

a) Данные таблицы частот представьте в виде кривой нормального распределения.

b) Найдите вероятность, что еженедельная заработная плата случайно выбранного работника будет в интервале, получающих зарплату более 170 манат.

Классы	Частота
150 – 158	5
159 – 167	16
168 – 176	20
177 – 185	21
186 – 194	20
195 – 203	15
204 – 212	3

9. Найдите вероятность того, что при бросании двух зар, на верхней грани одной из них будет 3 очка, а другой - 5 очков.

10. В ящике находятся карточки на каждой из которых записана одна из букв азербайджанского алфавита. Из ящика случайно достают карточку. Найдите вероятность того, что:

a) P(2 гл.) b) P(2 согл.) c) P(1 гл., 1 сог.)

11. По следующим данным найдите форму распределения.

a) среднее арифметическое = 35 медиана = 40 мода = 45
b) среднее арифметическое= 50 медиана = 51 мода = 38

12. Среднее арифметическое при нормальном распределении равно 27, стандартное отклонение 5. Если случайно выбрать одно значение, то какова вероятность того что оно будет находится в интервале:

a) от 22 до 32 b) от 37
c) до 32 d) от 27 до 37

10

Уравнения. Неравенства. Системы уравнений

- Иррациональные уравнения
- Иррациональные неравенства
- Система показательных уравнений
- Система логарифмических уравнений
- Обобщающие задания

Это интересно!

Палеонтологи изучают геологическую эволюцию Земли, живые организмы и их развитие на основе останков организмов и следов их жизнедеятельности.
При этом им приходится решать много различного вида уравнений и систем уравнений (экспоненциальных, логарифмических и т.д.).

Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком радикала (или в дробной степени), называется иррациональным уравнением.

Примеры. $\sqrt[3]{x+2}-x=3$; $\sqrt{x-1}=5$

При решении рациональных уравнений, как правило, применяют возведение в степень. При этом необходимо учитывать следующее:

- решение рационального уравнения ищут на множестве действительных чисел;
- для радикала четной степени берутся арифметические корни, для радикала нечетной степени - действительные значения;
- при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается равносильное уравнение;
- При возведении в четную степень множество допустимых значений переменной нового уравнения может расширяться. Возможно, что некоторые корни нового уравнения могут не удовлетворять иррациональному уравнению. Поэтому при возведении в четную степень надо проверять, удовлетворяют ли полученные значения переменных заданному иррациональному уравнению.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x-3}+x=5$.

Решение: $\sqrt{x-3}=5-x$

$x-3=(5-x)^2$

$x^2-11x+28=0$

$x_1=4,\ x_2=7$

Оставим выражение содержащее радикал в одной стороне уравнения возведем обе части уравнения в квадрат, упростим и решим.

Проверка. При $x=4$ получаем $\sqrt{4-3}+4=5$; $5=5$.

При $x=7$ получаем $\sqrt{7-3}+4=5$; $9\neq 5$.

$x=7$ не удовлетворяет уравнению. Ответ: $\{4\}$

Отметим, что решить уравнение $\sqrt{x-3}=5-x$ можно, приведя его к равносильной системе $\begin{cases} x-3=(5-x)^2, \\ 5-x\geq 0 \end{cases}$

Решение данным способом выполните самостоятельно!

Обучающие задания

1. Решите уравнения.

a) $\sqrt{x+3}-3=1$ b) $\sqrt{3t+4}+2=1$ c) $\sqrt{x^2-7}-1=2$

d) $\sqrt[3]{1-2x}+1=4$ e) $\sqrt[4]{x^2+16}=\sqrt{5}$ f) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+2}}=3$

g) $\sqrt{x-2}+x=8$ h) $\sqrt{x^2-x-4}=x+2$ i) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

2. Решите уравнения разными способами.

a) $\sqrt{x^2+4x+4}=3$ b) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1$ c) $\sqrt{x^2+6x+9}=x+5$

3. Сколько действительных чисел удовлетворяют уравнению?

a) $(x^2-1)\sqrt{x+5}=0$ b) $(x^2-4)\sqrt{x-1}=2x^2-8$ c) $\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x-4}=3$

Иррациональные неравенства

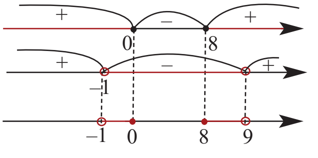
Неравенства, содержащие переменную под знаком радикала, называются иррациональными неравенствами. Решение иррациональных неравенств также ищут на множестве действительных чисел и, используя свойства корня и неравенств, сводится к решению системы рациональных неравенств.

Пример. Решите неравенство $\sqrt{x^2-8x} < 3$.

Решение: чтобы найти множество решений данного неравенства на множестве допустимых значений, т.е. при условии $x^2-8x \geq 0$, надо возвести обе части неравенства в квадрат и решить неравенство $x^2-8x<9$. Другими словами, задача сводится к решению системы: $\begin{cases} x^2-8x \geq 0 \\ x^2-8x<9 \end{cases}$

Каждое неравенство системы решим методом интервалов и найдем пересечение полученных решений:

$\begin{cases} x^2-8x \geq 0 \\ x^2-8x<9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x(x-8) \geq 0 \\ (x-9)(x+1)<0 \end{cases}$



Ответ: $(-1{:}0] \cup [8;9)$

Пример. Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$

Решение: рассмотрим два случая, в зависимости от знака правой части.

1) при $x+1<0$ для всех $x+3 \geq 0$ неравенство справедливо для всех x. Значит, надо решить систему

$$\begin{cases} x+1<0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

Ее решением является промежуток $[-3;\ -1)$.

2) при $x+1 \geq 0$ обе стороны заданного неравенства можно возвести в квадрат. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 > (x+1)^2 \end{cases}$$

Ее решением является промежуток $[-1;\ 1)$.

Решением заданного неравенства является $[-3;\ -1) \cup [-1;\ 1) = [-3;\ 1)$.

Обучающие задания

4. Решите неравенства.

1) $\sqrt{x-3} \geq 2$ 2) $\sqrt{2t-3} > 1$ 3) $\sqrt{2x+3} < 3$ 4) $\sqrt{x-4} \leq 2$

5) $\sqrt{x^2+15x} > 4$ 6) $\sqrt{x^2-3x} \leq 2$ 7) $\sqrt[3]{x^2-2x} > 2$ 8) $\sqrt[4]{x^2-3x} < \sqrt{2}$

9) $(x^2-4x)\cdot\sqrt{3-x} \leq 0$ 10) $\sqrt{x^2-6x+8} \geq -1$ 11) $\sqrt{x^2-x-2} > 0$

12) $\sqrt{x^2-6x+9} \leq 2$ 13) $\sqrt{x^2-4x+3} > 3$ 14) $\sqrt{x^2+18} \geq 2-x$

15) $\sqrt{24-5x} < x$ 16) $\sqrt{x+2} > x$ 17) $\sqrt{x^2-2x} > 1-x$

Система показательных уравнений

Решение системы показательных уравнений не отличается от решения других систем уравнений. Здесь также применяют способ замены, алгебраического сложения, графический метод и т.д.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$.

Решение: запишем заданную систему уравнений в виде

$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3 \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases}$. Приравняем степени уравнений, входящих в систему, и получим систему линейных уравнений $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

Решением данной системы является пара (2;1).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 12. \end{cases}$

Решение: из первого уравнения системы найдем $x = y + 1$ и подставим во второе уравнение вместо y. Получим уравнение $2^{y+1} + 2^y = 12$, которое можно записать в виде $2^y \cdot (2 + 1) = 12$ или $2^y = 4$.

Отсюда $y = 2$ и тогда $x = 2 + 1 = 3$.

Тогда решением данной системы уравнений является пара (3; 2).

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{y-x} - 5^y = 3 \\ 2^{y-x} + 5^{y-1} = 9 \end{cases}$

Решение: умножим I уравнение системы на (–1) и сложим почленно с уравнением II. Тогда получим уравнение $5^y + 5^{y-1} = 6$. Запишем его в виде $5^y(1 + \frac{1}{5}) = 6$.

Отсюда найдем $y = 1$. Подставим значение $y = 1$ в уравнение I.

Получим: $2^{1-x} - 5 = 3$; $2^{1-x} = 8$; $1 - x = 3$; $x = -2$

Значит, решением данной системы уравнений является пара (–2; 1).

Обучающие задания

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 5^{x+3y} = 0{,}2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18 \\ 2^y \cdot 3^x = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^x - 2^{x+y} = 1 \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x-y} = 128 \\ 3^{3x+2y-3} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

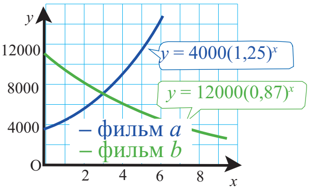
f) $\begin{cases} 2^{y-x} - 5^y = 3 \\ 2^{y-x} + 5^{y-1} = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 36 \\ x - y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2^x + 3^{y-1} = 17 \\ 2^{x+2} - 3^y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

2. На рисунке изображены графики зависимости количества зрителей от количества лет (x), начиная с 2004 года, для двух различных фильмов. Запишите свое мнение об изменении количества зрителей и точке пересечения графиков.



Система логарифмических уравнений

При решении логарифмических систем также используют способ замены, алгебраического сложения и т.д., а также свойства логарифмических функций. Рассмотрим это на примерах:

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

Решение: понятно, что $x > 0$ и $y > 0$.

Из первого уравнения системы получим $y = 6 - x$, из второго получим $\log_2 (xy) = 3$ или $xy = 8$.

Таким образом, получаем систему $\begin{cases} y = 6 - x \\ xy = 8 \end{cases}$

Подставим $y = 6 - x$ в уравнение $xy = 8$. Тогда получим квадратное уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$. Его корнями являются числа $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Подставим их в $y = 6 - x$,получим $y_1 = 4$, $y_2 = 2$. Решением данной системы является пара (2; 4) и (4 ; 2).

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1 \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$

Решение: из первого уравнения системы имеем $x - y = 2$. Выполним замену: во второе уравнение $2^{2+y} \cdot 3^{y+1} = 72$ вместо x подставим $x = 2 + y$. Тогда можно записать $3^{y+1} \cdot 2^{y+1} = 36$. Отсюда $6^{y+1} = 6^2$ и получим, что $y = 1$. Тогда $x = 3$. Таким образом, решением данной системы является пара (3; 1).

Обучающие задания

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} x - y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3, \\ \log_4 (x - y) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1, \\ \log_3 (xy) = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ \lg x - \lg y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 324, \\ \log_2 (x - y) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^y = 24, \\ \log_3 (y - x) = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log_2 x + 2^{\log_2 y} = 6, \\ x^y = 32 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

Обобщающие задания

1. Для натуральных чисел x и y, удовлетворяющих условию $x^2 - y^2 = 17$, найдите произведение xy.

2. Найдите точки пересечения параболы $y = 2x^2 + 3x - 7$ и прямой $y = 4x - 4$.

3. При решении тригонометрических уравнений выразите переменные x действительными числами, переменные θ градусами.

$\sin^2\theta + 2\cos\theta = -2,\ 0° \le \theta \le 360°$

$\cos 2\theta + \cos\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 360°$

$\cos 2\theta + \sin^2\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 360°$

$\cos x = \operatorname{ctg} x,\ 0 \le x \le 2\pi$

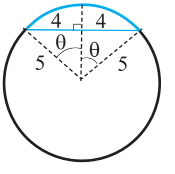
$2\sin^2\theta + \sin 2\theta = 0,$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta,$

$\operatorname{tg} x = -2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

$4\cos^2 2x - 4\cos 2x + 1 = 0,\ 0 \le x \le 2\pi$

4. Найдите длину дуги окружности, стягиваемой хордой 8 см, если радиус равен 5 см. Результат округлите до десятых.



5. Выполните деление и найдите остаток.

$(x^3 + 3x^2 - 67x + 27) : (x + 10)$

$(x^3 + 8x^2 - 8x - 2) : (x - 1)$

$(3m + 4 - 11m^2 + 5m^3) : (4 + 5m)$

$(54n^3 + 36n^2 + 54n - 16) : (9n - 3)$

6. На сколько процентов изменится длина и площадь круга при уменьшении радиуса с 5 см до 3 см?

7. Открытую коробку сделали из прямоугольного листа картона, вырезав из каждого угла одинаковые квадраты. Чему равна сторона квадрата, отрезанного от картона с размерами 15 см × 13 см, если объем коробки равен 198 см^3?

8. Диагонали параллелограмма заданы векторами $\vec{a} = \langle 3;3;0\rangle$ и $\vec{b} = \langle -1;1;2\rangle$

a) Покажите, что этот параллелограмм ромб.

b) Запишите вектор, выражающий стороны ромба и найдите длину стороны ромба.

c) Найдите углы ромба.

9. На графике функции $y = x^2$ найдите такую точку, чтобы график касательной к функции в данной точке был параллелен прямой $2x + y = 0$.

10. Найдите производную функции.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

b) $y = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$

c) $y = x^3\sin2x$

d) $f(x) = e^x \cos2x$

e) $y = \sin^2(3x-2)$

f) $y = (1+\cos2x)^2$

g) $f(x) = \sqrt{e^{4x}+1}$

h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

i) $y = x^2e^{3x}$

11. Постройте график функции $f(x) = [x]$ на промежутке $[-2; 3)$, укажите точки разрыва, найдите правые и левые пределы в этих точках.

12. Установите соответствие.

1. $f(x) = 2e^{2x}$ A) Первообразная функция $F(x) = \sin x^2 + c$
2. $f(x) = 2xe^{x^2}$ B) Первообразная функция $F(x) = e^{2x} + c$
3. $f(x) = 2x\cos x^2$ C) Первообразная функция $F(x) = e^{x^2} + c$

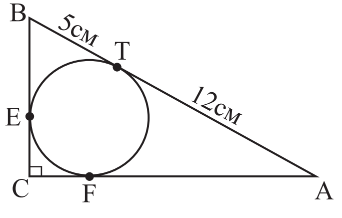
13. Сравните числа:

1) $a = 5^{200}$, $b = 3^{300}$, $c = 28^{100}$ 2) $m = \log_4 3$, $n = \log_5 4$

14. Решите неравенство:

a) $(0{,}3)^x > 3\dfrac{1}{3}$ b) $2^{\lg x} > \sin\dfrac{5\pi}{6}$

15. По данным на рисунке найдите периметр и площадь прямоугольного треугольника ABC .



16. Вычислите предел.

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2+2x-8}{x^4-2x^3+x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

17. Какое число четное?

a) Среднее арифметическое двух четных чисел.
b) Среднее арифметическое двух простых чисел.
c) Среднее арифметическое двух полных квадратов.
d) Среднее арифметическое двух чисел, если один из множителей 4.
e) Среднее арифметическое трех последовательных целых чисел.

18. Проверьте, является ли двучлен множителем многочлена.

1) $P(y) = y^5 + 6y^4 + 7y^2 + 33y - 54$, $\quad y + 6$

2) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 78x^3 + 84x^2 - 31x - 88$, $\quad x - 10$

3) $P(b) = b^5 + 8b^4 - 11b^2 + 10b - 8$, $\quad b - 1$

19. Числа A и B являются целыми числами и A : B = 2 : 3. Если к каждому из чисел A и B прибавить 100, то их отношение будет равно 3:4. Найдите значение чисел A и B.

20. Вычислите пределы.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

21. Для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ определите следующее :

a) Критические точки.

b) Промежутки возрастания и убывания функции.

c) Экстремумы;

b) Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [–2; 2].

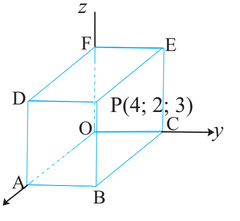
22. Координаты вершин треугольника равны A (3; –4; –1), B (1; –2; 3) и C (7; 1; 0). Найдите:

a) $\angle$ B.

b) Площадь треугольника.

c) Единичный вектор, перпендикулярный плоскости треугольника.

23. Найдите координаты других вершин параллелепипеда в трехмерной системе координат на рисунке, если координаты одной из вершин P(4; 2; 3).



24. Найдите (если это возможно) наибольшее и наименьшее значения выражения: a) $3 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \tan\alpha$ b) $3\sin\alpha - 4\cos\alpha$

25. Решите уравнение: a) $2\cdot 4^{\frac{1}{x}} - 3\cdot 2^{\frac{1}{x}} = 2$ b) $3 \cdot 4^{\sqrt{x}} + 2 \cdot 9^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 6^{\sqrt{x}}$

26. Вычислите интеграл.

a) $\int\limits_1^4 \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}dx$ b) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \dfrac{1}{x}\, dx$ c) $\int\limits_0^1 x(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x})dx$

d) $\int\limits_{-1}^{1} e^{-3x}\, dx$ e) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$ f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\, d\theta$

Обобщающие задания

27. Согласно заданным условиям изобразите график какой-либо функции $f(x)$.

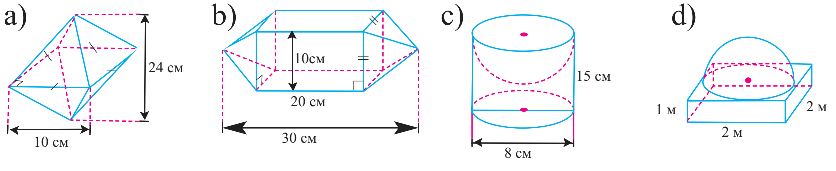
a) $\lim\limits_{x \to 5+} f(x) = -3, \ \lim\limits_{x \to 5-} f(x) = 1$ и $f(5) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 2, \ \lim\limits_{x \to -1-} f(x) = 3$ и $f(-1) = 5$

c) $\lim f(x) = -1, \ \lim\limits_{x \to 2-} f(x) = -4$ и $f(2) = -4$

28. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см, 12 см. Найдите объем конуса, полученного вращением a) вокруг стороны длиной 12 см; b) вокруг стороны длиной 5 см; c) найдите отношение объемов фигур, найденных в пунктах a и b.

29. По заданным на рисунке размерам найдите объем фигур.



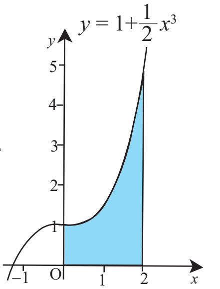
30. В классе, где учится Гюльназ учитель ежедневно выбирает одного из учащихся, для объяснения домашнего задания. Ученик, выбранный для объяснения домашнего задания сегодня, больше не выбирается в течении недели. В классе 20 учащихся. Равновероятны ли события: Гюльназ будет выбрана для выполнения этой работы в понедельник и будет выбрана в среду?

31. Для кода на замке использовали пять цифр. Сколько существует вариантов, если: a) цифры могут повторяться; b) цифры не повторяются?

32. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 6t + 6$ (м/сек). Найдите, какое расстояние оно преодолело от $t = 0$ до $t = 5$ секунды.

33. Найдите пересечение плоскости $z = 4$ со сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

34. В арифметической прогрессии $a_3 = 3$, $a_7 = 17$. Найдите пятый член прогрессии. Найдите сумму членов, меньших 30.



35. Найдите площадь, заштрихованной части,ограниченную графиком функции $y = 1 + \dfrac{1}{2}x^3$

Обобщающие задания

36. Вычислите предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+ \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

37. Найдите координаты точки, полученной при параллельном переносе точки A (1;4), расположенной на функции $f(x)$, на 3 единицы влево, и отображении относительно оси x.

38. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных компонентами. Определите вид угла, образованного данными векторами.

1) $\vec{a} = \langle -2; 1 \rangle$, $\quad \vec{b} = \langle 1; 2 \rangle$

2) $\vec{a} = \langle 2; 3; -1 \rangle$, $\quad \vec{b} = \langle 4; 3; -17 \rangle$

3) $\vec{a} = \langle 1; -2; 5 \rangle$, $\quad \vec{b} = \langle 3; -2; -2 \rangle$

39. Запишите уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{n}\langle 3; -1; 2 \rangle$ и проходящей через точку P (1; 4; −2).

40. Решите неравенства.

a) $2(5-x) > 3x$ b) $\dfrac{x-3}{2-\sqrt{3}} > \sqrt{3}+2$ c) $4 < 2-3x \le 8$ d) $||x-3|-1| < 3$

41. a) Найдите периметр, площадь, высоту и радиус вписанного в окружность ромба с диагоналями 12 см и 16 см.
b) Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен 32 см, а высоты равны 3 см и 5 см.

42. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = -x^3 + 2$, $x = 0$ и $x = 6$.

43. Найдите объем тела, полученный вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = 4 - x^2$ на отрезке [–2; 2]..

44. 1) Вычислите выражения.

a) ${}_5P_3$, ${}_8P_6$, ${}_{11}P_8$, ${}_{12}P_5$, b) ${}_{15}C_8$, ${}_4C_1$, ${}_8C_6$, ${}_{12}C_3$,

2) Что больше ${}_8P_k$ или ${}_8C_k$?

3) Докажите, что ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$

45. Выигрыш в лотереи определяется тремя неповторяемыми цифрами из барабана от 0 до 9. Какова вероятность того, что три цифры, которые отметил Агиль, будут выигрышными?

46. a) Стороны треугольника относятся как 5 : 5 : 6. Зная, что периметр треугольника равен 32 см, найдите длины сторон и высот треугольника.
b) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, а высота опущенного на основанию равна 12 см. Найдите периметр, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей данного треугольника.

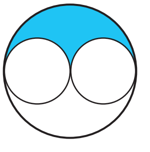
47. Бахар пробежала одну пятую часть дистанции марафона. Если она пробежит еще 4 км, то это составит одну четвертую часть всей дистанции. Сколько километров длина марафона?

48. Сколько элементов будет содержать множество, если из множества первых 50 натуральных чисел убрать числа, кратные 2 и 3?

49. Зная, что tg $x = \frac{5}{12}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ и $\sin y = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$,

найдите значение выражения $\cos(x - y)$.

50. Радиус большого круга и диаметр каждого из маленьких кругов равны 4 см. Найдите площадь закрашенной части на рисунке.



51. На каком промежутке функция $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$ возрастает?

52. Вычислите: a) $\lg 2 \cdot \lg 50 + \lg^2 5$ b) $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

53. Для функции $y = x^4 - 4x^3$ найдите:
a) Точки пересечения графика с осью x.
b) Критические точки функции.
c) Промежутки возрастания и убывания функции.
d) Точки максимума, минимума и экстремумы функции.
e) Постройте график функции.

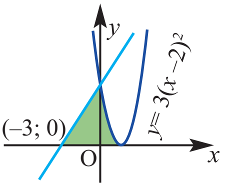
54. В мешке 5 белых и 4 красных шара. Из мешка случайным образом вытаскивают один за другим два шара, не возвращая их обратно.
a) Найдите вероятность того, что как минимум один шар будет белого цвета.
b) Запишите формулу условной вероятности и приведите пример.

55. Для размещения 40 туристов разбиты трехместные и двухместные палатки. Если всего разбито 12 палаток, то сколько из них трехместные?

56. Лятиф за 20 минут прочел 24 страницы. a) Сколько страниц он прочтет за 35 минут? b) За сколько времени он прочтет 360 страниц?

Обобщающие задания

57. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс в точке (–3; 0) и пересекает ось ординат в точке пересечения с параболой $y= 3(x-2)^2$.



a) В какой еще точке прямая пересекает параболу?

b) Найдите площадь закрашенной части.

58. Найдите расстояние от вершины основания правильной четырехугольной пирамиды до противолежащей боковой грани, если объем пирамиды равен 4 см^3, а площадь боковой поверхности 8 см^2.

59. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.

a) найдите область определения; b) запишите обратную функцию и найдите множество значений; c) решите неравенство $f(x-1) \le 0$.

60. Установите соответствие (c_n - n-ый член последовательности, S_n - сумма первых n членов)

1. $S_n = n^2 + 3n$ A) $c_2 = 6$ B) $c_2 = 5$ C) $c_2 = 4$
2. $S_n = n^2$ D) геометрическая прогрессия E) $c_n = 2n - 1$
3. $S_n = 2^n - 1$

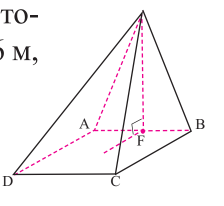
61. Найдите сумму $a + b$, если $a, b \in$ N, $a : b = 3 : 4$,
НОК(a; b) + НОД(a; b) = 39

62. Для векторов $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{y} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ найдите:

a) $3\vec{x} - 2\vec{y}$ b) $|\vec{x} - 2\vec{y}|$ c) $4\vec{x} + 2\vec{y}$

63. Для пирамиды на рисунке известно следующее:

Точка F - основание высоты является серединой стороны AB. TF = 5 м, ABCD - прямоугольник и AB = 6 м, BC = 8 м. Найдите:



a) площадь поверхности пирамиды;
b) объем пирамиды.

64. Решите уравнения.

a) $4 \sin^2 x - 3 \cos x = 3$ b) $\tan x - 3 \cot x - 2 = 0$
c) $\sin 3x + \sin 5x = 0$ d) $\cos 3x - \cos x = 0$

65. Вычислите: a) $\dfrac{\text{НОК } (84;\ 126)}{\text{НОД } (84;\ 126)}$ b) $\dfrac{\text{НОК } (54;\ 72)}{\text{НОД } (54;\ 72)}$

66. Найдите значение выражения:

a) $(3x + y)^2 + 2\,(3x + y)\,(x - y) + (x - y)^2$, при $x = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{2} - ab^2}{1 + b^2} + \dfrac{\sqrt{2}b^2 - a}{1 + b^2}$, при $a = \sqrt{5} - 1$

67. В мешке шары белого и черного цвета. Количество черных шаров к белым относится как 3 : 2. Если вытащить половину черных шаров, то количество оставшихся белых шаров будет на 3 больше, чем черных.

1) Сколько шаров в мешке? 2) Если, не заглядывая в мешок, вытащить два шара, то найдите вероятность того, что: a) оба шара будут белыми; b) оба шара будут разного цвета.

68. Зная, что $\sin x\,(\cos y + 2\sin y) - \cos x\,(2\cos y - \sin y) = 0$, найдите $\tan\,(x + y)$.

69. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t) = 2t$ (см/с^2). Если начальная скорость равна 9 см/сек., найдите:

a) Скорость тела $v(t)$.

b) Расстояние, пройденное телом за промежуток $0 \le t \le 5$.

70. Точки A(1; –2;7), B(2;3;5), D(–1;3;6) являются вершинами ромба ABCD. Найдите координаты вершины C.

71. a) Найдите сумму квадратов корней уравнения $3x^2 - x - 1 = 0$

b) Сумма корней уравнения $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ на 1 больше их произведения. Найдите m и решите уравнение.

72. Расположите числа $a = \dfrac{31}{32}$, $b = \dfrac{32}{33}$, $c = \dfrac{35}{34}$, $d = \dfrac{36}{35}$ в порядке возрастания.

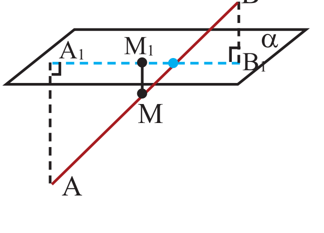
73. 1) При каком значении c уравнение $(c^2 - 4)x = c + 2$ имеет:
a) единственное решение;

b) бесконечное множество решений; c) решений нет?

2) При каком значении c система уравнений имеет одно решение?

$$\begin{cases} 2x + y = c \\ y = x^2 \end{cases}$$

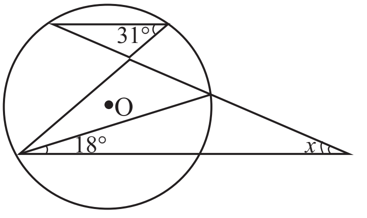
74. Концы отрезка AB, пересекающего плоскость, находятся на расстоянии 8 см и 2 см от плоскости. Найдите расстояние от точки M - середины отрезка, до плоскости.



75. В мешке 10 желтых, 10 красных и 10 синих шаров. Дилара, не глядя, вытаскивает один шар и отдает его подруге. Какова вероятность того, что если Дилара вытащит следующий шар, то оба шара окажутся разного цвета?

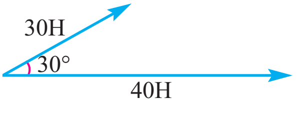
76. Решите уравнение a) $|x+6| = |x-66|$ b) $|3x+2| + |3-x| = 5$.

77. По данным на рисунке найдите угол x.

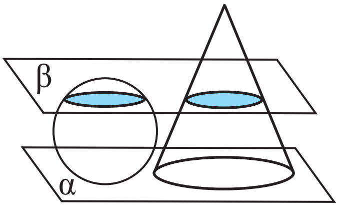


78. Ежедневные маржинальные затраты можно смоделировать функцией $C'(x) = 0{,}000006x^2 - 0{,}006x + 4$. Здесь x - количество продукции. Если ежедневно предусмотрен расход в размере 100 манат, то найдите:
a) себестоимость первых 500 единиц продукции;
b) себестоимость продукции с 201 единицы по 400 единиц.

79. К телу приложены две силы 20 Н и 40Н под углом 30º. Найдите равнодействующую этих сил. **Указание**: используйте теорему косинусов.



80. Шар диаметром 10 см и конус, радиус основания которого равен 6 см, лежат на плоскости α. На расстоянии 8 см от плоскости α проведена параллельная плоскость β. Сечением плоскостью β шара и конуса являются конгруэнтные круги. Найдите высоту конуса.



81. Для следующих функций найдите: промежутки возрастания и убывания, критические точки, экстремумы, постройте графики.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ b) $f(x) = (x+1)^4$

c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$

82. Среднее количество осадков. Ежедневное количество выпавших осадков (в см) с начала года (через x дней) можно определить с помощью функции $r(x) = 0.00002(6511 + 366x - x^2)$. Найдите среднее количество осадков, выпавших за 180 дней.

83. Найдите первообразную функции $f(x) = |x|$, график которой проходит через начало координат.

84. Отец разделил слиток золота между тремя сыновьями. Старшему сыну он отдал $\frac{2}{5}$ части, среднему сыну от отдал $\frac{1}{4}$ части, оставшиеся 240 грамм он отдал младшему сыну. Сколько грамм весил слиток?

85. **Средняя температура воздуха.** Зависимость температуры воздуха в течении 10 часов можно выразить по формуле $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 34$, $0 \le t \le 10$. Найдите:
a) минимальную температуру;
b) максимальную температуру;
c) среднюю температуру.

86. Точка M расположена внутри угла. Через точку M проведите прямую так, чтобы отрезок прямой внутри угла делился данной точкой M на части в отношении 1:2.

87. Найдите наименьшее значение суммы $x + y + z$, если $5y = 6z$, $x = 2z$ и x, y, z являются натуральными числами.

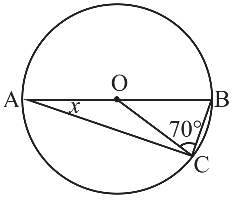
88. Найдите значение выражения $a^2 + \frac{1}{a^2}$, если $a - \frac{1}{a} = 3$.

89. Смешали 16 л 5 %-го и 24 л 10 %-го раствора. Найдите процентное содержание соли в полученном растворе.

90. В геометрической прогрессии, состоящей из трех членов, второй член на 3 больше первого. Найдите количество таких геометрических прогрессий, если ее члены являются натуральными числами.

91. Зная, что $x - y = 7$, $x + y = 4$, найдите значение выражения $x^2 - y^2 - 5x - 5y$.

92. По следующим данным найдите градусную меру угла x. Точка O - центр окружности.



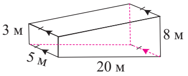
93. В определенное время дня длина тени от памятника на городской площади равна 12 м. В это время угол между горизонтальной линией тени и прямой, проведенной к ней из самой высокой точки конца памятника, составляет 35°. Найдите высоту памятника.

94. Для следующих функций найдите обратные функции. Покажите область определения и множество значений заданной и обратной функции. a) $y = 2^{x-3} + 1$ b) $y = 1 - \log_2(x + 1)$

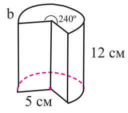
Обобщающие задания

95. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)$. Изобразите график функции $s(t)$. При помощи производной второго порядка найдите ускорение. Определите вид движения тела - равноускоренное или равнозамедленное. Как это отражено на построенном вами графике?
a) $s(t) = 2t^2 + 4t$ b) $s(t) = 40t + 10t - 5t^2$

96. По данным на рисунке размерам найдите:
a) объем;
b) площадь полной поверхности.



прямая призма

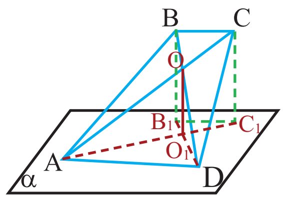


97. Объем прибора 60000 м^3. Представьте данный объем в кубических сантиметрах и результат запишите в стандартном виде.

98. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку (2;2), касающуейся оси абсцисс и прямой $y = 4$.

99. В классе 14 учеников, из них двое выбираются для встречи гостей, прибывающих на мероприятие.
a) Найдите количество возможных вариантов.
b) Наргиз является ученицей этого класса. Она хочет быть выбранной или с Сеймуром или с Гюльнар. Найдите вероятность данного события.

100. Основание AD трапеции ABCD лежит на плоскости α, точка пересечения диагоналей O удалена от плоскости на расстояние 2 см. Зная, что AD:BC = 3:2, найдите расстояние от основания BC до плоскости α.



101. Средний прирост населения. Пусть прирост населения в *t-ый* год можно определить как $P(t) = 5{,}4e^{0.01t}$.Здесь P - количество населения в млн.чел. , t - количество лет, начиная с 2000 года. Найдите средний прирост населения с 2001 по 2005гг.

102. На сколько процентов уменьшится время при прохождении одного и того же пути, если скорость поезда увеличится с 70 км/час до 85 км/ч?

103. a) Зная, что $\dfrac{x+y}{y} = 3$, найдите значение выражения $\dfrac{x-y}{x}$

b) Зная, что $8^{x-1} = 4^{y+2}$ найдите значение выражения $3x - 2y$

104. a) Трое рабочих выполняют некоторую работу за 15 дней. За сколько дней выполнят эту же работу 5 рабочих?
b) Работая в день по 8 часов, 24 рабочих выполняют работу за 30 дней. Сколько рабочих, работая в день по 6 часов, выполнит эту работу за 20 дней?

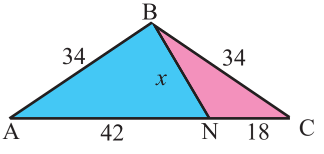
105. 1) По данным таблицы вычислите дисперсию и стандартное отклонение

x	6	7	10	11	11	13	16	18	18	всего
$x-\bar{x}$	–7	–6	–3	–2	–2	0	3	5	12	
$(x-\bar{x})^2$	49	36	9	4	4	0	9	25	144	280

2) По следующим данным задайте таблицу как показано в пункте a. Найдите дисперсию и стандартное отклонение.

a) 74, 72, 83, 96, 64, 79, 88, 69 b) 326₼, 438₼, 375₼, 366₼, 419₼, 424₼

106 По данным на рисунке найдите периметр и площадь каждой закрашенной части.



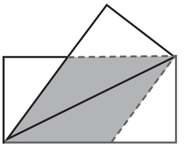
107. На окружности отмечены 12 точек. Сколько треугольников с вершинами в данных точках можно построить?

108. На выборах руководителя общественной организации за Таира проголосовало 65% избирателей, а остальные - за Улькер. Зная, что Таир набрал на 120 голосов больше, найдите, сколько всего человек проголосовало?

109. Упростите выражение
a) $(2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + 2^{10})^{1/3}$ b) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

110. Если стереть последнюю цифру числа102564 и приписать ее в начало, то полученное число 410256 будет в 4 раза больше первоначального числа 102564: $410256 = 4 \times 102564$.
Найдите такое шестизначное число, заканчивающееся цифрой 9, чтобы оно обладало тем же свойством.

111. 1) Лист бумаги прямоугольной формы имеет размеры 6 см и 12 см. Его сложили по диагонали и части листа за границами прямоугольника обрезали. При этом, когда лист развернули он имел форму ромба. Найдите длину стороны полученного ромба.



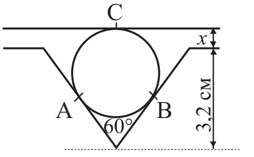
Обобщающие задания

112. Ахмед пробегает круговую дистанцию длиной 500 метров со скоростью 12 км/ч, а Эльмир со скоростью 9 км/ч. Они начали движение одновременно из одной точки.

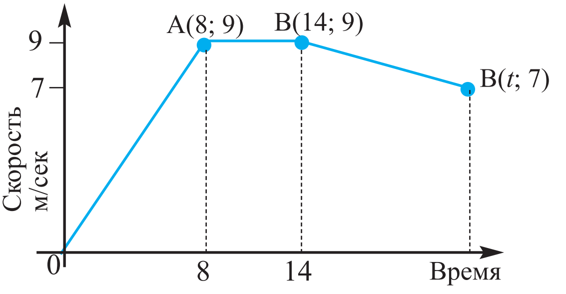
a) Через сколько минут они снова встретятся?

b) Если они будут продолжать бегать, то встретятся ли они еще раз в точке, из которой начали движение? Если это возможно, то найдите, через сколько минут это произойдет?

113. Касательные к окружности проходят через точки A и B. Диаметр окружности равен 2,4 см. Найдите x.

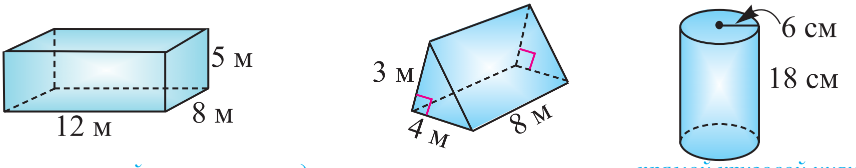


114. На рисунке представлен график зависимости скорости от времени. Зная, что средняя скорость равна 7,52 м/сек., найдите значение времени t по данным на рисунке.
Указание: учтите, что пройденный путь равен сумме площадей под графиком.



115. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки A(0; 3; 4), B(1; 2; 0) и C(−1; 6; 4).

116. По следующим данным найдите площадь полной поверхности и объем фигуры.



прямоугольный параллелепипед *прямая призма* *прямой круговой цилиндр*

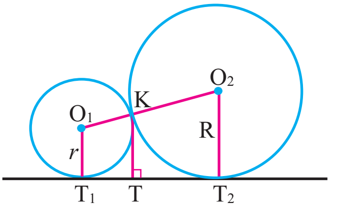
117. a) Для функции $y = 2 + \sqrt{x - 1}$ найдите обратную функцию.

b) Найдите область определения функции $y = \sqrt{2\cos x - 1}$.

c) Найдите множество значений функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(3 + 2\sin 2x)$

Обобщающие задания

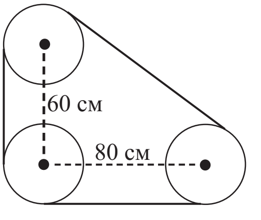
118. Две окружности радиуса R и r касаются извне в точке K.
a) Найдите расстояние между точками касания общей касательной (T_1T_2);
b) Найдите расстояние от точки касания окружностей до общей касательной (KT).



119. За покраску внутренней поверхности бака цилиндрической формы заплатили 2000 манат, из расчета 20 манат за 1 кв. метр. Глубина бака 10 м.
a) Найдите площадь внутренней поверхности.
b) Найдите радиус основания бака.
c) Вычислите объем бака.

120. Керим бегает на длинные дистанции. Если погода солнечная, то за час он пробегает 10 км, в дождливую погоду за час он пробегает 6 км. Дистанцию в 20 км он преодолел за 3 часа. Сколько часов он бежал под дождем?

121. Найдите длину ремня, соединяющего три диска, являющихся частью конвейера как показано на рисунке, если два из них расположены от центрального на расстоянии 60 см по вертикали и 80 см по горизонтали.



122. Найдите сумму всех правильных дробей, знаменатели которых:
a) не больше 100; b) не больше n.

123. Число x является средним арифметическим для чисел m и 9, число y - для $2m$ и 15, число z для $3m$ и 18. Выразите среднее арифметическое чисел x, y, z через переменную m.

124. Запишите многочлен с целыми коэффицентами наименьшей степени, корнями которого являются заданные числа.

a) 1; 4; 3 b) –1; 3; –5 c) 3; $-3i$; 1

125. Исследования показали, что 15% семей, проживающих в населенном пункте, не имеют автомобилей, 60% имеют один автомобиль, 20% семей имеют два автомобиля и 5% имеют три автомобиля. Найдите количество всех автомобилей, если в населенном пункте проживает 100 семей.

126. Даны два равносторонних треугольника. Постройте треугольник, площадь которого равна сумме площадей данных треугольников.

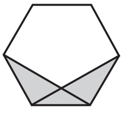
Обобщающие задания

127. Сколько существует правильных сократимых дробей со знаменателем 82?

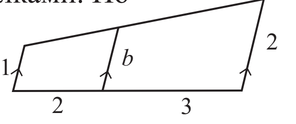
128. Чтобы распилить бревно на 5 частей потребуется 8 минут. Сколько минут потребуется, чтобы распилить это же бревно на 8 частей?

129. Окружности заданы уравнениями $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ Найдите какое наименьшее значение может иметь радиус третьей окружности, охватывающей первые две?

130. На рисунке изображен правильный шестиугольник. Какая часть шестиугольника закрашена?



131. Параллельные отрезки на фигуре отмечены стрелками. По данным на рисунке найдите длину отрезка b.



132. $\dfrac{24x^2 + 25x - 47}{ax - 2} = -8x - 3 - \dfrac{53}{ax - 2}$ Найдите значение постоянной a, если уравнение справедливо для всех x при $ax \neq 2$

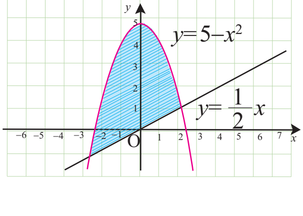
133. Разложите выражение $x^2 - xy - 2y^2$ на множители.

134. Оценивание по математике состоит из 25 вопросов. За каждый правильный ответ дается 4 балла, каждый неправильный ответ уменьшает количество баллов на 1. Башир ответил на все вопросы и набрал 35 баллов. Сколько ошибок допустил Башир?

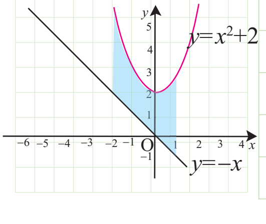
135. Запишите уравнение окружности, проходящей через точки (– 4;0) и (0;3), центр которой расположен на прямой $x - 2y + 11 = 0$.

136. Найдите площадь заштрихованной части на графике.

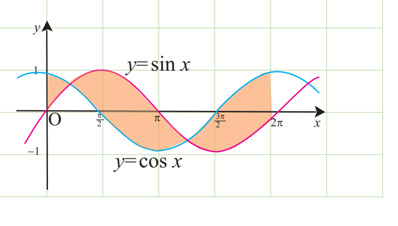
a)



b)



c)



Обобщающие задания

137. Постройте в трехмерной системе координат:

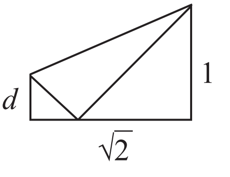
а) точку А(–1; 2; 3); b) плоскость $y = 4$;

138. Найдите объем параллелепипеда, размеры которого заданы векторами $\langle 1; 0; 0\rangle, \langle 0; 2; 0\rangle, \langle 0; 0; 6\rangle$.

139. Объем конуса 9856 см^3, а радиус 28 см. Найдите: a) высоту; b) образующую; c) площадь боковой поверхности данного конуса.

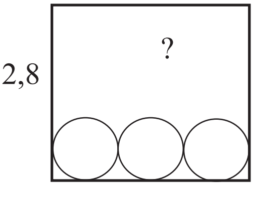
140. Средний возраст всех учащихся и классного руководителя равен 16. Сколько учащихся в классе, если классному руководителю 36 лет, а средний возраст учащихся равен 15.

141. Лист бумаги прямоугольной формы,стороны которого имеют длину 1 и $\sqrt{2}$, согнули как показано на рисунке так, что одна из вершин лежит на противоположной стороне. Найдите значение длины d в данной ситуации.



142. Спортивная арена имеет 3 входа. Какова вероятность того, что два человека зайдут через один вход?

143. Поместиться ли 8 шаров диаметром 1 единица в коробку с размерами $1 \times 3 \times 2{,}8$ в форме прямоугольного параллелепипеда?



144. Найдите радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 8x = 0$.

145. Положительные числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии. Докажите, что числа $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ образуют арифметическую прогрессию

146. Упростите $\dfrac{5^2-1}{3^2-1} \cdot \dfrac{9^2-1}{7^2-1} \cdot \dfrac{13^2-1}{11^2-1}$

147. Клубничные и абрикосовые шоколадки продаются в красных и оранжевых коробках. В красной коробке 17 клубничных и 5 абрикосовых шоколадок, в оранжевой коробке 7 клубничных и 11 абрикосовых шоколадок. Если Гусейн купил одну красную коробку конфет, то сколько еще оранжевых коробок он должен купить, чтобы количество клубничных и абрикосовых шоколадок стало одинаковым?

Обобщающие задания

148. a) Найдите цифру a в числе $\overline{20a2} = 12n$ $(n \in N)$.
b) Сколько четырехзначных чисел вида $\overline{7a3b}$ делится на 15?

149. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x - 3$ на отрезке $[-2; 2]$.

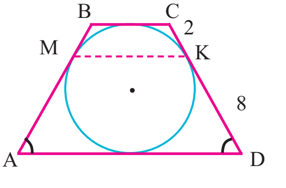
150. Дана функция $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$.
a) Решите уравнение $f(x) = -\dfrac{3}{4}$.
b) Найдите наименьшее значение функции.

151. Вычислите.
a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ b) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - 6\sqrt{8}$ c) $\sqrt{3 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{11 - 6\sqrt{2}}$

152. Найдите наименьшее многозначное число, которое при делении на 35 и 42 в остатке дает 3.

153. 1) Найдите наибольший простой делитель числа 2772.
2) Сколько из всех делителей числа 210 состоит только из: a) двух простых множителей; b) трех простых множителей?

154. По данным рисунка найдите периметр и площадь равнобедренной трапеции, а также длину отрезка MK, соединяющего точки касания боковых сторон и окружности.



155. Средний возраст математиков в группе, проводящей научные исследования, равен 40, а специалистов по компьютерным наукам 35. Найдите отношение их количества, если всего в группе 40 человек.

156. Первые четыре члена последовательности равны 1; 4; 2 и 3. Начиная с пятого, каждый следующий член равен сумме четырех предыдущих. Найдите восьмой член данной последовательности.

157. a) Сколько диагоналей у выпуклого одиннадцатиугольника?
b) Выпуклый многоугольник имеет 54 диагонали. Найдите сумму внутренних углов многоугольника.

Обобщающие задания

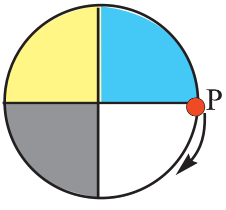
158. В фирмах по обслуживанию автомобилей движение клапана вверх и вниз по очистке мотора от масла описывается по закону периодического движения $f(x) = \sin x \cos x$ (см/сек).
Найдите амплитуду и период колебаний клапана.

159. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки A(1; −2) и B(4; −2).

160. Решите неравенство: a) $x^4 < 36$ b) $|2x - 3| < x$

161. Количество людей, посещающих спортивный зал ежедневно на 10 человек меньше удвоенного количества предыдущего дня. Если в субботу зал посетило 130 человек, то сколько человек посетило спортивный зал в понедельник?

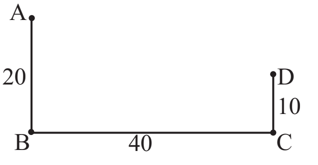
162. Круг, длина окружности которого равна 12 см, разделен на четыре равные части и раскрашен как показано на рисунке. Вдоль окружности в направлении по часовой стрелке движется светящаяся точка. Если светящаяся точка совершит движение вдоль дуги, длина которой равна 100 см, то найдите, в части какого цвета остановится точка?



163. Проволоку длиной 48 см разделили на две части так, что одна из частей в 2 раза больше другой. Из этих проволок сделали два квадрата. Найдите сумму площадей полученных квадратов.

164. Еженедельные затраты на производство x единиц продукта можно выразить функцией $C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$.
Запишите функцию $MC(x) = C'(x)$, отражающую маржинальные затраты. При помощи графкалькулятора постройте графики данных функций в одной системе координат.

165. Талат должен дойти из точки A в точку D через некоторую точку, расположенную на прямой BC. Какую точку на прямой BC должен выбрать Талат, чтобы его путь от точки A до точки D был самым коротким?



166. Для квадратного уравнения $x^2 - 5x + q = 0$ найдите q, зная, что $x_1^2 + x_2^2 = 13$.
b) b) при каких значениях a уравенение $ax^2 + x + 1 = 0$ имеет два различных корня?

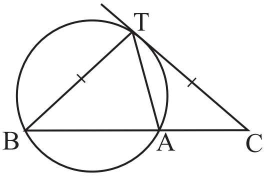
167. В коробке 6 белых и 4 черных шара. Из коробки случайным образом берут 3 шара. Какое событие вероятнее относительно цвета шаров?

168. Для сжатия пружины на 3 см необходима сила в 9 Н. Вычислите работу,совершаемую при сжатии пружины на 4 см.

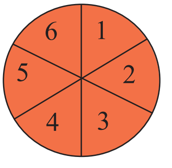
169. Точки (3; 9) и (11; 3) расположены на концах диаметра окружности. Внутри окружности расположен треугольник, две вершины которого находятся в данных точках. Найдите такие координаты третьей вершины треугольника, чтобы его площадь была максимальной.

170. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точки P и Q находятся соответственно на сторонах CB и AB. Найдите градусную меру угла B, зная, что AC = AP = =PQ = QB.

171. CT касательная к окружности.
Зная, что CT = BT и $\angle TAB = 76°$,
найдите $\angle BTA$.



172. Представьте, что пирог разрезали на куски и пронумерован, как показано на рисунке. Первым можно взять любой кусок, а следующий кусок можно брать только тот, который будет расположен около съеденного. Сколькими возможными вариантами можно съесть пирог из 6 частей по данному правилу?



173. a) Сравните числа $a = \sin 3°$, $b = \sin 5°$, $c = \cos 88°$.

b) Найдите множество значений функции $y = \sin^2 x \cos^2 x$.

174. Аслан продал дом Гераю за 60 000 манат. Герай сразу же продал этот дом Джамалу на 10% дороже. Джамал вновь продал дом Аслану, на 10% снизив цену, за которую дом был куплен. Есть ли у Аслана прибыль от данной купли-продажи? Если да, то найдите эту прибыль.

175. 1) При каком значении n справедливо равенство

$$\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} = \frac{n}{2^{10}} \quad ?$$

2) При каком значении x числа $2^x - 3$; $2^{\frac{x}{2}}$; $2^{x-1} + 2$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

176. За 4 часа 15 комбайнов вспахали $\frac{5}{6}$ части поля. За сколько часов 9 таких комбайнов вспашут $\frac{3}{4}$ части поля?

177. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{15} + \sqrt{30} - \sqrt{45}}{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3}$

178. Если $\int_0^6 f(x)dx = 8$ и $\int_0^4 f(x)dx = 2$, вычислите интеграл $\int_4^6 f(x)dx$

179. a) Какое число получится, если число 200 уменьшить на 30% , а затем новое число снова увеличить на 30%?
b) Как изменится цена товара, если ее сначала увеличить на 10%, а затем уменьшить на 10%?

180. В коробке 6 черных и x белых шаров. Найдите x, если вероятность того, что случайно взятый шар из коробки белого цвета равна $\frac{2}{5}$. Найдите вероятность того, что если взять два шара, то они будут разных цветов.

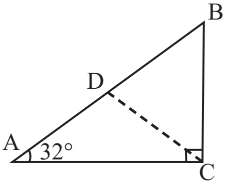
181. a) Найдите объем правильного тетраэдра с ребром a.
b) Найдите высоту правильного тетраэдра с объемом V.

182. Найдите площадь поверхности тела, полученный вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2 - |x|$ на отрезке [–2; 2].

183. Решите уравнение:
a) $\cot x \cdot (1 - \cos x) = 0$ b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 + 3\sin x \cos x$

184. При каком значении a уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \log_2 a$ имеет решение?

185. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 32°$, AC = 48 см. Найдите длину медианы CD.



186. Средний балл при оценивании 30 учащихся класса составил 70 баллов по 100-бальной шкале. Найдите количество учащихся,набравших проходной балл, если 5 учащихся имеют результаты 20, 25, 25, 30, 40 баллов, что не является проходным баллом.

187. На какое натуральное число надо разделить 87, чтобы частное было на 2 единицы больше, а остаток на 1 единицу меньше делителя?

188. Если поменять местами цифры двухзначного числа, то полученное число будет на 20% больше первоначального. Найдите первоначальное число.

Обобщающие задания

189. Вычислите:

a) $\sin 18° \cdot \sin 54°$ b) $\dfrac{\cos^2 53° - \sin^2 23°}{\sin 14°}$

190. Точка $(-3; 4)$ находится на конечной стороне угла поворота θ. Найдите значение $\sin\theta$.

191. Найдите решение уравнения $1 + 2\cos x = 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

192. Количество молочной продукции на ферме за 4 года менялось следующим образом: в первые два года происходит увеличение на x %, а в следующие два года - уменьшение на x %. Пусть на ферме уже выпустили 100 единиц продукции. Представьте информацию о количестве молока за 4 следующих года, с первого до последнего, при условной процентной ставке.

193. В отборочном туре конкурса участнику предлагают решить следующую задачу в течении трех минут.

Ниже представлены результаты сравнений съеденных Анаром, Бахтияром и Фаридом яблок.

Анар: половину яблок, съеденных Бахтияром, плюс одну третью яблок, съеденных Фаридом, плюс одно яблоко;

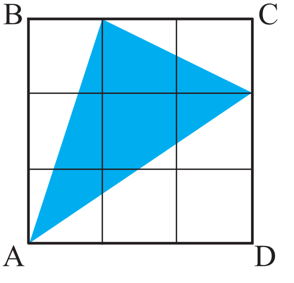
Бахтияр: половину яблок, съеденных Фаридом, плюс одну третью яблок, съеденных Анаром, плюс два яблока;

Фарид: половину яблок, съеденных Анаром, плюс одну третью яблок, съеденных Бахтияром, плюс три яблоко;

Сколько всего яблок съели дети?

194. Опрос среди 200 учеников показал, что 120 из них отдают предпочтение ванильному мороженому, 150 - шоколадному, а 20 детей вообще не любят ни одно из них. Сколько детей любят оба сорта?

195. Квадрат ABCD, со стороной 3 единицы разделен на 9 равных квадратов. Найдите площадь заштрихованной части.



196. Три тыквы взвешены на весах всеми возможными вариантами каждый раз по две штуке. В результате получили следующие данные: 12 кг, 13 кг, 15 кг. Сколько килограммов весит самая легкая тыква?

197. Выразите выражение $\log_2(8!)$ через a и b, зная, что $\log_2(6!) = a$ и $\log_2 7 = b$.

ОТВЕТЫ

Многочлены

Стр. 8-12. №1 b)$Q(y) = 2y^2 + 3y + 15$, $r = 59$. c) $Q(x) = -x^2 + 4x - 4$, $r = 13$.
№2 $2x^3 - 3x^2 - 20x + 29$ №3 $B(x) = x - 2$. №4 a) $Q(x) = x^2 - x$, $R(x) = -2x - 3$;
b) $Q(x) = x^2 + 4$, $R(x) = 12$ №5 $Q(2) = 3$ №6 e) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $r = 0$.
№7 d) $Q(m) = m^3 + 5m^2 - 3m + 2$, $r = 6$ №11 1) a) $r = 94$.
№12 d) $Q(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$, $r = -4$. №13 b) $c = -10{,}5$. №14 a) $c = 57$.
№15 $k = 4$ или $k = -2$. №16 a) $c = 11$. №18 $-x+1$ №19 a) $3x - 10$; b) $2x + 5$.
№20 $1{,}5x^2 + 20x + 120$. №21 $3x^2 + 200x + 3000$.

Стр. 14-17. №2 b) $k = 6$; c) $k = -6$ №3 1) $f(x) = (x-10)(x-4)(x+2)$; 4) $f(x) = (x+5)(x-3)^2$
№4 b) $\{-\frac{1}{3}; -4; 2\}$ №5 2)a) 0; b) – 6. №6 a) $\{-1; 2; 3\}$ №8 a) $x+2$ и $x+4$
b) $x+3$ və $x+5$ №10 $\{-2; -1; 2; 5\}$ №11 a)$\{\frac{1}{2}; -1; 3\}$; b) $\{\frac{1}{3}; -2; 3\}$
№12 $P(x)=2(x+2)(x-1)(x-2)$ №13 $x_1 = -3$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$

Стр. 20. №1 a) $x = 0{,}5$; $y = 2{,}5$. №5 g) $2 + 6i$; h) 25 №6 a) 1,2 №7 b) $1 - i$
№9 b)$(y+3i)(y-3i)$ c) $(2x+i)(2x-i)$ №10 a) $\pm 2i$; c) $\pm 4i$;
№11 a) $2+3i$, $2-3i$

Стр. 22-24. №1 b)$x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 4$; степень 5. e) $x_1 = x_2 = x_3 = 4$, $x_4 = x_5 = 3$,
$x_6 = 1$; степень 6. №2 c)$\{0{,}5; 3; 5\}$ №3 c) $x_1 = 2$; $x_2 = -1-\sqrt{5}$; $x_3 = -1+\sqrt{5}$.
№4 b)$\to f$; a)$\to g$; c)$\to h$ №5 c)$\{\frac{1}{2}; 1\pm\sqrt{2}\}$. №6 b)$x = -2$ корень кратности 2.
№7 $a = -3$, $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ №8 1) e) $-8i$; 2)b) ± 1; $\pm i$.
№ 10 b) $P(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2+1)$, степень 4; c) $P(x) = (x-2)\cdot(x^2 - 6x + 10)$,
степень 3. №11 в количестве 1 миллион.

Стр. 27-28. №1 a) степень 3; старший коэф. 2; при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$, при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$.
№3 a) многочлен нечетной степени; b) старший коэффициент отрицательный
c) $(-4;0)$, $(-1;0)$, $(3;0)$. №4 a)→4); b)→2); c)→1); d)→3). №6 c) 4см.
№7 a) как минимум 3 степени; b) как минимум 4 степени; c) как минимум 4 степени.

Стр. 31. №3 a) $y = 1$ горизонтальная асимптота; b) $y = 0$ горизонтальная асимптота,
$x = 1$ və $x = -1$ вертикальная асимптота d) $x = -1$ вертикальная асимптота,
$y = 2x - 1$ наклонная асимптотаr. №4 a)→2); b)→3); c)→1).

Стр. 32. №1 $m = 1$; $n = -5$. №2 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, $B(x) = x + 3$,
$Q(x) = x^2 - 5x + 6$, $r = 0$. №4 b) $r_1 = r_2 = 0$ №6 a) $Q(x) = 3x - 8$, $r = 20$.
№7 a) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1\pm\sqrt{2}$; b) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6}$. №8 a) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = x_4 = -2$.
№9 a) $P(x) = (x+2)(x+1)^2$; b) $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

Векторы в пространстве

Стр. 37-41. №3 c) 8-ой; g) 6-ой №6 b)17 №9 (0;3; 0) или (0;–1; 0) №10 $a = 2$ или $a = 8$
№11 2) до осей x,y,z расстояние соответствует $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$ единиц.
№13точка $(0; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$. №15 B(–1; –5;7) №16 (2; 4; 2), (4; 0; 4), (–2; 2; 6).
№17 17. №18 (0;–1;0) или (–2;2;–3). №19 AB : BC = 1 : 2. №20 (4;6;12)

Стр. 45-48. №1 b) $\overrightarrow{RS} = \langle -9; -5; 11\rangle$, $|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{227}$. №2 e) $|\upsilon| = \sqrt{68}$. №5b) при $y = 8$, $z = 15$
№6 $2\vec{a} - 3\vec{b} = \langle 0; -3; 11\rangle$. №7 b)$2\upsilon - 3w = \langle -5; 14; -8\rangle$. №8 $\vec{c} = \langle 4; -1; 5\rangle$. №9 K(3;6;14)
№10 $k = -2$. №11 $\langle -9; 0; -9\rangle$
№12 a) $\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. №13 a) P(2; –1; –1). №14 c) $|\upsilon| = \sqrt{29}$
№15 b) $x = -3$; $y = 4$; $z = 4$. №16 b) $\vec{e} = \langle \frac{-3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}} \rangle$ №17 b) $\vec{e} = \langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1\rangle$
№19 c) $\sqrt{54}$. №24 b) $9\vec{i} - 5\vec{j}$

ОТВЕТЫ

Стр. 51-53. №2 a)≈2753,26; b) –83,14; c) 0. №4 b) $\vec{p}\cdot\vec{q}=23$. №5 –12. №6 a) 43 Джоуль.
№7 a) 590,88 Джоуль. №8 a) $\vec{e}=\langle\frac{3}{5};\frac{4}{5}\rangle$;b)$\vec{F}=\langle 12;16\rangle$; c) $A=\vec{F}\cdot\vec{d}=200$ Джоуль.
№11 c) $\theta=90^\circ$ d) $\theta=180^\circ$. №12 2) $k=\pm 2$. №13 a) $\langle 6;-8\rangle$ или $\langle -6;8\rangle$.
b) $k=-7$ №14 135°. №16 a)$\angle A=90^\circ;\angle B\approx 64^\circ;\angle C\approx 26^\circ$;
b)$\angle B=90^\circ$; $\angle A=\angle C=45^\circ$

Стр. 55. №1 b) $2x-3y-18=0$. №2 b) $2x+y+1=0$. №3 b) 45° и 135°. №4 b) 90°.
№5 b) 0,8; c) $3\sqrt{2}$

Стр. 59-61. №3 a) $7x+y+z-18=0$. №4 a) $6x-4y-5z=0$. №5 a) $n=\langle 1;-7;-18\rangle$
№6 b) $y+2z=0$. №7 $x-6y-z-1=0$, нет №9 a) $x+2y-3z+12=0$;
b) $x+y+z=0$. №11 b) 2 ед. №12 a) $3x+2y+5z+8=0$. №13 a) $k=8$;
b) $k=-2,5$ №14 60°

Стр. 62-63. №1 a) $x^2+y^2+z^2=16$, b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=36$. №2 (0;0;0), (2;0;0), (0;–6;0), (0;0;10). №3 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=24$. №4 17.
№6 Центр сферы точка M(–1;8;–5). Радиус 6. Расстояние от точки A до сферы 11 единиц. №7 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=49$ или
$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=49$. №10 a) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=36$

Стр. 66. №2 a) (2;–3;6); b) (–1;–2;6). №3 c) (2;–3;1). №4 c) (3;2;–1). №5 (–2;–13;0)

Стр. 67-68. №2 $\sqrt{6}$. №5 c) 25. №6 45°. №7 a) (4;0;3) или (5;–1;4). №9 a) ≈129,27N и ≈95,96 N. №12 a) –5; b) 6. №14 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=24$. №17 C(0;8;4).

Предел

Стр. 74-76. №2 d) 2; e) 3; f) 1. №3 c)1024см^3 №4 1) a) 7; b) 7; c) 7. №5 a) –1; c) –3.

Стр. 78-82. №2 1) a) 15; b) 5; c) 6; d)$\frac{2}{3}$. №3 1) –17; 2) 1; 5) 7; 6) 5. №4 c) 32; d) 2; f) 2.
№5 d) 3; e) 1; f) 0. №7 g) 14; i) –1 №8 a) 50 ; b) 50; c) 10000
№10 e) 4; f) $-\frac{3}{4}$; g) 2; h)$\frac{5}{6}$ i) –7 . №11 3)$\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{6}$; 7)$\frac{1}{4}$; 8)$\frac{1}{6}$; 9)$\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{4}$;
12) $\frac{1}{3}$. №12 1) a) 4; b) 64; c) 64. 3) a) 3; c) 2 №14 a) 25 млн. манат; c) затраты бесконечно растут. №15 b) 1500; c) 1000. №16 a) 20; b) 22; c) 36; d) 36 e) 32; f) 34; g) нет; h) 32. №17 8

Стр. 84-88. №2 4) точка разрыва $x=-1$; a) $f(-1)=2$; d) нет. №3 a) непрерывна на всей числовой оси. b) разрыв в точке $x=1$. №5 1) разрыв в точке $x=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$; 3) разрыв в точке $x=-2$, при $x\to -2$ предела не существует.
№7 2) a) непрерывна; b) разрывна. №10 1) b) $x=5$; c) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=8$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=7$.

Стр. 90. №1 3) – 0,5 4) –1; 6) $-\sqrt{2}$ №2 1)$\frac{1}{5}$; 2)1,5; 6)$\frac{2}{3}$; 7)2; 8)0; 9)$\frac{1}{4}$; 10)2;11) –4
№3 a)$\frac{1}{2}$; b) –1; c)$\frac{1}{4}$

Стр. 94-95. №1 a) прямые $x=-2$ и $x=2$ вертикальные асиптоты. №2 b)прямая $y=0$ горизонтальная асмптота. №3 a) прямая $x=2$ вертикальная асимптота, прямая $y=2$ горизонтальная асимптота.
№4 c) 1,5; e)$\frac{1}{4}$; f) $-\frac{1}{4}$; g) 2,5; h) 0 №5 a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$. №8 30.
№10 64 №11 a) ≈ 459449; b) 400000.

Стр. 98-101. №5 1) 3; 3) 2; 6) 3; 11)$\frac{1}{4}$; 15) 1 №6 a) e^2; b) $e\sqrt{e}$; e)e^3 ; f)$\frac{1}{e}$

ОТВЕТЫ

Стр. 102. №1 8) 0,5; 11) $\frac{1}{2}$; 15) 0 №4 a) 1; b) –2; d) 1 №7 0 və 2.

Фигуры вращения. Цилиндр, конус, шар

Стр. 106 №1 $h = 6\sqrt{3}$ см. №2 I случай: h= 3см, d= 8см; II случай: h=4 см, d=6 см. №3 I случай: R≈4,77 см, II случай: R≈3,18 см

Стр. 108-110. №1 a)112π см^2; b)64π м^2; c)80π см^2. №2 a) 720π см^2. №3 a) 108 см^2; c) 78π см^2. №4 b) увеличится в 4 раза. №5 R=4 см, h=14 см. №6 I случай: $S_{п.п.}$ ≈58,2 м^2, II случай: $S_{п.п.}$ ≈53,7 м^2. №7 2:3 №8 ≈641 см^2. №9 a) ≈457,06 см^2 ≈ 482,19см^2 №10 a) $S_{бок.}$ = 96π см^2, $S_{п.п.}$ = 120π см^2. №11 ≈46,3 м^2. №12 За один полный оборот ≈5,89 м^2. №13 ≈16 см. №14 ≈1583,4 м^2. №15 ≈1514,3 см^2. №16 как минимум 4 рулона.

Стр. 115-117. №1 a)100,8°; b)7 см, 175π см^2 c)24 см; d) 224π см^2. №2 a)144π см^2; e)50π м^2. №4 a) $l = \frac{S_{бок.}}{\pi r}$. №5 b) 540π мм^2.№7 666π см^2. №8 0,6π м^2;0,96πm^2.

№9 a) $84\frac{1}{3}$ м^2; b) 90π м^2 №10 16,8π см^2 №11 a)36π; b)24π; c)60π; d)48π;

№12 11 см^2. №13 240°. №15 240π см^2. №16 В цилиндр. №17 ≈ 15,81м^2. №18 b)$25\sqrt{5}\pi$ см^2, $25\pi(1+\sqrt{5})$ см^2. №19 62,25 π см^2, 20,25 π см^2

Стр. 119. №1 14π м^2. №2 36 см^2. №3 45°. №4 R^2. №5 12 см^2 . №6 500 см^2. №7 ≈ 1,66 м^2. №8 675π см^2 ≈ 0,21 м^2

Стр. 121-122. №1 b) $S_{бок.}$ = 45π см^2, $S_{п.п.}$ = 90π см^2. №2 226π см^2 ≈ 710 см^2. №3 a)104,5π м^2, 168,38π м^2. №4 325π см^2, 650π см^2. №5 p ≈ 1,33 манат.

№6 $S_{бок.}$ = 100π см^2. №7 h = 15 м. №8 $S_{бок.} = \frac{SR^2}{R^2 - r^2}$.

Стр. 125-128. №1 c) 64π м^2 №3 1:16 №4 b) 64 π №5 3см №6 c) 3:2 №7 468π см^2. №8 320π см^2. №9 100π см^2, 20π см^2, 80π см^2 №10 a) 64π см^2; b) 128π см^2; c) 192π см^2; d) $S_{п.п.}$ = 3πR^2. №11 7см №12 180π см^2 №13 a) ≈7,07м^2 №14 a) 320π см^2, b) 1 : 5 №15 6 см. №16 300π см^2. №17 280π м^2. №18 400π см^2 или 1100π см^2. №19 910π см^2 №20 $h = R(\sqrt{3}-1)$

Стр. 129-130. №1 a)195π см^2;b)115π см^2; c)(440+16π)см^2 №2 144π см^2 №3 a) $S_{п.п.} = \pi d^2 + \pi dl$. №4 a) 150π м^2 b)180м^2 . №5 ≈9,1 l №6 хватит №7 d)$6\sqrt{3}$ см^2; e)32 №8 π см^2 №9 a) 87π см^2. №10 a) 1026π см^2.

Стр. 131 №2 $S_1:S_2$ = 25:16, $h = \frac{16}{25}$ Н. №3 $\frac{15}{8}$ π см^2 №4 4см, 6см и 6см, 9см

Стр. 132-133. №1 12 см. №2 a) $l = 2r$; b) 72π см^2 №3 a) 660 см^2 ; e) 9π м^2 №5 ≈31,3м^2 №6 c)200π см^2 №7 26 см №8 576π см^2 №9 $4\sqrt{15}$ см^2 №10 50π см^2

Производная функции

Стр. 138-139. №2 1) a) $\frac{1}{2}$; b) 1; d) 1. №3 a) Победитель Фазиль. №4 a)1; b) $1\frac{2}{3}$ №6 4) a)10 м/сек. №7 2) a)20π №9 a)1; b)2 №10 c)≈2 №11 a) $v(1) = 5$; b) $v(5) = 13$;

ОТВЕТЫ

Стр. 143-145.

№1 b) $f(x)=3x^3$, $f'(x)=9x^2$ №2 b) $y'=4x$, $y'=-6x$. №4 1) a) x_2, x_7; b) x_1, x_4; c) x_6; 2) x_3 и x_5. №6 b) 2; c) –0,5 №7 1) a) $y = 4x-4$; 2) b) $y = 12x-16$.
№9 A→c, B→b, C→a. №11 $\frac{1}{2\sqrt{t+40}}$

Стр. 148-150.

№2 d) $-12x^3$; g) $-\frac{5}{x^2}$ h) $\frac{-2}{x\sqrt{x}}$ №3 d) $\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; e) $4\pi r^2$. №4 2) $\frac{x\sqrt[4]{x}+12}{4x^2}$; 4) $\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}$.
№5 d) $2x-\frac{2}{x^2}$. №6 a) $f'(0) = 4$, $f'(2) = 16$; b) $f'(1) = 1,5$, $f'(4) = \frac{5}{16}$

№7 a) при $x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$. №8 a) $(-2;+\infty)$; b) $x\in(0;2)$. №9 $f'(x)=3x^2-2x-1$
№10 $a=2$, $b=-2,5$. №14 $k=-6$; $y = -6x+10$. №16 a) $x_1=0$, $x_2=2$.

b) $y=0$, $y=12x-12$, $y=0$, $y=12x-16$. №17 (2;3), $y=3x-3$ №18 $k=4$; $k= -4$.
№19 $y = -2x-3$ или $y = 6x-11$. №20 c) $f(x)=x^3-2$ №21 Графики не пересекаются. №22 a) $k= -2$; b) $y = \frac{1}{2}x+4$. №23 b) ≈17 сек.

Стр. 152

№1 a) $4x-7$. №3 a) $y= 11x-6$ №5 131 №6 a) $P(x)=(2x^3+8x)\cdot(3x^2-4x)$
№7 b) $y= -36x+65$; c) $y= -4x-24$. №8 b) (2;–70) c) (1;3), $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{32}{9}\right)$
№10 a) 90 *л*; b) уменьшается на $3\frac{1}{3}$ *л* за час.

Стр. 153-154.

№1 3) $\frac{-17}{(4+t^2)}$; 4) $\frac{x^2+6x-12}{(x+3)^2}$. №3 a) $\frac{1}{(x+1)^2}$; b) $\frac{-1}{(x+1)^2}$. №4 1) b) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 2) a) $y = \frac{x+5}{18}$. №5 $\frac{12-x^2}{x^4}$ №6 $T'(2) = -0,96°C$. №7 a) $N'(t) = \frac{2000\,t}{(3t^2+10)^2}$

Стр. 156-160.

№2 a) $60(4x+1)^4$; b) $24x(3x^2-1)^3$. №3 a) $\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$; c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. №4 a) $\frac{20}{(3-2x)^3}$
№5 a) $h'(x)= 18(6x-1)^2$, $z'(x)= 18x^2$ №6 c) $f'(-2)= -2$. №7 $f'(1)= -10$.
№8 b) $x\in\left(\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right)$. №9 a) $\frac{-3}{(3x+5)^2}$ №10 a) $y = 0,6x + 3,2$; b) $y = x + 3$
№12 $2m(2t + 1)$. №14 b) ≈60,4; ≈69,52; ≈87,68. №15 a) $S = \pi\cdot t^4$, площадь распространения утечки нефти находится в зависимости от времени в 4-ой степени. b) $S'= 4\pi t^3$, скорость распространения находится в прямой зависимости от куба времени. №17 a) 110 манат; b) 80 манат.
№18 a) 16 манат; b) 15,998 манат; c) при увеличении выпуска маржинальная прибыль уменьшается. №19 c) ≈593,6 манат

Стр. 162-163.

№1 5) $30x$; 9) $\frac{6}{x^4}$. №2 1) 48; 4) 62. №3 1) $24x-2$; 2) $\frac{44}{(2x-3)^3}$.
№5 a) $v(t) = -gt+v_0$; $a(t) = -g$. b) $h(t) = -0,5gt^2+18t+3$; $v(t) = -gt+18$; $a(t) = -g$. №7 49 Джоуль №8 6Н.

Стр. 165-166.

№1 e) $2e^x(x+1)$; f) $xe^x(2+x)$ №2 c) $3\cdot 4^{x+2}\cdot\ln 4$; d) $-3\cdot 10^{3x-4}\cdot\ln 10$.
№3 b) $y = 2x+1$; c) $y = -ex$. №4 a) 2; b) 1,5e. №5 a) $(-\infty;0)$; b) $(1;+\infty)$.

№7 a) ≈71,7 млн.. №9 a) ≈44,85, c) ≈6,98. №10 c) ≈0,92; d) $\lim\limits_{t\to\infty} C'(t)=0$, выпуск стабилизируется, изменений в маржинальных затратах нет.

Стр. 168-169.

№1 c) $\frac{2}{2x+1}$; d) $\frac{2x}{x^2+1}$. №2 a) $x\cdot(2\ln x+1)$; c) $\frac{3\ln^2 x}{x}$. №4 b) $\frac{3}{(x-2)(x+1)\ln 3}$.
№5 a) $4\log_2 e$; b) –2 №6 1) $(1;+\infty)$; 2) b) при $x = 1$. №7 a) $y = x$.
№8 b) $N'(t)=20e^{0,2t}$ №9 b) ≈ 0,36 манат. №14 a) ≈830; ≈2066.

Стр. 172-173. №2 g) $2x\sin x+x^2\cos x$; i) $2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$. №3 a)0; b) –1. №4 d)3; f)0.
№5 b) $4\cos 4x$; c) $-2\sin 2x$ №7 5) $\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$. 7)$2e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)$
№8 b)$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; c) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. №11a)$\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$;b)$\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$
c) $y=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$ №14 $-\sin 2x$, т.е. в пункте d). №17 a)$3\sin\theta-2\cos\theta$.

Стр. 174. №3 b) $y=3$. №4 $f''(x)=-18x-2$. №5 a) –101. №6 a)$1\frac{3}{4}$;b) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.
№7 d) $4\sin^3\theta\cos\theta$.№9 b)≈645 манат

Объем фигур вращения

Стр. 176-179. №2 a) 450 мм³ №3 a)6,4 м №4 10π куб ед №5 80 π см³ №6 100π см³ возрастает.
№8 $\frac{SC}{4\pi}$ №9 $4\sqrt{2}\,\pi$ №10 4:1 №11a) 900π м³; b)189π см³. №12 d) 21,3π м³
№13 b) 4 ед. длины №14 ≈ 250 манат №15 ≈ 3,43 кг №17 ≈ 21,1 см³
№18c) 15,5 π м³ №21≈114 штук №22 125 см³ №23 64π см³ №24 ≈1,02 м³

Стр. 181-183. №1 a)7π м³ b)π м³. №2 a)180π см³ c) 4м №3 36 π №4 $h=3y$ №5 a)864см², 960 см³ №6 16,8 π см², 9,6π см³ №7 96π см² №8 128π см³ №9 $\frac{\pi l^3}{8}$
№10 ≈ 418 штук №11 ≈185,4 см³ №12 $h=6$ см №13 80% посуды опустошится ≈ 151 минут, ≈0,75 *l* №14 a)50π см³ №15168,48π №16 54 см³
№18 b) ≈73 *мл* №19 216π см², 388π см³ №20 ≈9,5 манат, ≈14,09 манат

Стр. 185-187. №2 b)3м. №3c)R=6см h=18см.№52) a)144π см².№6 ≈526,5 м³, ≈1485,2м³.
№7 B-72π см², 36π см³. №9 9 π см² ; $\frac{50}{3}$πсм³. №10 45π см³ и 243π см³.
№11 112500π см³. №12 1) $\frac{28}{3}$ π см³; 2) $\frac{442}{3}$π см³. №13 a) $\frac{448}{3}$π см³;
b) $\frac{550}{3}$ π см³.

Стр. 189-191. №2 a) $V_1 : V_2 = 1 : 8$, b)$V_1 : V_2 = 8 : 27$. №4 a) 256 м³. №5 3см.
№6 a) в 4 раза; b) в 8 раз. c) 27 : 64. №7 ≈314 м³. №9 b) 10 м³.
№10 $V_1 : V_2 = 1 : 8$, $S_1 : S_2 = 1 : 4$.№11 960 см².

Стр. 192-193. №3 ≈9,921 м³. №4 ≈1,177 тонн. №5 ≈392 кг. №6 ≈ 3 ед.. №9 99π см³

Исследовании функций при помощи производной

Стр. 198-199. №1 a) $f(3)>f(10)$ №3 b) убывет на промежутке (–∞;1,5], возрастает на промежутке [1,5;+∞). d) убывет на промежутках (–∞;0] и [4;+∞) , возрастает на промежутке [0;4], e) функция на каждом из промежутков (–∞;–1] и [3;+∞) возрастает, убывет на отрезке [–1;3]. №4 a) функция убывет на промежутке (–∞;3], возрастает на промежутке[3;+∞).
№5 e) возрастает на промежутках (– ∞; –2] и [2; +∞), убывает на промежутке [–2;2]. №9 4) a) $-\frac{1}{3}$ и 1; b) возрастает на промежутках $(-\infty;-\frac{1}{3}]$ и [1;+∞), убывет на промежутке$[-\frac{1}{3};1]$.
№10 a) $h(3)>h(4)$; b) $h(-1)<h(0)$.
№11 b) при $b\in[-6;6]$.

Стр. 205-207. №5 a) x=0 и x=2; b) убывает на промежутке (–∞;2], возрастает на промежутке [2;+∞) №6 c) критические точки $x=-1$ и x=2, возрастает на промежутках (–∞;–1] и [2;+∞), убывает на промежутке [–1;2], $g(-1)=12$, $g(2)=-15$ №7 5) критические точки $x_1=-1$ и $x_2=2$

$x_{max}=-1$, $x_{min}=2$, $f_{max}=13$, $f_{min}=4$. №10 6) критические точки $x_1=-1$ и $x_2=1$ $x_{min}=1$, $x_{max}=-1$, $f_{min}=-4$, $f_{max}=4$; 9) критические точки $x_1=0$ и $x_2=2$ $x_{min}=0$, $x_{max}=2$, $f_{min}=0$, $f_{max}=4\cdot e^{-2}$ 10) критическая точка $x=1$. $x_{min}=1$, $f_{min}=1$. №12 a) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; b) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

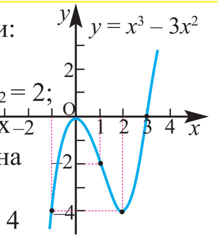
№13 b) 3) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=0$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-5$. 8) $\max\limits_{[1/e;e]} f(x)=\frac{e+1}{e}$, $\min\limits_{[1/e;e]} f(x)=1$

№15 $C'(x)=0{,}9x^2-10x+28$. №16 b) наименьший периметр имеет квадратсо со стороной 10 см. №17 a) 1; c) $-\frac{1}{2}$; d) 4+8+6. №18 при $R=r$.

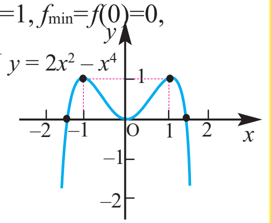
№19 $T_{max}=102{,}2$ F; $T_{min}=95{,}64$ F

Стр. 210-211. №5 a) самое больше 2 точки экстремума. b) критические точки $x_1=-3$ и $x_2=4$. $x_{max}=-3$, $x_{min}=4$, $f_{max}=142$, $f_{min}=-201$, возрастает на промежутках $(-\infty;-3]$ и $[4;+\infty)$ и убывает на промежутке $[-3;4]$.

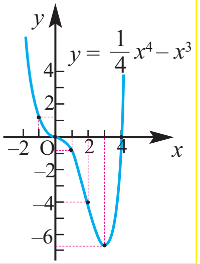
№6 a) пересечение с осями: (0;0), (3;0); критические точк: $x_1=0$, $x_2=2$; возрастает на промежутках $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$, убывает на промежутке $[0;2]$; $x_{max}=0$, $x_{min}=2$, $f_{max}=0$, $f_{min}=-4$



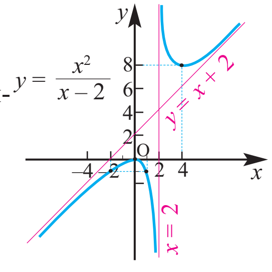
№7 a) пересечение с осями: $(-\sqrt{2};0)$, $(0;0)$, $(\sqrt{2};0)$; критические точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$; возрастает на промежутках $(-\infty;-1]$ и $[0;1]$, убывает на промежутках $[-1;0]$ и $[1;+\infty)$; $x_{max}=-1$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$, $f_{max}=f(-1)=1$, $f_{min}=f(0)=0$, $f_{max}=f(1)=1$



№7. c) пересечение с осями: (0;0), (4;0); критические точки: $x_1=0$, $x_2=3$; убывает на промежутке $(-\infty;3]$, возрастает на промежутке $[3;+\infty)$; $x_{min}=3$, $f_{min}=-6{,}75$.



№9 c) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; вертикальная асимптота: $x=2$, наклонная асимптота: $y=x+2$; критические точки: $x_1=0$, $x_2=4$; возрастает на промежутках $(-\infty;0]$ и $[4;+\infty)$, убывает на промежутках $[0;2)$ и $(2;4]$; $x_{max}=0$, $x_{min}=4$, $f_{max}=0$, $f_{min}=8$.



Стр. 214-218. №1 12+12 №2 Наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 15 м. №3 8см×8см №4 При размерах 50×100×50. №5 6м×6м×3м

№6 a) $\frac{125000}{3}$ м². №7 2 см×6 см×5 см. №10 На лодке от точки A в точку D, расположенную в 0, 75 км от C, оттуда до точки B пешком.

№12 b) 36 см². №15 $250\sqrt{3}\,\pi$ см³ №16 $\frac{128\sqrt{3}\,\pi}{9}$ см³ №17 $r=\frac{2b}{3}$, $h=\frac{a}{3}$

Стр. 219-220. №5 $(-\infty;-2)\cup(0;2)$. №6 $x_1=0{,}5$ и $x_2=1$. №7 $y=2x-1$. №8 (1;1). №12 8 см

Интеграл

Стр. 223-231 №2 d) $F(x) = x^5$. №3 $g(x) = 2x+1$. №4 b) $x^2 + C$; c) $x^4 + C$; d) $\mathrm{tg}x + C$. №5 d) $\frac{1}{3}x^2 + C$. №6 a) $\frac{4}{3}x^3 + C$; d) $\frac{1}{8}x^4 + C$. №7 b) $-\frac{1}{4x^4} + C$; e) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; h) $-2x^{\frac{3}{2}} + C$. №8 b) $\frac{3\sqrt{4x+1}}{2} + C$. №9 b) $-\frac{1}{27}(7-3x)^9 + C$. d) $-\frac{1}{25(5x+2)^5} + C$. №10 c) $x^3 + \frac{1}{x} + C$. №11 a) $3x^2$; b) $x^3 + C$; c) $\sqrt{x}$.

№12 b) $x - \frac{x^2}{2} + C$; e) $\frac{x^4}{4} - 9x + C$; g) $x^3 + \frac{1}{2x^2} + C$. №13 e) $x - \frac{x^2}{2} + C$, $(x \geq 0)$.

№14 b) $2u^2 + 5u + \frac{1}{u} + C$; f) $\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$. №15 b) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x^3 + C$.

№16 c) $\frac{3}{2-4x} + C$; f) $\frac{2}{3}x^3 - x + C$. №17 b) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$. №18 b) $-4e^{3x} + C$;

d) $\frac{2^{x+2}}{\ln 2} + C$; g) $\frac{1}{5}\ln|5x+4| + C$. №19 b) $2\ln|2x-3| + C$; c) $-2e^{3-2x} + C$.

№20 a) $e^x - \frac{ex^2}{2} + C$; b) $\frac{2^x}{\ln 2} - 2\ln|x| + C$. №21 b) $2\mathrm{tg}x + C$; c) $-6\mathrm{ctg}x + C$.

№22 c) $-2\mathrm{ctg}2x + C$. №23 a) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$, c) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

№24 e) $-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. №25 a) $\mathrm{tg}\theta + C$; b) $-\mathrm{ctg}x - x + C$ №27 b) $\sqrt{x} - 4$.

№29 c) $4\ln x + 1$. №34 c) $x(t) = t^2 - 1$. №35 $x(t) = t^2 - 3t$. №36 $P(12) \approx 206152$.

Стр. 236-238 №4 f) 2,5; h) 8,5. №6 a) $3\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4}$. №7 8,5.

Стр. 241-244 №1 4) $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; 15) 1. №2 a) 2. №3 c) 6 i) $\frac{20}{3}$. №4 a) $\frac{20}{3}$. №6 c) 1; d) $e-1$. №9 b) 9,08. №10 a) ≈ 172 тыс. манат. №12 625м. №14 ≈ 721 чел.

Стр. 247-249 №1 a) $\frac{1}{2}$; d) $-e$. №2 b) 6,5; c) 1,5. №3 a) 4,5 №4 a) 25 №6 a) 40,5; №9 $c = 2$.

Стр. 252-254. №1 c) $5\frac{1}{3}$. №2 c) 9. №3 b) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$. №4 c) 6. №5 c) $\frac{1}{6}$. №6 a) 2,5. №7 a) $\frac{5}{6}$. №9 a) 2,5. №10 b) 3 сек.

Стр. 258-260. №1 a) 21π; c) $\frac{\pi}{3}$. №3 1) 50π; 5) $7{,}5\pi$; 7) $\frac{\pi}{6}$. №4 a) 80π №6 a) $3\frac{83}{120}\pi$.

Стр. 261-262. №3 c) 17. №5 c) $\frac{17}{6}$. №7 b) 2. №8 a) $2\pi + 8$. №9 b) 2π. №10 c) $49\frac{1}{3}$. №12 a) $x(t) = -0{,}5t^3 + t^2 + 3{,}5t - 9$.

Статистика и вероятность

Стр. 267-268. №1 3) $\sigma \approx 2{,}24$ №3 a) $\bar{x} = 550$, $\sigma \approx 287$. №6 a) $\bar{x} = \frac{25}{3}$; Наибольшая разность: 14; $\sigma^2 \approx 14{,}03$; $\sigma = 3{,}75$; b) Наибольшее отклонение имеет Пираллахский район. d) ≈ 393920. №8 a) A: Наибольшая разность 170, $\bar{x} = 272$, $\sigma^2 = 2578$, $\sigma \approx 51$; B: Наибольшая разность 90, $\bar{x} = 227$, $\sigma^2 = 800$, $\sigma \approx 28{,}3$. №8 2-ой футболист имеет более стабильные результаты.

Стр. 271-273. №1 ≈81,5% яиц имеет массу в промежутке от 43,09 грамм до 45,4 грамм. №2 a) (66; 78) b) (60; 84) c) (54; 90). №3 1) c) максимум, b) минимум.
№5 a) фирма A - 5%, фирма B- 14%. №6 a) ≈ 1710; P=0,16
№7 1) a) 0,82; b) 0,16; c) 0,03. 2) [63;77]. №8 a) $\overline{m} = 120$, $\sigma = 17{,}6$.
№9 Наибольшая вероятность выпадения 7 и $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{12}$

ОТВЕТЫ

Стр. 276-277. №2 Медиана $Q_2 = 215$, $Q_1 = 181$, $Q_3 = 231$; наименьшее значение173; наибольшее значение 241; ≈ 63% основных данных попадает в ящик. 18,2 % данных левый и правый ус. №3 a) 60; b)85; c)75%; d)45; e)[80;105] f) нет.

Стр. 279. №2 a)72%; b)89%; c)28%. №3 1) a) $P(A\ B) = 0{,}04$; b) $P(A \cup B) = 0{,}51$; c) $P(\overline{O}) = 0{,}55$

Стр. 283. №2 0,21. №3 a) $P = \frac{2}{3}$. №5 0,0776. №6 a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$. №7 a)0,32; b)0,48; c)0,08; d)0,44; e)0,92. №8 $\frac{13}{30}$.

Стр. 284. №1 b) $\bar{x} = 16{,}6$; $\sigma^2 = 17{,}4$; $\sigma = 4{,}2$. №2 a) 1) больше всех. №4 a) 68%; b) 34%; c) 0,5%; d) 16%. №5 $\frac{3}{7}$. №7 0,043. №9 $\frac{1}{18}$. №10 a) $\frac{9}{124}$; b) $\frac{253}{496}$
№12 a) 0,68; b) 0,025; c) 0,84; d) 0,475.

Уравнения и системы уравнений. Обобщающие задания

Стр. 287-288. №1 a)13; c)±4; f)62; i) {–1;3}. №2 b)0. №3 b)два. №4 4)[4;8]; 8)(–1;0]∪ [3;4); 9)[0;3]; 10) (–∞;2]∪[4;∞); 17) [2;+∞).

Стр. 289. №1 a) (8; –3); b) (1; 2); e) (2; 1); g) (5; 2); h) (3; 3); i) (2;0).

Стр. 290 №1 a) (8; 2); c) (6; 2); e) (4; 2); g) (4; 2); h) (0; 3); i) (2; 5), (32; 1); j) (3; 3)

Стр. 291-311. №2 (–1; –8); (1,5; 2). №3 a)180°; b)60°, 180°, 300°. g)0; $\frac{2\pi}{3}$; π; $\frac{4\pi}{3}$; 2π. №4 ≈ 9,4 см. №6 длина окружности уменьшится на 40 %, площадь на 64%
№7 2 см. №9 (–1; 1). №10 a) $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; g) $\frac{2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. №12 1→B, 2→C, 3→A.
№15 40 см, 60 см². №16 d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{1}{4}$. №20 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. №21 a) $x=-1$ и $x=2$
b) возрастает (–∞;–1] и [2;+∞), убывает на промежутке [–1;2] c) $y_{max}=y(-1)=13$, $y_{max}=y(2)=-14$. №22 a) 60°; b) $9\sqrt{3}$ №24 a) НОД=3, НОК нет №28 b)240πсм³
№29 b) $\frac{7}{3}$ дм³. №31 a)10^5; b)$_{10}P_5$. №32 63м. №35 4 кв.ед. №39 $3x-y+2z+5=0$.
№41 b)30см². №43 $\frac{512\pi}{15}$ куб.ед. №50 4π. №52 a)1.
№53 c) убывает на [–∞;3], возрастает на [3;+∞). d) $x_{min}=3$, $y_{min}=-27$.
№57 a)$(\frac{16}{3}; \frac{100}{3})$; b) 26 кв.ед. №58 3см. №63 a)≈138м²; b) 80м³
№64 c) $\frac{\pi k}{4}$, k∈ Z. №68 2. №69 a) $v(t) = t^2 + 9$; b) $86\frac{2}{3}$ м. №75 $\frac{20}{29}$ №78 a)1600°; b)552°; №80 24см. №82 ≈5,7мм. №89 8%. №90 три. №96 a) 550м³, 942,5см³. b) ≈476 м², 476см². №98 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ или $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$.
№99 a) 91; b) $\frac{2}{91}$. №105 1) $\sigma^2 \approx 31{,}1$, $\sigma \approx 5{,}58$. №106 $P_{ABN}=96$, $S_{ABN}=336$, $P_{BCN}=72$, $S_{BCN}=144$. №111 7,5 см. №113 0,4 см. №114 45 сек. №119 a)100м²; b)≈1,4м; №122 a)2475; b) $\frac{n(n-1)}{4}$. №125 115. №130 $\frac{5}{18}$ №131 1,4. №136 b)7,5; c) $4\sqrt{2}$. №141 $d = \sqrt{2} - 1$. №143 поместится. №154 P = 40, S = 80, MK = 6,4.
№157 амплитуда $\frac{1}{2}$, частота $\frac{1}{\pi}$. №162 черный. №165 до B расстояние 28 м
№168 0,24Дж. №169 (4;2), (10;10). №178 6. №184 $0{,}5 \le a \le 2$. №197 $a + b + 3$.

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 11

Ümumi təhsil müəssisələrinin 11-ci sinifləri üçün
riyaziyyat fənni üzrə

Dərslik

Rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	**Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova** **Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov** **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**
Məsləhətçi:	**Çingiz Qacar**
Tərcüməçi:	**Viktoriya Abdullayeva**
Redaktor:	**Yaşar Alxasov**
Elmi redaktor:	**Əbdürrəhim Quliyev**
Kompüter tərtibatı:	**Fuad Qəhrəmanov**
Bədii tərtibat:	**Leyla Bəşirova**

Hesab-nəşriyyat həcmi: 19,1 . Fiziki çap vərəqi: 20.
Kağız formatı: 70×100 $^{1}/_{16}$. Kəsimdən sonra ölçüsü: 165×240 mm.
Səhifə sayı: 320. Şriftin adı və ölçüsü: Calibri qarnituru, 10-11 pt.
Ofset kağızı. Ofset çapı. Sifariş 302. Tiraj 10300. Pulsuz. Bakı – 2023.

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix: 07.04.2023

Çap məhsulunu hazırlayan:
"Radius" MMC (Bakı, Binəqədi şossesi, 53)

Çap məhsulunu istehsal edən:
"Radius" MMC (Bakı, Binəqədi şossesi, 53)

Pulsuz

Əziz məktəbli !

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!