

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

6



2-я часть



AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASININ DÖVLƏT HİMNİ

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!

Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Заур Исаев
Магомед Керимов
Гюнай Гусейнзаде
Агшин Абдуллаев

МАТЕМАТИКА

Учебник по предмету математика для 6-х классов общеобразовательных заведений (2-я часть)

6

©Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi



Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0International (CC BY-NC-SA 4.0)

Bu nəşr Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International lisenziyası (CC BY-NC-SA 4.0) ilə www.trims.edu.az saytında əlçatandır. Bu nəşrin məzmunundan istifadə edərkən sözügedən lisenziyanın şərtlərini qəbul etmiş olursunuz.

İstinad zamanı nəşrin müəllif(lər)inin adı göstərilməlidir. 

Nəşrdən kommersiya məqsədilə istifadə qadağandır. 

Törəmə nəşrlər orijinal nəşrin lisenziya şərtləri ilə yayılmalıdır. 

Замечания и предложения, связанные с этим изданием,
просим отправлять на электронные адреса: trm@arti.edu.az и derslik@edu.gov.az
Заранее благодарим за сотрудничество!

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 5 Множества и операции над ними 5

	Предварительная проверка	6
5.1.	Множество	7
5.2.	Операции над множествами	11
5.3.	Решение задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна	16
	Заключение	21
	Обобщающие задания	22
	STEAM. "Поисковые системы"	24

Раздел 6 Выражения с переменной. Уравнение. Неравенство 25

	Предварительная проверка	26
6.1.	Выражения с переменной	27
6.2.	Раскрытие скобок в математических выражениях	31
6.3.	Упрощение выражений с переменными	34
6.4.	Уравнения	37
6.5.	Решение задач с помощью уравнений	41
6.6.	Неравенства	44
	Заключение	47
	Обобщающие задания	48
	STEAM. "Математическое моделирование"	50

Раздел 7 Треугольники 51

	Предварительная проверка	52
7.1.	Медиана, биссектриса и высота треугольника	53
7.2.	Признаки конгруэнтности треугольников	57
7.3.	Параллельность прямых	64
7.4.	Сумма углов треугольника	68
7.5.	Построение треугольника по трем сторонам	72
	Заключение	75
	Обобщающие задания	76
	STEAM. "Геодезические купола"	78

Раздел 8 Площадь и объем геометрических фигур 79

	Предварительная проверка	80
8.1.	Площадь треугольника	81
8.2.	Площадь параллелограмма и ромба	83
8.3.	Длина окружности. Площадь круга	89
8.4.	Задачи. Площадь поверхности прямой треугольной призмы и цилиндра	90
8.5.	Объем прямой треугольной призмы и цилиндра	93
	Заключение	95
	Обобщающие задания	96
	STEAM. "Поселение на Марсе"	98

Раздел 9 Статистика и вероятность 99

	Предварительная проверка	100
9.1.	Медиана и мода	101
9.2.	Случайное событие	105
9.3.	Вероятность события	108
9.4.	Представление информации	111
	Заключение	115
	Обобщающие задания	116
	STEAM. "Генеалогический ДНК-тест и теория вероятностей"	118

Обобщающие задания за 6-й класс	119
Словарь математических терминов	125
Ответы	127

Раздел 5

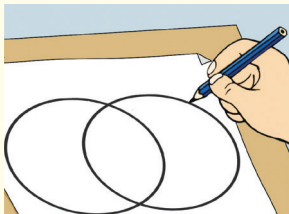
В этой главе вы научитесь:

- понятиям множества, элемента множества, пустого множества, подмножества
- способам задания множества
- находить пересечение, объединение и разность множеств
- решать задачи на множества с помощью диаграммы Эйлера-Венна

Попытайтесь!

В летнем лагере среди 40 детей был проведен опрос, кто из них какое мороженое любит: шоколадное или клубничное. Каждый ученик ответил, что любит хотя бы одно из этих мороженных. 70% участников опроса выбрали шоколадное мороженое, а 50% – клубничное.

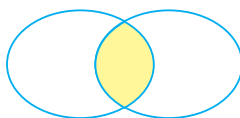
- Как можно изобразить эту информацию на диаграмме Венна?
- Сколько детей любят шоколадное мороженое, а сколько детей любят клубничное?
- Сколько детей любят только шоколадное мороженое?
- Сколько детей любят только клубничное мороженое?
- Сколько процентов опрошенных детей любят оба вида мороженого?



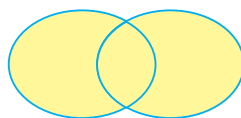
Множества и операции над ними

Множество — одно из ключевых понятий математики. Оно представляет собой совокупность каких-либо объектов. Группировка объектов и их классификация основываются на этом понятии. Например, множество учеников, посещающих кружки по шахматам и рисованию, можно представить на диаграмме следующим образом.

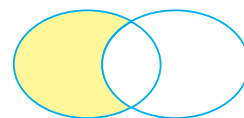
Шахматы Рисование Шахматы Рисование Шахматы Рисование



посещающие шахматы и рисование

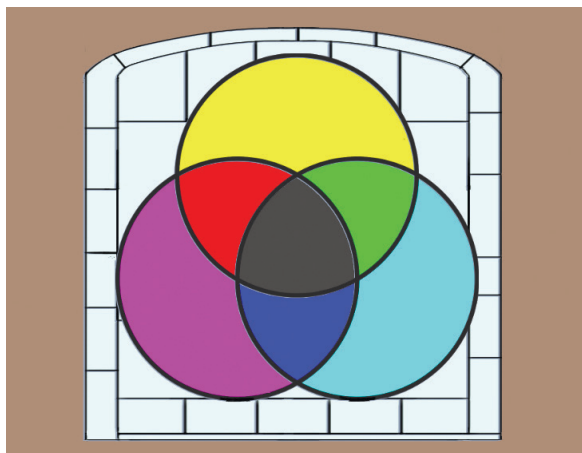


посещающие шахматы или рисование



посещающие только шахматы

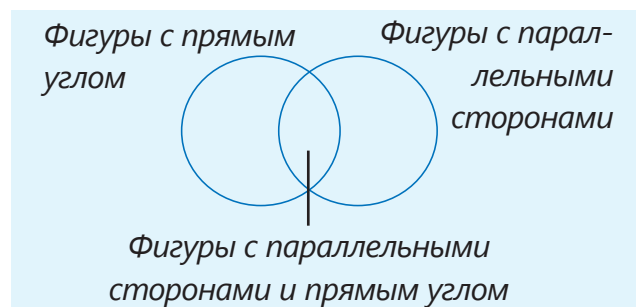
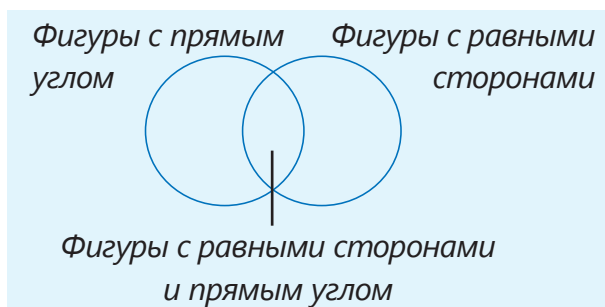
Теория множеств создана относительно недавно. Но элементы этой теории можно встретить и в трудах математиков, живших в средние века. Например, по парадоксу Галилео Галилея (1564-1642) натуральных чисел столько же, сколько их квадратов.



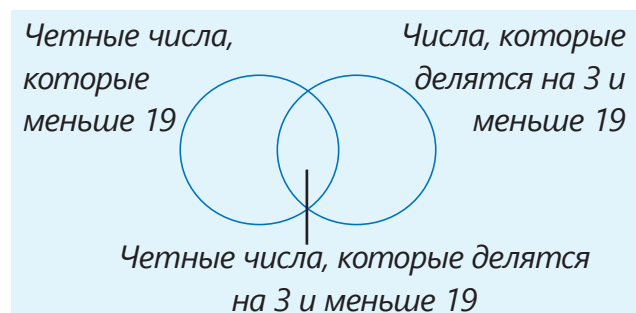
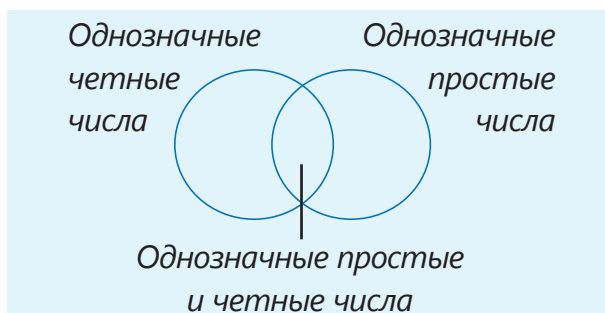
Эта диаграмма собрана из стекол на одном из окон Кембриджского университета в честь Джона Венна (John Venn).

Предварительная проверка

1 Определите, какой части диаграммы соответствуют заданные фигуры.



2 Определите числа, соответствующие частям диаграммы.



3 Определите подходящие числа среди заданных чисел.

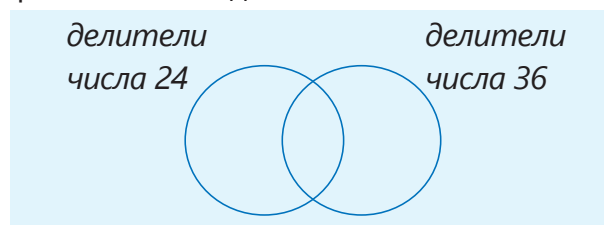
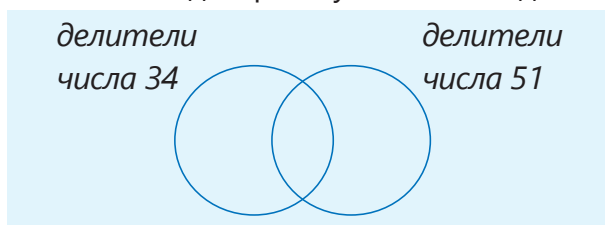
а) Натуральные числа б) Целые числа в) Дроби

7 -7 3,2 -8 -58 39 $\frac{2}{5}$ 0 -25

4 Разделите указанные фигуры на две группы: плоские и пространственные фигуры. Есть ли фигура, которая относится к обеим группам?

треугольник, куб, призма, прямоугольник, ромб, круг, конус, цилиндр, параллелограмм, отрезок

5 Дополните диаграмму Венна. Найдите по диаграмме НОД заданных чисел.



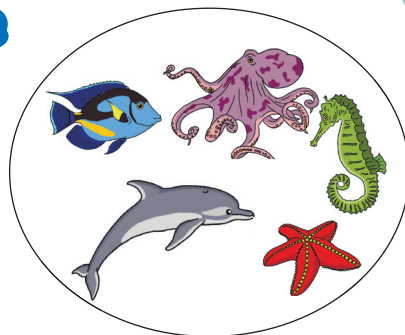
6 Из 20 учеников класса каждый записан не более чем в один кружок. 40% учеников записаны в кружок по рисованию. Число учеников, записанных на рисование и танцы, относится как 4 : 5. Сколько учеников не записаны ни в один из этих кружков?

5.1. Множество

Исследование-обсуждение

По каким признакам сгруппированы животные на рисунке?

- Каких еще двух животных можно добавить в эту группу?
- Каких животных, не относящихся к этой группе, вы можете перечислить?



Ключевые слова

- элемент множества
- подмножество
- равные множества
- $\emptyset$ – пустое множество
- $\in$ – принадлежит
- $\notin$ – не принадлежит
- диаграмма Эйлера-Венна

Изучение Множество

В математике термин “множество” понимается как совокупность определенных предметов, символов, чисел или объектов. Например, множество учеников в классе, множество цветов в саду, множество целых чисел, множество натуральных чисел, множество звезд в галактике и т.д.

• Множества обозначаются заглавной буквой (A , B , C , ...) Обычно множество натуральных чисел обозначается буквой N , а множество целых чисел – буквой Z .

• Объекты, из которых состоит множество, называют **элементами** этого множества.

Если объект является элементом множества, то записывается со знаком $\in$, а если не является элементом, то – со знаком $\notin$.

Число 5 принадлежит множеству натуральных чисел:

$$5 \in N$$

Число -5 не принадлежит множеству натуральных чисел:

$$-5 \notin N$$

• Число элементов множества может быть конечным и бесконечным.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным множеством**. Например, множество двузначных простых чисел, меньших 20, содержит всего 4 элемента: 11, 13, 17, 19. Значит, это множество является конечным.

Множество, состоящее из бесконечного числа элементов, называется **бесконечным множеством**. Например, множество натуральных чисел является бесконечным: 1, 2, 3, 4, ...

• Множество может не содержать элементов. Множество, не содержащее ни один элемент, называется **пустым множеством**. Например, множество натуральных чисел, расположенных между 1 и 2, является пустым. Пустое множество обозначается символом $\emptyset$.



Подумай!

Приведите несколько примеров пустого множества. Является ли множество, содержащее только число 0, пустым?

Задания

1

Приведите несколько примеров объектов, принадлежащих и не принадлежащих данному множеству.

а) Множество растений б) Множество животных в) Множество музыкальных инструментов

2

Запишите три элемента, принадлежащих данному множеству, и три элемента, не принадлежащих данному множеству.

а) Множество простых чисел б) Множество составных чисел в) Множество целых чисел

- 3 Множество A состоит из чисел 5, 10, 15, 20. Что из следующего верно?

$10 \in A$

$0 \in A$

$20 \notin A$

$25 \notin A$

$5 \in A$

$15 \notin A$

- 4 Множество B состоит из делителей числа 36. Что из следующего верно?

$4 \in B$

$9 \notin B$

$7 \in B$

$18 \notin B$

$12 \in B$

$14 \notin B$

$72 \in B$

- 5 N – множество натуральных чисел, а Z – множество целых чисел. Впишите подходящие символы $\in$ или $\notin$ в пустые клетки.

$23 \square N$

$23 \square Z$

$-8 \square N$

$-8 \square Z$

$0 \square Z$

$0,2 \square N$

Изучение Способы задания множеств

- Конечное множество можно задать **перечислением его элементов**. Элементы множества записываются в фигурных скобках. Например, если A – множество однозначных нечетных чисел, то это множество можно записать так:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- Множество, состоящее из конечного или бесконечного числа элементов, можно задать, описав **общее свойство его элементов**. Например, "множество нечетных чисел от 1 до 17" понимается как множество $\{1, 3, \dots, 17\}$, "множество нечетных чисел, больших 10" понимается как множество $\{11, 13, 15, 17, \dots\}$.



Запомни!

В множестве каждый элемент записывается только один раз. Элементы множества можно записывать в произвольном порядке. Например, множество $\{2, 4, 6, 8\}$ можно также записать в виде $\{8, 6, 4, 2\}$ или $\{2, 8, 4, 6\}$.

- Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются **равными**. Равенство множеств A и B записывается как $A = B$.

- 6 Запишите множество, перечислив его элементы. Обозначьте это множество какой-нибудь буквой и определите, сколько у него элементов.

ОБРАЗЕЦ множество простых чисел, которые больше 12 и меньше 25

Решение	Объяснение
$S = \{13, 17, 19, 23\}$	Простые числа, которые больше 12 и меньше 25: 13, 17, 19, 23. Обозначим это множество буквой S . В множестве S 4 элемента.

а) множество четных чисел, меньших 20

б) множество простых чисел, меньших 35

в) множество двузначных чисел, делящихся на 15

г) множество двузначных чисел, больших 99

- 7 Среди заданных множеств определите равные множества.

$A = \{5, 10, 15\}$

$B = \{5, 25\}$

$C = \{5, 25, 1\}$

$D = \{15, 5, 10\}$

$E = \{1, 5, 25\}$

$F = \{25, 5\}$

- 8 Определите, верны или нет утверждения, показав на примерах.
- а) Если два множества равны, то число их элементов тоже равно.
- б) Любые два множества, состоящие из одного и того же числа элементов, равны.
- 9 Впишите подходящие элементы в пустые клетки, зная, что $A = B$.
- а) $A = \{3, 6, 10\}$ и $B = \{6, 10, \square\}$ б) $A = \{11, 13, 17, \square\}$ и $B = \{\square, 17, 19, \square\}$
- 10 Запишите все элементы множества двузначных чисел, в записи которых используются только цифры 2, 3, 4, 5. Обозначьте полученное множество через A .
- Сколько элементов в этом множестве?
 - С помощью знаков $\in$ и $\notin$ запишите, принадлежат числа 25, 63, 48, 55 этому множеству или нет.



Запомни!

Иногда элементы множества тоже обозначаются буквами. В этом случае используются строчные буквы. Например, $A = \{a, b, c, m\}$

- 11 Обозначьте множество букв, использованных в записи заданного слова, и запишите его элементы. Сколько элементов в множестве?

ОБРАЗЕЦ множество букв, использованных в записи слова "задача"

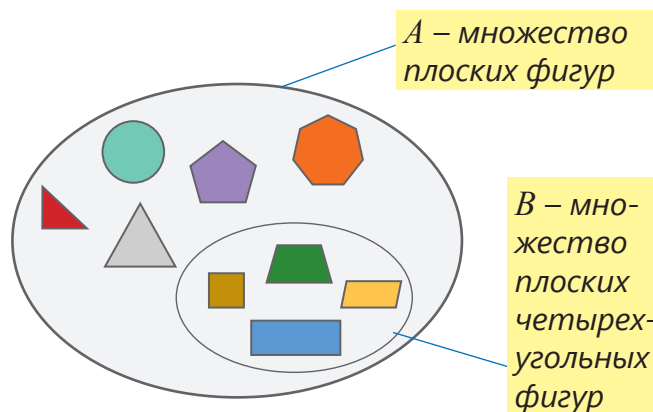
Решение	Объяснение
$M = \{з, а, д, ч\}$	Повторяющиеся буквы в заданном слове исключаются, и каждая буква записывается только один раз. Полученное множество обозначается через M . В множестве M 4 элемента.

а) коэффициент б) дробь в) уравнение г) квадрат д) переменная е) число

Изучение Подмножество

Если каждый элемент множества B принадлежит множеству A , то множество B называется **подмножеством** множества A . Например, множество плоских четырехугольных фигур является подмножеством множества плоских фигур. Это удобнее изобразить с помощью **диаграммы Эйлера-Венна**.

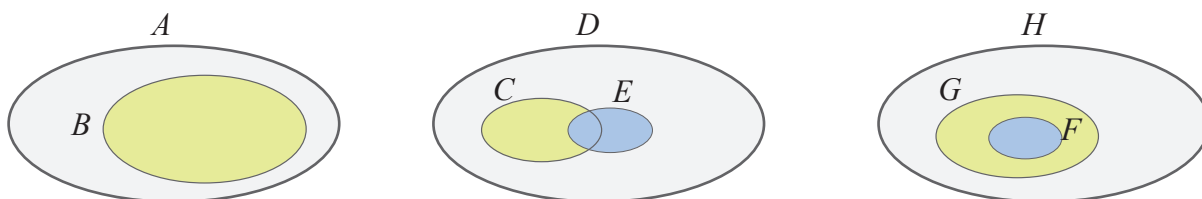
Если одно множество является подмножеством другого множества, то это записывается с помощью знака " $\subset$ ".



Множество $B = \{3, 4, 5\}$ – подмножество множества $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $B \subset A$

- Пустое множество считается подмножеством каждого множества.
- Для любого множества A : $\emptyset \subset A$.
- Каждое множество является своим подмножеством: $A \subset A$.

- 12 Запишите на основе схем множества, являющиеся подмножествами других множеств.



- 13 Даны множества $A = \{3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, $D = \{3, 4, 5, 6\}$. Какое множество является подмножеством другого множества? Запишите с помощью соответствующего знака.
- 14 Даны множества $A = \{o, y, u, n\}$, $B = \{y, u, n\}$, $C = \{u, n\}$, $D = \{y, n, u\}$. Запишите с помощью соответствующего знака подмножества и равные множества.
- 15 Запишите все подмножества заданного множества.

ОБРАЗЕЦ $E = \{0, 1, 2\}$

Решение	Объяснение
Множество, в котором нет элементов: $\emptyset$. Множество с одним элементом: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$. Множество с двумя элементами: $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$. Множество с тремя элементами: $\{0, 1, 2\}$.	Записываются пустое множество и все множества, составленные из элементов заданного множества.

$A = \{1\}$

$B = \{1, 4\}$

$C = \{1, 4, 8\}$

$D = \{1, 4, 8, 10\}$

- 16 Дано множество $A = \{a, b, c, d\}$.
- Запишите все двухэлементные подмножества множества A . Сколько таких подмножеств получилось?
 - Сколько четырехэлементных подмножеств у множества A ?
 - Запишите несколько множеств, подмножеством которых является A .

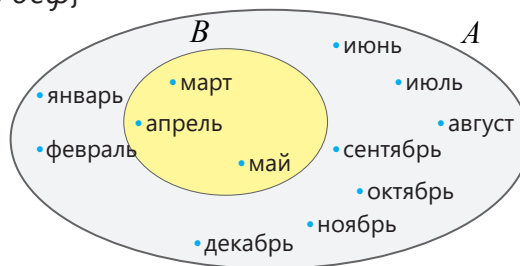
Решение задач

- 17 Разбейте заданное множество национальных музыкальных инструментов на подмножества струнных инструментов (A), ударных инструментов (B) и духовых инструментов (C).

$M = \{ \text{тар, кеманча, нагара, балабан, саз, деф} \}$

- 18 На диаграмме Эйлера-Венна изображены множества A и B .

- Запишите оба множества, перечислив элементы.
- Запишите элементы, принадлежащие обоим множествам.
- Какое из множеств является подмножеством другого?



- 19 Пусть A – это множество всех учащихся школы, B – множество учеников VI классов этой школы, а C – множество отличников, учащихся в этих классах. Изобразите эти множества на диаграмме Эйлера-Венна. В каком случае подмножество правильно записано? Обоснуйте свое мнение.

$B \subset A$

$A \subset C$

$B \subset C$

$C \subset B$

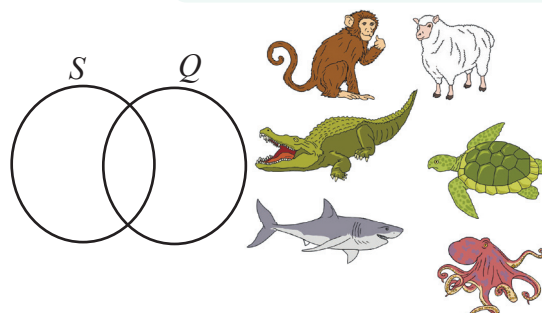
$A \subset B$

5.2. Операции над множествами

Исследование-обсуждение

Самир захотел сгруппировать стикеры, на которых изображены различные животные, разбив их на множество живущих в воде животных (S) и множество живущих на суше животных (Q).

- В какой части диаграммы он должен разместить каждый стикер?
- Как можно записать множества Q и S , перечислив их элементы?
- Запишите, перечислив стикеры с животными, живущими только на суше.



Ключевые слова

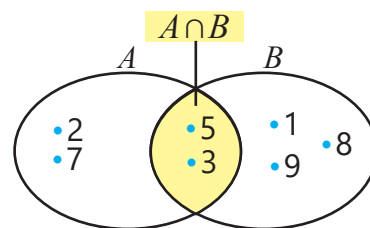
- пересечение множеств
- объединение множеств
- разность множеств

Изучение Пересечение множеств

Множество, которое состоит из всех общих элементов двух множеств, называется **пересечением** этих множеств.

Например, числа 3 и 5 являются общими элементами множеств $A = \{2, 3, 5, 7\}$ и $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$, поэтому пересечением этих двух множеств является множество $\{3, 5\}$. Пересечение множеств записывается с помощью символа $\cap$. Пересечение множеств A и B можно записать так:

$$A \cap B = \{3, 5\}$$



Изображение пересечения множеств на диаграмме Эйлера-Венна

- Если у двух множеств нет общих элементов, то их пересечением является пустое множество. Например, $\{a, b, c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$

- Для любого множества A : $A \cap A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$



Подумай!

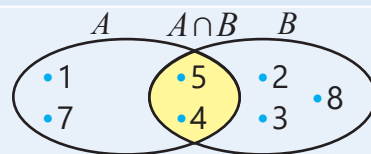
Если $B \subset A$, то как можно найти множество $A \cap B$? Объясните, показав на примерах.

Задания

- 1 Запишите пересечение заданных множеств.

ОБРАЗЕЦ $A = \{1, 4, 5, 7\}$ $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Решение	Объяснение
$4 \in A, 4 \in B, 5 \in A, 5 \in B$ $A \cap B = \{4, 5\}$	Определяются общие элементы, принадлежащие обоим множествам.



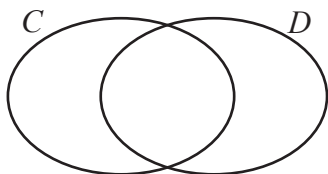
а) $A = \{4, 5, 6, 7\}$
 $B = \{1, 3, 4, 7, 9\}$

б) $A = \{1, 3, 5\}$
 $B = \{1, 3, 5, 7\}$

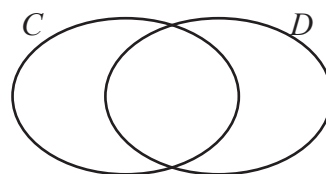
в) $A = \{2, 3, 5, 7\}$
 $B = \{1, 4, 8, 9\}$

2 Определите общее свойство множества $C \cap D$.

а) C – ученики, изучающие английский язык
 D – ученики, изучающие немецкий язык



б) C – предметы красного цвета
 D – автомобили

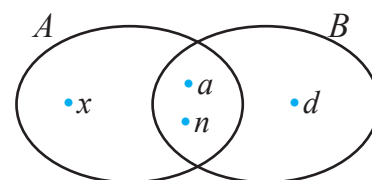


3 По диаграмме Эйлера-Венна определите, являются утверждения верными или нет.

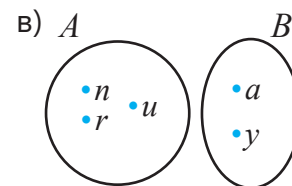
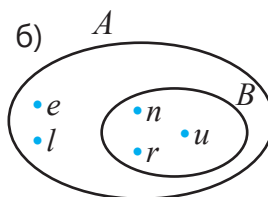
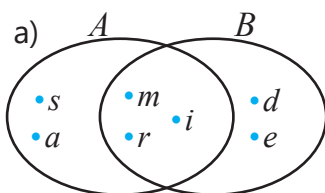
а) элемент d принадлежит множеству $A \cap B$.

б) элемент a принадлежит только множеству A .

в) элемент n принадлежит и множеству A , и множеству B .



4 По диаграмме Эйлера-Венна запишите множества A , B и $A \cap B$.



5 Запишите множество $C \cap D$ и найдите число его элементов.

а) $C = \{s, a, n, l, i\}$
 $D = \{a, l, i, s\}$

б) $C = \{h, a, r, u, n\}$
 $D = \{e, l, n, u, r\}$

в) $C = \{l, a, c, i, n\}$
 $D = \{s, a, l, o, n\}$

6 Множество A – множество делителей числа 18, а множество B – множество делителей числа 12. Используя диаграмму Эйлера-Венна, запишите множество $A \cap B$ и объясните значение наибольшего из элементов.

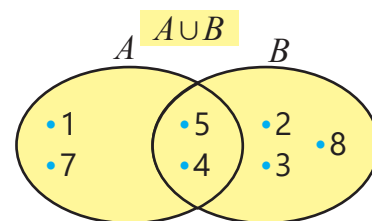
Изучение Объединение множеств

Множество, которое состоит из всех элементов двух множеств, называется **объединением** этих множеств. Например, объединением множеств $A = \{1, 4, 5, 7\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ является множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Объединение множеств записывается с помощью символа $\cup$.

Например, объединение множеств A и B можно записать так: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

- Общие элементы множества записываются в их объединении один раз.

- Для любого множества A : $A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$



Изображение объединения множеств на диаграмме Эйлера-Венна



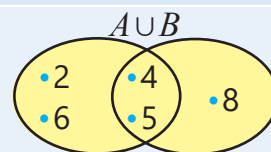
Подумай!

Если $B \subset A$, то какое будет множество $A \cup B$? Объясните, показав на примерах.

- 7 Запишите объединение заданных множеств и найдите число элементов.

ОБРАЗЕЦ $A = \{2, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 5, 8\}$

Решение	Объяснение
$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ В множестве $A \cup B$ 5 элементов.	Записывается множество, состоящее из всех элементов обоих множеств, и находится число элементов. Общие элементы записываются один раз.

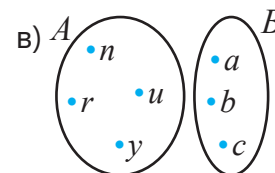
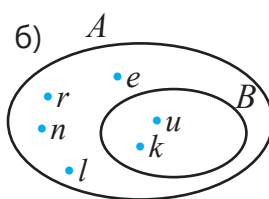
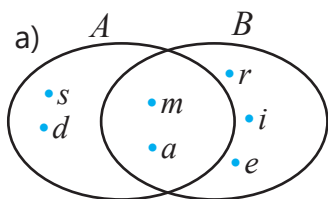


а) $A = \{4, 5, 6, 7\}$
 $B = \{1, 3, 4, 7, 9\}$

б) $A = \{1, 3, 5\}$
 $B = \{1, 3, 5, 7\}$

в) $A = \{2, 3, 5, 7\}$
 $B = \{1, 4, 8, 9\}$

- 8 По диаграмме Эйлера-Венна запишите множества A , B и $A \cup B$.



- 9 Запишите множество $A \cup B$ и найдите число его элементов..

а) $A = \{n, a, r\}$
 $B = \{e, l, a, n\}$

б) $A = \{d, u, m\}$
 $B = \{a, n\}$

в) $A = \{u, r, a, n\}$
 $B = \{t, a, r\}$

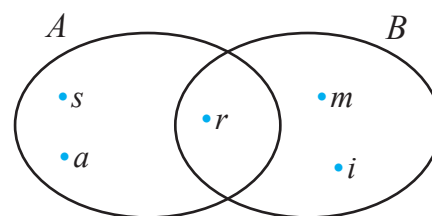
- 10 По диаграмме Эйлера-Венна определите, является утверждение верным или нет.

а) элемент s принадлежит множеству $A \cup B$.

б) элемент r не принадлежит множеству $A \cup B$.

в) элемент r принадлежит множеству $A \cap B$.

г) элемент m принадлежит и множеству A , и множеству B .



- 11 Пусть A – множество четных чисел, меньших 30, а B – множество чисел, меньших 30 и делящихся на 3. Запишите эти множества. Используя диаграмму Эйлера-Венна, определите элементы множества $A \cup B$. Найдите число элементов этого множества.

- 12 Пусть T – множество однозначных нечетных чисел, C – множество однозначных четных чисел, а M – множество однозначных составных чисел.

- Напишите элементы этих множеств.
- Запишите множество на основе заданной операции и найдите число его элементов.

а) $C \cup T$

б) $C \cap T$

в) $C \cup M$

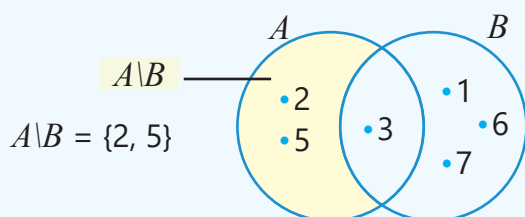
г) $C \cap M$

д) $M \cup T$

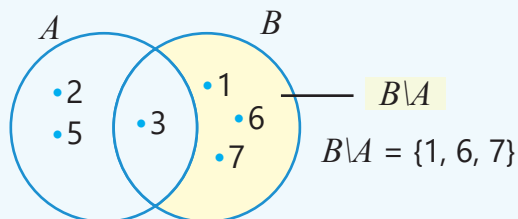
е) $M \cap T$

Изучение Разность множеств

Множество, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B , называется **разностью множеств A и B** и записывается как $A \setminus B$. Например, разность множеств $A = \{2, 3, 5\}$ и $B = \{1, 3, 6, 7\}$ находится так:



Множество, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству B , но не принадлежат множеству A , называется **разностью множеств B и A** и записывается как $B \setminus A$. Например, разность множеств $A = \{2, 3, 5\}$ и $B = \{1, 3, 6, 7\}$ находится так:



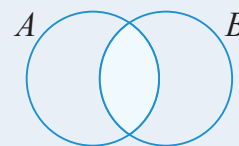
- Разность множества с самим собой – пустое множество: $A \setminus A = \emptyset$
- Разность множества и пустого множества равно самому множеству: $A \setminus \emptyset = A$



Подумай!

Используя диаграмму Эйлера-Венна, объясните.

- Чему равно объединение множества $A \setminus B$ и множества $A \cap B$?
- Чему равно объединение множества $B \setminus A$ и множества $A \cap B$?



- 13 Запишите разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

ОБРАЗЕЦ $A = \{1, 4, 5, 7\}$ $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Решение

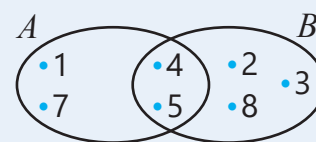
$$A \setminus B = \{1, 7\}$$

$$B \setminus A = \{2, 3, 8\}$$

Объяснение

Определяются элементы A , которые не входят в B .

Определяются элементы B , которые не входят в A .



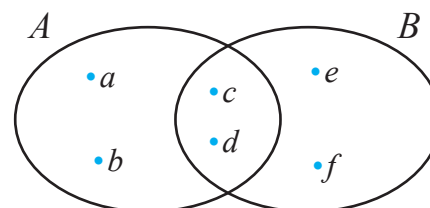
а) $A = \{1, 4, 7, 8\}$
 $B = \{2, 3, 7, 8\}$

б) $A = \{3, 6, 9\}$
 $B = \{5, 6, 9\}$

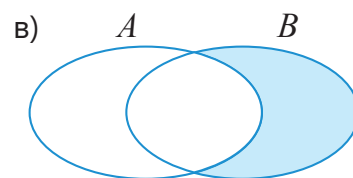
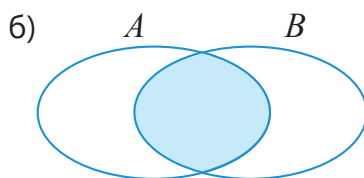
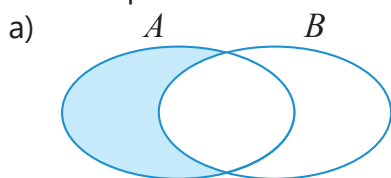
в) $A = \{2, 3, 6\}$
 $B = \{1, 4, 5, 8\}$

- 14 По диаграмме Эйлера-Венна определите, является утверждение верным или нет.

- а) элемент a принадлежит множеству $A \setminus B$.
- б) элемент c принадлежит множеству $B \setminus A$.
- в) элемент e не принадлежит множеству $B \setminus A$.
- г) элемент d не принадлежит множеству $A \setminus B$.

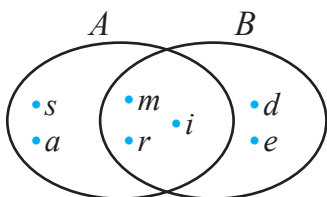


- 15 Определите, какая из записей $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ соответствует закрашенной части диаграммы Эйлера-Венна.

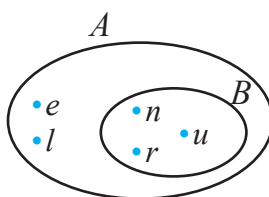


- 16 По диаграмме Эйлера-Венна запишите множество, соответствующее операциям.

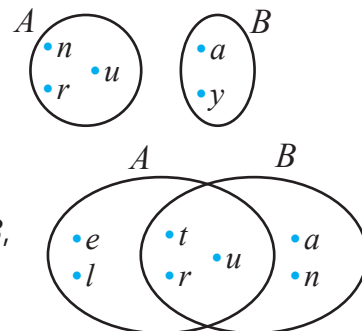
а) $A \setminus B$ и $B \setminus A$



б) $A \setminus B$ и $B \cap A$



в) $A \setminus B$ и $B \setminus A$



- 17 По диаграмме Эйлера-Венна запишите множества A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

- 18 Пусть A — множество нечетных чисел, меньших 20, а B — множество простых чисел, меньших 20.

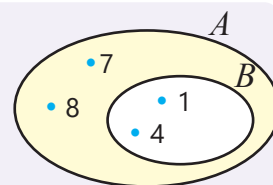
а) Напишите элементы множеств A и B .

б) Изобразив множества $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, $A \cup B$ на диаграмме Эйлера-Венна, запишите, перечислив их элементы. Найдите, сколько элементов в каждом множестве.



Запомни!

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется **дополнением** множества B к множеству A . Например, если $A = \{1, 4, 7, 8\}$ и $B = \{1, 4\}$, то множество $\{7, 8\}$ является дополнением множества B к множеству A .



- 19 Напишите множество $A \setminus B$ и найдите число его элементов.

а) $A = \{s, i, r, e\}$
 $B = \{s, i, r\}$

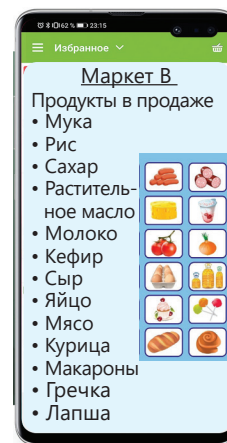
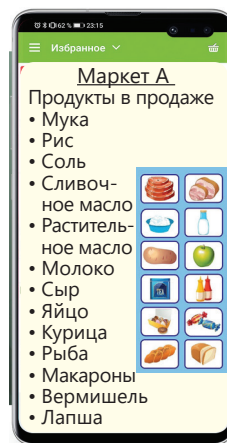
б) $A = \{e, l, n, a, r\}$
 $B = \{n, a, r\}$

в) $A = \{a, y, s, e, l\}$
 $B = \{s, e, l\}$

Решение задач

- 20 A и B — множество продуктов, продаваемых в соответствующих маркетах. Объясните смысл операций и запишите элементы соответствующих множеств.

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \setminus B$
- $B \setminus A$

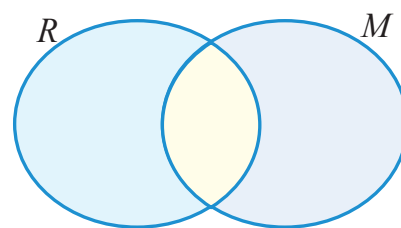


5.3. Решение задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна

Исследование-обсуждение

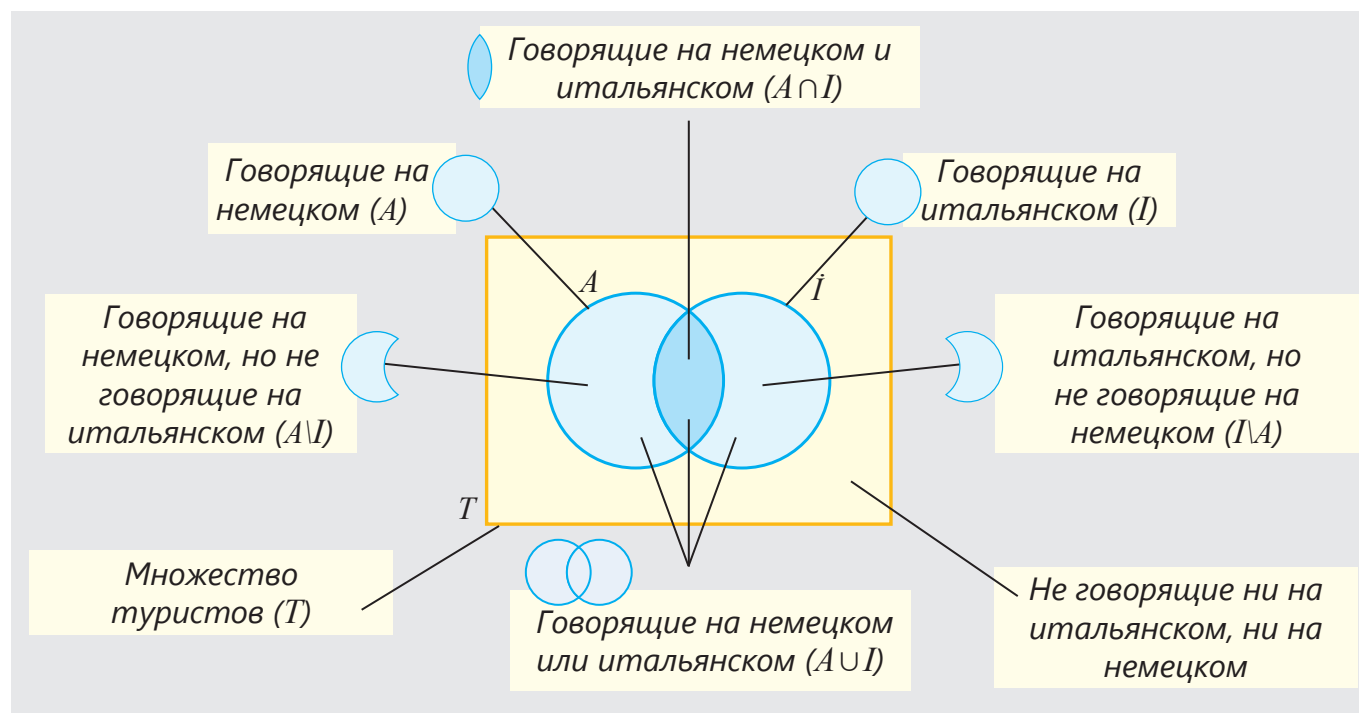
Самир провел опрос среди своих 10 друзей о том, кто в какой кружок записался. В результате опроса стало известно, что 5 человек записались на рисование (R), а 6 человек — на музыку (M).

- Как можно объяснить то, что число участников опроса и сумма числа посещающих кружки детей различны?
- Как это можно объяснить на основе диаграммы Эйлера-Венна?



Изучение Решение задач, используя диаграмму Эйлера-Венна

Часто решать задачи на множества удобнее и нагляднее с помощью диаграммы Эйлера-Венна. Диаграмма Эйлера-Венна — это схема, изображающая отношения между множествами и их элементами. Обычно при решении задач рассматриваются различные подмножества одного определенного множества. Например, пусть T — множество одной группы туристов, I — множество говорящих из них на итальянском, а A — множество говорящих из них на немецком, тогда смысл диаграммы Эйлера-Венна можно объяснить таким образом.

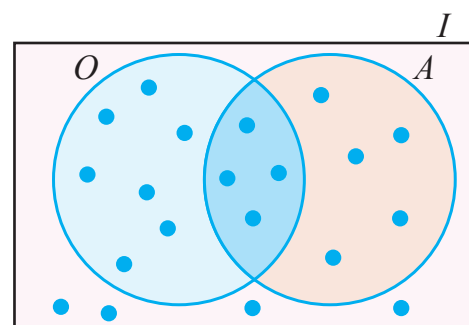


Подумай!

Как можно изобразить диаграмму Эйлера-Венна, если множества A и I не пересекаются или одно из них является подмножеством другого?

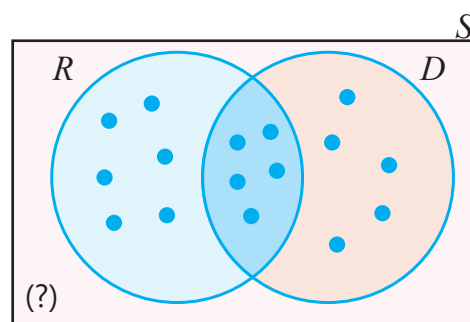
Задания

- 1 Спортсмены участвовали в соревнованиях по стрельбе, верховой езде и другим видам спорта. На диаграмме I — множество спортсменов, O — множество соревнующихся в стрельбе, A — множество соревнующихся в верховой езде. Каждым кружочком (•) отмечен один спортсмен.



- Сколько спортсменов участвовало в соревновании по стрельбе?
- Сколько спортсменов участвовало в соревновании по верховой езде?
- Сколько спортсменов участвовало в соревновании и по стрельбе, и по верховой езде?
- Сколько спортсменов участвовало в соревновании по стрельбе или верховой езде?
- Сколько спортсменов не участвовало в соревновании ни по стрельбе, ни по верховой езде?
- Сколько спортсменов участвовало в соревнованиях?

- 2 На диаграмме S — множество учеников 6"А" класса, R — множество учеников, записанных в кружок по рисованию, а D — множество учеников, записанных в театральную кружок.



- Сколько учеников записаны в кружок по рисованию?
- Сколько учеников записаны в театральную кружок?
- Сколько учеников записаны хотя бы в один из этих кружков?
- Если в классе 25 учеников, то сколько учеников не ходят ни в один из этих кружков?



Запомни!

Для решения задач с помощью диаграммы Эйлера-Венна можно использовать следующие шаги.

1. **Пойми задачу.** Исследуй условие, обозначь множества и определи их элементы.
2. **Составь план.** Определи отношения между множествами и представление их на диаграмме Эйлера-Венна.
3. **Реши.** Представь множества на диаграмме Эйлера-Венна и определи искомое множество по изображению.
4. **Проверь правильность ответа.** Проверь, соответствует ли полученный ответ условию задачи.

ОБРАЗЕЦ. Школьники провели опрос среди некоторых людей в парке о том, какой у них домашний питомец. 15 человек из участников опроса ответили, что держат кошку, а 13 человек — собаку. Из них 6 человек держат и кошку, и собаку. А 11 человек не держат домашнего питомца. Сколько всего людей участвовало в опросе?



1. ПОЙМИ ЗАДАЧУ

Что нужно найти: число людей, участвующих в опросе.

Что известно: 15 человек держат кошку, 13 человек держат собаку. Из них 6 человек держат и кошку, и собаку. 11 человек не держат домашнего питомца.

2. СОСТАВЬ ПЛАН

Как можно решить: каждое множество обозначается и изображается в виде круга. С помощью диаграммы Эйлера-Венна отмечается число элементов, соответствующих каждой части, и находится их сумма.

3. РЕШИ

P — множество людей, имеющих кошку,
 I — множество людей, имеющих собаку.
Отмечается число элементов этих множеств.
Поскольку некоторые элементы общие, то на следующем шаге изображается их пересечение.

S — множество всех участников опроса. Изображается пересечение множеств P и I , отмечается число элементов, входящих туда (6).
Также в соответствующей части диаграммы отмечается число людей, не имеющих домашнего питомца (11).

Вычисляется число элементов, соответствующих каждой части.

Имеющие только кошку: $15 - 6 = 9$.

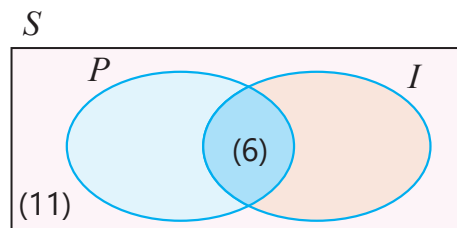
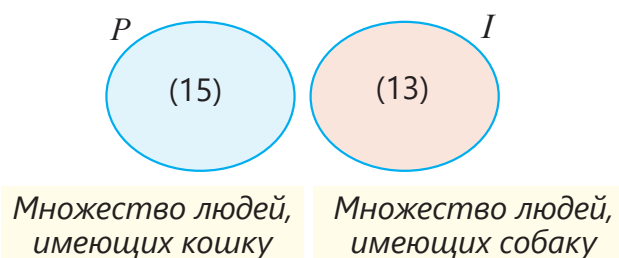
Имеющие только собаку: $13 - 6 = 7$.

Не имеющие домашнего питомца: 11.

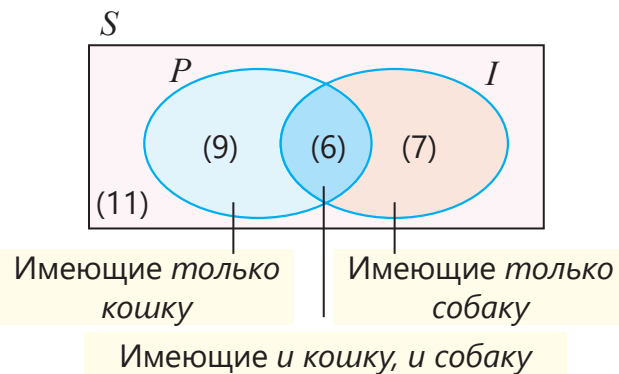
Число людей, участвующих в опросе:

$$9 + 6 + 7 + 11 = 33.$$

Ответ. В опросе участвовало всего 33 человека.



6 человек имеют и кошку, и собаку.

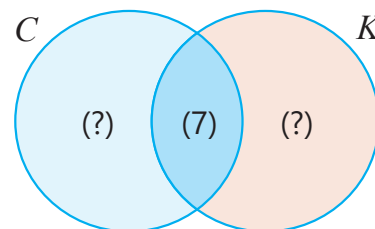


4. ПРОВЕРЬ

Ответ можно проверить, решив задачу и другим способом. Если бы множества людей, имеющих кошку и собаку, не пересекались, то число людей, имеющих домашнего питомца, было бы $15 + 13 = 28$. Поскольку из них 6 человек держат и кошку, и собаку, то из общего числа вычитается число повторяющихся элементов и находится число людей, у которых есть хотя бы один питомец: $28 - 6 = 22$. По условию 11 человек не держат домашнего питомца. Таким образом, в опросе участвовали $22 + 11 = 33$ человека. Ответ верен.

Решение задач

- 3 В буфете продаются булки с джемом и кунжутом. Из всех булок 12 штук с джемом, 15 штук с кунжутом. А 7 штук из них и с джемом, и с кунжутом. Подберите подходящие числа вместо знака "?" на диаграмме Эйлера-Венна.

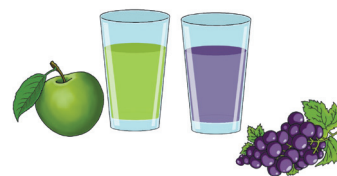


- Сколько булок только с джемом?
- Сколько булок только с кунжутом?
- Сколько всего булок продается в буфете?

- 4 Каждый из работников отдела любит читать или фантастический, или детективный роман. 15 человек предпочитают фантастику, а 12 человек – детектив. Из них 3 работникам нравятся оба жанра.

- Сколько человек любят только фантастику?
- Сколько человек любят только детектив?
- Сколько всего работников в отделе?

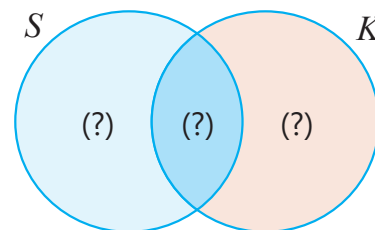
- 5 Из 28 учеников 14 любят пить яблочный сок, а 17 — виноградный сок. Из них 6 учеников любят пить и яблочный, и виноградный сок. Сколько учеников не любят ни яблочный, ни виноградный сок?



- 6 11 учеников класса занимаются плаванием, 10 учеников — борьбой, а 5 учеников не занимаются ни одним из этих видов спорта. Если 4 человека занимаются и плаванием, и борьбой, то сколько всего учеников в классе?

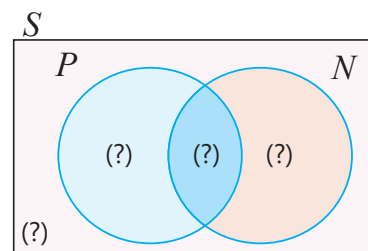
- 7 У каждого из 10 детей есть или скейтборд, или ролики, или и то, и другое. У 5 детей есть скейтборды, а у 8 – ролики.

- У скольких детей есть только скейтборд?
- У скольких детей есть только ролики?
- У скольких детей есть и скейтборд, и ролики?



- 8 Из 40 работников, участвующих в опросе, у 26 человек есть ноутбук, а у 16 — планшет. У 4 человек нет ни ноутбука, ни планшета.

- У скольких работников есть ноутбук, но нет планшета?
- У скольких работников есть планшет, но нет ноутбука?
- У скольких работников есть и ноутбук, и планшет?



- 9 Школьники поехали на 14 дней отдыхать в Губу. За это время 7 дней была дождливая погода, а 5 дней – ветреная. 4 дня не было ни дождя, ни ветра.

- Сколько дней погода была и дождливая, и ветреная?
- Сколько дней погода была дождливая или ветреная?
- Сколько ветреных дней не было дождя?



Из истории математики



Георг Кантор
(1845–1918)

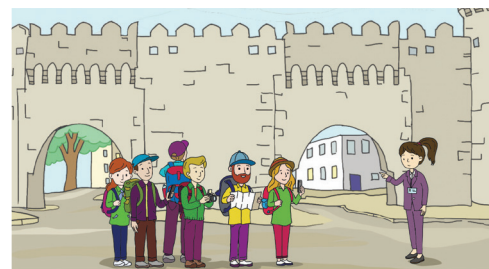
Немецкий ученый Георг Кантор (*Georg Cantor*) считается основоположником теории множеств. В 1878 году он написал статью, в которой первый раз включил понятие “множества”, и в ней доказал существование бесконечных множеств, имеющих разные мощности.

Изображение множеств в виде кругов, а его элементы в виде точек в первый раз предложил Леонард Эйлер (*Leonhard Euler*, 1707–1783). Затем благодаря работам английского ученого Джона Венна (*John Venn*, 1834–1923) эти диаграммы стали широко использоваться.

- 10 В жилом здании 40 квартир. Каждая квартира подписалась на газету, журнал или на то и другое. Число квартир, подписавшихся на газету, 28, а число квартир, подписавшихся на журнал, меньше этого числа на 10 единиц. Сколько квартир подписались и на газету, и на журнал?



- 11 В группе туристов 25 человек. Из них 4 человека не знают ни английского, ни немецкого языков. Остальные знают хотя бы один из этих языков. 5 человек знают и английский, и немецкий. Сколько туристов знают только один из этих языков?



- 12 Был проведен опрос среди 60 человек, у которых спросили: “Откуда вы узнаете последние новости?” 80% участников ответили, что узнают из Интернета, 50% — из телевизионных передач, а часть из них — из обоих источников.
- Изобразите результаты опроса на диаграмме Эйлера-Венна.
 - Сколько человек узнают новости только из Интернета?
 - Сколько человек узнают новости только из телепередач?
 - Сколько участников узнают новости из обоих источников?
- 13 В школьной олимпиаде по математике приняли участие 15 из 25 учеников 6“А” класса, по информатике — 14 учеников. Из них 8 человек приняли участие в олимпиаде по обоим предметам. Сколько процентов учеников класса:
- участвовали в олимпиаде только по математике?
 - участвовали в олимпиаде только по информатике?
 - участвовали в школьной олимпиаде?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Множество

"Множество нечетных чисел":

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$5 \in A \quad 4 \notin A$$

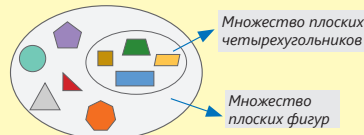
Пустое множество: $\emptyset$

Равные множества:

$$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{3, 5, 1\}$$

$$A = B$$

Подмножество

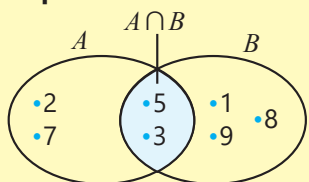


Если каждый элемент множества B принадлежит множеству A , то $B \subset A$.

$$\emptyset \subset A \quad A \subset A$$

Множества и операции над ними

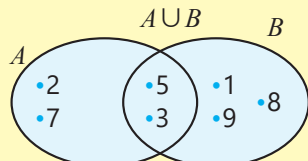
Пересечение множеств



$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$$

$$A \cap B = \{3, 5\}$$

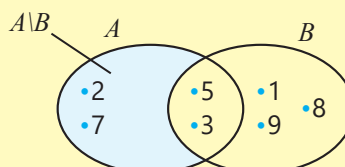
Объединение множеств



$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$$

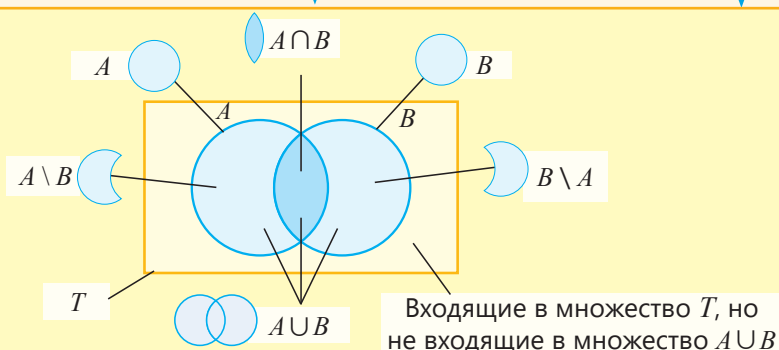
Разность множеств



$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$$

$$A \setminus B = \{2, 7\}$$

Диаграмма Эйлера-Венна



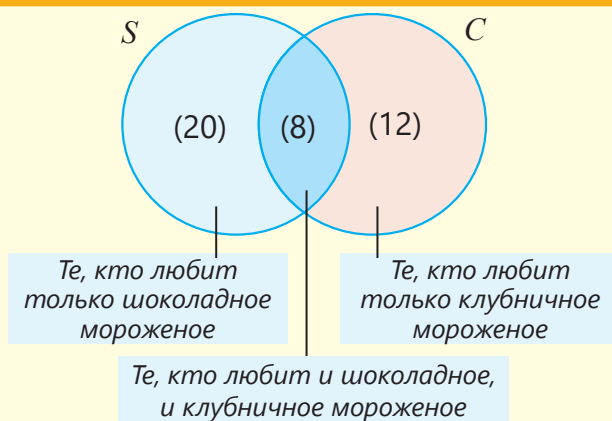
Решение исходной задачи

Пусть S — множество школьников, которые любят шоколадное мороженое, а C — множество школьников, которые любят клубничное мороженое. Эти множества изображаются на диаграмме Эйлера-Венна.

- Число школьников, которые любят шоколадное мороженое: $40 \cdot 0,70 = 28$.
- Число школьников, которые любят клубничное мороженое: $40 \cdot 0,50 = 20$.
- Число школьников, которые любят только шоколадное мороженое: $40 - 20 = 20$.
- Число школьников, которые любят только клубничное мороженое: $40 - 28 = 12$.
- Число школьников, которые любят и шоколадное, и клубничное мороженое: $40 - 20 - 12 = 8$ (человек).

$$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%$$

20% участников опроса любят оба мороженых.



ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Запишите множество, перечислив его элементы.

а) Множество гласных (S)

б) Множество планет Солнечной системы (P)

в) Множество естественных спутников Земли (T)

г) Множество океанов на планете Земля (O)

2. Запишите два подмножества из трех элементов заданного множества.

а) Множество геометрических фигур

б) Множество стран

в) Множество континентов

г) Множество цветов

д) Множество столиц

е) Множество животных

3. Запишите все элементы множества двузначных чисел, в записи которых используются только цифры 1, 2, 3, 4, и у которых цифра в разряде десятков меньше цифры в разряде единиц. Обозначьте полученное множество через A .

• Сколько элементов в этом множестве?

• Запишите с помощью соответствующих знаков, принадлежат или нет числа 21, 12, 34, 32, 13 множеству A .

4. Впишите подходящие элементы в пустые клетки, учитывая, что $A = B = C$.

$A = \{a, l, \square, k, f\}$

$B = \{\square, o, a, k, l\}$

$C = \{f, k, \square, o, \square\}$

5. Пусть P – множество чисел, меньших 20 и делящихся на 3, а F – множество делителей 24.

а) Запишите элементы множеств P и F , изобразите эти множества на диаграмме Эйлера-Венна.

б) Впишите подходящие символы $\in$ или $\notin$ в пустые клетки.

6 $\square P$

6 $\square F$

9 $\square P$

9 $\square F$

8 $\square P$

8 $\square F$

6. Запишите элементы заданных множеств, обозначьте их. Изобразив на диаграмме Эйлера-Венна, определите, какое множество является подмножеством другого.

а) Множество делителей 18 и множество однозначных чисел, делящихся на 3

б) Множество двузначных простых чисел, меньших 20, и множество нечетных чисел, меньших 20

7. Напишите соответствующие подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

а) Одноэлементные подмножества

в) Трехэлементные подмножества

б) Двухэлементные подмножества

г) Подмножества, в которых нет элементов

8. Определите, верно или нет утверждение.

а) Множество целых чисел является подмножеством множества натуральных чисел.

б) Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел.

в) Множество простых чисел является подмножеством множества натуральных чисел.

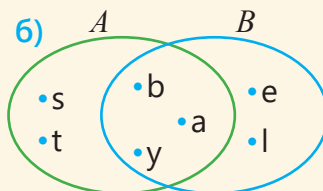
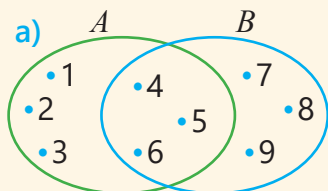
9. Запишите множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ и изобразите на диаграмме Эйлера-Венна.

а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

б) $A = \{a, p, б, y, з\}$
 $B = \{з, p, y, ш, а\}$

в) $A = \{\text{мука, масло, молоко}\}$
 $B = \{\text{молоко, масло, сахар, яйца}\}$

10. Запишите элементы множеств A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ по диаграмме Эйлера-Венна.



11. C — множество четных чисел, меньших 30, а D — множество чисел, меньших 30 и делящихся на 3. Запишите элементы этих множеств. Изобразив на диаграмме Эйлера-Венна, запишите элементы множеств $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$. Найдите число элементов этих множеств.

12. A — множество натуральных чисел, меньших или равных 20, B — множество делителей 20, а C — множество делителей 15.

а) Запишите множества B , C , $B \cup C$, $B \cap C$, $B \setminus C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$ и $C \setminus B$, перечислив элементы.

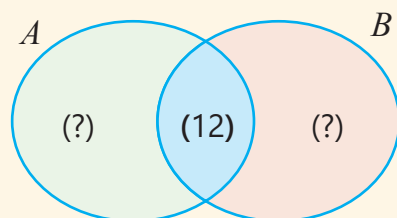
б) Изобразите множества A , B и C на диаграмме Эйлера-Венна.

13. Множество A имеет 30 элементов, множество B — 20 элементов, а множество $A \cap B$ имеет 12 элементов.

а) Сколько элементов принадлежат A , но не принадлежат B ?

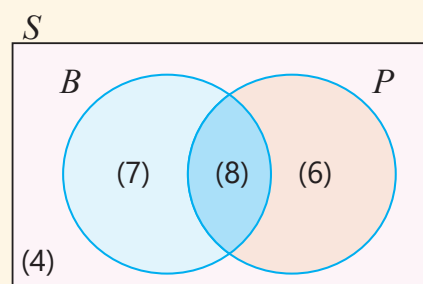
б) Сколько элементов принадлежат B , но не принадлежат A ?

в) Сколько элементов имеет множество $A \cup B$?



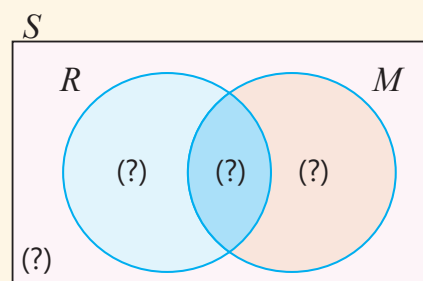
14. B — множество учеников в классе, которые любят бананы, P — множество учеников, которые любят апельсины, а S — множество учеников класса. На диаграмме Эйлера-Венна дана информация об их количестве.

- Сколько учеников любят только бананы?
- Сколько учеников любят только апельсины?
- Сколько учеников любят бананы?
- Сколько учеников любят апельсины?
- Сколько учеников участвовало в опросе?
- Сколько учеников любят бананы или апельсины?

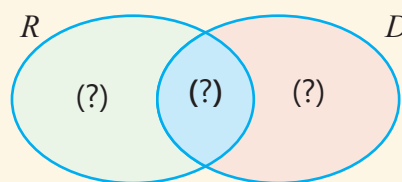


15. Из 25 учеников в классе 20 человек записаны хотя бы в один из кружков по музыке или рисованию. M — множество учеников, записанных в кружок по музыке, R — множество учеников, записанных в кружок по рисованию, а S — множество учеников класса. Из них 15 человек занимаются музыкой, а 10 человек — рисованием.

- Сколько учеников не ходят ни на музыку, ни на рисование?
- Сколько учеников записаны только в кружок по рисованию?
- Сколько учеников записаны только в кружок по музыке?
- Сколько учеников записаны в оба кружка?



16. Каждый из 30 учеников класса занимается хотя бы в одном из кружков по рисованию или театральном кружке. В кружке по рисованию 14 учеников. А в театральном кружке — в 2 раза больше учеников. Сколько процентов учеников занимаются в обоих кружках?



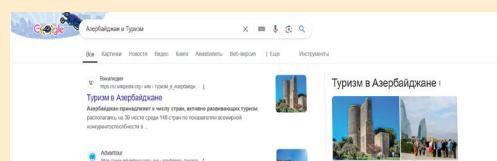
17. В киоске продаются газеты "Жизнь" и "Спорт". 60% жителей города читают газету "Жизнь", 70% — газету "Спорт", а 20% — ни одну из этих газет. Ответьте на вопросы, изобразив на диаграмме Эйлера-Венна.



- Сколько процентов жителей читает обе газеты?
- Сколько процентов жителей читает хотя бы одну из этих газет?
- Сколько процентов жителей читает только газету "Жизнь"?
- Сколько процентов жителей читает только газету "Спорт"?

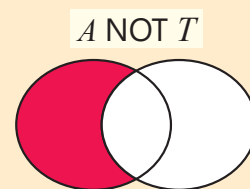
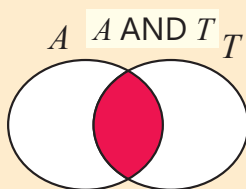
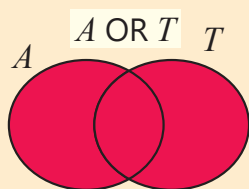
STEAM ПОИСКОВЫЕ СИСТЕМЫ

Специальные программы — поисковые системы — используются для выбора необходимого из большого количества информации в Интернете. Каждая поисковая система имеет свою базу данных. Поэтому при поиске по одному и тому же ключевому слову в разных системах результаты будут разными. Например, на рисунке представлен результат поиска информации по ключевым словам: *Азербайджан* и *Туризм*. В информации, найденной в результате поиска, заданного таким способом, ключевые слова могут располагаться в произвольном порядке или же можно указать одно из них.



Логические операции AND (И), OR (ИЛИ) и NOT (НЕ) используются для того, чтобы сделать поиск в Интернете более конкретным. Запись логической операции AND между ключевыми словами указывает на то, что оба слова присутствуют в искомых данных. Логическая операция OR выражает условие наличия хотя бы одного из двух слов. Операция NOT означает, что после этой операции в искомой информации нет указанного слова. Эти операции соответствуют пересечению, объединению и разности множеств соответственно.

1. Пусть A — множество текстов со словом "Азербайджан", T — множество текстов со словом "Туризм". Объясните результат каждой операции, изображенной на диаграмме Эйлера-Венна.



2. Откройте на компьютере или мобильном телефоне поисковую систему с самым высоким рейтингом и по очереди введите приведенные поисковые запросы. Запишите количество результатов для каждого поиска и изучите первые пять результатов.

- Азербайджан OR Туризм
- Азербайджан AND Туризм
- Азербайджан NOT Туризм

3. Соберите информацию о 5 лучших поисковых системах по мировым рейтингам и о том, как они работают.

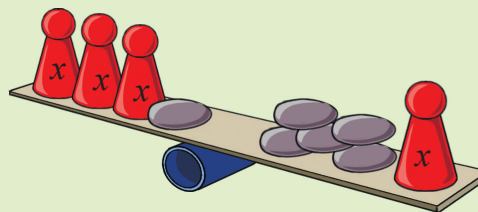
Выражения с переменной. Уравнение. Неравенство

В этой главе вы научитесь:

- составлять математические выражения с двумя переменными
- раскрывать скобки в выражениях с двумя переменными, приводить подобные члены и упрощать выражения
- выносить общий множитель за скобки
- вычислять значение выражения при заданных значениях переменных
- решать простые уравнения в множестве целых чисел
- использовать уравнения и неравенства при решении задач
- находить целые решения простых неравенств методом подбора

До Средневековья в математических трудах специальные знаки для краткой записи правил почти не использовались. Аль-Хорезми, живший в VIII веке, в своих работах по математике записывал уравнения словами, а не математическими символами. С XVI века, чтобы обобщить правила, числа стали обозначать буквами. Это также облегчило моделирование и решение реальных задач с помощью уравнений и неравенств.

В современном мире выражения, уравнения и неравенства широко используются не только при решении научных задач, но и при решении бытовых задач.



Попытайтесь!

Компания мобильного оператора предлагает два тарифа.

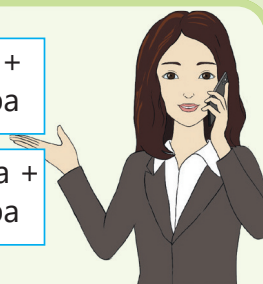
- Запишите соответствующие выражения, чтобы рассчитать, сколько платит клиент, разговаривающий t минут в месяц по каждому тарифу.
- Какой тариф выбрать абоненту, который разговаривает 100 минут в месяц, чтобы платить меньше?
- Какой тариф выбрать абоненту, который платит 45 манатов в месяц, чтобы разговаривать больше?
- Стоимость скольких минут разговора будет одинаковой по обоим тарифам?
- Может ли абонент, выбравший 1-й тариф, заплатить 50 манатов и разговаривать 600 минут?

1

Ежемесячная 9 ₴ подписка + 0,08 ₴ за 1 минуту разговора

2

Ежемесячная 12 ₴ подписка + 0,06 ₴ за 1 минуту разговора



Предварительная проверка

1 Запишите в виде математического выражения.

а) сумма c и 2, увеличенная в 3 раза

в) разность двукратного значения x и 5

б) сумма двукратного значения c и 3

г) двукратное значение разности x и 5

2 Упростите и вычислите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $5x + 3x$

б) $8c + 3c - 4c$

в) $2 \cdot (a + 5) - 3$

г) $3 \cdot (y + 3) + 2y$

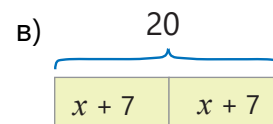
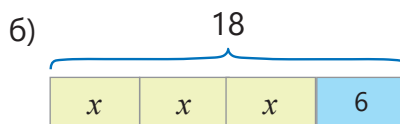
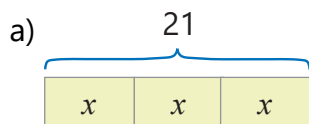
$x = 1; 25$

$c = 3; 2$

$a = 0,5; 4$

$y = 0; \frac{2}{5}$

3 Напишите уравнение, соответствующее рисунку, и решите его.



4 Решите уравнения.

а) $4x + 3 = 23$

б) $4x + 3x = 3,5$

в) $5 \cdot (x + 3) = 40$

г) $(x - 4) : 3 = 2$

5 Ответьте на вопросы, написав и решив уравнение.

а) Какое число следует умножить на 3 и к полученному произведению прибавить 5, чтобы получить в сумме 29?

б) Из какого числа следует вычесть 3 и полученную разность разделить на 4, чтобы получить в частном 5?

6 В корзине m кг яблок. Яблоки в ящике на 6 кг тяжелее яблок в корзине.

- Запишите математическое выражение для нахождения общего количества яблок в корзине и ящике.

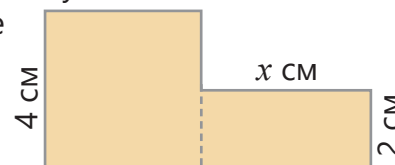
- Вычислите значение этого выражения при $m = 4$.

7 На рисунке дана фигура, которая составлена из квадрата и прямоугольника.

- Запишите выражение с переменной, соответствующее площади фигуры.

- Вычислите значение этого выражения при $x = 3$.

- При каком значении x площадь фигуры будет 25 см^2 ?



8 Изобразите решение неравенства на числовой оси и найдите искомое число.

наибольшее натуральное число

а) $x < 6$

б) $x \leq 6,2$

в) $4 \geq x$

наименьшее натуральное число

а) $x > 7$

б) $x \geq 5,8$

в) $3 \leq x$

9 Самир по утрам занимается спортом не менее 10 минут. Каким неравенством можно выразить количество минут (n), которые уделяет Самир на спорт по утрам?

$n < 10$

$n \geq 10$

$n > 10$

$n \leq 10$

10 В бидоне 5 л молока. 6 раз заполнив кувшин молоком до краев, его опорожняли в бидон. После этого в бидоне стало 17 л молока. Какова емкость кувшина?



6.1. Выражения с переменной



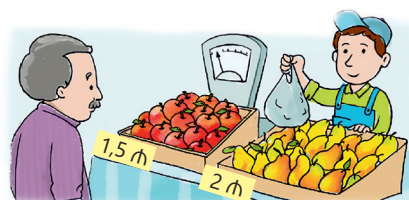
Ключевые слова

- постоянная
- коэффициент

Исследование-обсуждение

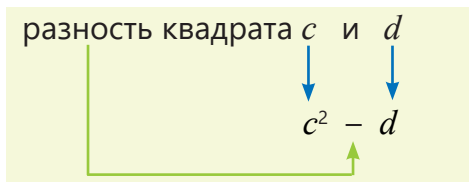
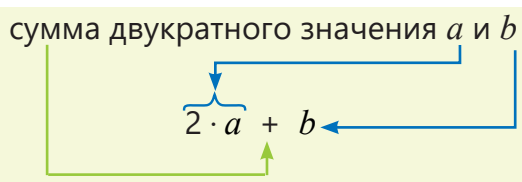
Покупатель купил m кг яблок и n кг груш.

- Сколько нужно заплатить за яблоки?
- Сколько нужно заплатить за груши?
- Сколько всего нужно заплатить за фрукты?
- Если покупатель купит 3 кг яблок и 2 кг груш, то как можно найти, сколько всего он заплатит за фрукты?

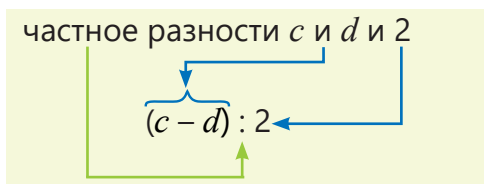
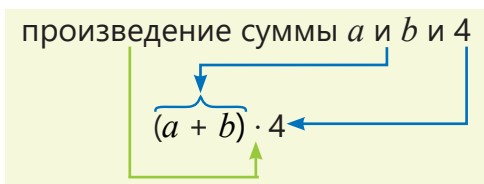


Изучение Выражения с двумя переменными

В некоторых задачах может быть несколько переменных. Записав соответствующие математические выражения, эти переменные обозначаются различными буквами. В выражение может входить и переменная со степенью.



- В выражениях со скобками следует уделить внимание правильной расстановке скобок.



Задания

- Прочтите данные выражения.

ОБРАЗЕЦ $3x - y^3$	
Читается	Объяснение
разность 3-кратного значения x и куба y	разность 3-кратного значения x и куба y
а) $4a + 3b$	б) $3 \cdot (a + b)$
в) $2c - d$	г) $2 \cdot (c - d)$
	д) $m^3 + 5n$

- Запишите в виде математического выражения.
 - сумма 5-кратного значения m и n
 - произведение разности a и b и числа 3
 - разность 4-кратного значения c и 2-кратного значения d
 - сумма куба x и квадрата y

3 Дополните таблицу.

а)

a	2	-3	-4	3	-5
b	3	4	-3	-6	-2
$2a + b$					

б)

m	3	-2	-4	-1	2
n	5	4	-5	-6	3
$m^2 - 5n$					

4 Запишите выражение с переменной в соответствии с заданием. Вычислите значение выражения при заданных значениях переменных и объясните полученный результат.

ОБРАЗЕЦ На стройке работают 3 бригады, в каждой из которых по m работников, и 2 бригады, в каждой из которых по n работников.

- Напишите выражение для нахождения общего количества работников на стройке.
- Вычислите значение выражения при $m = 8$, $n = 6$.

Решение	Объяснение
$3m + 2n$	В 3 бригадах, в которых по m человек, всего $3m$ работников, а в 2 бригадах, в которых по n человек, всего $2n$ работников. Записывается выражение для нахождения количества работников.
$3 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 36$	Подставляя значения переменных, вычисляется значение выражения. На стройке трудятся 36 работников.

Лала купила a тетрадей по 0,40 ₴ и b тетрадей по 0,80 ₴.

- Напишите выражение для вычисления суммы денег, которую заплатит Лала.
- Вычислите значение выражения при $a = 5$ и $b = 10$.

б) Основание равнобедренного треугольника a см, а боковые стороны b см.

- Напишите выражение для вычисления периметра треугольника.
- Вычислите значение выражения при $a = 8$ и $b = 7$.

в) Площадь одного участка m гектаров, а другого – n гектаров. С первого участка собрали по 3 тонны урожая с каждого гектара, а со второго – по 4 тонны.

- Напишите выражение для вычисления общего количества урожая, собранного с двух участков.
- Вычислите значение выражения при $m = 20$, $n = 15$.

5 Один ящик с персиками весит a кг, а один ящик с черешней — b кг. Составьте задачу, соответствующую выражению.

а) $a + b$

б) $2a + b$

в) $3a + 3b$

г) $a + 3b$

д) $a : b$

6 Вычислите значения выражений при заданных значениях переменной и сравните.

а) $5x + 3y$ и $3x + 5y$
 $x = 5; y = 3$

в) $10x - 3y$ и $10x + 3y$
 $x = 0,2; y = -3$

д) $a + b^2$ и $a^2 + b$
 $a = 1; b = -1$

б) $4a + b$ и $4(a + b)$
 $a = 5; b = -3$

г) $d^2 + c$ и $-2d + 5$
 $d = -2; c = 5$

е) $a + b^3$ и $a^3 + b$
 $a = -1; b = -2$

Изучение Коэффициент

Числовой множитель в выражении, состоящем из числа и переменной, называется **коэффициентом**. Например, в выражении $4x$ коэффициент равен 4, а в выражении $-3y$ коэффициент равен -3 . Обычно коэффициент записывается перед *буквенной частью*. Используя свойства умножения, в произведении из чисел и переменных коэффициент можно найти так.

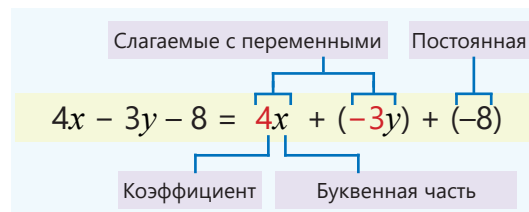
$$5x \cdot (3y) = 5 \cdot x \cdot 3 \cdot y = (5 \cdot 3) \cdot (x \cdot y) = 15xy$$

Здесь *коэффициент* равен 15, а xy — *буквенная часть*.

В математическом выражении согласно равенству $a - b = a + (-b)$ вычитание можно заменить сложением.

Например, поскольку $4x - 3y - 8 = 4x + (-3y) + (-8)$ в выражении $4x - 3y - 8$ есть три слагаемых: $4x$, $-3y$ и -8 .

Здесь $4x$ и $-3y$ слагаемые с переменными, а -8 постоянная.



Подумай!

Чему равен коэффициент в выражениях xy и $-m$? Как это можно объяснить?

- 7 Найдите коэффициент в выражении.

а) $8a$

б) $12mk$

в) $-17xy$

г) $0,5b$

д) $\frac{3}{4}c$

- 8 Найдите коэффициент.

ОБРАЗЕЦ $-6x \cdot 2y$

Решение	Объяснение
$-6x \cdot 2y = -6 \cdot 2 \cdot xy = -12xy$ Ответ: коэффициент -12	Используются свойства умножения. Находится числовой множитель.

а) $4m \cdot 2$

б) $7x \cdot (-3)y$

в) $4m \cdot 3k$

г) $0,5x \cdot 6ny$

д) $6x \cdot \frac{2}{3}y$

- 9 Запишите выражения в виде суммы слагаемых, найдите коэффициенты слагаемых с переменными.

ОБРАЗЕЦ $x - 2y + 7$

Решение	Объяснение
$x - 2y + 7 = x + (-2y) + 7$ x $-2y$ 7	Записывается в виде суммы трех слагаемых. Слагаемое с переменной, коэффициент равен 1. $x = 1 \cdot x$ Слагаемое с переменной, коэффициент равен -2 . Постоянная.

а) $7a - 3$

б) $4 - c$

в) $5m + 3n$

г) $7c - 7d$

д) $-6x + 2y + 5$

е) $4ab - 5$

- 10 Ответьте на вопросы, записав выражения с переменной, и найдите коэффициент.

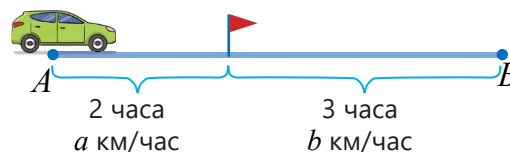
а) Автомобиль проехал расстояние между пунктами A и B со скоростью a км/час за 6 часов. Каковы $\frac{2}{3}$ части расстояния между пунктами A и B ?

б) Цена ручки до скидки была p манатов. Если цена понизилась на 20%, то сколько манатов заплатит покупатель за 8 ручек?

Решение задач

- 11) Сабина и Эльхан наклеили свои стикеры в альбом. Сабина наклеила стикеры на 3 страницах по x стикеров на каждой странице, а Эльхан наклеил стикеры на 2 страницах по y стикеров на каждой странице. Запишите выражение для нахождения общего числа стикеров у них.
- а) Если Эльхан отдаст половину своих стикеров Сабине, то сколько стикеров будет у каждого из них?
- б) Если Сабина отдаст $\frac{1}{3}$ часть своих стикеров Эльхану, то сколько стикеров будет у каждого из них?

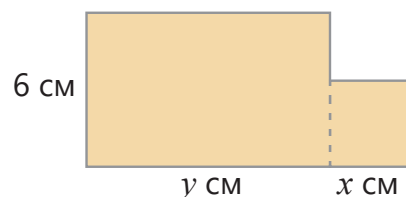
- 12) Автомобиль выехал из пункта A и, проехав 2 часа со скоростью a км/час, а следующие 3 часа — со скоростью b км/час, доехал до пункта B .



- Выразите расстояние между пунктами A и B через a и b .
- Вычислите значение выражения при $a = 80$ и $b = 70$.

- 13) На рисунке фигура состоит из прямоугольника и квадрата.

- Выразите площадь фигуры через x и y .
- Вычислите площадь фигуры при $x = 4$ и $y = 7$.
- При каком значении y площадь фигуры будет 85 см^2 , если $x = 5$?



- 14) Туристы отправились на прогулку по реке на a трехместных и b четырехместных резиновых лодках.

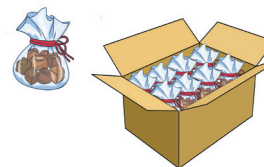
- Напишите выражение для вычисления количества туристов, которые прокатятся, если все лодки будут заполнены.
- Вычислите значение выражения при $a = 5$ и $b = 2$.
- Если всего на прогулку отправилось 17 человек, то сколько было трехместных лодок?



- 15) Сумка стоит p манатов, а ремень — q манатов.

- Если цена сумки снизится на 20%, а цена ремня — на 30%, то сколько всего заплатит покупатель за покупку по 1 штуке каждого из них?
- Сколько манатов заплатит покупатель за сумку и ремень со скидкой, если $p = 40$ и $q = 20$?

- 16) Шоколадные конфеты стоимостью y манатов были упакованы в пакеты по 8 штук и помещены в большие коробки. Если в каждой коробке 14 пакетов, какое выражение можно записать, чтобы вычислить стоимость одной коробки шоколадных конфет? Найдите коэффициент.



- 17) Из-за скидок в магазине цены на все товары были снижены сначала на 25%, а затем еще на 20%. Какое выражение можно написать, чтобы найти цену после скидки товара, изначальная цена которого x манатов? Найдите коэффициент.

- 18) Составьте задачу, соответствующую выражению с заданной переменной, и решите.

а) $3n + 2m$

б) $4m - n$

в) $2 \cdot (x + y)$

г) $x^2 + xy$

6.2. Раскрытие скобок в математических выражениях

Исследование-обсуждение

Утром в овощной магазин привезли 150 кг картофеля. До полудня было продано m кг картофеля, а после полудня – n кг.

- Сколько всего кг картофеля было продано за день? Сколько кг картофеля осталось в магазине?
- Как это можно записать двумя способами в виде выражения с переменной?
- Сколько кг картофеля останется в магазине, если до полудня было продано 97 кг, а после полудня – 43 кг?



Изучение Раскрытие скобок в математических выражениях

Значение выражений со скобками можно вычислять различными способами.

Например, значение выражения $17 + (23 + 8)$ можно найти двумя способами.

1. Вычисляя значение выражения в скобках. $17 + (23 + 8) = 17 + 31 = 48$

2. Раскрывая скобки. $17 + (23 + 8) = 17 + 23 + 8 = 48$

При раскрытии скобок со знаком “+” перед ними или без всякого знака скобки отбрасываются, а слагаемые внутри записываются со своими знаками.

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + b + c \\ 12 + (18 + 29) &= 12 + 18 + 29 = 59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= a + b - c \\ 14 + (26 - 43) &= 14 + 26 - 43 = -3 \end{aligned}$$

• Также можно вычислить значение выражений, раскрыв скобки со знаком “–” перед ними. Например, значение выражения $95 - (25 + 17)$ можно найти как путем вычисления значения выражения внутри скобок, так и раскрыв скобки.

1. Вычисляя значения выражения в скобках. $95 - (25 + 17) = 95 - 42 = 53$

2. Раскрывая скобки. $95 - (25 + 17) = 95 - 25 - 17 = 53$

При раскрытии скобок со знаком “–” перед ними скобки отбрасываются, а слагаемые внутри записываются с противоположными знаками.

$$\begin{aligned} a - (-b) &= a + b \\ 33 - (-7) &= 33 + 7 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a - b - c \\ 23 - (3 + 8) &= 23 - 3 - 8 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - (b - c) &= a - b + c \\ 17 - (12 - 5) &= 17 - 12 + 5 = 10 \end{aligned}$$

Задания

1 Вычислите, раскрыв скобки. Проверьте ответ, вычислив значение выражения в скобках.

а) $13 + (17 + 66)$

в) $59 + (8 - 17 + 6)$

д) $15 - (15 - 31 - 5)$

ж) $53 - (23 + 10 + 7)$

б) $28 + (12 - 18)$

г) $23 - (3 + 8 + 12)$

е) $32 - (12 - 21)$

з) $18 - (8 + 5 - 10)$

2 Раскройте скобки и упростите, если возможно.

а) $7 + (x - 5)$

в) $x + (x + 10)$

д) $2 - (x + y)$

ж) $17 - (12 - k + m)$

б) $11 - (x - 3)$

г) $x + (3 - x)$

е) $a - (3 - b)$

з) $21 - (31 - x - y)$

3 Раскройте скобки и вычислите значение выражения, если $x + y = 4$.

а) $x + (y - 7)$

б) $x - (3 - y)$

в) $(x + 5) + (y - 12)$

г) $(x - 8) - (3 - y)$

Изучение Раскрытие скобок по распределительному свойству умножения

Используя распределительное свойство умножения, можно раскрыть скобки. Например:

$$2 \cdot (a + 2b - 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot 2b - 2 \cdot 1 = 2a + 4b - 2$$

• Если число перед скобками отрицательное, то, применяя распределительное свойство, знаки слагаемых меняются на противоположные.

$$-3 \cdot (x - 3y - 5) = -3 \cdot (x + (-3y) + (-5)) = -3 \cdot x + (-3) \cdot (-3y) + (-3) \cdot (-5) = -3x + 9y + 15$$

4 Вычислите двумя способами.

$2 \cdot (3 - 4)$

$-2 \cdot (4 - 7)$

$2 \cdot (-4 + 1)$

$-6 \cdot (-2 - 8)$

$-1 \cdot (4 + 2 - 7)$

$-4 \cdot (1 - 8 - 3)$

5 Раскройте скобки.

ОБРАЗЕЦ а) $3 \cdot (2n - 7m - 5)$ б) $-4 \cdot (3x - 2y + 5)$

Решение

а) $3 \cdot (2n - 7m - 5) = 6n - 21m - 15$

б) $-4 \cdot (3x - 2y + 5) = -12x + 8y - 20$

Объяснение

Поскольку множитель (+3) положительный, то знаки слагаемых не меняются.

Поскольку множитель (-4) отрицательный, то знаки слагаемых меняются на противоположные.

в) $3 \cdot (x - 2y - 7)$

д) $-7 \cdot (2c - 5d + 2)$

ж) $(5a - 4b - 2)$

и) $-(3y - 2x - 8)$

г) $5 \cdot (-x + 3y - 2)$

е) $-3 \cdot (-4c + 2d - 8)$

з) $(-6a + 7b - 4)$

к) $-(-9y + x + 1)$

6 Проверьте правильность равенства. Запишите в тетрадь правильное решение.

а) $5 \cdot (-x + 3y - 4) = 5x + 15y + 20$

в) $-3 \cdot (c - 7d - 2) = -3c + 21d + 6$

б) $-(m - 4n + 8) = -m + 4n + 8$

г) $5 \cdot (-x + 3y - 4) = 5x + 15y + 20$

7 Впишите в пустые клетки такие числа, чтобы равенство было верным при любых значениях переменных.

$-8 \cdot (2n - 3m) = \square n + 24m$

$-(\square c - 6d + 3) = 4c + \square d - 3$

$6 \cdot (3x - \square y) = \square x - 12y$

Изучение Вынесение общего множителя за скобки

Если у слагаемых в математическом выражении есть общий множитель, то по распределительному свойству умножения этот множитель можно вынести за скобки. Например:

$$4x + 6y - 8 = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3y - 2 \cdot 4 = 2 \cdot (2x + 3y - 4)$$

- 8 Вынесите общий множитель за скобки.

ОБРАЗЕЦ $6n - 9m - 15$

Решение	Объяснение
$6n - 9m - 15 = 3 \cdot 2n - 3 \cdot 3m - 3 \cdot 5 =$ $= 3 \cdot (2n - 3m - 5)$	Поскольку $6 = 3 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, 3 является общим множителем. Общий множитель выносится за скобки.

а) $8x - 8y$

в) $-4c - 4d$

д) $5a - 15b$

ж) $4y - 8x - 8$

б) $7x + 7y$

г) $-5c + 5d$

е) $-6a + 9b$

з) $9y + 6x - 12$

- 9 Чей ответ верный?



$$-3x + 2y = -(3x - 2y)$$

Эльхан

$$-3x + 2y = -(3x + 2y)$$



Айнур

- 10 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство было верным при любом значении переменной.

а) $16n - 12m = \square \cdot (4n - 3m)$

б) $9c + \square d = \square \cdot (3c + 7d)$

в) $\square x - 12y = -6 \cdot (3x + \square y)$

- 11 Вынесите общий множитель за скобки и вычислите значение выражения.

а) $3x + 3y$

$x = 72; y = -77$

б) $15a - 15b$

$a = -49; b = -53$

в) $6m + 12n$

$m = 21; n = -13$

- 12 Вычислите значение выражения, если $x - 2y = 4$.

а) $2x - 4y$

б) $3x - 6y$

в) $-5x + 10y$

г) $-4x + 8y - 12$

Решение задач

- 13 Запишите выражение для нахождения длины третьей стороны треугольника, если его периметр равен 30 единицам, а длины двух сторон равны a и b .

• Если $a = 12$, $b = 10$, то какова длина третьей стороны? Как найти это двумя способами?

- 14 Чтобы приготовить 100 штук пахлавы, кондитер потратил на продукты 109 манатов, а на приготовление 100 штук шекербуры — 91 манат.

• Цена одной пахлавы составляет a манатов, цена одной шекербуры — b манатов. Сколько прибыли было получено от продажи всей пахлавы и шекербуры? Напишите соответствующее выражение и вынесите общий множитель за скобки.

• Если $a = 1,50$ и $b = 1,10$, найдите прибыль двумя способами.



6.3. Упрощение выражений с переменными

Исследование-обсуждение

В кувшине 2 л молока. Сначала в кувшин налили 1 стакан молока, а затем вылили из него 2 стакана молока. Если емкость стакана m литров, то сколько молока осталось в кувшине? Как это можно записать в виде математического выражения?

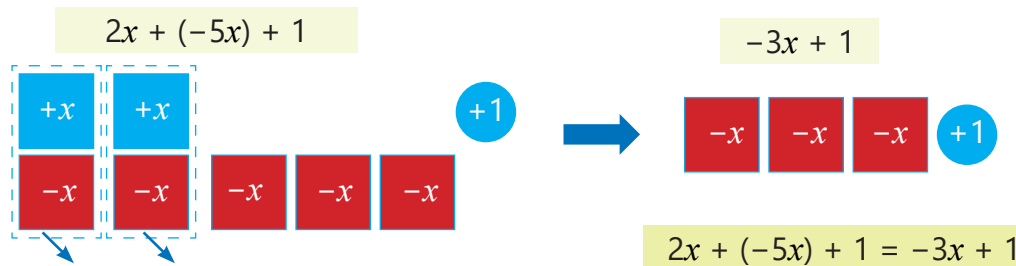


Ключевые слова

- подобные слагаемые
- приведение подобных слагаемых

Изучение Подобные слагаемые и их приведение

В выражениях с переменной одинаковые слагаемые или слагаемые, которые отличаются только коэффициентами, называют **подобными слагаемыми**. Например, $2x$ и $(-5x)$ являются подобными слагаемыми в выражении $2x + (-5x) + 1$. Если в выражении есть подобные слагаемые, то их сумму можно заменить одним слагаемым. Это называется **приведением подобных слагаемых**.



Сумма слагаемых, отличающихся только знаком, равна 0.

$$2x + (-2x) = 0$$



Запомни!

Чтобы сложить подобные слагаемые, нужно сложить их коэффициенты и полученное число записать перед буквенной частью. Например,

$$3x + 7x = 10x \quad \text{или} \quad 2x + (-5x) = -3x$$

Задания

1 Найдите подобные слагаемые.

$$2x - 4 + 5x$$

$$7 - 2a + 7a$$

$$3d - 3c + 4d$$

$$3 - 5n + 7n$$

$$6m - 3n + m + 2n$$

$$-m + m + 5$$

$$-b + 12 - b$$

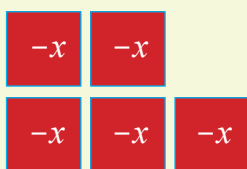
$$5k - 3 + 4k$$

$$2x - 3 + 3x - y$$

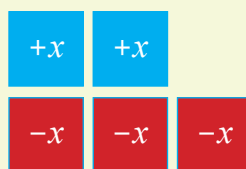
$$4a - 2b + a + 4a$$

2 Найдите сумму, используя рисунок.

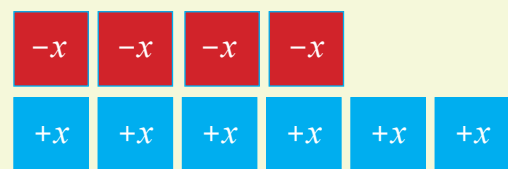
а) $-2x + (-3x)$



б) $2x + (-3x)$



в) $-4x + 6x$



3 Приведите подобные слагаемые.

ОБРАЗЕЦ $2n - 7n - 5n$

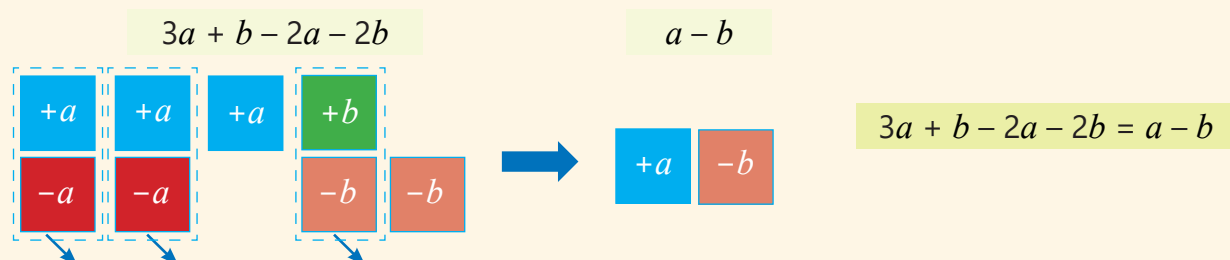
Решение	Объяснение
$2n - 7n - 5n = (2 - 7 - 5) \cdot n = -10n$	Общий буквенный множитель выносится за скобки и упрощается.

$5c - 8c$	$6n - 14n + n$	$-a + 8a - 7a$	$-x + 3 + 2x$	$2m - 2 - 5m + m$
$-4x - 3x$	$3y - 2y - 4y$	$7k + 2k + 2k$	$b - 5 - 3b$	$8n - 2n - 10n + 5n$



Внимание!

В заданном выражении может быть несколько групп подобных слагаемых. Например, в выражении $3a + b - 2a - 2b$ подобными слагаемыми являются $3a$ и $(-2a)$, а также b и $(-2b)$.



• Используя свойства сложения и умножения, можно привести подобные слагаемые, вынося общий буквенный множитель за скобки. Например:

$$\underline{5x} + 2 - \underline{3x} - 8 = (5 - 3) \cdot x + 2 - 8 = 2x - 6$$

$$\underline{4a} + \underline{3b} - \underline{2a} + \underline{5b} = (4 - 2) \cdot a + (3 + 5) \cdot b = 2a + 8b$$

Обычно подобные слагаемые отмечают, подчеркнув их одинаковым числом линий.

4 Приведите подобные слагаемые.

$8c - 3 + 6c - 3$	$4x - 9x + y + 3y$	$n - 2n - 5m + 2m$	$7c - 10d - 2c + 2d - 1$
$1 + b - 2 + 3b$	$6m - 4n + 4n - 7m$	$4x - 6y + 6x + 2y$	$2c - d - d - c + 5c + 4$

5 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство было верным при любом значении переменной.

а) $\square n + 3n + 9n = 8n$

в) $m - 4m - m = \square m$

д) $\square y + 6y + 9t + t = 4y + 10t$

б) $\square x - 2x + x = -5x$

г) $c + 5c - \square c = -c$

е) $n - 7n + \square m + m = \square n + 9m$

6 Упростите и вычислите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $3x - 23x$
 $x = -17$

б) $6a - 8a - 8a$
 $a = 13$

в) $-3y - 6y + 3y$
 $y = 15$

г) $13x + 8x + 7y - 20x$
 $x = 17 \quad y = 3$

Изучение Упрощение выражений

Применяя свойства действий, можно упрощать выражения с переменной. Например, чтобы упростить выражение $3 \cdot (2c - 5) - (4c - 7)$, сначала раскрываются скобки, затем отмечаются и приводятся подобные слагаемые.

$$3 \cdot (2c - 5) - (4c - 7) = \underline{6c} - 15 - \underline{4c} + 7 = 2c - 8$$

7 Упростите.

ОБРАЗЕЦ $-(n + 2m) + 2 \cdot (n - 3m - 1)$

Решение		Объяснение	
$-(n + 2m) + 2 \cdot (n - 3m - 1) =$ $= \underline{-n} - \underline{2m} + \underline{2n} - \underline{6m} - 2 =$ $= n - 8m - 2$		Раскрываются скобки и отмечаются подобные слагаемые. Подобные слагаемые приводятся.	
$4x - 5 \cdot (x - 2)$	$2 \cdot (x - 5) - (x - 3)$	$2 \cdot (a - b) - (a + b)$	$3 \cdot (c - 2d) - (4c + d - 6)$
$3 \cdot (4 - x) - 5x$	$-(7 - x) - 6 \cdot (x - 1)$	$-3 \cdot (m + n) - (n - m)$	$5 \cdot (2a - b - 2) - (a + b - 5)$

8 Упростите и вычислите значение выражения при заданном значении переменной.

а) $3 \cdot (x - 2) - (5x - 8)$
 $x = -4$

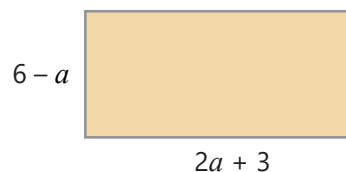
б) $2 \cdot (a - 4b) - (5a - b)$
 $a = -2 \quad b = 3$

в) $m - 2d - (4m - 2d)$
 $m = -6$

Решение задач

9 Напишите выражение для вычисления периметра прямоугольника на рисунке и упростите его.

• Если периметр прямоугольника составляет 24 единицы, то какова его площадь?

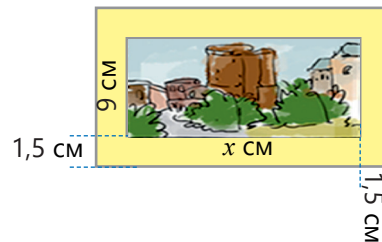


10 Цена яблочного сока a манатов. Гранатовый сок дороже удвоенного этого значения на b манатов.

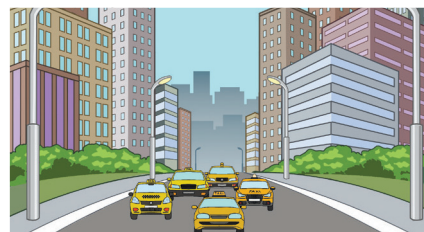
- На сколько гранатовый сок дороже яблочного?
- Айнур купила 3 яблочных и 2 гранатовых сока. Напишите выражение, соответствующее сумме денег, которую она заплатила.
- Сколько заплатила Айнур, если $a = 1,70$ и $b = 0,30$?

11 Рамка для картины была сделана из доски шириной 1,5 см. Самир поместил картину размерами x см на 9 см в эту рамку.

- Напишите выражение для вычисления площади рамки и упростите его.
- Если площадь рамки 81 см^2 , то сколько сантиметров составляет длина картины?



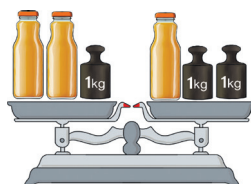
12 Стоимость проезда в такси в обычное время составляет 1 ₸ и дополнительно 0,30 ₸ за каждый километр. В час пик стоимость проезда составляет 1,50 ₸ и дополнительно 0,50 ₸ за каждый километр. Если пройденное расстояние равно d километров, на сколько стоимость проезда в час пик больше, чем в обычное время?



6.4. Уравнения

Исследование-обсуждение

Чтобы вычислить массы одинаковых бутылок по весам, которые находятся в равновесии, Анар, Лала и Сабина записанное на доске уравнение решили несколькими способами.



Ключевые слова

- эквивалентные уравнения (равносильные)
- $\Leftrightarrow$ – знак эквивалентности

$$2x + 1 = x + 2$$

$$2x + 1 - x = x + 2 - x$$

$$x + 1 = 2$$

$$x + 1 - 1 = 2 - 1$$

$$x = 1$$

$$2x + 1 = x + 2$$

$$2x = x + 2 - 1$$

$$2x = x + 1$$

$$2x - x = x + 1$$

$$2x - x = 1$$

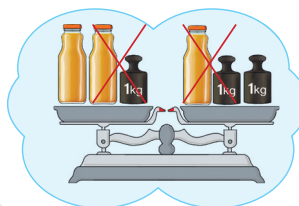
$$x = 1$$



Анар



Лала



Сабина

- Как можно объяснить способы их решения?
- Как можно записать решение Сабины в виде решения уравнения?

Изучение Эквивалентные уравнения

Уравнения, которые имеют одинаковые корни, называются **эквивалентными (равносильными) уравнениями**. Например, поскольку корнем обоих уравнений $x + 3 = 1$ и $3 = 1 - x$ является -2 , эти уравнения эквивалентны. Обычно эквивалентность обозначается символом $\Leftrightarrow$.

$$x + 3 = 1 \Leftrightarrow 3 = 1 - x$$



Внимание!

Если поменять местами левую и правую части уравнения, получится уравнение, эквивалентное исходному. $2x = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow 3 \cdot (x - 1) = 2x$

Задания

- 1 Определите эквивалентные уравнения, проверив, является ли заданное число корнем уравнения.

а)

-4

$$x + 6 = 2$$

$$6 = 2 + x$$

$$2x + 6 = 2 + x$$

в)

-2

$$2x + 1 = -3$$

$$-4 = 2x$$

$$x + 3 = 2$$

б)

-3

$$4 - x = 7$$

$$7 + x = 4$$

$$6 - 3x = 3 - 4x$$

г)

0

$$8 + x = 8$$

$$8x = 8$$

$$8x + 8 = 8$$

2

В пустую клетку впишите такое число, чтобы уравнения стали эквивалентными.

а) $x + 7 = 4 \Leftrightarrow x + 9 = \square$

в) $x - 4 = 3 \Leftrightarrow x + 1 = \square$

д) $3x + 2 = -1 \Leftrightarrow x + 1 = \square$

б) $4x = -8 \Leftrightarrow 8x = \square$

г) $2x + 1 = 11 \Leftrightarrow 3x = \square$

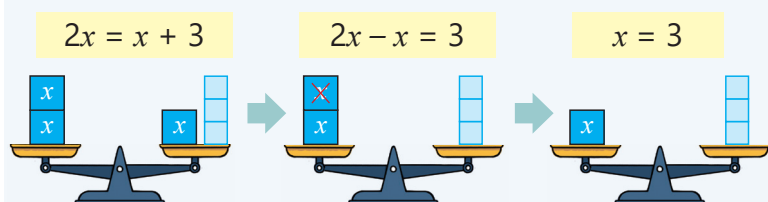
е) $2x + 2 = 2 \Leftrightarrow 9x = \square$

Изучение Решение уравнения путем приведения его к эквивалентному уравнению

Уравнение можно решить путем приведения к более простому эквивалентному уравнению. Для этого используют некоторые свойства равенства.

- Если к обеим частям уравнения прибавить или отнять одно и то же число, новое уравнение будет эквивалентно исходному. Например, если к обеим частям уравнения $2x = x + 3$ прибавить $-x$, то получается уравнение $2x + (-x) = x + (-x) + 3$ или $2x - x = 3$. Таким образом, слагаемое x переходит из правой части в левую, меняя знак.
- Если слагаемое из одной части уравнения перенести в другую часть с противоположным знаком, то полученное уравнение будет эквивалентно исходному уравнению.

ОБРАЗЕЦ 1.



$$2x = x + 3$$

$$2x - x = 3$$

$$x = 3$$

$$2 \cdot 3 = 3 + 3$$

$$6 = 6$$

$$\text{Ответ: } x = 3$$

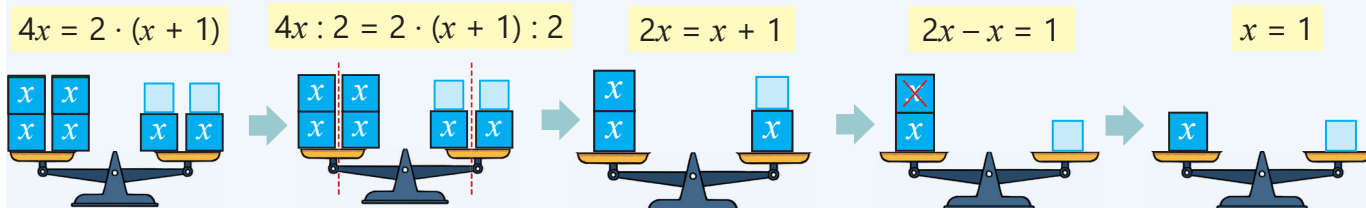
Переменная переносится в левую часть с противоположным знаком.

Упрощается, находится корень уравнения.

Проверяется верность равенства.

- Если обе части уравнения умножить или разделить на число, отличное от нуля, то полученное уравнение будет эквивалентно исходному уравнению.

ОБРАЗЕЦ 2.



$$4x = 2 \cdot (x + 1)$$

$$2x = x + 1$$

$$2x - x = 1$$

$$x = 1$$

$$4 \cdot 1 = 2(1 + 1)$$

$$4 = 4$$

$$\text{Ответ: } x = 1$$

Обе части уравнения делятся на 2.

Переменная переносится в левую часть с противоположным знаком.

Упрощается, находится корень уравнения.

Проверяется верность равенства.

3 Решите уравнения и проверьте ответы.

$$x - (-8) = 2$$

$$-2 - x = 1$$

$$-12x = 36$$

$$3x + 11 = 5$$

$$7 - 3x = 13$$

$$4x - 3 = -11$$

$$x + (-3) = 9$$

$$3 - x = 7$$

$$-x : (-4) = -9$$

$$5x + (-2) = -7$$

$$-3 - 2x = 19$$

$$-2x + 13 = 17$$

4 Решите уравнение и проверьте ответ.

ОБРАЗЕЦ $(1 - 5x) : 2 = 8$

Решение	Объяснение
$(1 - 5x) : 2 = 8$	Обе части уравнения умножаются на 2.
$1 - 5x = 16$	Упрощается.
$-5x = 16 - 1$	1 переносится в другую сторону с противоположным знаком.
$-5x = 15$	Упрощается.
$x = -3$	Обе части уравнения делятся на -5, находится корень уравнения.
$(1 - 5 \cdot (-3)) : 2 = 8$	Корень записывается в уравнение и проверяется.
$8 = 8$	
Ответ: $x = -3$	

а) $2 \cdot (x + 7) = 4$

в) $4 \cdot (1 - x) = 12$

д) $(x + 4) : 2 = 3$

ж) $(7x + 2) : 13 = -2$

б) $3 \cdot (2x - 1) = -21$

г) $5 \cdot (3 - 2x) = -15$

е) $(9x + 24) : 2 = 3$

з) $(9 - 5x) : 3 = 13$



Запомни!

Для решения уравнения с несколькими слагаемыми в обеих сторонах равенства можно использовать такой алгоритм:

1. В уравнении выражения в обеих частях равенства упрощаются.
2. Слагаемые с неизвестными переносятся в одну сторону равенства (обычно в левую), а числа – в другую. При этом меняются знаки слагаемых, переносимых из одной части равенства в другую.
3. Упрощаются правая и левая части равенства.
4. Находится корень уравнения и проверяется верность равенства.

5 Решите уравнение и проверьте ответ.

ОБРАЗЕЦ $3x - 7 = 3 - 2x$

Решение	Объяснение
$3x - 7 = 3 - 2x$	Неизвестные переносятся в левую часть, числа – в правую.
$3x + 2x = 3 + 7$	Выражение упрощается.
$5x = 10$	Находится корень уравнения.
$x = 2$	Корень записывается в уравнение и проверяется.
$3 \cdot 2 - 7 = 3 - 2 \cdot 2$	
$-1 = -1$	
Ответ: $x = 2$	

а) $5x + 8 = 3x - 2$

в) $6x - 8 = x + 3$

д) $7 - x = 3 + x$

ж) $x + 2 = 3x + 8$

б) $x + 4 = 10 - 5x$

г) $x - 4 = 14 - 2x$

е) $9 - 3x = x + 1$

з) $9x + 12 = x + 4$

6 При каком значении переменной:

а) значения выражений $3x + 17$ и $x - 3$ равны?

б) значение выражения $3x + 2$ на 2 единицы больше значения выражения $2x - 3$?

- 7 Решите уравнение, упростив выражения в правой и левой частях равенства.

ОБРАЗЕЦ $4 \cdot (x + 1) = 3 \cdot (x - 2) + 1$

Решение	Объяснение
$4 \cdot (x + 1) = 3 \cdot (x - 2) + 1$ $4x + 4 = 3x - 6 + 1$ $4x + 4 = 3x - 5$ $4x - 3x = -4 - 5$ $x = -9$ $4 \cdot (-9 + 1) = 3 \cdot (-9 - 2) + 1$ $-32 = -32$	Раскрываются скобки в обеих частях. Неизвестные переносятся в левую часть, числа – в правую. Обе части упрощаются, находится корень уравнения. Корень записывается в уравнение и проверяется.
Ответ: $x = -9$	

а) $2x + 3x = -20$	д) $4 \cdot (x + 9) - x = 21$	и) $x - 7x + 3 = 3 \cdot (x - 2)$
б) $4x + x - 8x = 15$	е) $5 \cdot (1 - 3x) - 2 = 33$	к) $5 \cdot (x - 1) + 3 = 3 \cdot (2 - x)$
в) $4 \cdot (x + 3) - 3 = 1$	ж) $6x - 2x + 7 = 2 - x$	л) $2 \cdot (x + 1) - x + 2 = 2 \cdot (x - 1)$
г) $2 \cdot (x - 2) + 19 = 7$	з) $2 \cdot (x - 3) = 5x - 2x$	м) $6 \cdot (x - 2) - 6x = 3 \cdot (x + 6)$

- 8 Решите уравнение, используя основное свойство пропорции.

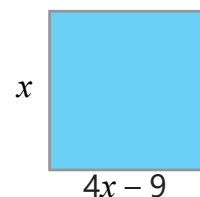
ОБРАЗЕЦ $\frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{4}$

Решение	Объяснение
$4 \cdot (x - 2) = 3 \cdot (x + 1)$ $4x - 8 = 3x + 3$ $4x - 3x = 8 + 3$ $x = 11$ $\frac{11-2}{3} = \frac{11+1}{4}$ $3 = 3$	Применяется основное свойство пропорции. Раскрываются скобки в обеих частях. Неизвестные переносятся в левую часть, числа – в правую. Обе части упрощаются, находится корень уравнения. Корень записывается в уравнение и проверяется.
Ответ: $x = 11$	

а) $\frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{4}$	б) $\frac{x-3}{2} = \frac{x+1}{3}$	в) $\frac{x-3}{3} = \frac{2x+1}{5}$	г) $\frac{2x-2}{4} = \frac{x+1}{3}$
------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

Решение задач

- 9 На рисунке изображен квадрат.
- Чему равен периметр квадрата?
 - Чему равна площадь квадрата?



- 10 Анар задумал число. Если к нему прибавить 4 и полученную сумму умножить на 2, то получится трехкратное значение числа, задуманного Анаром. Какое число задумал Анар?

- 11 В ведре в 4 раза больше молока, чем в кувшине. Если из ведра отлить 2 л молока, то оставшегося молока будет в 3 раза больше, чем молока в кувшине. Сколько литров молока в кувшине?



6.5. Решение задач с помощью уравнений

Исследование-обсуждение

В одной карандашнице 8 ручек, а в другой — 6 ручек. После того как в первую карандашницу добавили несколько ручек, а во вторую — в 2 раза больше этого, в обеих карандашницах стало одинаковое количество ручек. Ответьте на вопросы, используя модель весов.

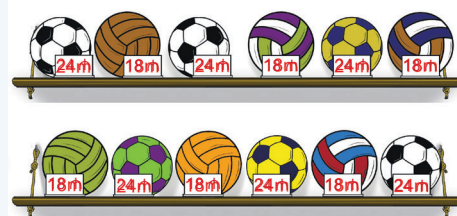
- Сколько ручек добавили в каждую карандашницу?
- Как это можно найти, составив уравнение?



Изучение Решение задач составлением уравнений

Часто для решения задач в соответствии с условием составляется уравнение. Решив уравнение, находится значение искомой величины и проверяется ответ.

ОБРАЗЕЦ. Для спортивного зала было куплено 20 футбольных и волейбольных мячей. Цена футбольного мяча 24 маната, а волейбольного — 18 манатов. Всего за купленные мячи заплатили 432 маната. Сколько футбольных и сколько волейбольных мячей было куплено для спортивного зала?



1. ПОЙМИ ЗАДАЧУ

Что нужно найти: сколько футбольных и сколько волейбольных мячей было куплено.

Что известно: цена футбольного мяча 24 маната, а волейбольного — 18 манатов. Всего было куплено 20 мячей за 432 маната.

2. СОСТАВЬ ПЛАН

Как можно решить: если обозначить число футбольных мячей за x , то число волейбольных мячей будет $20 - x$. Тогда можно составить такую таблицу.

Мячи	Число	Цена 1 мяча (т)	Цена всех мячей (т)
Футбольные	x	24	$24x$
Волейбольные	$20 - x$	18	$18 \cdot (20 - x)$

3. РЕШИ

По таблице общая сумма денег, заплаченная за x футбольных и $(20 - x)$ волейбольных мячей, вычисляется по выражению $24x + 18 \cdot (20 - x)$. По условию эта сумма составляет 432 маната. Составляется уравнение и решается.

Ответ. Было куплено 12 футбольных и $20 - 12 = 8$ волейбольных мячей.

$$\begin{aligned} 24x + 18 \cdot (20 - x) &= 432 \\ 24x + 360 - 18x &= 432 \\ 6x &= 72 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

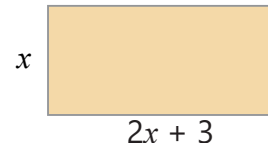
4. ПРОВЕРЬ

Подставив ответ в уравнение, проверяется верность равенства.

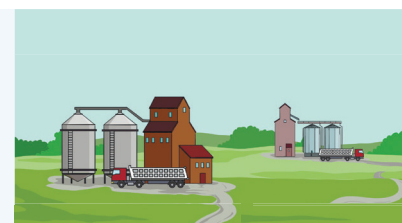
$$\begin{aligned} 24 \cdot 12 + 18 \cdot (20 - 12) &= 432 \\ 432 &= 432 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Решение задач

- 1 Если периметр прямоугольника, изображенного на рисунке, равен 36 единицам, то чему равна его площадь?
- 2 Емкость ведра на 4 литра больше емкости бидона. Но 6 бидонов молока на 4 литра больше 2 ведер молока. Какова емкость бидона и ведра?
- 3 В столовую было куплено несколько столов и на 15 штук больше стульев. Один стул стоит 40 манатов, а один стол — 90 манатов. На столы и стулья всего было потрачено 1250 манатов. Сколько стульев и сколько столов было куплено?
- 4 На лугу пасутся гуси и овцы. У всех вместе 17 голов и 44 ног. Сколько на лугу гусей и сколько овец?



ОБРАЗЕЦ. В первом амбаре было 200 т зерна, а во втором — 300 т зерна. После того как из амбаров увезли определенное количество зерна, в обоих стало одинаковое количество зерна. Если из второго амбара увезли в 3 раза больше зерна, то сколько зерна увезли из каждого амбара?



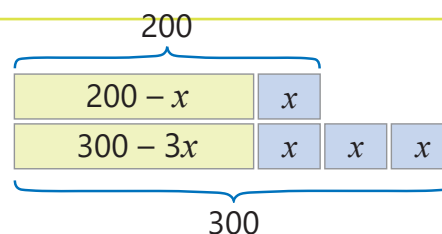
1. ПОЙМИ ЗАДАЧУ

Что нужно найти: сколько зерна увезли из каждого амбара.

Что известно: сначала в первом амбаре было 200 т зерна, а во втором — 300 т зерна. Из второго амбара увезли в 3 раза больше зерна. В обоих амбарах стало одинаковое количество зерна.

2. СОСТАВЬ ПЛАН

Как можно решить: можно составить выражение для нахождения оставшегося зерна в каждом амбаре, обозначив количество увезенного из первого амбара зерна (в тоннах) через x . Приравняв эти выражения, составляется уравнение и находится x . Можно составить такую схему.



3. РЕШИ

Если из первого амбара увезли x тонн зерна, то из второго увезли $3x$ тонны зерна. Используя то, что количество зерна в обоих амбарах равно, составляется уравнение и решается.

Ответ. Из первого амбара увезли 50 т зерна, а из второго — $3 \cdot 50 \text{ т} = 150 \text{ т}$ зерна.

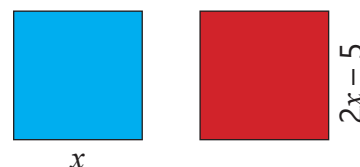
$$\begin{aligned} 200 - x &= 300 - 3x \\ 3x - x &= 300 - 200 \\ 2x &= 100 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

4. ПРОВЕРЬ

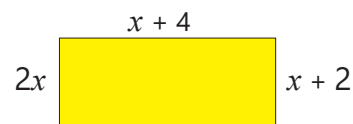
Подставив ответ в уравнение, проверяется верность равенства.

$$\begin{aligned} 200 - 50 &= 300 - 3 \cdot 50 \\ 150 &= 150 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- 5 Квадраты, изображенные на рисунке, конгруэнтны.
- Сколько единичных квадратов составляет площадь каждого из них?
 - Сколько единичных квадратов составляет периметр каждого из них?

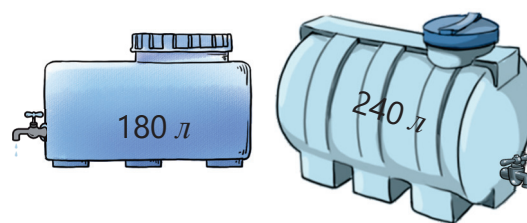


- 6 Сколько единичных квадратов составляет площадь прямоугольника на рисунке?

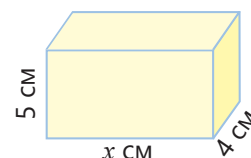


- 7 Айнур купила 1 альбом стоимостью 2 ₸ и 4 одинаковые ручки. Самир заплатил ту же сумму за 1 книгу за 5 ₸ и 2 такие же ручки. Сколько стоит ручка?

- 8 В одном баке 240 л, во втором — 180 л воды. Краны баков открыли одновременно, и за каждую минуту из первого бака выливалось 6 л воды, а из второго — 4 л воды. Через сколько минут после открытия кранов в обоих баках останется одинаковое количество воды?



- 9 Объем кубоида на рисунке численно равен площади его поверхности. Какова длина неизвестного ребра кубоида?



- 10 Стоимость проезда на такси, принадлежащих компании А, составляет 0,50 маната за километр с первоначальной оплатой 2 маната, а на такси, принадлежащих компании В, стоимость проезда составляет 0,30 маната за километр с первоначальной оплатой 3 маната. Сколько километров пути надо проехать, чтобы сумма оплаты за проезд на такси обеих компаний была одинаковой?

- 11 В ящике в 3 раза больше винограда, чем в корзине. Когда из ящика переложили 2 кг винограда в корзину, масса винограда в ящике стала равна массе винограда в корзине. Сколько винограда было изначально в ящике и корзине?



- 12 Айдан 12 лет, ее отцу 36 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше Айдан?

- 13 Кошка тяжелее петуха на 2 кг, а овца тяжелее петуха в 5 раз. Если овца и петух вместе весят в 3 раза больше кошки, какова масса каждого из них?

- 14 На двух полках стояло одинаковое количество книг. Если положить на первую полку 6 книг и взять со второй полки 4 книги, то на первой полке книг окажется в два раза больше, чем на второй. Сколько книг стояло на каждой полке изначально?



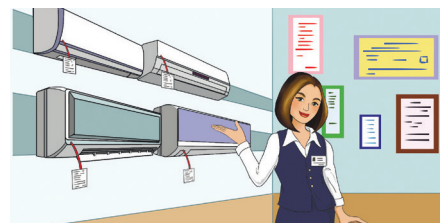
- 15 Количество сборников стихов в книжном шкафу на 4 больше, чем рассказов. После того как в шкаф положили еще 9 сборников рассказов, отношение количества сборников стихов к количеству сборников рассказов стало $2 : 3$. Сколько сборников стихов в шкафу?

6.6. Неравенства

Исследование-обсуждение

Менеджер по продажам магазина получает бонус в размере 30 манатов за каждый проданный в течение месяца кондиционер.

- Какое наименьшее число кондиционеров он должен продать в месяц, чтобы получить бонус более 200 манатов?
- Как это можно записать в виде неравенства, обозначив количество проданных кондиционеров через n ?



Изучение Решение неравенства на множестве целых чисел

В неравенствах, составленных по условиям некоторых задач, переменная может принимать только целые значения. Например, в шахматном турнире среди детей игроку присваиваются 0 очков за поражение, 1 очко за ничью и 2 очка за победу. Если количество очков, присваиваемых шахматисту за одну партию, обозначить через n , то это можно выразить неравенством $n \leq 2$. Решением этого неравенства будут числа 0; 1 и 2.

ОБРАЗЕЦ 1. Отметьте несколько целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x > -2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1
Подходящее числовое неравенство	$-4 > -2$ ✗	$-3 > -2$ ✗	$-2 > -2$ ✗	$-1 > -2$ ✓	$0 > -2$ ✓	$1 > -2$ ✓

Число -2 не относится к решению

$x > -2$



Все целые числа, расположенные правее числа -2 на числовой оси, являются решениями неравенства $x > -2$.

ОБРАЗЕЦ 2. Отметьте несколько целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x \leq -1$.

x	2	1	0	-1	-2	-3
Подходящее числовое неравенство	$2 \leq -1$ ✗	$1 \leq -1$ ✗	$0 \leq -1$ ✗	$-1 \leq -1$ ✓	$-2 \leq -1$ ✓	$-3 \leq -1$ ✓

$x \leq -1$

Число -1 относится к решению



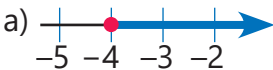
Все целые числа, расположенные левее числа -1 на числовой оси, являются решениями неравенства $x \leq -1$.



Подумай!

Какие целые числа не являются решением неравенства $x \leq -2$? Как можно записать неравенство, решением которого являются эти числа?

Задания

- Определите числовые оси, соответствующие неравенствам:
 $x \leq -4$ $x < -4$ $x > -4$ $x \geq -4$
 а)  б)  в)  г) 
- Найдите три целых числа, удовлетворяющих неравенству, и изобразите решение на числовой оси. Определите два целых числа, не удовлетворяющих этому неравенству.
 а) $x > -6$ б) $x \geq -6$ в) $x < -1$ г) $x \leq -5$ д) $x \leq 0$
- Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству. Изобразите решение на числовой оси.
 а) $x < -5$ б) $x < 0$ в) $x \leq -12$ г) $x \leq 0$ д) $x \leq 1,5$ е) $x < 0,5$
- Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству. Изобразите решение на числовой оси.
 а) $x > -10$ б) $x \geq -13$ в) $x > 0$ г) $x \geq 0$ д) $x > 2,5$ е) $x > 0,5$

Изучение Проверка решения неравенства

Чтобы проверить, является ли заданное число решением неравенства, сначала это число подставляется вместо переменной и находится значение выражения. Затем проверяется, является ли верным полученное числовое неравенство.

ОБРАЗЕЦ 1. Определите, являются ли числа 3 и -3 решением неравенства $x + 1 > -2$.

x	3	-3
Значение выражения $x + 1$	4	-2
Подходящее числовое неравенство	$4 > -2$ ✓	$-2 > -2$ ✗

Число 3 является решением $x + 1 > -2$, а число -3 не является решением.

ОБРАЗЕЦ 2. Определите, являются ли числа -5 и 0 решением неравенства $3x - 1 < -3$.

x	-5	0
Значение выражения $3x - 1$	-16	-1
Подходящее числовое неравенство	$-16 < -3$ ✓	$-1 < -3$ ✗

Число -5 является решением $3x - 1 < -3$, а число 0 не является решением.

- Из заданных значений переменной выберите те, которые удовлетворяют неравенству.
 а) $y + 5 < 2$
 -6 -5 -4 -3 2 3
 б) $m - 4 \leq -5$
 -3 -2 -1 0 1 2
 в) $2x + 1 > -3$
 -4 -3 -2 -1 0 1



Из истории математики

Понятие "неравенство" использовалось с древних времен. Однако в те времена математические символы не использовались, поэтому высказывания записывались словами. Современные знаки неравенства впервые были использованы английским математиком Томасом Хэрриотом ($>$ и $<$) и французским математиком Пьером Буге ($\geq$ и $\leq$).



Томас Хэрриот
(1560–1621)

Решение задач

- 6 Экипаж круизного лайнера составляет 10 человек. Общая численность экипажа и пассажиров не может превышать 175 человек. Если число пассажиров обозначить через n , то с помощью каких неравенств можно выразить количество всех людей на корабле?



$$n + 10 > 175 \quad n + 10 < 175 \quad n + 10 \leq 175$$

- 7 Обозначьте переменную буквой и запишите неравенство, соответствующее утверждению. Укажите несколько целых чисел, которые переменная может принимать в зависимости от ситуации.

а) Температура воздуха ниже 0°C .

б) Рыбную продукцию следует хранить при температуре не выше -12°C .

в) Периметр равнобедренного треугольника, основание которого 6 см, больше 18 см.

г) Масса пустой корзины 1 кг. Масса корзины с яблоками не менее 9 кг.

- 8 Альпинистам рекомендуется использовать спальный комплект при температуре не ниже -15°C .

• Запишите соответствующее неравенство.

• Можно ли использовать этот комплект при температуре воздуха -20°C ; -15°C ; -8°C ; 0°C ; 5°C ?

• При какой минимальной температуре можно использовать этот комплект?



- 9 У Самира было несколько наклеек. Если он купит ещё 30 наклеек, у него станет больше 70.

• Если обозначить через x количество наклеек, которое было у Самира сначала, какое неравенство можно составить, чтобы выразить, сколько наклеек у него стало?

• Может ли изначальное количество наклеек быть 25; 50?

• Сколько у него было наклеек как минимум?

- 10 Когда Айнур к задуманному числу прибавила 4, то полученная сумма стала меньше 0.

• Как это можно выразить в виде неравенства?

• Каким наибольшим целым числом может быть задуманное Айнур число?

- 11 На определенном маршруте было 5 автобусных остановок. После установки еще нескольких новых остановок их число стало меньше 9.

• Обозначив количество новых установленных остановок через n , запишите соответствующее неравенство.

• Сколько новых остановок можно было бы установить? Запишите возможные случаи.



- 12 Футболка в магазине предлагается по цене дешевле 12,50 маната.

• Выразите цену футболки через x и запишите соответствующее неравенство.

• Найдите наибольшее целое решение неравенства.

• Какой может быть наибольшая цена футболки?

- 13 Сформулируйте ситуацию для данного неравенства и объясните, что выражает переменная. Укажите несколько целых чисел, которые переменная может принимать в зависимости от ситуации.

а) $s < 4$

б) $t \geq -8$

в) $x \leq 6$

г) $4a > 12$

д) $m + 1 > 8$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выражение с переменной

разность квадрата c и d

$$c^2 - d$$

Слагаемые с переменными

Постоянная

$$4x - 3y - 8 = 4x + (-3y) + (-8)$$

Коэффициент

Буквенное выражение

Раскрытие скобок

$$2 \cdot (a - 2b - 1) = 2a - 4b - 2$$

$$-4 \cdot (3x - 2y + 5) = -12x + 8y - 20$$

Вынесение общего множителя за скобки

$$4x + 6y = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3y = 2 \cdot (2x + 3y)$$

Упрощение выражений

(приведение подобных слагаемых)

$$x + (-2x) + 2 - 1$$

$$-x + 1$$

$$+x$$

$$+1$$

$$+1$$

$$-x$$

$$-x$$

$$-1$$

$$x + (-2x) + 2 - 1 = -x + 1$$

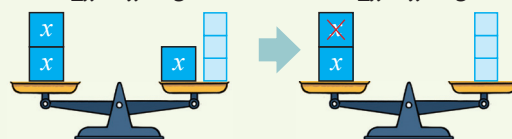
$$3 \cdot (2c - 3d) - (5c - 4d - 8) = 6c - 9d - 5c + 4d + 8 = c - 5d + 8$$

Эквивалентные уравнения

(уравнения, корни которых одинаковые)

$$2x = x + 3$$

$$2x - x = 3$$



$$2x = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 3$$

Решение уравнения приведением к эквивалентному

$$3x - 7 = 3 - 2x$$

$$3x + 2x = 3 + 7$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

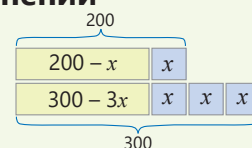
Решение задач составлением уравнений

$$200 - x = 300 - 3x$$

$$3x - x = 300 - 200$$

$$2x = 100$$

$$x = 50$$



Проверка целых решений неравенства

$$x + 1 > -2$$

x	3	-3
Значение выражения $x + 1$	4	-2
Подходящее числовое неравенство	$4 > -2$ ✓	$-2 > -2$ ✗

Решение исходной задачи

- Сумма, оплаченная за t минут разговоров в месяц (р)

по 1-му тарифу:

$$9 + 0,08t$$

по 2-му тарифу:

$$12 + 0,06t$$

- Вычисляются значения выражений при $t = 100$.

по 1-му тарифу:

$$9 + 0,08 \cdot 100 = 17 \text{ (р)}$$

по 2-му тарифу:

$$12 + 0,06 \cdot 100 = 18 \text{ (р)}$$

Поскольку $17 < 18$, абонент, который разговаривает 100 минут в месяц, заплатит меньше по 1-му тарифу.

- Определяется продолжительность разговоров абонента по каждому тарифу, который платит 45 манатов в месяц:

по 1-му тарифу:

$$9 + 0,08t = 45$$

$$0,08t = 36$$

$$t = 450 \text{ (мин.)}$$

по 2-му тарифу:

$$12 + 0,06t = 45$$

$$0,06t = 33$$

$$t = 550 \text{ (мин.)}$$

- Записывается равенство стоимостей и решается полученное уравнение:

$$9 + 0,08t = 12 + 0,06t$$

$$0,08t - 0,06t = 12 - 9$$

$$0,02t = 3$$

$$t = 150 \text{ (мин.)}$$

Ответ: стоимость 150 минут разговоров по обоим тарифам будет одинаковой.

- Определяется, сколько нужно заплатить абоненту, выбравшему 1-й тариф, чтобы разговаривать 600 минут:

$$9 + 0,08 \cdot 600 = 57 \text{ (р)}$$

Поскольку $57 > 50$, абонент, выбравший 1-й тариф, не сможет разговаривать 600 минут.

ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Запишите в виде математического выражения.

- а) разность 3-кратного значения m и n
- б) произведение суммы m и n и числа -3
- в) сумма 2-кратного значения c и 3-кратного значения d
- г) сумма квадрата x и 4-кратного значения y

2. Напишите сначала сумму, а затем разность заданных выражений. Упростите полученные выражения.

а) $a + b$ и $a - b$

б) $2a + 3b$ и $3a - 2b$

в) $3a - b$ и $a + 3b$

3. Раскройте скобки.

а) $4 \cdot (3x - y - 2)$

б) $-3 \cdot (4c - 2d - 5)$

в) $-(8a + 9b - 4)$

г) $-(-4y + 5x - 1)$

4. В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство было верным при любом значении переменной.

а) $-3 \cdot (4n - \square m) = \square n + 18m$

в) $-(\square c - 7d) = 8c + \square d$

д) $6 \cdot (\square x - 5y) = -12x - \square y$

б) $9n - 6m = \square \cdot (-3n + \square m)$

г) $6c + \square d = \square \cdot (3c + 4d)$

е) $\square x - 16y = -4 \cdot (3x + \square y)$

5. Раскройте скобки и вычислите значение выражения, учитывая, что $x - y = 3$.

а) $x + (4 - y)$

б) $x - (5 + y)$

в) $(x - 4) + (7 - y)$

г) $(x + 6) - (y + 4)$

6. Вычислите значение выражения, учитывая, что $2x - 3y = 7$.

а) $-2x + 3y$

б) $4x - 6y$

в) $-6x + 9y$

г) $12 - 12x + 18y$

7. Вынесите общий множитель за скобки и вычислите значение выражения.

а) $4x + 4y$

$x = 32; y = -35$

б) $17a - 17b$

$a = -27; b = -23$

в) $13m + 39n$

$m = 31; n = -11$

8. Упростите.

а) $6m - 3 \cdot (m - 7)$

в) $7 \cdot (3x - 6) - (x - 8)$

д) $2 \cdot (a - 3b) - (3a + 2b - 7)$

б) $2 \cdot (5 - 2n) - 3n$

г) $-(9 - 3k) - 4 \cdot (3k - 5)$

е) $3 \cdot (4a - 2b - 9) - 5 \cdot (a + 3b - 6)$

9. Упростите и вычислите значение выражения при заданных значениях переменной.

а) $-2 \cdot (x - 7) - (-5x + 18)$

$x = -6$

б) $3 \cdot (a + 3b) - (4a - 5b)$

$a = -4; b = -2$

в) $-4m + d - 2 \cdot (-2m + 2d)$

$d = -7$

10. Решите уравнения и проверьте ответ.

$3x - 11 = 4$

$4x - 7 = -31$

$2 - 3x = 17$

$-5x + 7 = -18$

$3 \cdot (x + 8) = 6$

$4 \cdot (2x - 1) = -12$

$(8 - 4x) : (-4) = -6$

$(9 - 2x) : (-3) = 3$

$7x + 18 = 2x - 2$

$3x + 17 = 1 - 5x$

$x + 4 = -4 - 3x$

$8 - 2x = x + 20$

$3x - 6x + 1 = 19$

$-(x + 2) - x = -8$

$2 \cdot (x - 5) = x - 4x$

$4 \cdot (x - 2) + 25 = 3 \cdot (1 - x)$

11. Решите уравнения, используя основные свойства пропорции.

а) $\frac{x+4}{4} = \frac{x-1}{2}$

б) $\frac{3x-4}{2} = \frac{x+1}{3}$

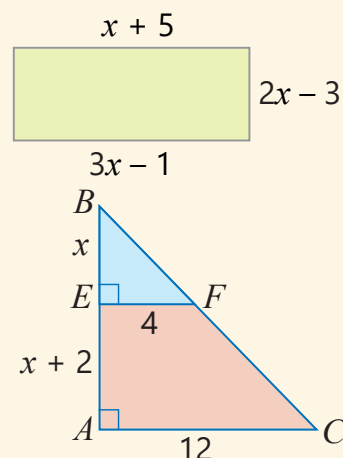
в) $\frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{2}$

г) $\frac{2x-3}{2x+1} = \frac{3}{4}$

12. Ответьте на вопрос, составив и решив уравнение.

- а) Какое число следует умножить на -2 и вычесть 4 из полученного произведения, чтобы разность стала равной 4?
- б) При вычитании 4-кратного значения какого числа из 8 разность будет равна -8 ?
- в) Из какого числа следует вычесть 3 и разделить полученную разность на 4, чтобы частное стало равным -4 ?
- г) К какому числу следует прибавить 4 и умножить полученную сумму на -3 , чтобы произведение стало равным 15?

13. По данным на рисунке найдите стороны прямоугольника. Вычислите периметр и площадь этого прямоугольника.

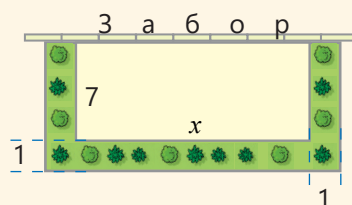


14. Выполните задания по заданной фигуре.

- Напишите выражения для вычисления площадей треугольников EBF и ABC .
- Выразите площадь трапеции $AEFC$ через x , представив ее как разность площадей.
- Вычислите площадь трапеции $AEFC$ при $x = 3$.
- При каком значении x площадь трапеции $AEFC$ составляет 40 квадратных единиц?

15. Одна сторона здания в форме прямоугольника с размерами x метров и 7 метров примыкает к забору двора. Вдоль трех сторон здания уложен газон шириной 1 метр.

- Напишите и упростите выражение с переменной для вычисления площади газона.
- Если площадь газона равна 30 м^2 , то какова площадь здания?



16. В одном бидоне было в два раза больше молока, чем в другом. После того как из первого бидона перелили 5 литров молока во второй, в обоих бидонах стало одинаковое количество молока. Сколько литров молока было в каждом бидоне изначально?

17. Туристы разместились в a трехместных и b пятиместных палатках.

- Как можно вычислить, сколько человек разместится в этих палатках?
- Каково общее количество мест в палатках при $a = 5$, $b = 4$?
- Если общее количество мест в палатках равно 22, сколько пятиместных палаток?



18. 1 квадратный метр кафельной плитки стоит p манатов, а 1 квадратный метр керамической плитки – q манатов.

- Если цены снизятся на 20%, то с помощью какого выражения можно вычислить, сколько денег нужно на покупку 10 м^2 кафельной и 20 м^2 керамической плиток?
- Если $p = 30$, $q = 18$, сколько манатов нужно заплатить за купленный товар после скидки?

19. Обозначьте переменную определенной буквой и запишите неравенства в соответствии с утверждениями.

- а) Температура в холодильнике не выше -18°C .
- б) Масса пустой стеклянной банки 0,4 кг. Масса банки, наполненной соком, больше 1 кг.
- в) Если уровень воды в бассейне упадет на 0,5 м, уровень воды будет не более 2,2 м.

20. При каких из заданных значений переменной неравенство будет верным?

а) $2y + 5 \leq -1$
-4 -3 -2 0 3 4

б) $7 - 2m \geq -3$
-2 -1 0 1 2 3

21. Если температура воздуха повысится на 4°C , то она будет не менее -2°C .

- Обозначив температуру воздуха через T , запишите соответствующее неравенство.
- Сколько градусов составляет минимальная температура? Определите подходящее число из заданных: -8; -6; -4; 0; 2.

22. В аквариуме у Самира число неоновых рыбок на 3 больше числа золотых рыбок. После того как в аквариум выпустили 1 золотую рыбку, отношение числа неоновых и золотых рыбок стало 4 : 3. Сколько рыбок в аквариуме?

23. В лагере геологов запаса сухого молока хватило на 24 дня. Если бы этого молока в день использовалось на 0,25 кг меньше, то хватило бы на 36 дней. Какова масса сухого молока?

24. Составьте задачу к каждому уравнению или неравенству и решите ее.

а) $2m + 3 = 9$

б) $3n = n + 4$

в) $a + 3 > 2$

г) $b - 3 < 7$

д) $c + 1 \geq 3$



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математические модели используются для проведения исследований и принятия правильных решений в науке и различных областях жизни. Например, формула зависимости пройденного пути от времени и скорости, формула зависимости площади прямоугольника от его сторон и другие формулы являются математическими моделями. Английский демограф Томас Мальтус (1766-1834) предложил математическую модель роста населения Земли. Например, согласно этой модели, если численность населения равна N_0 , численность населения через 1 год можно найти в простой форме следующим образом:

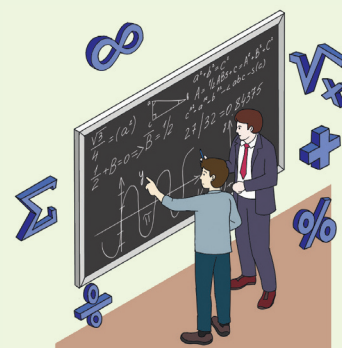
$$N = N_0 + k \cdot N_0, \text{ где } k - \text{коэффициент прироста.}$$

1. Население Азербайджана в 2022 году составляло 10 063 300 человек, в 2023 году – 10 127 100 человек. Найдите коэффициент прироста k по формуле $N_{2023} = N_{2022} + k \cdot N_{2022}$ и округлите его до тысячных. Если рост продолжится с такой же скоростью, спрогнозируйте численность населения Азербайджана в 2024 году.

2. Согласно теории Мальтуса, если население Земли резко увеличится, через определенное время может возникнуть продовольственный кризис. Сформулируйте свои гипотезы о причинах продовольственного кризиса и организуйте дискуссию на тему "Причины дефицита продовольствия в мире".

3. В целях предотвращения продовольственного кризиса страны мира принимают различные продовольственные программы. Соберите информацию о Всемирной продовольственной программе ООН и подготовьте презентацию.

4. Узнайте с помощью Интернета про математические модели и их применение в различных областях.



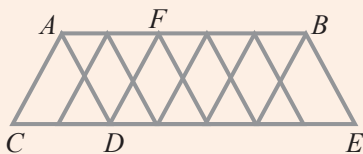
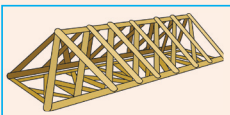
Треугольники

В этой главе вы научитесь:

- применять свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой
- применять свойства внутренних и внешних углов треугольника
- применять понятие конгруэнтности треугольников и признаков конгруэнтности
- объяснять понятия “медиана”, “биссектриса” и “высота” в треугольнике
- применять неравенство треугольника, отношения между сторонами и углами треугольника
- строить треугольник с помощью линейки и циркуля по длинам трех его сторон

Попытайтесь!

Ученики сделали треугольники из одинаковых палочек. Соединив эти треугольники, они соорудили мост. На рисунке изображена одна грань этого моста.



Как можно объяснить конгруэнтность углов BAD и ADC ?

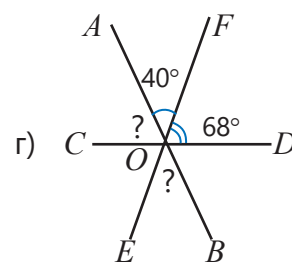
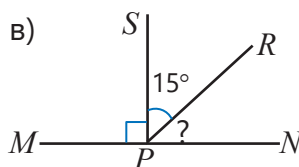
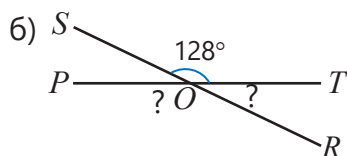
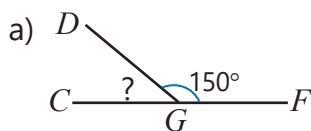
- Параллельны ли отрезки AB и CE ?
- Биссектрисой какого угла является AD ?

Плоские фигуры можно встретить в различных конструкциях, узорах и дизайнерских работах. Например, равносторонние треугольники используются в конструкциях, называемых “ферменными системами”. С помощью этих конструкций прокладываются мосты и возводятся различные здания. Такие конструкции обеспечивают устойчивость построенного объекта.

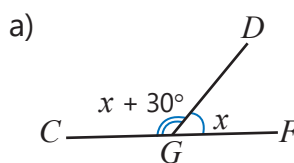


Предварительная проверка

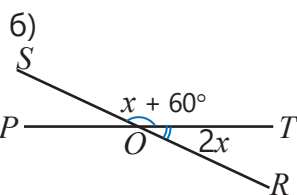
1 Найдите неизвестные углы.



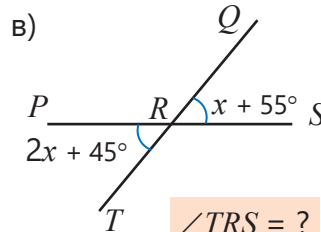
2 Найдите неизвестные углы, используя свойства смежных и вертикальных углов.



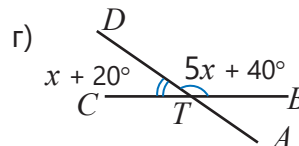
$\angle FGD = ?$



$\angle POR = ?$



$\angle TRS = ?$



$\angle BTA = ?$

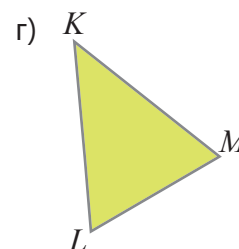
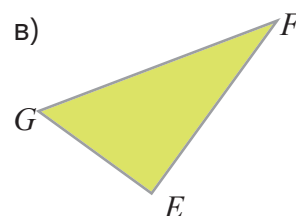
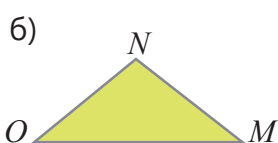
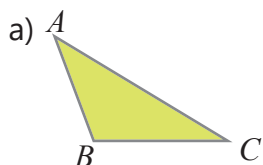
3 Ответьте на вопросы.

а) Луч BD является биссектрисой угла ABC . Угол ABC на 50° больше угла ABD . Сколько градусов составляет угол ABC ?

б) Градусные меры смежных углов относятся как $2 : 8$. Сколько градусов составляет каждый угол?

в) Сколько градусов составляет угол, если сумма двух смежных с ним углов равна 100° ?

4 Измерьте углы и стороны треугольника. Определите вид по углам и сторонам.



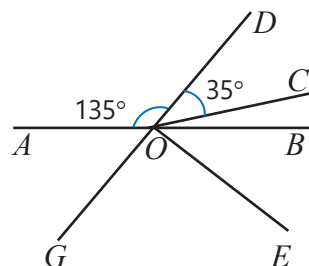
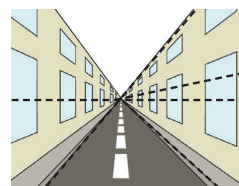
5 Нарисуйте треугольник, определите его вид.

а) Одна сторона 6 см , а прилежащие к ней углы 30° и 50° .

б) Одна сторона 8 см , другая на 25% короче и угол между ними 60° .

6 Чтобы нарисовать картину, художник использовал вспомогательные прямые. На рисунке изображены несколько этих прямых и некоторые углы.

- Определите смежные и вертикальные углы на рисунке.
- Найдите градусную меру угла DOE , если луч OB является его биссектрисой.
- Найдите градусную меру угла COE .
- Как можно обосновать то, что луч OE перпендикулярен прямой GD ?



7.1. Медиана, биссектриса и высота треугольника



Ключевые слова

- медиана
- биссектриса
- высота

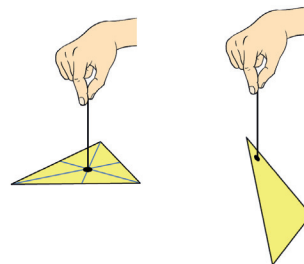
Исследование-обсуждение

Практическая работа в парах.

Принадлежности: картон, ножницы, веревка, линейка, карандаш.

Ход работы:

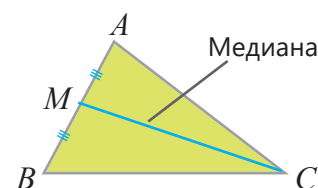
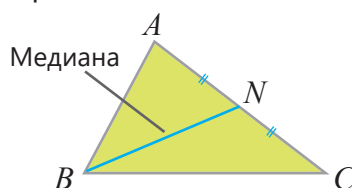
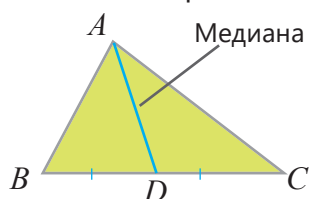
1. Наложив картон друг на друга, вырежьте два одинаковых треугольника.
2. Соедините вершины первого треугольника с серединными точками противоположных сторон. Затем отметьте точку пересечения этих отрезков. Проткнув в этой точке треугольник, подвесьте его на веревке и обратите внимание на положение.
3. Проткните второй треугольник в точке, близкой к одной из вершин, и подвесьте его на веревке.
4. Наблюдайте за положением обоих треугольников относительно пола комнаты.



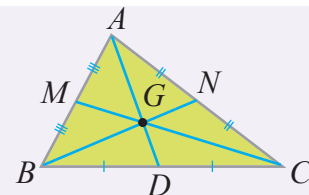
- Какой треугольник находится в горизонтальном положении, а какой — в наклонном?

Изучение Медианы треугольника

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



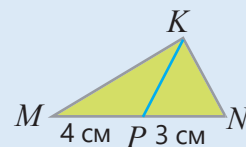
- У произвольного треугольника три медианы, и они пересекаются в одной точке.
- Для обозначения треугольника используется знак Δ . Например, треугольник ABC можно записать так: ΔABC .



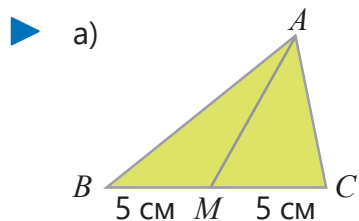
1. Определите, являются данные утверждения верными или нет.

ОБРАЗЕЦ

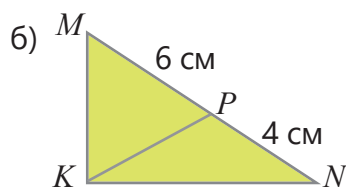
Отрезок KP – медиана треугольника KMN



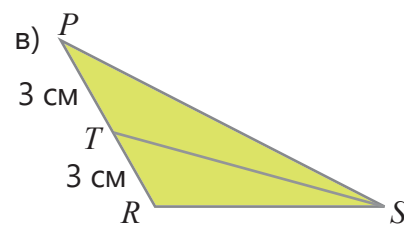
Решение	Объяснение
$MP \neq PN$ Утверждение ложно.	Точка P делит сторону MN на два неравных отрезка. Отрезок KP не является медианой треугольника KMN .



Отрезок AM – медиана треугольника ABC .

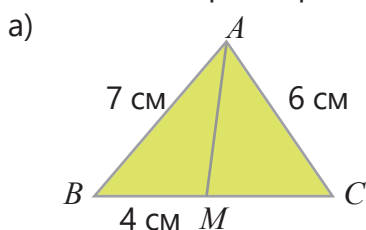


Отрезок KP – медиана треугольника MKN .

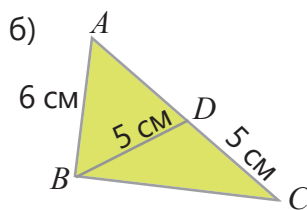


Отрезок ST – медиана треугольника PRS .

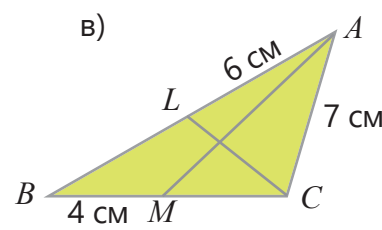
- 2 Нарисованы медианы треугольника. Найдите длины соответствующих отрезков и вычислите периметр.



$MC = ?$ $BC = ?$ $P_{ABC} = ?$

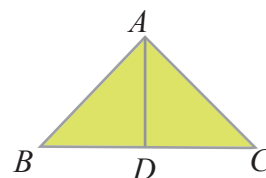


$AD = ?$ $AC = ?$ $P_{ABD} = ?$

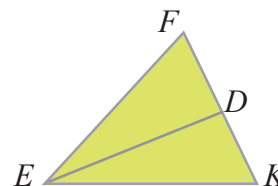


$MC = ?$ $BC = ?$ $P_{ABC} = ?$

- 3 Отрезок AD — медиана равнобедренного треугольника ABC , периметр которого 26 см. Длины сторон AB и AC равны 8 см. Чему равна длина отрезка BD в сантиметрах?



- 4 Отрезок ED — медиана треугольника EFK , периметр которого 21 см. Сторона EF 7 см, а FD короче на 4 см. Чему равна длина стороны EK в сантиметрах?



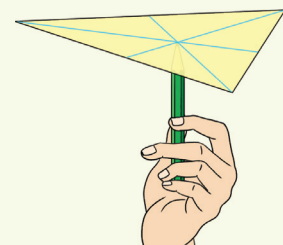
- 5 Нарисуйте прямоугольный треугольник в тетради. Используя линейку, проведите медиану из прямого угла треугольника и найдите отношение медианы к гипотенузе.



Из истории математики

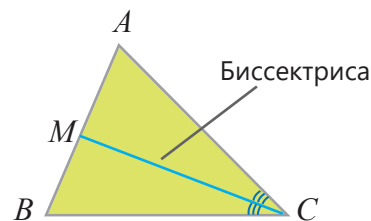
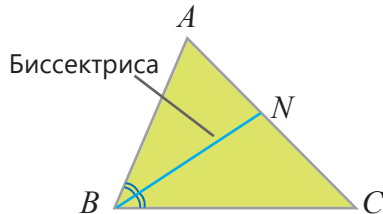
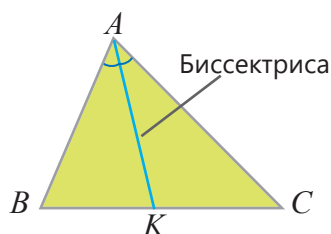
Точка пересечения медиан треугольника называется **центром тяжести** или **центром равновесия** треугольника. Если центр тяжести вырезанного из картона треугольника разместить на кончике карандаша, треугольник окажется в состоянии равновесия, то есть будет находиться параллельно полу комнаты.

Идея центра тяжести встречается в трудах древнегреческих философов Евклида и Архимеда. Позднее понятие "центр тяжести" более глубоко исследовали французские математики Ферма и Декарт, жившие в XVII и XVIII веках. Центр тяжести постепенно стал одним из важных понятий математики. Иногда вместо этого понятия также используется понятие "барицентр" фигур. Свойства этой точки широко используются в математике, физике, механике, астрономии и других областях.

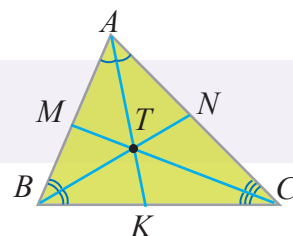


Изучение Биссектрисы треугольника

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

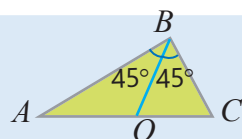


- В любом треугольнике существует три биссектрисы, и они пересекаются в одной точке.

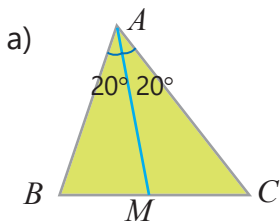


- 6 Определите, являются данные утверждения верными или нет.

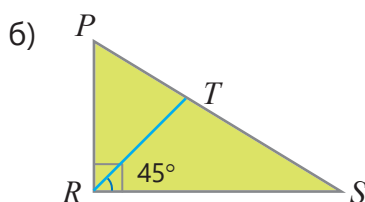
ОБРАЗЕЦ Отрезок BO – биссектриса треугольника ABC .



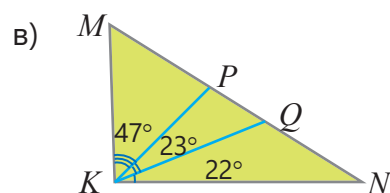
Решение	Объяснение
$\angle ABO = \angle OBC = 45^\circ$ Утверждение верно.	В треугольнике ABC отрезок BO делит угол B на два равных угла.



Отрезок AM – биссектриса треугольника ABC .



Отрезок RT – биссектриса треугольника PRS .

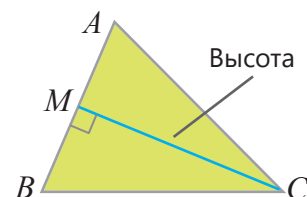
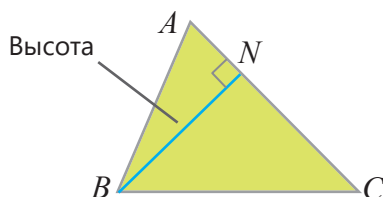
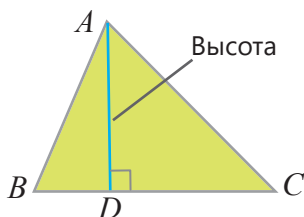


Отрезок KP – биссектриса треугольника MKN .

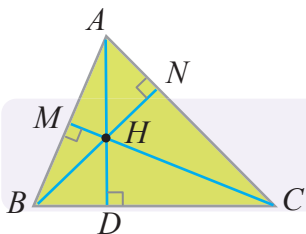
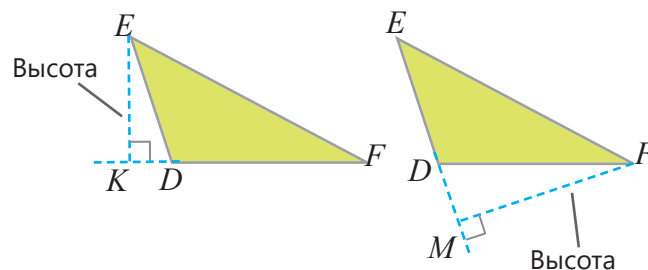
- 7 Нарисуйте в тетради тупоугольный треугольник. Используя транспортир, нарисуйте биссектрисы этого треугольника и обозначьте точку пересечения.

Изучение Высоты треугольника

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону треугольника или ее продолжение.



• Высота, опущенная из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике, – это перпендикуляр, опущенный на продолжение противоположной стороны.



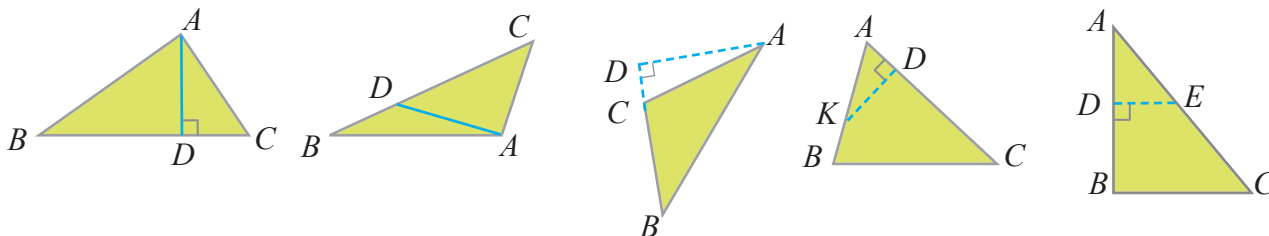
• В любом треугольнике существует три высоты. Высоты или их продолжения пересекаются в одной точке.



Подумай!

Как можно объяснить то, что две высоты в прямоугольном треугольнике совпадают с его катетами?

8 В каких случаях высота треугольника ABC изображена верно?



9 Обоснуйте на примерах, являются утверждения верными или нет.



Эльхан

Точки пересечения медиан всех треугольников находятся внутри них.



Самир

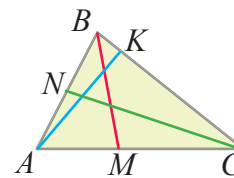
Точки пересечения биссектрис всех треугольников находятся внутри них.



Айнур

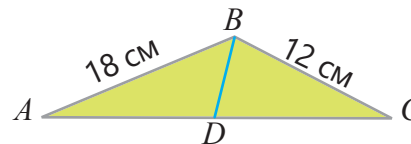
Точки пересечения высот у всех треугольников находятся внутри них.

10 На рисунке изображены высота, медиана и биссектриса треугольника ABC . Определите их.

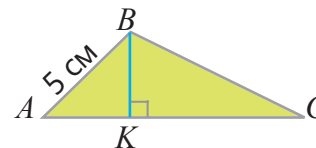


Решение задач

11 На рисунке в треугольнике ABC сторона AC короче суммы длин сторон AB и BC на 20%. Является ли отрезок BD медианой треугольника ABC , если $CB = CD$. Обоснуйте свое мнение.



12 В треугольнике ABC проведена высота BK . Точка K делит сторону AC в отношении $AK : KC = 1 : 2$. Какова площадь треугольника ABC , если $AC = 9$ см и $P_{ABK} = 12$ см.



7.2. Признаки конгруэнтности треугольников

Исследование-обсуждение

Практическая работа.

Принадлежности: цветная бумага, ножницы, транспортир, карандаш.

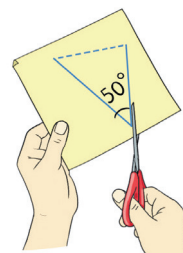
Ход работы:

1. На цветной бумаге начертите треугольник, стороны которого 3 см и 4 см, а угол между ними – 50° .

2. Вырежьте этот треугольник.

3. Постарайтесь наложить этот треугольник на треугольник, который вырезал ваш сосед по парте.

• Возможно ли нарисовать два треугольника с заданными размерами, но не совпадающие? Обоснуйте свое мнение.



Изучение Конгруэнтность треугольников

Чтобы два треугольника были конгруэнтны, при наложении друг на друга этих треугольников все соответствующие элементы — вершины, стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы — должны совпадать.

• В конгруэнтных треугольниках стороны, противоположные конгруэнтным углам, также конгруэнтны.

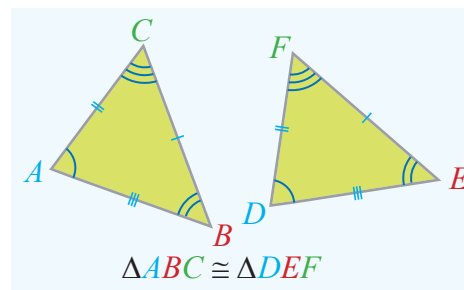
Обратное также верно:

• В конгруэнтных треугольниках углы, лежащие напротив конгруэнтных сторон, конгруэнтны.

• При записи конгруэнтных треугольников последовательность вершин имеет особое значение. Например, конгруэнтность треугольников ABC и DEF на рисунке записывается так: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Из этой записи следует, что соответствующие стороны и углы конгруэнтны.

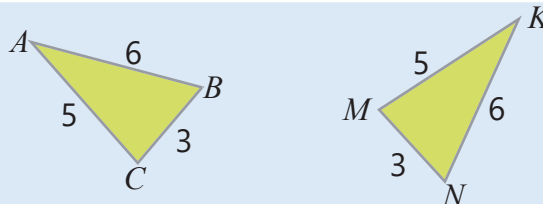
$$\begin{array}{lll} \angle A \cong \angle D & \angle B \cong \angle E & \angle C \cong \angle F \\ BC \cong EF & AC \cong DF & AB \cong DE \end{array}$$



Задания

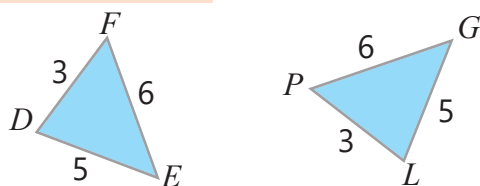
- 1 На рисунке даны конгруэнтные треугольники. Запишите конгруэнтные стороны и конгруэнтные углы.

ОБРАЗЕЦ. $\triangle ABC \cong \triangle KNM$

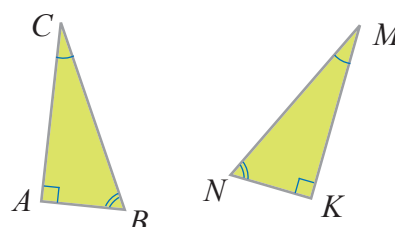


Решение	Объяснение
$AB \cong KN, AC \cong KM, BC \cong NM,$ $\angle C \cong \angle M, \angle B \cong \angle N, \angle A \cong \angle K$	Записываются конгруэнтные стороны. Углы напротив конгруэнтных сторон конгруэнтны.

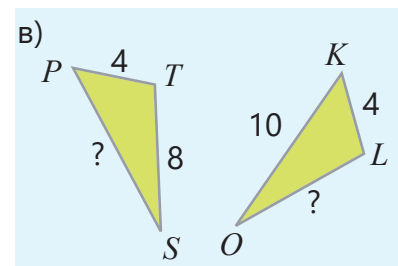
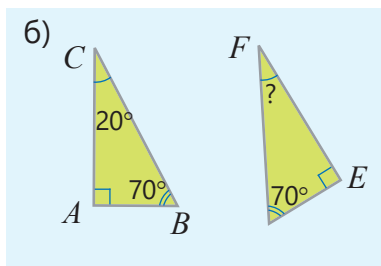
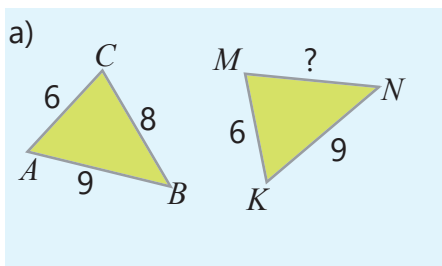
► а) $\triangle DEF \cong \triangle LGP$



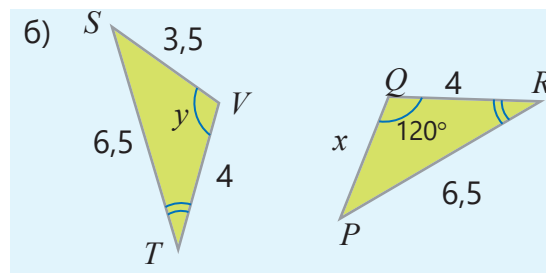
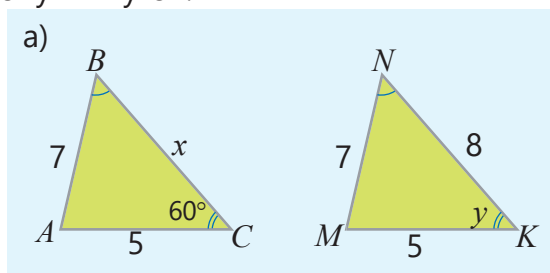
б) $\triangle ABC \cong \triangle KNM$



2 Треугольники на рисунке конгруэнтны. Найдите сторону или угол, обозначенные знаком "?".



3 Запишите конгруэнтность треугольников, используя знак $\cong$. Найдите неизвестные сторону или угол.



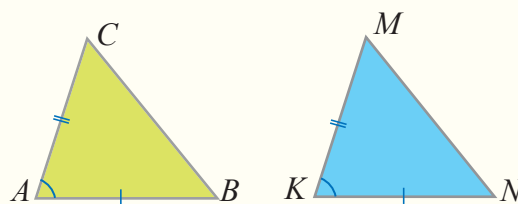
Изучение Признаки конгруэнтности треугольников

Для определения конгруэнтности треугольников не обязательно проверять конгруэнтность всех элементов. Для этого достаточно, чтобы некоторые их элементы были конгруэнтны. **Признаки конгруэнтности треугольников** позволяют определить конгруэнтность треугольников по трем элементам. Существует три признака конгруэнтности треугольников.

Сторона-угол-сторона (СУС) или I признак конгруэнтности треугольников

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

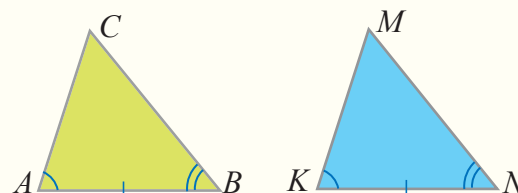
Если $AB \cong KN$, $AC \cong KM$, $\angle A \cong \angle K$ то,
 $\triangle ABC \cong \triangle KMN$



Угол-сторона-угол (УСУ) или II признак конгруэнтности треугольников

Если одна сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно конгруэнтны одной стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Если $AB \cong KN$, $\angle A \cong \angle K$, $\angle B \cong \angle N$ то,
 $\triangle ABC \cong \triangle KMN$



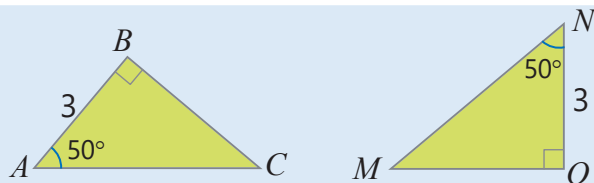


Подумай!

Как можно обосновать конгруэнтность треугольников по I и II признакам, вырезав по данным элементам и наложив два треугольника друг на друга?

- 4 Определите, конгруэнтны треугольники или нет. По какому признаку можно обосновать их конгруэнтность?

ОБРАЗЕЦ

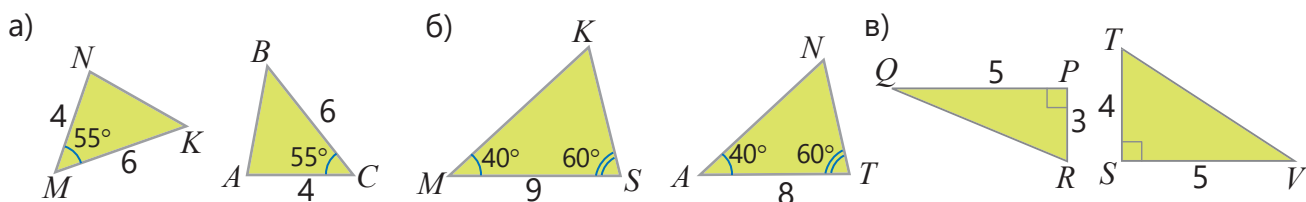


Решение

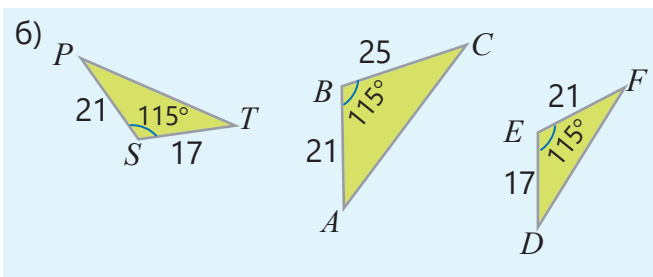
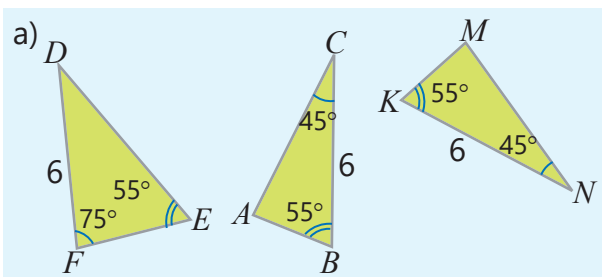
$\angle A \cong \angle N$, $\angle B \cong \angle O$, $AB \cong NO$
 $\triangle ABC \cong \triangle NOM$

Объяснение

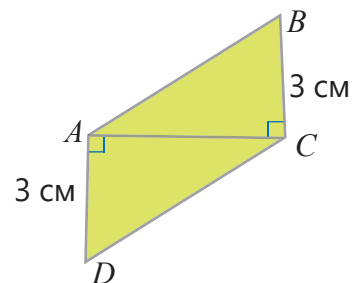
$\angle A = \angle N = 50^\circ$, $\angle B = \angle O = 90^\circ$, $AB = NO = 3$ см.
 По признаку конгруэнтности треугольников УСУ.



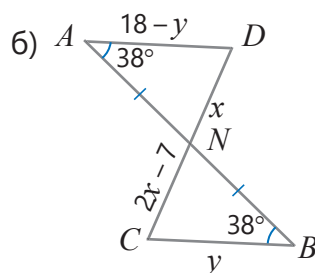
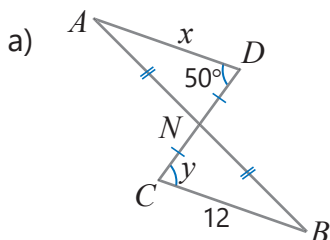
- 5 Определите конгруэнтные треугольники, используя свойства СУС или УСУ.



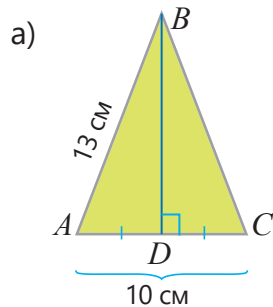
- 6 Обоснуйте конгруэнтность треугольников ABC и CDA . Найдите сторону CD и угол D , если $AB = 6$ см, $\angle B = 60^\circ$.



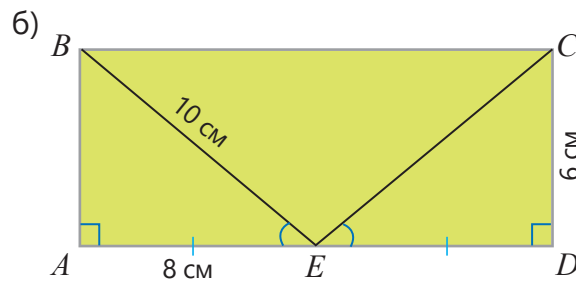
- 7 Отрезки AB и CD пересекаются в точке N . По данным на рисунке определите конгруэнтные треугольники и обоснуйте. Найдите сторону и угол, обозначенные буквой.



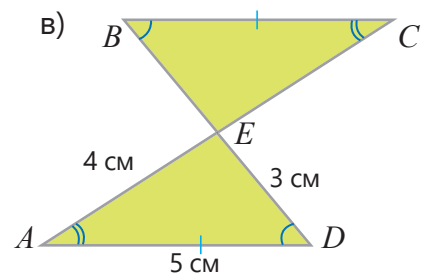
- 8 Найдите длину неизвестной стороны. Определите, какой признак конгруэнтности применяется.



$AD = ?$ $BC = ?$

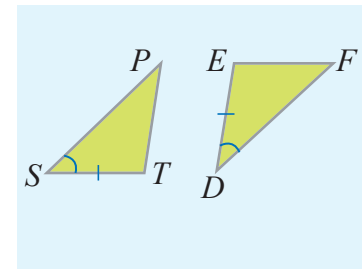
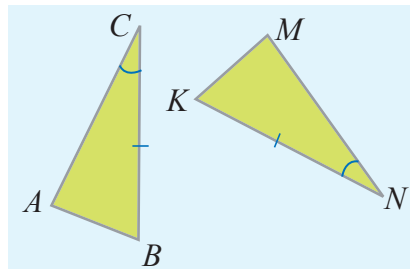
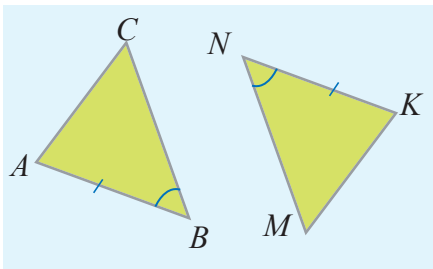


$AB = ?$ $EC = ?$ $BC = ?$



$BE = ?$ $BC = ?$ $EC = ?$

- 9 Какие еще размеры должны быть равны, чтобы треугольники были конгруэнтны по признаку: а) УСУ; б) СУС?

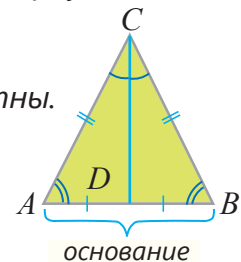


Изучение Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным. Равные стороны равнобедренного треугольника называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием*. Можно отметить некоторые свойства равнобедренных треугольников, используя признак СУС.

Свойство 1. Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.

Если в треугольнике ABC $AC \cong BC$, то $\angle A \cong \angle B$



Эти свойства можно обосновать таким образом.

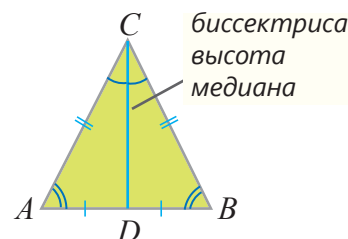
Предположение	Обоснование
1. $AC \cong BC$	1. Дано
2. Чертится биссектриса CD .	2. Можно нарисовать биссектрису произвольного угла треугольника
3. $\angle ACD \cong \angle BCD$	3. Биссектриса делит угол на два конгруэнтных угла
4. $CD \cong CD$	4. Отрезок CD – общая сторона треугольников ACD и BCD
5. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$	5. По признаку СУС
6. $\angle A \cong \angle B$	6. Соответственные углы конгруэнтных треугольников конгруэнтны

Верно и обратное.

• Если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

Свойство 2. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, также является биссектрисой и высотой этого треугольника.

Обосновать то, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, также является биссектрисой, можно следующим образом.



Предположение	Обоснование
1. $AC \cong BC$ и $\angle A \cong \angle B$	1. Дано
2. $AD \cong DB$	2. Отрезок CD – медиана треугольника ABC
3. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$	3. По признаку СУС
4. $\angle ACD \cong \angle BCD$	4. Соответственные углы конгруэнтных треугольников конгруэнтны

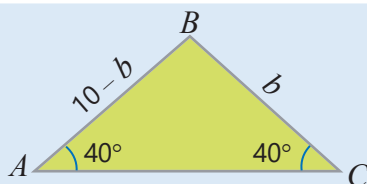


Подумай!

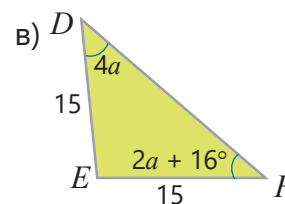
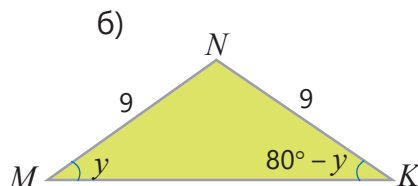
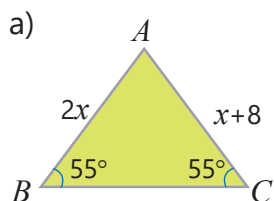
Как можно обосновать то, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, также является высотой?

- 10 Найдите неизвестное, используя свойства равнобедренного треугольника.

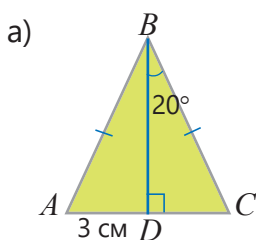
ОБРАЗЕЦ



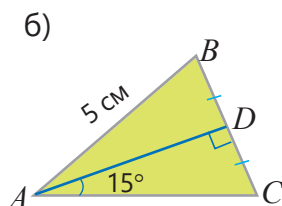
Решение	Объяснение
$10 - b = b$ $10 = 2b$ $b = 5$	Поскольку два угла равны, этот треугольник равнобедренный. Поскольку $\triangle ABC$ равнобедренный, $AB = BC$.



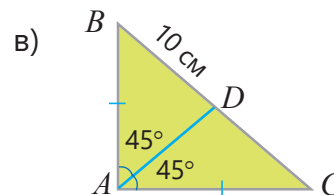
- 11 Найдите неизвестные сторону и угол.



$DC = ?$ $\angle ABC = ?$



$AC = ?$ $\angle BAC = ?$



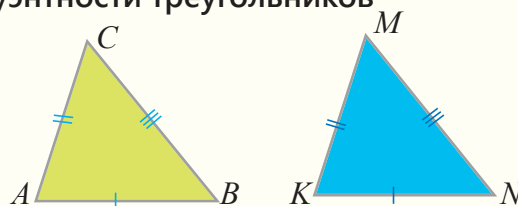
$BC = ?$ $\angle ADC = ?$

Изучение III признак конгруэнтности треугольников

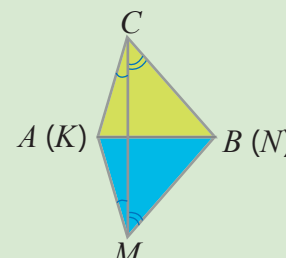
Сторона-сторона-сторона (ССС) или III признак конгруэнтности треугольников

Если три стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

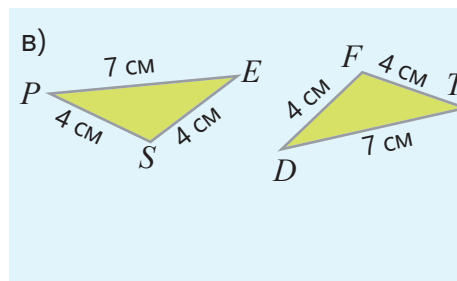
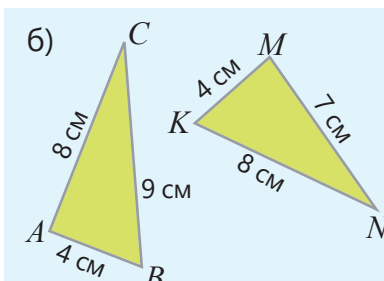
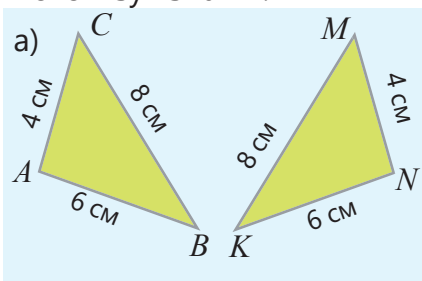
Если $AB \cong KN$, $AC \cong KM$, $BC \cong NM$, то
 $\triangle ABC \cong \triangle KNM$



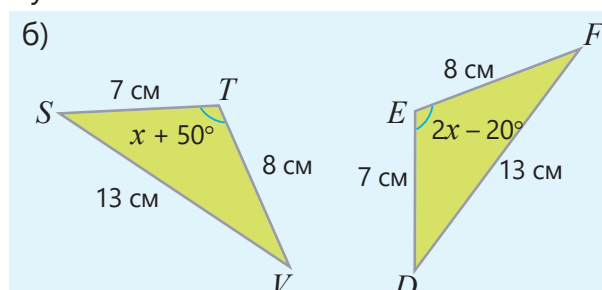
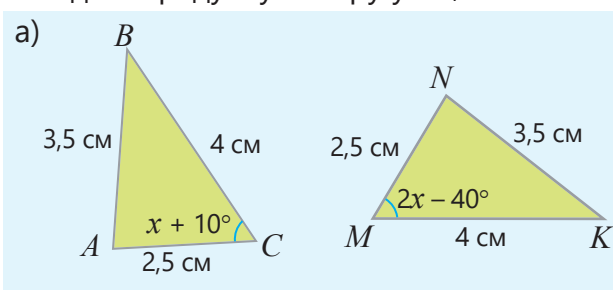
Предположение	Обоснование
1. $AB \cong KN$, $AC \cong KM$, $BC \cong NM$	1. Дано.
2. Расположим треугольники ABC и KNM так, чтобы отрезок AB совпал с отрезком KN , а точки C и M были противоположны друг другу. Полученные треугольники $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ равнобедренные.	2. $AC \cong KM$, $BC \cong NM$
3. $\angle ACM \cong \angle KMC$ и $\angle MCB \cong \angle CMN$	3. Углы при основании равнобедренных треугольников равны.
4. $\angle ACB \cong \angle KMN$	4. $\angle ACB = \angle ACM + \angle MCB$ и $\angle KMN = \angle KMC + \angle CMN$
5. $\triangle ACB \cong \triangle KMN$	5. Поскольку $AC \cong KM$, $CB \cong MN$ по признаку СУС.



- 12 Определите, конгруэнтны ли треугольники. Запишите конгруэнтные треугольники, используя знак $\cong$.

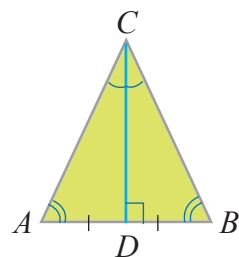


- 13 По какому признаку можно обосновать конгруэнтность треугольников на рисунке? Найдите градусную меру угла, обозначенного буквой.



Решение задач

- 14 Отрезок CD – медиана треугольника ABC .
- а) Сколько см составляет периметр треугольника ABC , если периметр треугольника ACD 30 см, а длина медианы CD 12 см?
- б) Сколько см составляет длина медианы CD , если периметр треугольника ABC 32 см, а периметр треугольника BDC 24 см?



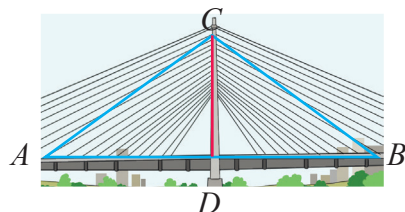
- 15 Обсудите мнение Лалы относительно обоснования предложения и определите, является ли оно правильным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то эти прямоугольные треугольники конгруэнтны.

Если совместить треугольники так, чтобы вершины и стороны прямых углов C и F совпали, то также совпадут вершины B и E . Тогда вершины A и D тоже должны совпасть. В противном случае в равнобедренном треугольнике ABD один из прилежащих к основанию углов будет острым, а другой — тупым, что невозможно.



- 16 Прямые, отмеченные на подвесном мосту, образуют треугольник. Отрезок CD – высота этого треугольника. Углы ACD и BCD конгруэнтны. Какие утверждения верны?



Отрезок CD – биссектриса треугольника ABC .

Отрезок AD короче отрезка BD .

Треугольник ABC – равнобедренный треугольник.



Эльхан

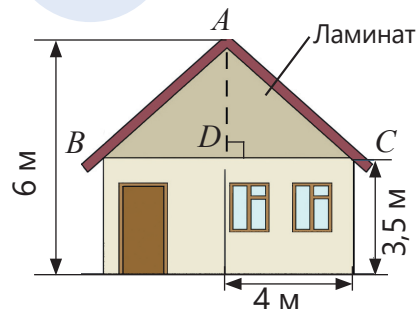


Самир

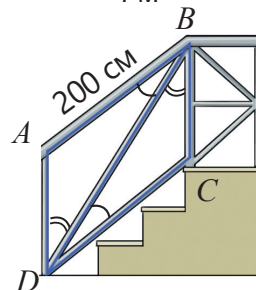


Айнур

- 17 Мастер хотел покрыть фасад крыши дома ($\triangle ABC$) ламинатом. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC . Сколько квадратных метров ламината будет использовано, исходя из данных размеров?



- 18 На изображении железной лестницы отмечены конгруэнтные углы.
- По какому признаку конгруэнтности треугольников можно обосновать то, что $DC \cong AB$?
 - Каков периметр треугольника DBC , если $DB : DC = 1,5 : 1$ и $DB : BC = 2 : 1$?

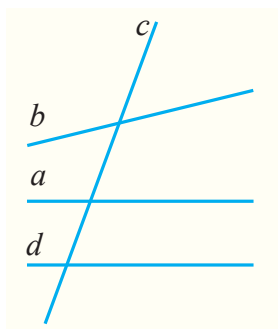


7.3. Параллельность прямых

Исследование-обсуждение

Прямая a параллельна прямой d , но не параллельна прямой b .

- Измерьте 8 углов, полученных при пересечении прямых a и b с прямой c . Какие из углов получились равными, а какие нет?
- Измерьте 8 углов, полученных при пересечении прямых a и d с прямой c . Какие из углов получились равными, а какие нет?



Ключевые слова

- секущая
- соответственные углы
- накрест лежащие углы
- односторонние углы
- признаки параллельности прямых

Изучение Углы, полученные при пересечении двух прямых третьей

При пересечении прямых a и b с прямой c на плоскости образуется 8 углов. Прямая c называется **секущей** прямых a и b . Иногда полученные углы обозначаются и с помощью цифр. Эти углы попарно называются так:

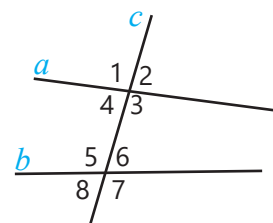
соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$;

внешние накрест лежащие углы: $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

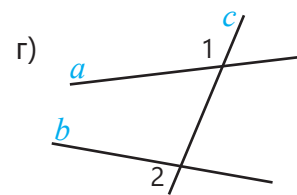
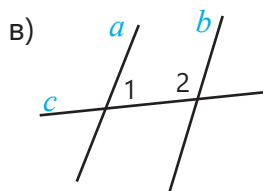
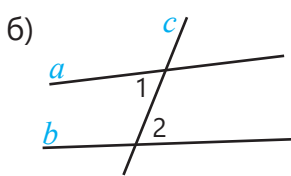
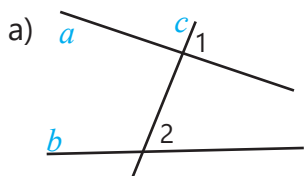
внутренние односторонние углы: $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;

внешние односторонние углы: $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

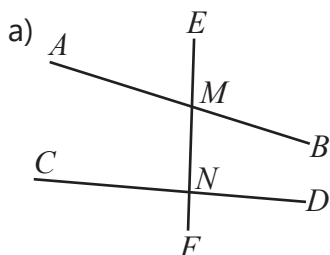


Задания

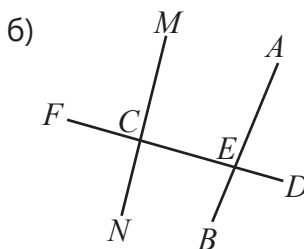
- 1 Назовите по расположению трех прямых на плоскости пары углов, обозначенные цифрами.



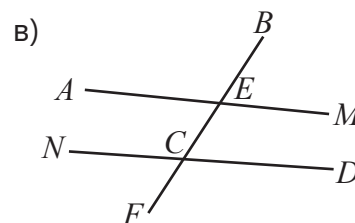
- 2 Определите, какие это углы: внутренние или внешние накрест лежащие, внутренние или внешние односторонние или соответственные углы.



$\angle AME$ и $\angle FND$
 $\angle AMN$ и $\angle MND$

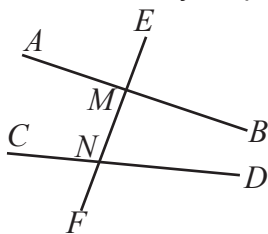


$\angle MCF$ и $\angle AED$
 $\angle NCE$ и $\angle BED$



$\angle BEM$ и $\angle NCF$
 $\angle CEM$ и $\angle FCD$

- 3 Определите, какие из утверждений верные.



- а) $\angle EMB$ и $\angle MND$ соответственные углы.
 б) $\angle AMN$ и $\angle MND$ внутренние односторонние углы.
 в) $\angle EMB$ и $\angle FNC$ внешние накрест лежащие углы.
 г) $\angle FND$ и $\angle EMB$ соответственные углы.

Изучение Углы, образованные пересечением двух параллельных прямых секущей

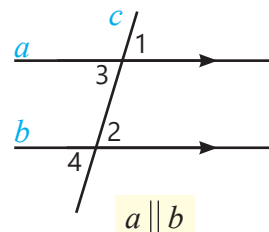
Соответственные углы, образованные пересечением параллельных прямых секущей, конгруэнтны.

$$\angle 1 \cong \angle 2 \quad \angle 3 \cong \angle 4$$

- Верно и обратное.

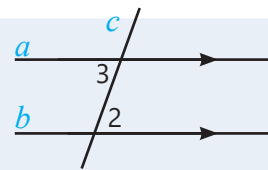
Если соответственные углы, образованные пересечением двух прямых секущей, конгруэнтны, то прямые параллельны.

Обычно при изображении параллельных прямых на них ставятся стрелки одного направления.

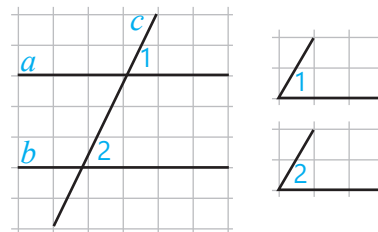


Подумай!

Как можно обосновать то, что внутренние накрест лежащие углы, образованные пересечением параллельных прямых секущей, конгруэнтны? $\angle 2 \cong \angle 3$



- 4 **Практическое задание.** На бумаге в клетку начертите параллельные прямые a и b и секущую их прямую c . Вырежьте соответственные углы как на рисунке. Как можете обосновать то, что эти углы конгруэнтны?



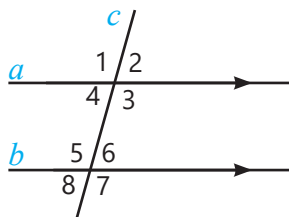
- 5 Обоснуйте верность данных равенств.

$$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$$

$$\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$$

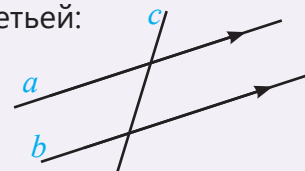


Запомни!

Образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей:

- Соответственные углы конгруэнтны.
- Внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны.
- Внешние накрест лежащие углы конгруэнтны.
- Сумма внутренних односторонних углов равна 180° .
- Сумма внешних односторонних углов равна 180° .

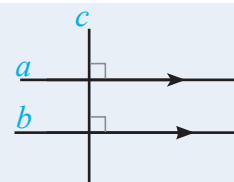
Верно и обратное. Если выполняется одно из перечисленных выше свойств для углов, образованных при пересечении двух прямых третьей, то эти две прямые параллельны. Это называется *признаком параллельности* прямых.





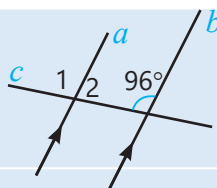
Подумай!

Как можно обосновать, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой на плоскости, параллельны по признакам параллельности прямых?

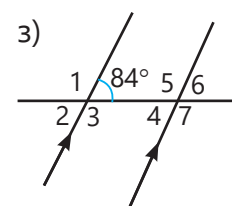
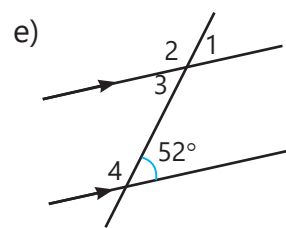
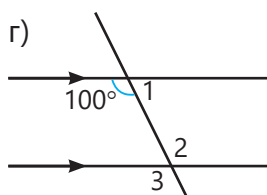
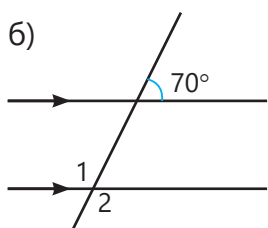
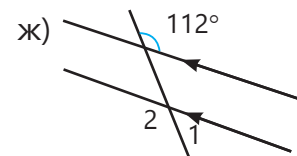
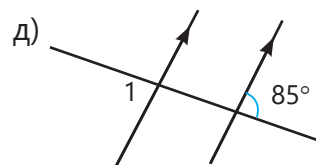
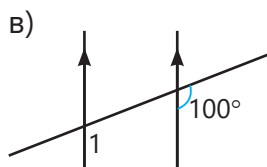
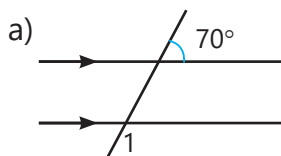


6 Найдите градусную меру пронумерованных углов.

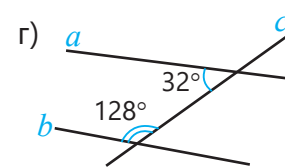
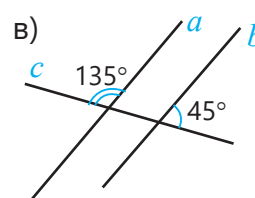
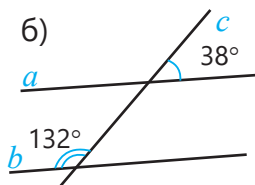
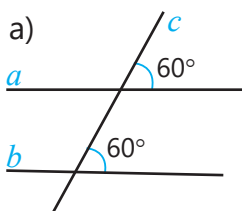
ОБРАЗЕЦ



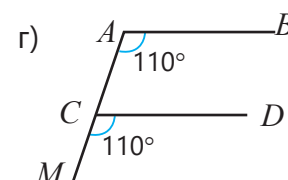
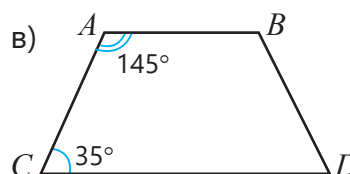
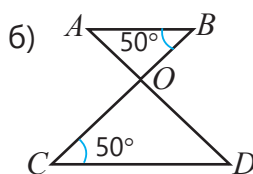
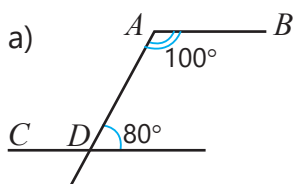
Решение	Объяснение
$\angle 1 = 96^\circ$ $\angle 2 + 96^\circ = 180^\circ$ $\angle 2 = 180^\circ - 96^\circ$ $\angle 2 = 84^\circ$	При пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы конгруэнтны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180° .



7 Определите по отмеченным углам, являются ли прямые a и b параллельными.

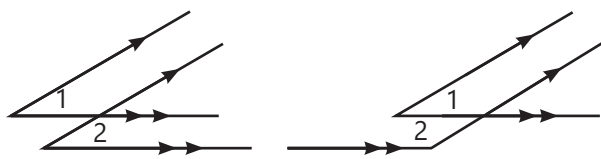


8 Обоснуйте, что $AB \parallel CD$, используя признаки параллельности двух прямых.



Изучение Свойства углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

• Углы с соответственно параллельными сторонами конгруэнтны или их сумма равна 180° .



$$\angle 1 \cong \angle 2$$

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

• Углы с соответственно перпендикулярными сторонами конгруэнтны или их сумма равна 180° .

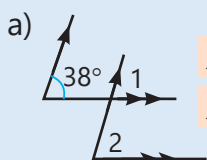


$$\angle 1 \cong \angle 2$$

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

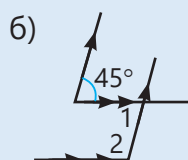
9 Найдите градусную меру пронумерованных углов по признакам параллельности.

ОБРАЗЕЦ



$$\angle 1 = ?$$

$$\angle 2 = ?$$



$$\angle 1 = ?$$

$$\angle 2 = ?$$

Решение

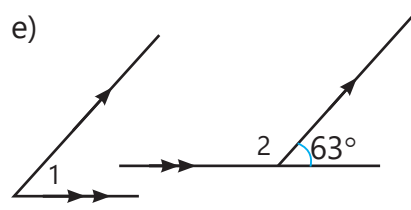
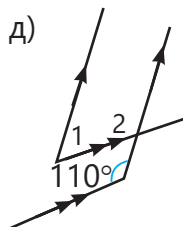
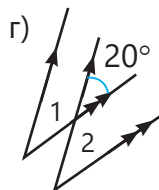
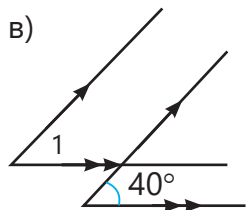
а) $\angle 1 = 38^\circ$
 $\angle 2 = \angle 1 = 38^\circ$

б) $\angle 1 = 45^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
 $\angle 2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Объяснение

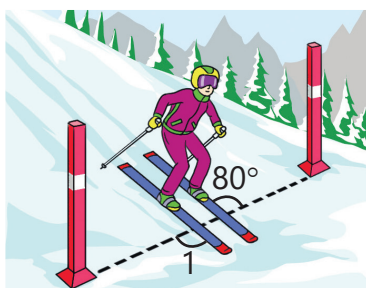
При пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы равны.

При пересечении двух параллельных прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180° .

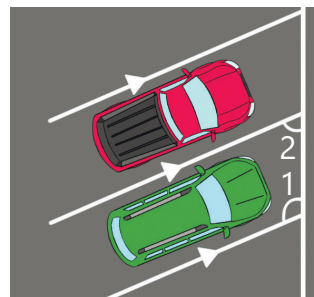


Решение задач

10 На соревнованиях по лыжным гонкам спортсмен, который держит лыжи параллельно, может двигаться быстрее. Сколько градусов должен составлять $\angle 1$, чтобы спортсмен имел наибольшую скорость?



11 Один из углов, указанных на рисунке, больше другого в 2 раза. Сколько градусов составляет больший угол?



7.4. Сумма углов треугольника

Исследование-обсуждение

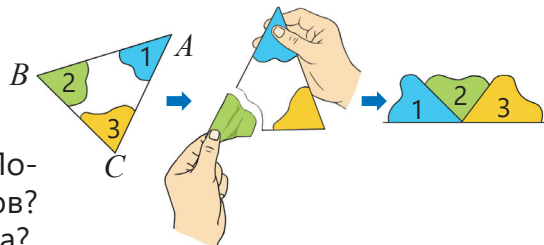
Начертите на бумаге треугольник и вырежьте его ножницами. Отрежьте углы этого треугольника и сложите их вершинами вместе, как на рисунке.

- Какой угол образуется при сложении углов A , B и C ?
- Исходя из этого, сколько градусов составляет сумма углов этого треугольника? Проверьте свой ответ, измерив углы.
- Сравните свой результат с результатом товарища. Получился ли один и тот же угол для обоих треугольников? Что можно сказать о сумме углов любого треугольника?



Ключевые слова

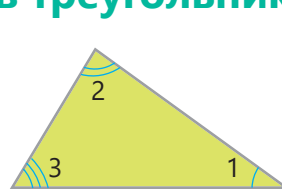
- внутренний угол
- внешний угол



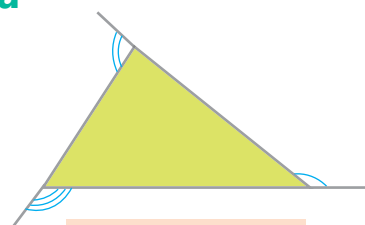
Изучение Сумма внутренних углов треугольника

Угол, образованный двумя сторонами и расположенный внутри треугольника, называется **внутренним углом** треугольника, а угол, смежный с этим углом, называется **внешним углом**. Сумма внутренних углов равна 180° .

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$



Внутренние углы треугольника

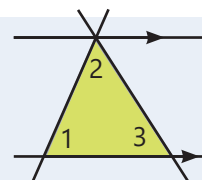


Внешние углы треугольника



Подумай!

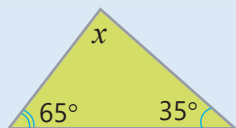
Как можно обосновать, что сумма внутренних углов равна 180° , используя свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей?



Задания

- 1 Найдите неизвестный угол треугольника.

ОБРАЗЕЦ

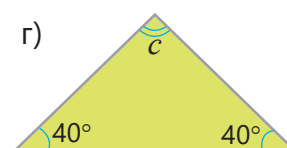
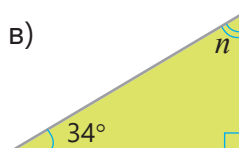
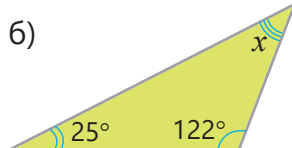
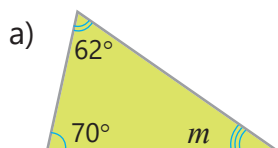


Решение

$$\begin{aligned} 35^\circ + 65^\circ + x &= 180^\circ \\ 100^\circ + x &= 180^\circ \\ x &= 180^\circ - 100^\circ \\ x &= 80^\circ \end{aligned}$$

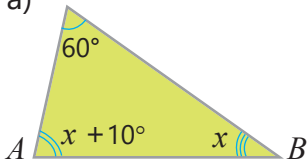
Объяснение

Поскольку сумма внутренних углов равна 180° , записывается и решается уравнение.



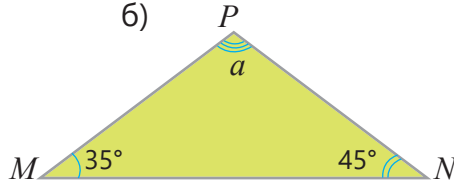
2 Найдите градусную меру неизвестного угла треугольника.

а)



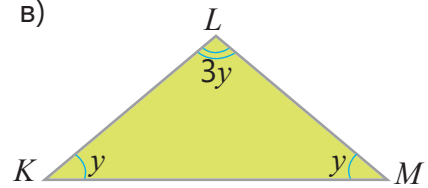
$$\angle ABC = ?$$

б)



$$\angle MPN = ?$$

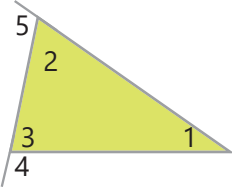
в)



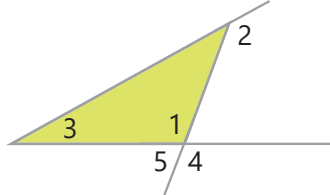
$$\angle KLM = ?$$

3 Определите, какие из пронумерованных углов являются внутренними, а какие – внешними.

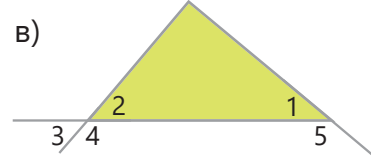
а)



б)

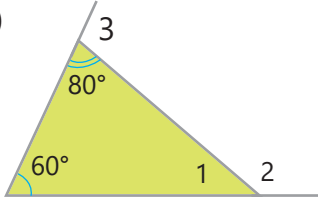


в)



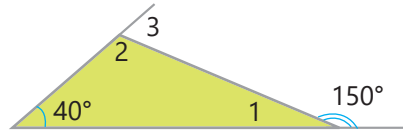
4 Найдите неизвестные углы.

а)



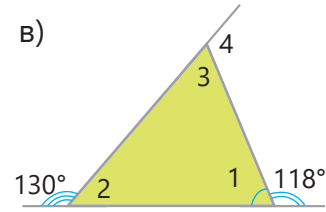
$$\angle 1 = ? \quad \angle 2 = ? \quad \angle 3 = ?$$

б)



$$\angle 1 = ? \quad \angle 2 = ? \quad \angle 3 = ?$$

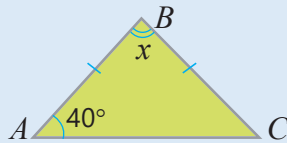
в)



$$\angle 1 = ? \quad \angle 2 = ? \quad \angle 3 = ? \quad \angle 4 = ?$$

5 Найдите неизвестный угол, используя свойства равнобедренного треугольника..

ОБРАЗЕЦ



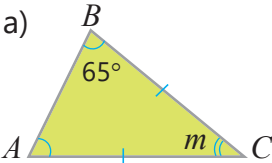
Решение

$$\begin{aligned} 40^\circ + 40^\circ + x &= 180^\circ \\ 80^\circ + x &= 180^\circ \\ x &= 100^\circ \end{aligned}$$

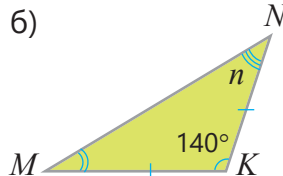
Объяснение

Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Поскольку сумма внутренних углов равна 180° , записывается и решается уравнение.

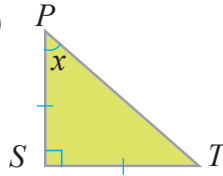
а)



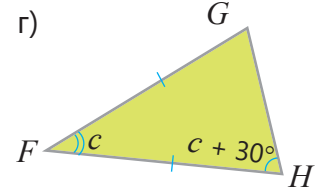
б)



в)



г)



Внимание!

В дальнейшем, говоря об угле треугольника, будем подразумевать его внутренний угол.

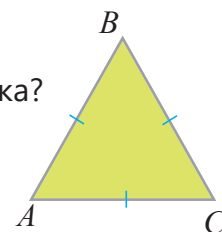
6 Ответьте на вопросы.

а) Один из углов треугольника 40° , а один из оставшихся углов больше другого на 30° . Сколько градусов составляет наибольший угол треугольника?

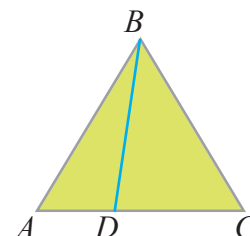
б) Тупой угол равнобедренного треугольника в 4 раза больше острого угла. Сколько градусов составляют углы этого треугольника?

- в) Градусные меры углов треугольника относятся как 2 : 3 : 7. На сколько градусов наибольший угол больше наименьшего угла этого треугольника?

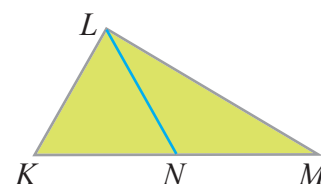
- 7 Как можно обосновать равенство углов равностороннего треугольника? Найдите градусную меру каждого угла.



- 8 В равностороннем треугольнике ABC проведен отрезок BD , делящий угол B в отношении 1 : 2. Найдите градусные меры углов ABD , DBC , ADB и BDC .



- 9 В треугольнике KLM отрезок LN делит его на равнобедренный и равносторонний треугольники. Найдите градусные меры углов треугольника KLM .



Изучение Свойство внешнего угла треугольника

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

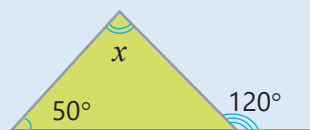
$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$



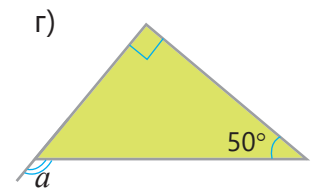
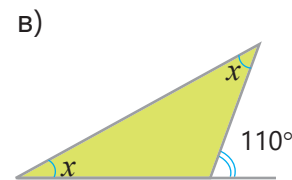
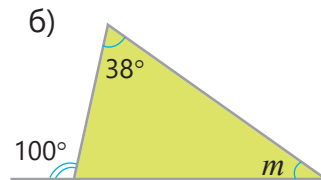
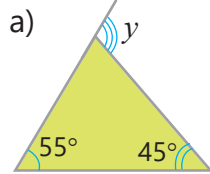
Предположение	Обоснование
1. $\angle 4$ – внешний угол треугольника.	1. Дано.
2. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$	2. Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .
3. $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$	3. $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные углы.
4. $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$	4. Обе части равенства равны 180° .
5. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$	5. Из обеих частей равенства вычитают $\angle 3$.

- 10 Найдите неизвестный угол треугольника.

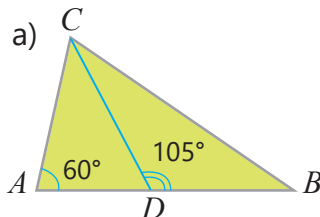
ОБРАЗЕЦ



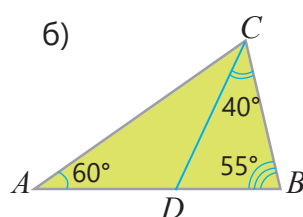
Решение	Объяснение
120° 50° и x $50^\circ + x = 120^\circ$ $x = 120^\circ - 50^\circ$ $x = 70^\circ$	Внешний угол треугольника Внутренние углы, не смежные с данным внешним углом Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Записывается и решается уравнение.



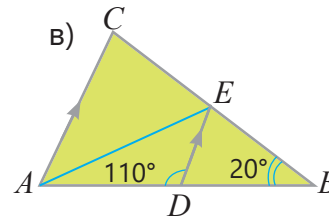
11 Найдите неизвестные углы треугольника.



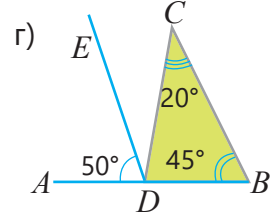
$\angle ACD = ?$



$\angle CDB = ?$ $\angle ACD = ?$



$\angle DEB = ?$ $\angle BCA = ?$



$\angle CDE = ?$

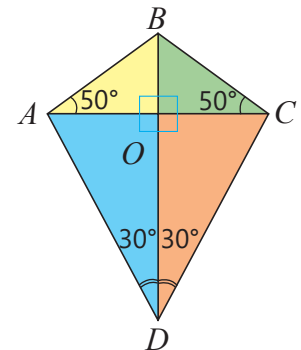
12 Определите верные утверждения. Обоснуйте свои ответы.

- Внешний угол при одной из вершин треугольника всегда больше соответствующего внутреннего угла.
- Внешний и внутренний углы при одной и той же вершине треугольника – вертикальные углы.
- Только один из внутренних углов треугольника может быть тупым.
- Внутренние углы равнобедренного треугольника равны.

Решение задач

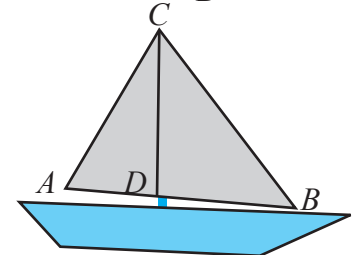
13 Дети сделали из цветной бумаги воздушного змея.

- Сколько градусов составляет угол ABO ?
- Сколько градусов составляет угол CAD ?
- На сколько градусов угол ABC больше угла ADC ?



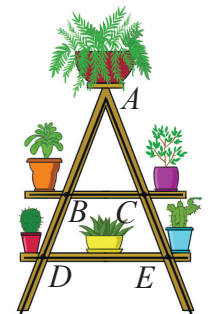
14 Паруса катера имеют форму треугольника. Угол $ABC = 60^\circ$.

- Сколько градусов составляет угол CDB , если угол $ADC = 110^\circ$?
- Сколько градусов составляет угол ADC , если угол CDB больше угла BCD на 20° ?
- Сколько градусов составляет угол BCD , если угол ADC в 2 раза больше угла CDB ?



15 Мастер изготовил полки для горшков, как на рисунке. Полки BC и DE параллельны. Угол $ABC = 60^\circ$, внешний угол при вершине E в 2 раза больше него.

- Сколько градусов составляют внешние углы при вершинах D и E ?
- Сколько градусов составляет угол BAC ?



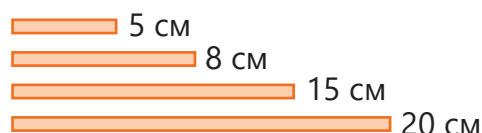
7.5. Построение треугольника по трем сторонам

Исследование-обсуждение

Практическое задание.

Из цветной бумаги вырежьте ленты длиной 5 см, 8 см, 15 см и 20 см, шириной 5 мм. Постройте из них треугольники различными способами.

- Сколько треугольников можно сделать из этих лент?
- В полученном треугольнике напротив какой стороны угол наибольший, а напротив какой стороны угол наименьший?



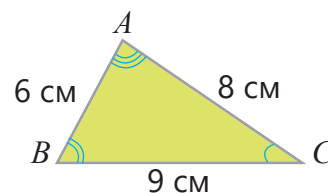
Изучение Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.

Например, в треугольнике ABC сторона BC наибольшая, поэтому угол BAC , лежащий напротив этой стороны, наибольший.

Неравенство треугольника. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

На рисунке в треугольнике ABC : $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$, $BC < AC + AB$.



Подумай!

Как можно объяснить, используя соотношение между сторонами и углами треугольника, то, что гипотенуза в прямоугольном треугольнике больше каждого катета?



Задания

- 1 Существует ли треугольник, сторонами которого являются отрезки заданной длины?

ОБРАЗЕЦ а) 4 см 5 см 8 см б) 3 см 3 см 7 см

Решение	Объяснение
а) $8 \text{ см} < 4 \text{ см} + 5 \text{ см}$ Такой треугольник существует.	Достаточно проверить, что больший отрезок меньше суммы двух других.
б) $7 \text{ см} > 3 \text{ см} + 3 \text{ см}$ Такого треугольника не существует.	Неравенство треугольника не удовлетворяется.
в) 3 см 4 см 5 см	д) 5 см 60 мм 13 см
г) 7 см 2 см 9 см	е) 0,8 дм 4 см 11 см
	ж) 7 см 7 см 16 см
	з) 9 см 8 см 17 см

- 2 Ответьте на вопросы, используя соотношения между сторонами и углами треугольника.
- Если в треугольнике ABC $AB < BC < AC$, то какой угол треугольника наибольший?
 - Если в треугольнике MNK $MN = NK$, то какие углы равны?
 - В треугольнике DEF угол EDF тупой. Какая сторона в треугольнике наибольшая: ED или EF ?

3 Ответьте на вопросы.

а) Если в треугольнике ABC $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AC = 6$ см, то какие углы являются наибольшим и наименьшим углами треугольника?

б) В равнобедренном треугольнике $\angle NMK = \angle NKM = 68^\circ$. Какая сторона треугольника наименьшая?

в) Один из углов при основании BC равнобедренного треугольника ABC равен 35° . Какие стороны треугольника равны?

4 Определите, являются утверждения верными или нет.

а) Если угол при основании равнобедренного треугольника равен 40° , то боковые стороны этого треугольника больше основания.

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника меньше суммы катетов.

Изучение Построение треугольника по трем сторонам

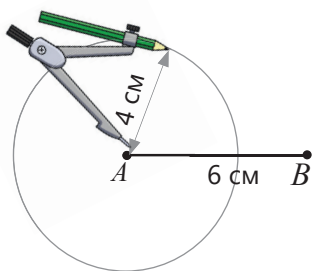
Изображение фигур только с помощью линейки (без делений) и циркуля в математике называется *построением фигур*. Если даны длины трех сторон треугольника, то такой треугольник можно построить с помощью линейки и циркуля.

Например, треугольник ABC со сторонами 4 см, 5 см и 6 см можно построить так.

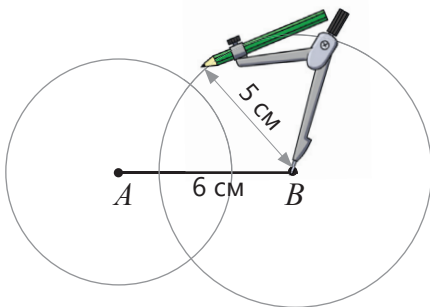
1 Чертится отрезок AB длиной 6 см.



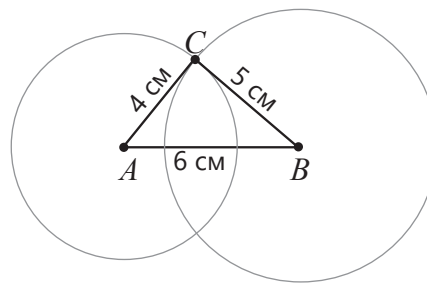
2 Чертится окружность с центром в точке A и радиусом 4 см.



3 Чертится окружность с центром в точке B и радиусом 5 см.



4 Отмечается одна из точек пересечения окружностей (C). Эта точка соединяется с точками A и B .



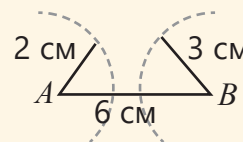
Подумай!

Как можно построить треугольник со сторонами 4 см, 5 см и 6 см, сначала начертив наименьшую сторону? Объясните, начертив в тетради оба случая. Будут ли полученные треугольники конгруэнтны?

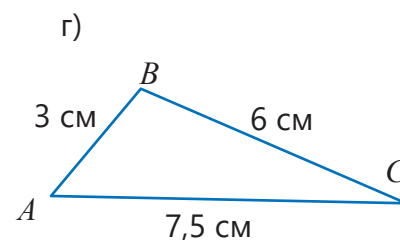
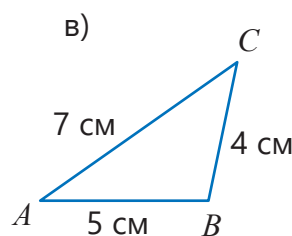
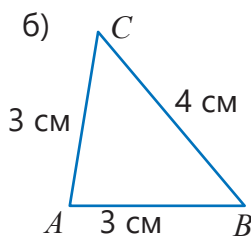
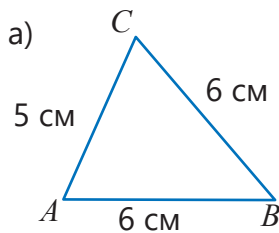


Внимание!

Верность неравенства треугольника можно также показать, построив треугольник. Например, поскольку $6 \text{ см} > 2 \text{ см} + 3 \text{ см}$, то невозможно построить треугольник со сторонами 2 см, 3 см и 6 см.



5 Нарисуйте в тетради треугольники с заданными сторонами.



6 Постройте треугольники.

- Треугольник со сторонами 5 см, 6 см и 8 см;
- Треугольник, у которого $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, а сторона AC на 4 см длиннее стороны AB ;
- Равнобедренный треугольник, боковые стороны которого 5 см, а основание 3 см;
- Равносторонний треугольник со сторонами 8 см.

7 Сторона AB равна 8 см, сторона BC на 25% больше, а сторона AC на 40% меньше стороны BC . Определите наибольший и наименьший углы этого треугольника.

8 Можно ли построить треугольник с заданными размерами? Определите и постройте в тетради.

- Равнобедренный треугольник, боковые стороны которого 6 см, а основание 8 см;
- Равнобедренный треугольник, боковые стороны которого 5 см, а основание 10 см;
- Треугольник, разность сторон которого 2 см, а периметр 24 см.

9 Ответьте на вопросы. Определите, сколько всего таких треугольников.

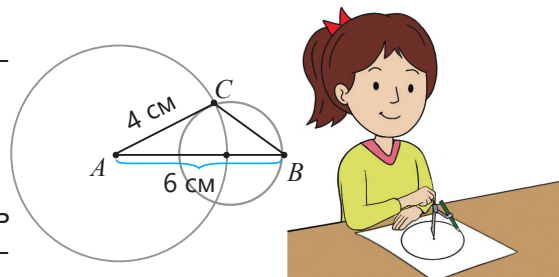
- Чему равен периметр равнобедренного треугольника со сторонами 5 см и 2 см?
- Чему равен периметр равнобедренного треугольника со сторонами 3 см и 4 см?

Решение задач

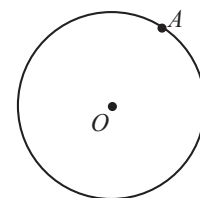
10 Периметр равнобедренного треугольника, у которого одна сторона в два раза больше другой, равен 10 см. Найдите длины сторон и постройте этот треугольник.

11 Лала хотела построить треугольник, стороны которого равны 6 см, 4 см, 2 см.

- Какую ошибку она совершила?
- Можно ли построить такой треугольник?
- Проверьте свой ответ, попытавшись построить треугольник и используя неравенство треугольника.



12 Точка A расположена на окружности с центром в точке O . С помощью циркуля отметьте на окружности точку B так, чтобы получился равносторонний треугольник AOB . Сколько существует таких точек B ?



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конгруэнтные треугольники

Если $\triangle ABC \cong \triangle KNM$, то

$$AB \cong KN, BC \cong MN, AC \cong KM$$

$$\angle A \cong \angle K, \angle B \cong \angle N, \angle C \cong \angle M$$

Признаки конгруэнтности треугольников

1 признак – СУС (сторона-угол-сторона)

Если $AB \cong KN$, $CB \cong MN$,

$$\angle ABC \cong \angle KNM, \quad \rightarrow$$

$$\triangle ABC \cong \triangle KNM.$$

II признак – УСУ (угол-сторона-угол)

Если $\angle ABC \cong \angle KNM$,

$$\angle ACB \cong \angle KMN,$$

$AB \cong KN, \quad \rightarrow$

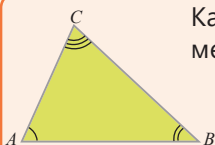
$$\triangle ABC \cong \triangle KNM.$$

III признак – ССС (сторона-сторона-сторона)

Если $AB \cong KN$, $AC \cong KM$,

$$BC \cong NM, \quad \rightarrow$$

$$\triangle ABC \cong \triangle KNM.$$



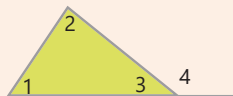
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

$$AB < AC + BC,$$

$$AC < AB + BC,$$

$$BC < AC + AB.$$

Внутренние и внешние углы треугольника



Сумма внутренних углов
треугольника равна 180° .

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$$

Решение исходной задачи

- Треугольники ADC и DAF конгруэнтны и равносторонние, поскольку состоят из одинаковых палочек. Следовательно, их углы также конгруэнтны.

$$\angle DAF \cong \angle ADC$$

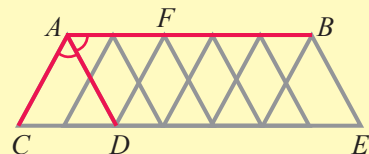
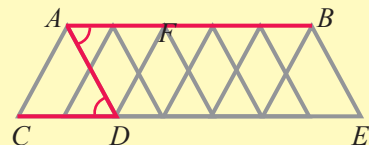
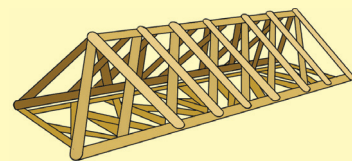
- Прямая AD является секущей отрезков прямых AB и CE . Углы ADC и DAF являются внутренними накрест лежащими углами. Поскольку эти углы равны

$$AB \parallel CE.$$

- Каждый угол треугольников ADC и DAF равен 60° .

$$\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$$

Следовательно, отрезок AD является биссектрисой угла BAC .

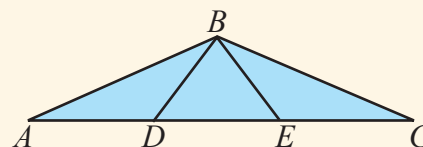


ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Отрезок BE – медиана треугольника BDC , а отрезок BD – медиана треугольника ABE . Треугольник BDE – равносторонний, а треугольник ABC – равнобедренный. Верно ли мнение Айнура? Обоснуйте свое мнение.



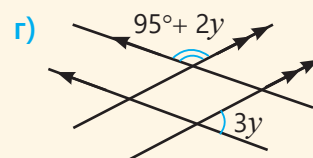
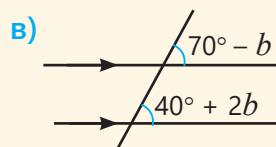
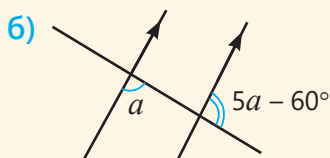
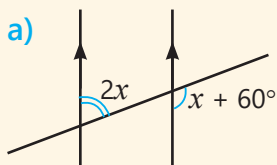
Треугольники ABD и CBE конгруэнтны.



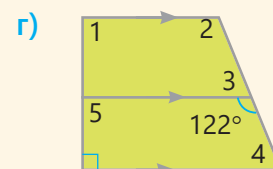
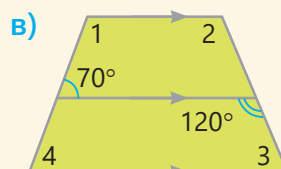
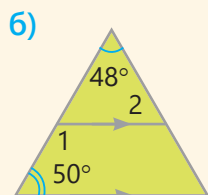
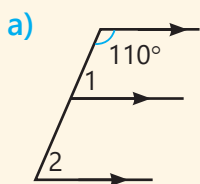
2. Определите верные утверждения. Обоснуйте свое мнение.

- a) Если две различные прямые не пересекаются на плоскости, то эти прямые параллельны.
- б) Из точки вне прямой можно опустить к ней единственный перпендикуляр.
- в) Треугольники, соответственные углы которых равны, могут не быть конгруэнтными.
- г) Углы с соответственно перпендикулярными сторонами конгруэнтны.

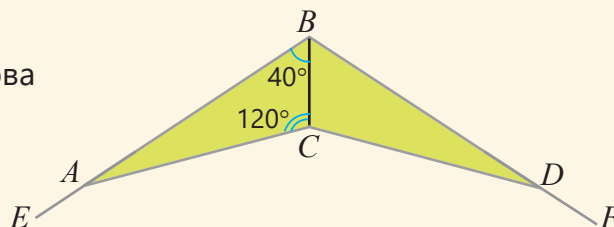
3. Найдите неизвестное.



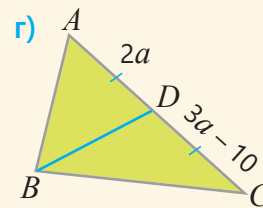
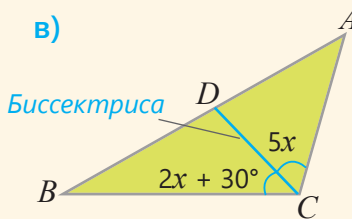
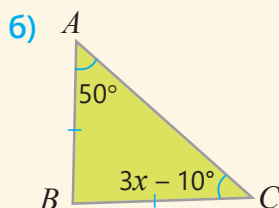
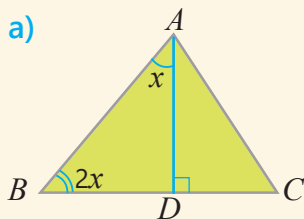
4. Найдите градусную меру пронумерованных углов.



5. ABC и DBC – конгруэнтные треугольники. Какова градусная мера угла CDF ?

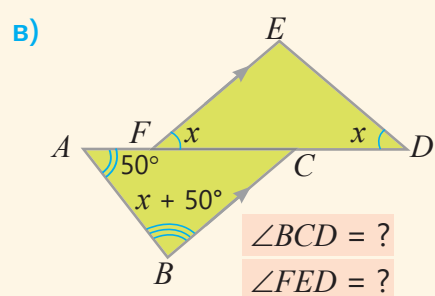
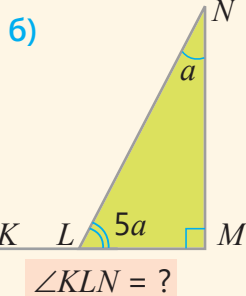
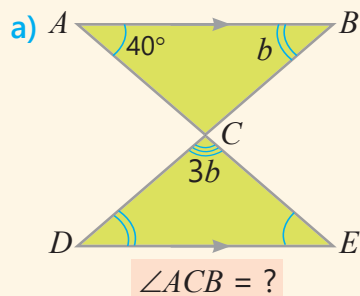


6. Найдите неизвестное.

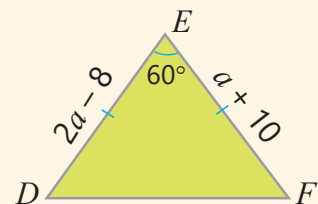


7. Постройте равнобедренный треугольник, боковые стороны которого 5 см, а основание 6 см. Измерьте длину высоты, проведенную к основанию этого треугольника.

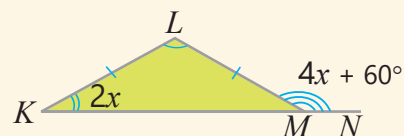
8. Найдите градусные меры неизвестных углов.



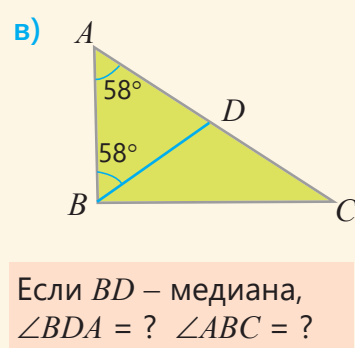
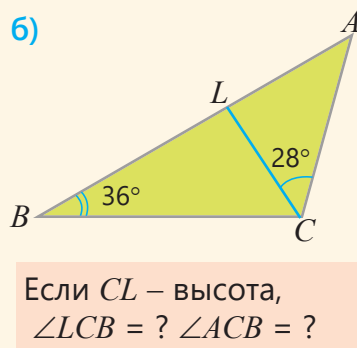
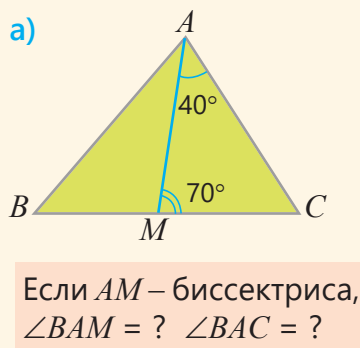
9. Найдите длины всех сторон и градусные меры углов треугольника DEF .



10. Найдите градусные меры углов треугольника KLM .



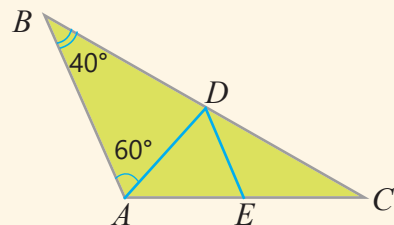
11. Найдите градусные меры неизвестных углов.



12. Ответьте на вопросы.

- а) Сумма углов с соответственно перпендикулярными сторонами равна 160° . Сколько градусов составляют эти углы?
- б) Один из углов с соответственно параллельными сторонами больше другого на 20° . Сколько градусов составляют эти углы?
- в) Углы с соответственно перпендикулярными сторонами относятся как $2 : 3$. Сколько градусов составляют эти углы?

13. Отрезок AD – биссектриса треугольника ABC , а отрезок DE – биссектриса треугольника ADC . Сколько градусов составляет угол AED ?

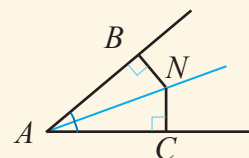


14. Ответьте на вопросы и обоснуйте свой ответ.

- а) Если медиана, проведенная из вершины A равностороннего треугольника ABC , равна 12 см, то какова высота, проведенная из вершины B ?
- б) Если биссектриса, проведенная из вершины A равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , равна 5 см, то какова длина биссектрисы, проведенной из вершины C ?

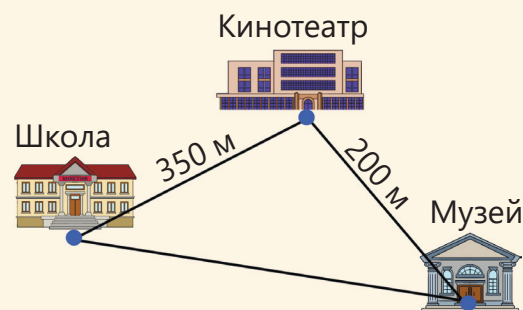
15. Из точки N , расположенной на биссектрисе угла BAC , проведены перпендикуляры NB и NC к сторонам угла.

- Если $\angle BAN = 20^\circ$, $\angle ANC = ?$
- Как можно обосновать, что $\triangle ABN \cong \triangle ACN$?
- Объясните то, что $NB \cong NC$.

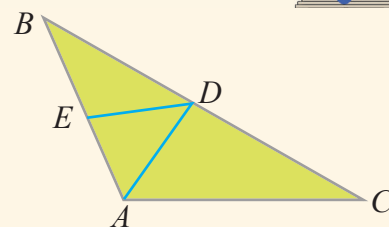


16. Школа находится в 350 м от кинотеатра, а музей – в 200 м от кинотеатра. На основе рисунка определите, какое из следующих значений может быть расстоянием от школы до музея?

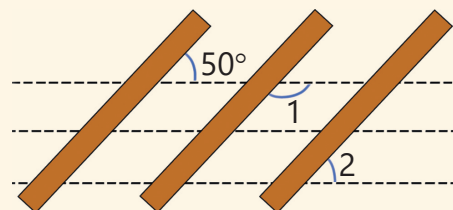
550 м 600 м 450 м 150 м



17. Отрезок AD – высота треугольника ABC . Угол ABD равен 40° . Сколько градусов будет составлять угол DEA , если отрезок DE – биссектриса треугольника ADB ?



18. Представлен план расположения 3-х книжных шкафов в библиотеке. Сколько градусов должны составлять углы 1 и 2, чтобы данные полки были параллельны?



ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КУПОЛА

Конструкции, называемые геодезическими куполами, широко распространены благодаря своему внешнему виду и устойчивости. Треугольные элементы, из которых состоит купол, позволяют равномерно распределить вес. Геодезические купола обладают высокой устойчивостью к стихийным бедствиям, таким как ураганы и землетрясения. Эти купола также используются в космических исследованиях.

Национальное управление по авиации и исследованию космического пространства США (NASA) исследует использование геодезических куполов в космических средах обитания в будущем и даже предлагает использовать их для создания лунной базы.



- Найдите в Интернете информацию о том, когда были изготовлены первые геодезические купола.
- Сделайте из картона модель геодезического купола. Узнайте, какие виды треугольников используются в нем и в чем причина этого.
- Подготовьте презентацию о достоинствах и недостатках данных куполов, а также областях их применения.
- В классах, имеющих технические возможности, может быть подготовлена и распечатана на 3D-принтере компьютерная модель геодезических куполов.

Площадь и объем геометрических фигур

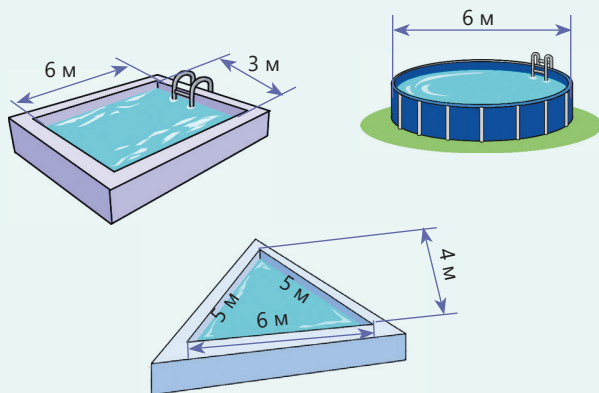
В этой главе вы научитесь:

- вычислять площадь треугольника
- вычислять площадь параллелограмма и ромба
- находить длину окружности и площадь круга
- вычислять площадь поверхности и объем прямой треугольной призмы
- вычислять площадь поверхности и объем цилиндра

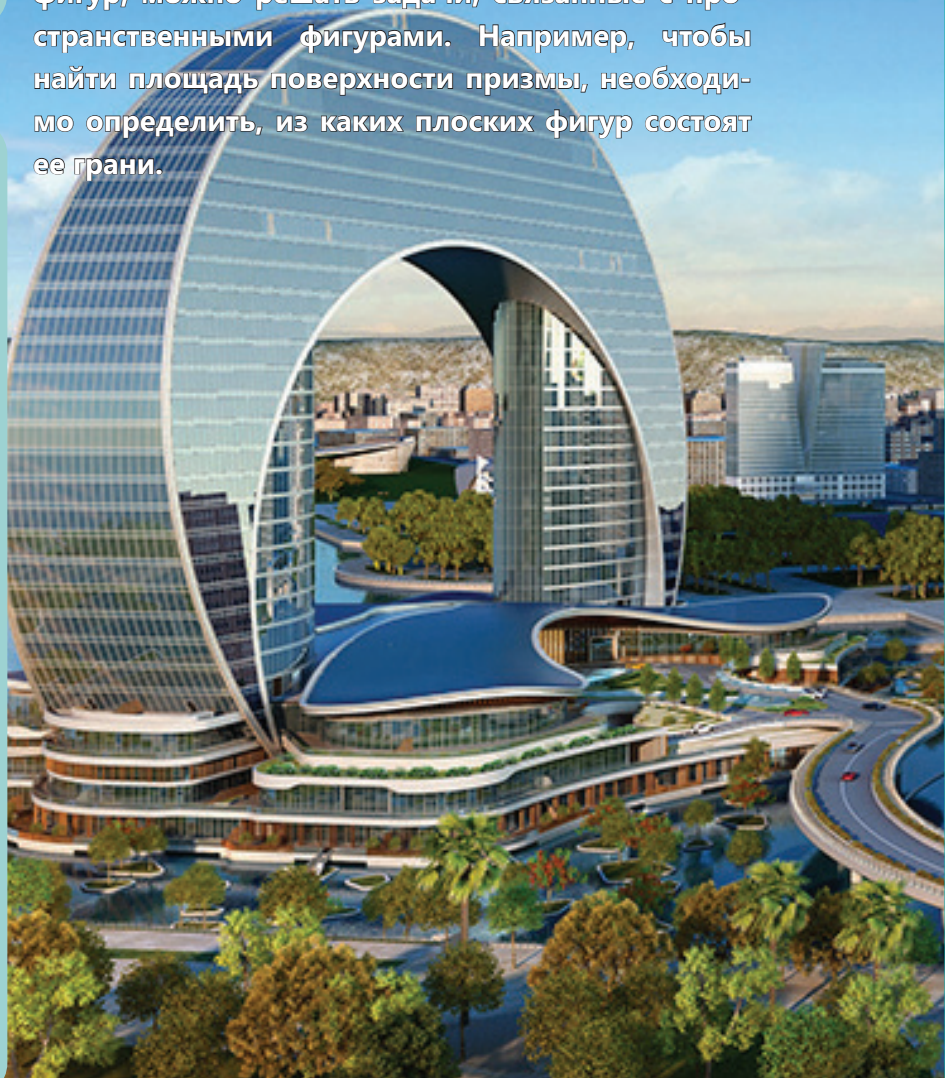
Попытайтесь!

На рисунке изображены три бассейна в форме кубоида, прямой треугольной призмы и цилиндра. Глубина каждого бассейна 150 см.

- В какой бассейн вместится больше воды?
- Если внутреннюю часть этих бассейнов выложить плиткой в форме маленьких квадратов, то для какого бассейна будет использовано больше всего плиток?

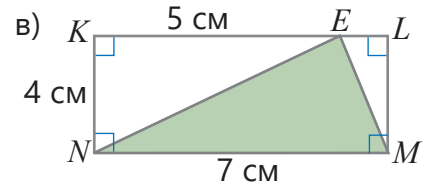
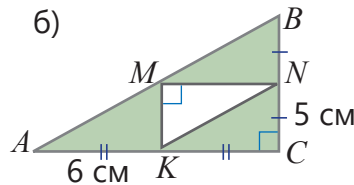
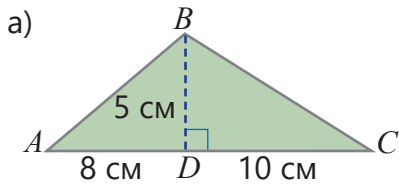


Предметы, которые нас окружают, имеют форму различных геометрических фигур. Например, формы определенных пространственных фигур используются при строительстве жилых домов и бизнес-центров, а также объектов для отдыха. Различные узоры, изображенные на этих зданиях, в основном имеют форму плоских фигур. Раздел геометрии, изучающий свойства плоских фигур, называется *планиметрией*, а раздел, изучающий свойства пространственных фигур, называется *стереометрией*. Используя свойства плоских фигур, можно решать задачи, связанные с пространственными фигурами. Например, чтобы найти площадь поверхности призмы, необходимо определить, из каких плоских фигур состоит ее грани.

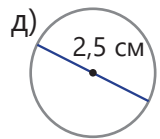
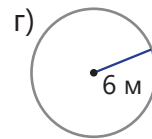
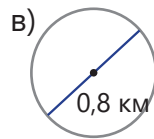
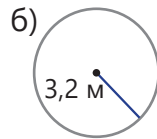
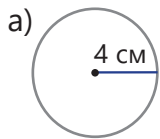


Предварительная проверка

- 1 Найдите площади фигур зеленого цвета.



- 2 Найдите диаметр окружности, радиус которой задан, и радиус окружности, диаметр которой задан.



- 3 Гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет меньше другого на 2 см, равна 10 см, а периметр 24 см. Какова площадь этого треугольника?

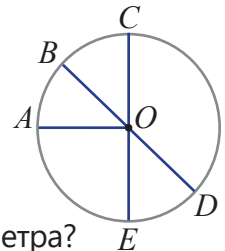
- 4 Площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого 9 см, равна площади квадрата со стороной 6 см. Какова длина другого катета треугольника?

- 5 На рисунке изображена окружность с центром в точке O . Ответьте на вопросы.

а) Какие отрезки являются радиусом, а какие – диаметром окружности?

б) Если радиус круга 8 см, сколько сантиметров составляет длина отрезка CE ?

в) Какова длина отрезка AO , если радиус окружности на 5 см меньше диаметра?



- 6 Какие из утверждений верны?

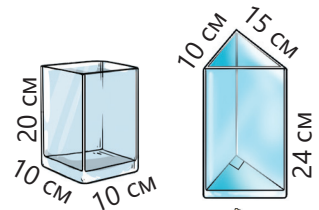
а) Радиус окружности в два раза больше ее диаметра.

б) Призма, все боковые грани которой являются прямоугольниками, является прямой призмой.

в) Прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, имеет 5 граней.

г) Расстояние от центра окружности до произвольной точки на ней является диаметром.

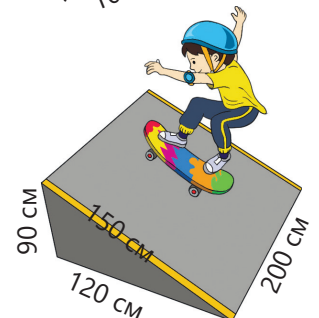
- 7 Сосуд в форме кубоида с размерами, показанными на рисунке, наполнен водой. Воду из этого сосуда перелили в пустой сосуд в форме прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. Сколько останется воды после наполнения сосуда?



- 8 Для соревнований по скейтбордингу подготовлен трамплин в форме прямой призмы, в основании которой – прямоугольный треугольник.

• Каков объем этого трамплина?

• Для покраски 1 м^2 поверхности необходимо 200 мл краски. Хватит ли 2 л краски, чтобы покрасить остальные грани трамплина, кроме той, которая касается земли?

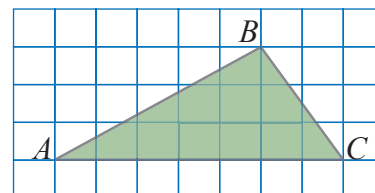


8.1. Площадь треугольника

Исследование-обсуждение

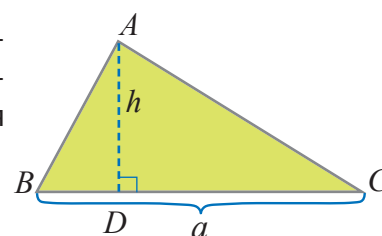
Начертите треугольник ABC на бумаге в клетку. Опустите перпендикуляр из вершины B этого треугольника к стороне AC .

- Как можно найти площадь треугольника ABC , используя площади полученных треугольников?
- Какими другими способами можно найти площадь треугольника ABC ?



Изучение Площадь треугольника

Площадь треугольника можно найти, разделив его на два прямоугольных треугольника или дополнив его до прямоугольного треугольника. Например, площадь треугольника ABC на рисунке определяется сложением площадей прямоугольных треугольников ABD и ADC .



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BD \quad S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot DC$$

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot h \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BD + DC) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a$$

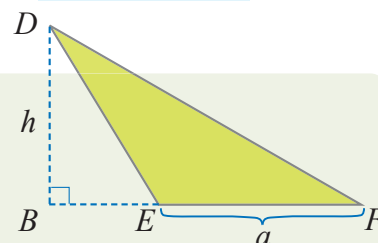
- Площадь треугольника равна половине произведения длины его стороны и длины высоты, опущенной к этой стороне.

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$



Подумай!

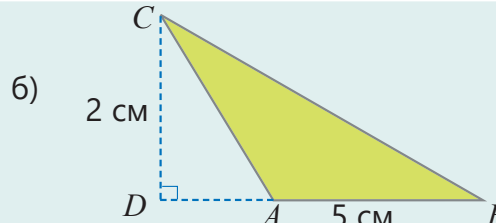
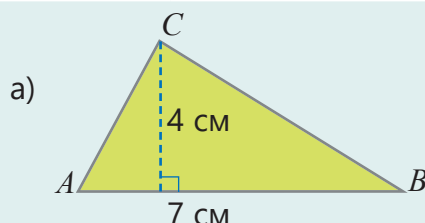
Как можно объяснить правильность формулы $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ для площади тупоугольного треугольника, найдя ее как разность площадей двух прямоугольных треугольников?



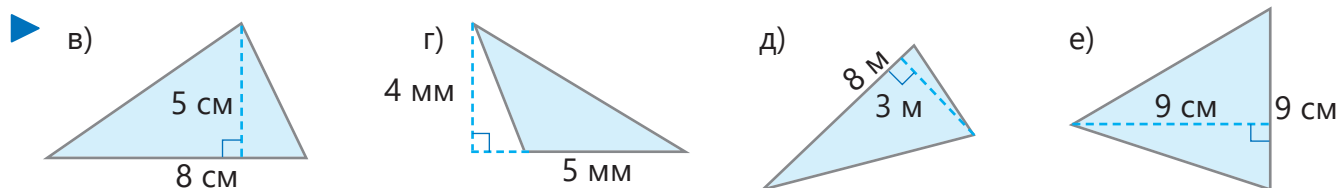
Задания

- 1 Найдите площадь треугольника.

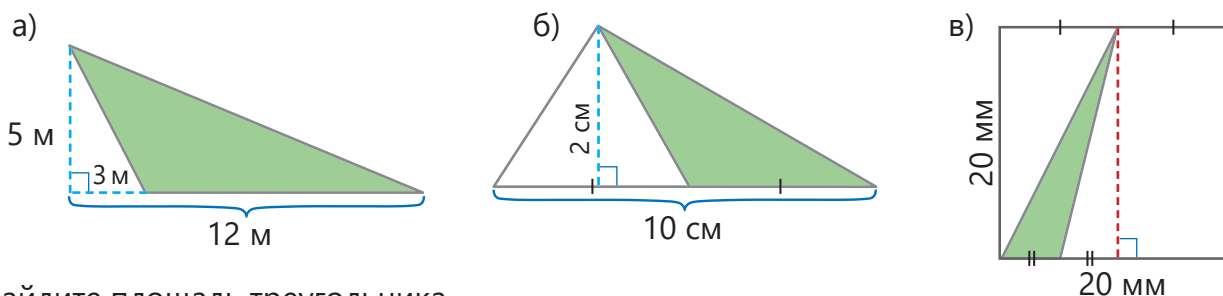
ОБРАЗЕЦ



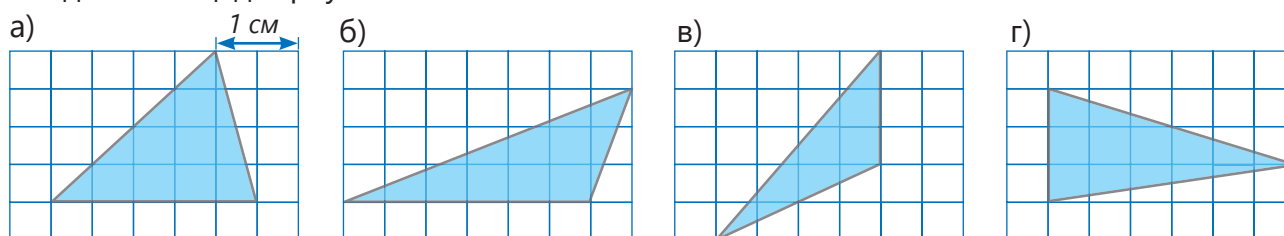
Решение	Объяснение
а) $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14 \text{ (см}^2\text{)}$	Находится половина произведения длины стороны треугольника и длины высоты, опущенной к этой стороне.
б) $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5 \text{ (см}^2\text{)}$	Поскольку ABC – тупоугольный треугольник, высота CD – это перпендикуляр, опущенный к продолжению противоположной стороны. Находится половина произведения стороны треугольника и этой высоты.



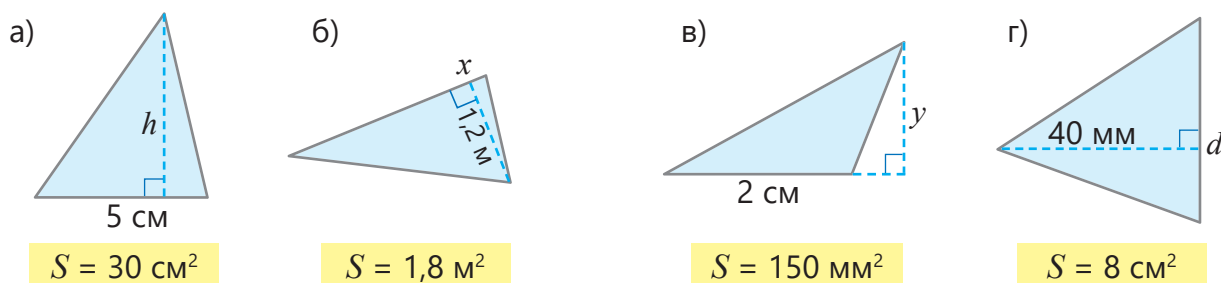
2 Какова площадь закрашенного треугольника? Найдите ответ несколькими способами.



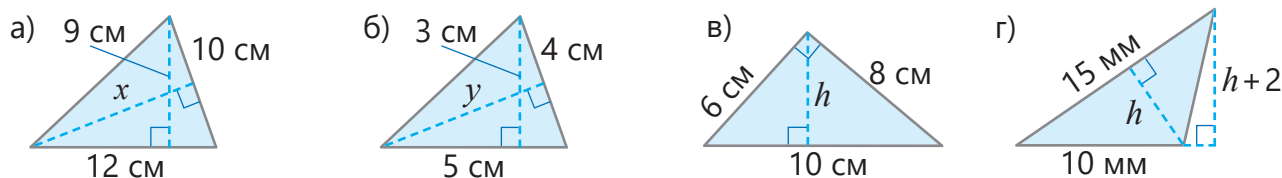
3 Найдите площадь треугольника.



4 Дана площадь треугольника. Найдите длину отрезка, обозначенного буквой.



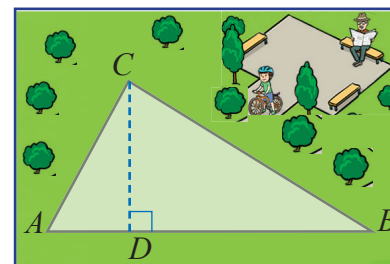
5 Найдите длину отрезков, обозначенных буквой.



Решение задач

6 Подготовлен план игровой площадки в парке в форме треугольника площадью 20 m^2 . Расстояние между точками A и B составляет 10 метров.

- Каково расстояние между точками C и D ?
- Каким должно быть это расстояние, чтобы площадь игровой площадки, изображенной в виде треугольника ABC , увеличилась в 2 раза?

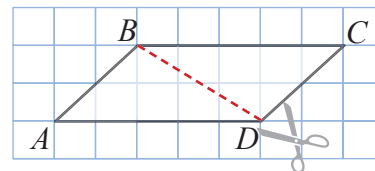


8.2. Площадь параллелограмма и ромба

Исследование-обсуждение

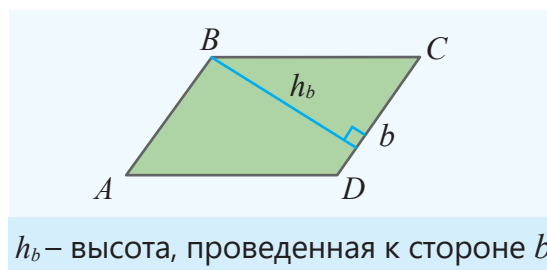
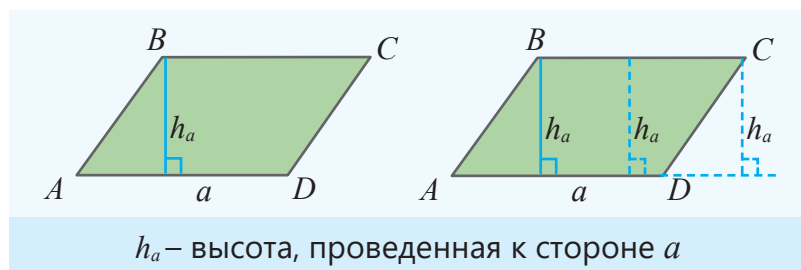
Начертите на бумаге в клетку параллелограмм $ABCD$ и отрежьте вдоль отрезка BD .

- Найдите площади полученных треугольников.
- Как можно вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, вычислив площадь только одного из треугольников?

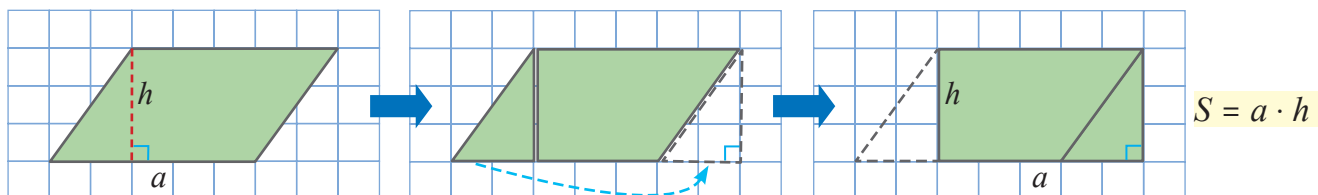


Изучение Площадь параллелограмма

Высота параллелограмма – это перпендикуляр, опущенный из любой вершины одной стороны параллелограмма на противоположную сторону или ее продолжение



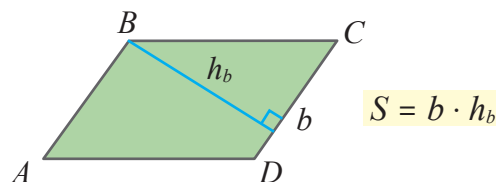
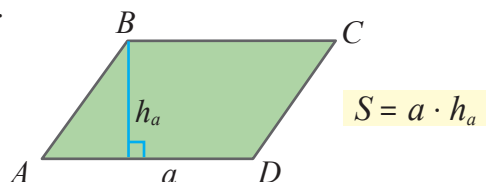
- Если начертить высоту параллелограмма, отрезать полученный прямоугольный треугольник и соединить, как показано на рисунке, то получится прямоугольник. Площадь параллелограмма равна площади полученного прямоугольника.



Подумай!

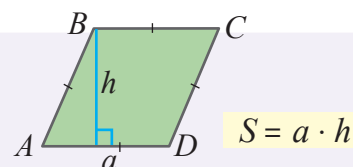
Как можно обосновать равенство площади параллелограмма на рисунке и площади полученного прямоугольника по признакам конгруэнтности треугольника?

- Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.



Запомни!

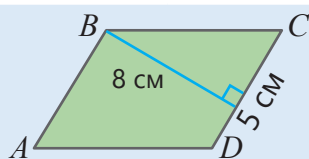
Ромб – это параллелограмм, все стороны которого равны.
Площадь ромба равна произведению его стороны и высоты.



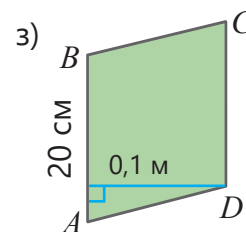
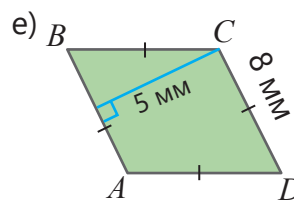
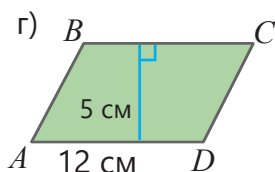
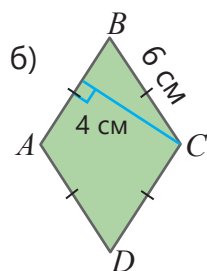
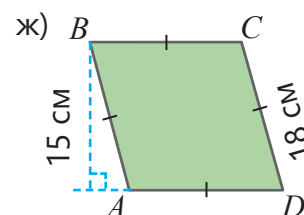
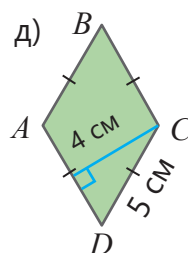
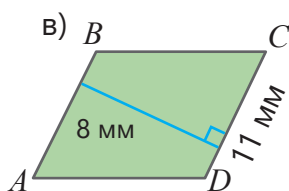
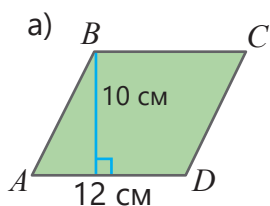
Задания

- 1 Найдите площадь данного параллелограмма.

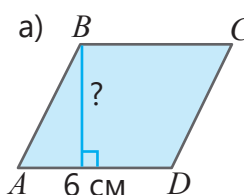
ОБРАЗЕЦ



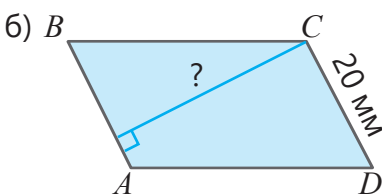
Решение	Объяснение
$5 \cdot 8 = 40 \text{ (см}^2\text{)}$	Находится произведение стороны параллелограмма и высоты, проведенной к этой стороне.



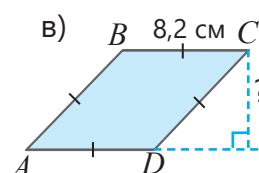
- 2 Дана площадь параллелограмма. Найдите его высоту.



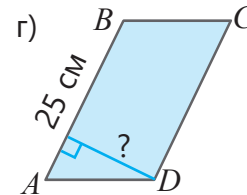
$$S = 30 \text{ см}^2$$



$$S = 5 \text{ см}^2$$

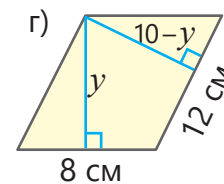
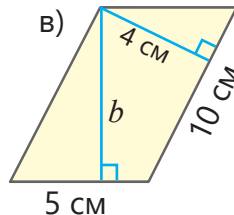
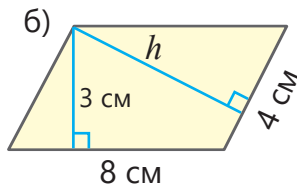
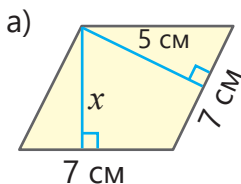


$$S = 41 \text{ см}^2$$



$$S = 200 \text{ см}^2$$

- 3 Найдите высоту параллелограмма, обозначенную буквой.

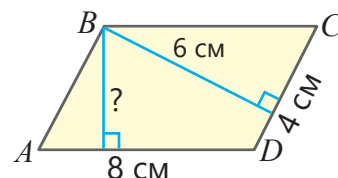


- 4 Ответьте на вопросы.

- а) Одна из сторон параллелограмма 10 см, а высота, проведенная к этой стороне, на 20% меньше этой стороны. Какова площадь параллелограмма?
 б) Площадь ромба, высота которого 11 см, равна 165 см^2 . Каков периметр ромба?

Решение задач

- 5 Одна сторона параллелограмма в два раза больше другой. Как найти неизвестную высоту, не вычисляя его площадь? Чье мнение верное?



Анар

Если одна сторона параллелограмма в 2 раза больше другой, то и высота, проведенная к этой стороне, будет в 2 раза больше:
 $6 \cdot 2 = 12$ (см)

Если одна сторона параллелограмма в 2 раза больше другой, то высота, проведенная к этой стороне, будет в 2 раза меньше:
 $6 : 2 = 3$ (см)

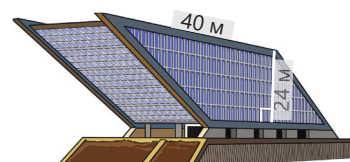


Айнур

- 6 Стороны параллелограмма равны 10 см и 12 см. Если высота, проведенная к меньшей стороне параллелограмма, 9 см, то сколько сантиметров будет составлять другая высота?
- 7 Стороны параллелограмма равны 10 см, 20 см, а высоты 4 см и 8 см. Найдите площадь этого параллелограмма.
- 8 Одна сторона параллелограмма равна 8 см, а другая – 6 см. Высота, проведенная к меньшей стороне параллелограмма, на 1 см больше высоты, проведенной к большей стороне. Какова площадь этого параллелограмма?
- 9 Мастер хотел уложить плитку в форме ромба с длиной стороны 30 см и высотой 20 см на прямоугольную стену шириной 3 м и длиной 4 м. Какое наименьшее число плиток нужно для этого?

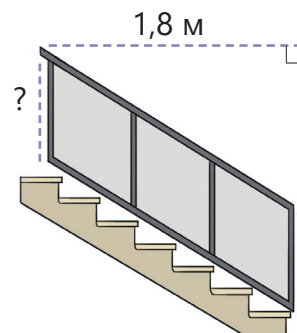


- 10 На двух гранях здания одинакового размера, имеющих форму параллелограмма, планируется установить стеклянные окна. Общая стоимость 1 м² стекла и перегородок составляет a манатов. Мастер получает зарплату в размере b манатов за каждый квадратный метр.



- Напишите выражение для вычисления суммы расходов на основе заданных измерений.
- Какова будет потраченная сумма денег, если $a = 70$, $b = 40$?

- 11 К лестнице прикрепили 3 одинаковые панели в форме ромба, как на рисунке. Площадь одной из таких панелей равна 0,48 м².



- Какова высота одной панели?
- Какова длина стороны панели?

8.3. Длина окружности. Площадь круга

Исследование-обсуждение

Практическая работа.

Принадлежности: несколько предметов в форме цилиндра, нитка, линейка.

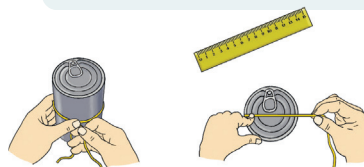
Ход работы: измерьте ниткой диаметр и длину окружности предметов в форме цилиндра и запишите в таблицу.

- Как меняется длина окружности с увеличением ее диаметра? Разделите длину окружности на диаметр, округлите полученное частное до сотых и заполните таблицу.
- Найдите среднее значение этих отношений.



Ключевые слова

- число π ("пи")



Название предмета			
Диаметр (см)			
Длина окружности (см)			
Отношение длины окружности к диаметру			

Изучение Длина окружности

Отношение длины окружности к его диаметру постоянно и равно одному и тому же числу для всех окружностей. Это число обозначается греческой буквой π ("пи").

$$\pi = \frac{C}{d}$$

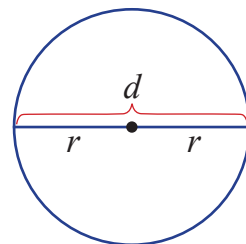
Здесь C – длина окружности, а d – диаметр окружности. Значение числа π выражается бесконечным количеством цифр после запятой.

$$\pi = 3,14159265\dots$$

В вычислениях используется приближенное значение числа π ($\pi \approx 3,14$).

- *Длина окружности равна произведению числа π на диаметр этой окружности:* $C = \pi d$
- Длина окружности прямо пропорциональна ее диаметру.
- Поскольку диаметр окружности в два раза больше ее радиуса ($d = 2r$), длину окружности можно найти следующим образом:

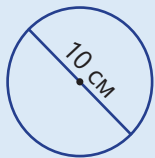
$$C = 2\pi r$$



Задания

- 1 Найдите длину окружности по её радиусу или диаметру ($\pi \approx 3,14$).

ОБРАЗЕЦ



Решение

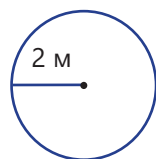
$$d = 10 \text{ см}$$

$$\pi \cdot 10 \approx 3,14 \cdot 10 = 31,4 \text{ (см)}$$

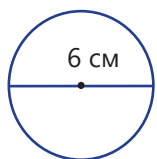
Объяснение

Дается диаметр окружности. Находится длина окружности по формуле $C = \pi d$.

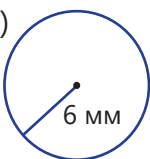
а)



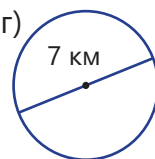
б)



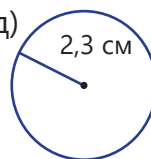
в)



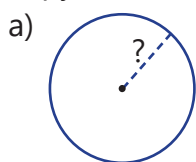
г)



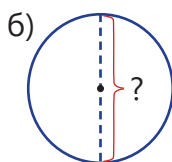
д)



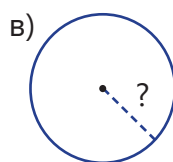
- 2 Длина каждой окружности записана под рисунком. Найдите радиус или диаметр окружности.



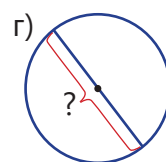
$$C = 4\pi \text{ (см)}$$



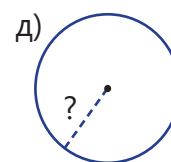
$$C = 5\pi \text{ (мм)}$$



$$C = 12\pi \text{ (м)}$$



$$C = 7\pi \text{ (мм)}$$



$$C = 0,5\pi \text{ (м)}$$



Внимание!

Вычисления, связанные с числом π , можно выполнять на калькуляторе. Для этого используется кнопка π . Например, длину окружности радиусом 4 см на калькуляторе можно найти так: $2 \times \pi \times 4 = 25,1327412287...$

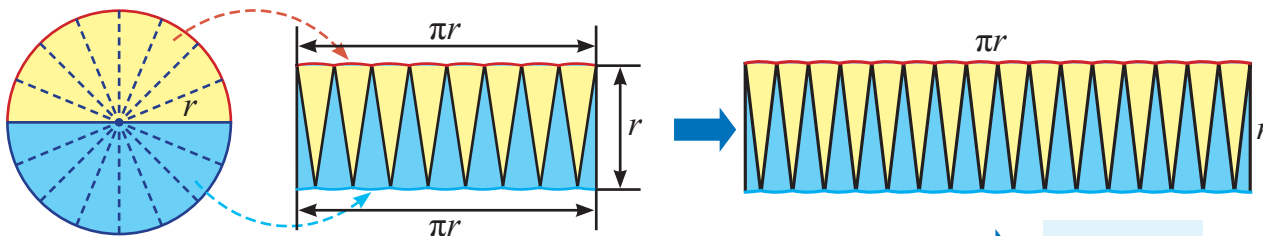


- 3 Ответьте на вопросы. Округлите ответ до сотых.

- Сколько сантиметров составляет длина окружности, радиус которой 7 см?
- Сколько сантиметров составляет длина окружности, диаметр которой 30 см?
- Сколько метров составляет радиус окружности, длина которой 44 м?

Изучение Площадь круга

Если круг разделить на равные части и соединить так, как показано на рисунке, то получится фигура, примерно близкая к прямоугольнику. С увеличением количества разделенных частей эта фигура еще меньше отличается от прямоугольника длиной πr и шириной r . Таким образом, площадь полученного прямоугольника равна площади круга.

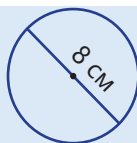


Подумай!

Площадь круга также можно найти по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Как это можно объяснить?

- 4 Найдите площадь круга, радиус или диаметр которого задан ($\pi \approx 3,14$).

ОБРАЗЕЦ



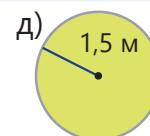
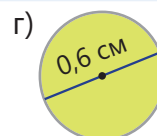
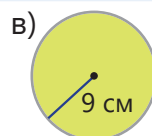
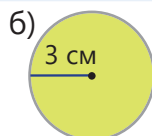
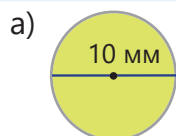
Решение

$$8 : 2 = 4 \text{ (см)}$$

$$\pi \cdot 4^2 \approx 3,14 \cdot 16 = 50,24 \text{ (см}^2\text{)}$$

Объяснение

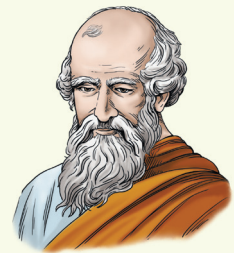
Находится радиус круга.
Используется формула площади круга.





Из истории математики

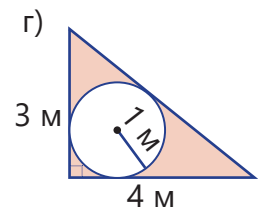
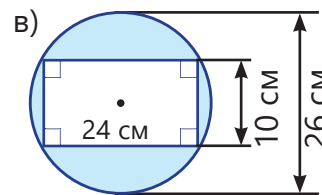
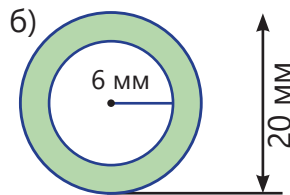
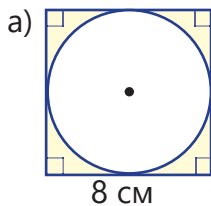
Древние вавилоняне находили различные значения числа π , используя площадь круга. Ближайшее значение, которое они получили, было $\frac{25}{8} = 3,125$. В Древнем Египте считали, что число π равно 3,1605. Архимед на основе более точных вычислений определил, что число π больше $3\frac{10}{71}$ и меньше $3\frac{1}{7}$.



Архимед
(287 – 212 гг. до н. э.)



- 5 Найдите площадь закрашенной части. Округлите ответ до сотых.

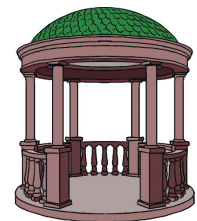


Решение задач

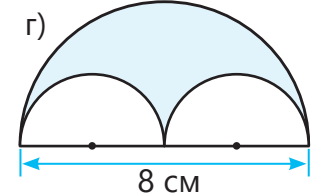
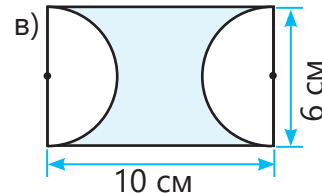
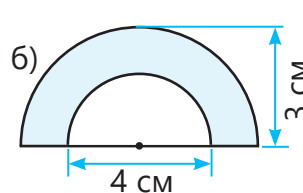
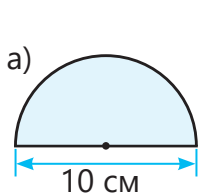
- 6 Радиус велосипедного колеса 28 см. Какой путь пройдет колесо за один полный оборот ($\pi \approx 3,14$)? Округлите ответ до единиц.



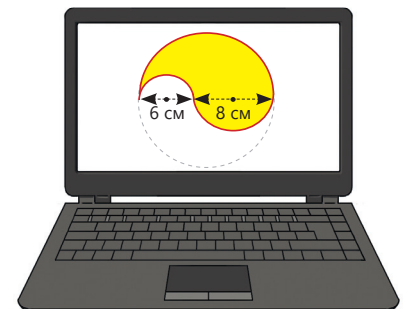
- 7 Требуется покрасить пол круглой беседки диаметром 4 м. На 1 м^2 площади расходуется 0,15 кг краски. Для того чтобы дважды покрасить пол беседки, было куплено 4 кг краски. Сколько краски осталось в избытке или не хватило? Округлите ответ до тысячных.



- 8 Половина окружности называется *полуокружностью*, а половина круга – *полукругом*. Используя полуокружность и полукруг, мастер вырезал из металлической пластины окрашенную деталь. Какова площадь этой части? Округлите ответ до единиц.

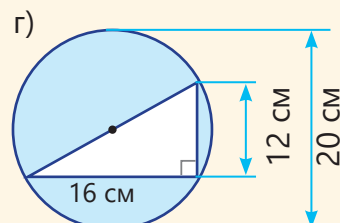
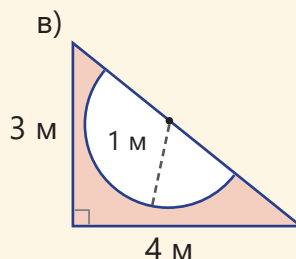
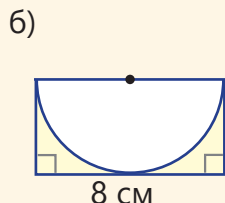
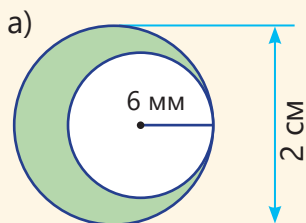


- 9 Гульсум нарисовала изображение бутылки на компьютере, используя три полуокружности с центрами, расположенными на одной прямой.
- Гульсум обвела края изображения красным цветом. Какова была общая длина линий, нарисованных красным цветом ($\pi \approx 3$)?
 - Гульсум закрасила нарисованную фигуру. Какова площадь закрашенной части?



Задачи

- 1 Найдите площадь закрашенной части ($\pi \approx 3,14$).

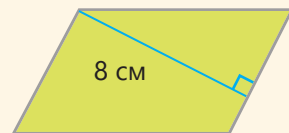


- 2 Площадь параллелограмма, одна из высот которого 3 см, равна 18 см^2 . Если одна из сторон параллелограмма равна 5 см, сколько сантиметров составляет его периметр?

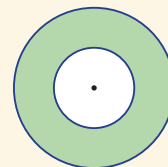
- 3 Площадь параллелограмма, стороны которого относятся как 3 : 2, равна 90 см^2 . Какова длина сторон этого параллелограмма, если высота, проведенная к большей стороне, равна 6 см?



- 4 Одна из сторон параллелограмма, представленного на рисунке, на 4 см больше другой, а периметр равен 32 см. Сколько сантиметров составляет другая высота параллелограмма?



- 5 Диаметр малой окружности равен радиусу большой окружности. Если радиус малой окружности равен 2 см, какова площадь закрашенной части? Округлите ответ до сотых.



- 6 Определите, верные или ложные утверждения.

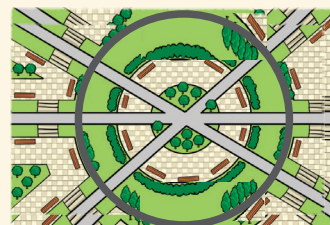
- При увеличении радиуса в два раза длина окружности также увеличивается в два раза.
- Высота, проведенная к большей стороне треугольника, есть наибольшая высота этого треугольника.
- При увеличении стороны параллелограмма в 2 раза и уменьшении высоты, проведенной к этой стороне, в 2 раза его площадь не изменяется.
- Площадь ромба равна половине произведения его стороны на высоту.

- 7 Акробат провернул колесо моноцикла диаметром 50 см 10 раз.

- Сколько метров он проехал ($\pi \approx 3$)?
- Сколько раз акробату придется повернуть колесо, чтобы преодолеть расстояние в 7,5 м?



- 8 Центральная часть парка имеет форму круга. Длина окружности этого круга равна 200 метров. Сколько квадратных метров составляет площадь центральной части парка? Округлите ответ до единиц.



8.4. Площадь поверхности прямой треугольной призмы и цилиндра

Исследование-обсуждение

На рисунке изображены подарочные коробки в виде призмы и цилиндра.

- Какие плоские фигуры являются основаниями и боковыми гранями призмы? Какие из этих фигур конгруэнтны?
- Какую форму имеют основания цилиндра?
- Как сделать боковую поверхность цилиндра, используя фигуру в форме прямоугольника?

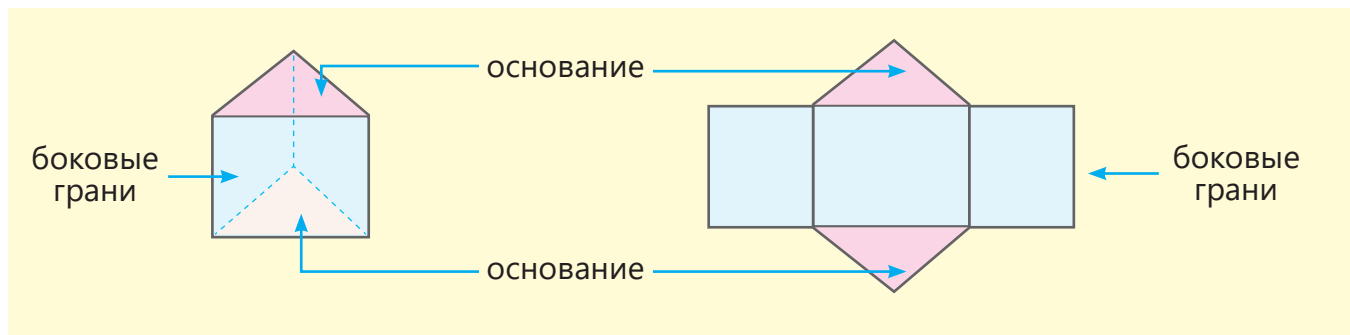


Изучение Площадь полной поверхности прямой призмы

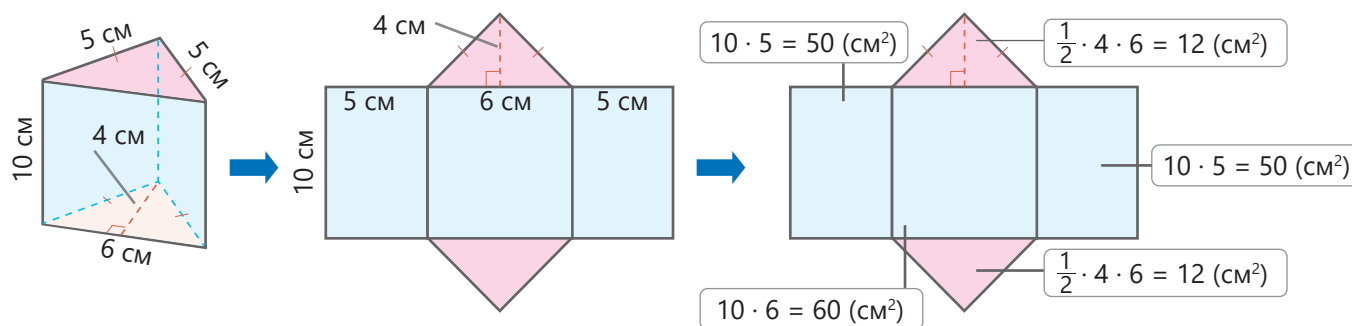
Площадь полной поверхности прямой призмы равна сумме площадей ее оснований и боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

Поскольку боковые грани плоской призмы прямоугольники, $S_{\text{бок}}$ является суммой площадей прямоугольников, образованных боковыми гранями.



- Чтобы найти площадь поверхности прямой треугольной призмы, нужно вычислить сумму площадей треугольников в основании и трех прямоугольников в боковых гранях.



Площадь боковой поверхности призмы: $S_{\text{бок}} = 50 + 60 + 50 = 160 \text{ (см}^2\text{)}$

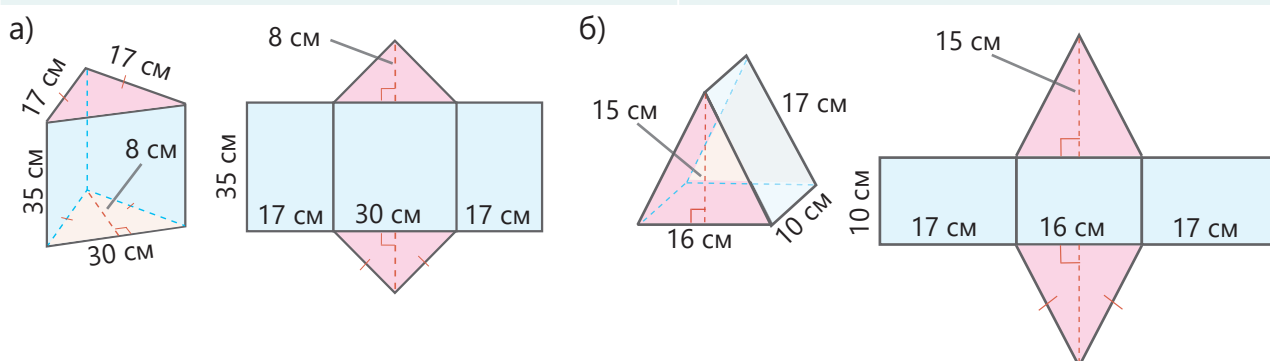
Площадь основания призмы: $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (см}^2\text{)}$

Площадь полной поверхности призмы: $S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 12 + 160 = 184 \text{ (см}^2\text{)}$

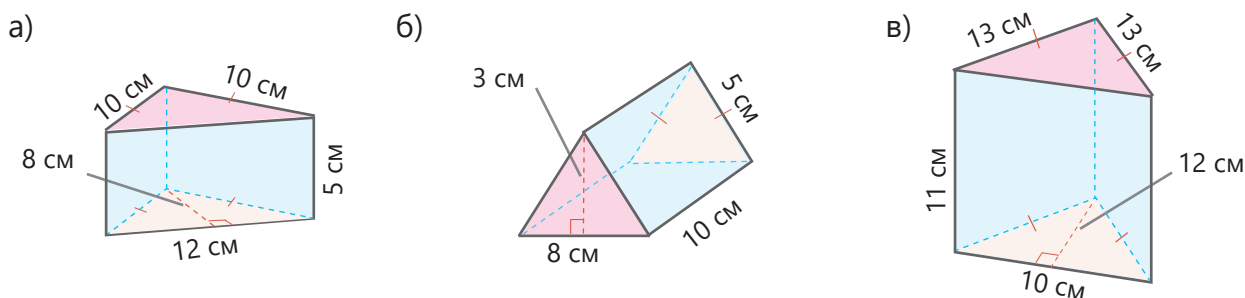
Задания

- 1 Найдите по развертке площадь полной поверхности прямой треугольной призмы.

ОБРАЗЕЦ	
	$18 \cdot 10 = 180 \text{ (см}^2\text{)}$ $18 \cdot 16 = 288 \text{ (см}^2\text{)}$
	$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$ $18 \cdot 10 = 180 \text{ (см}^2\text{)}$ $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$
Решение	Объяснение
$S_{\text{полн}} = 2 \cdot 48 + 180 + 180 + 288 = 744 \text{ (см}^2\text{)}$	Вычисляются площади всех граней и складываются.

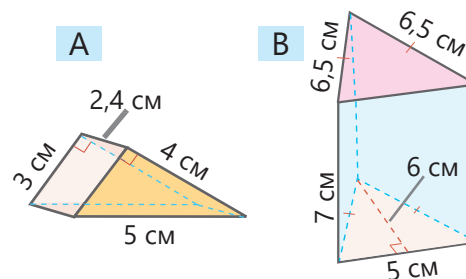


- 2 Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы.

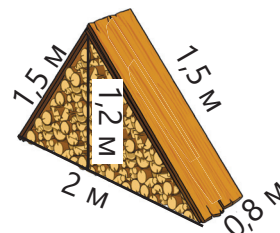


- 3 Ответьте на вопросы.

- а) У какой призмы сумма площадей оснований меньше суммы площадей боковых граней?
 б) У какой фигуры площадь полной поверхности больше?



- 4 Для хранения дров было подготовлено место в виде прямой треугольной призмы, одно из оснований и боковые грани которой были сделаны из досок. Сколько квадратных метров досок для этого понадобилось?



Изучение Площадь поверхности цилиндра

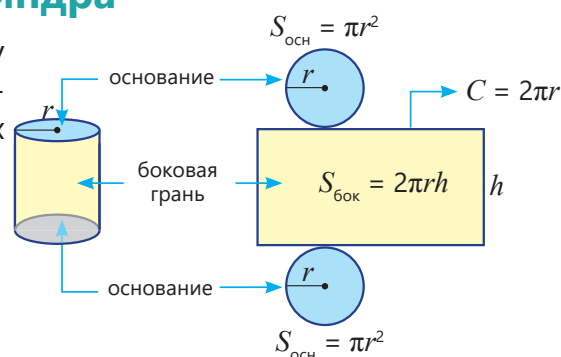
Основания цилиндра – это параллельные друг другу конгруэнтные круги. Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей оснований и боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

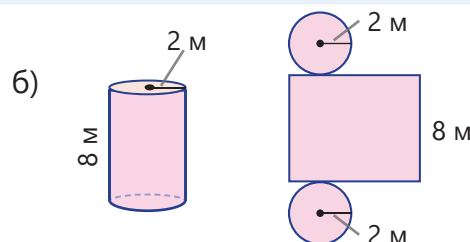
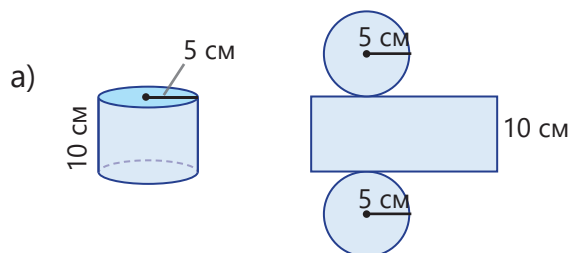
Площадь
оснований

Площадь
боковой грани

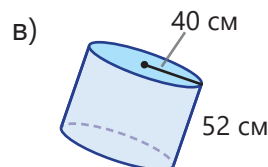
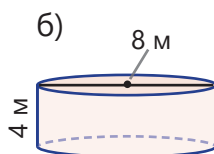
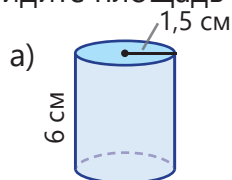


- 5 Найдите площадь полной поверхности цилиндра по развертке ($\pi \approx 3$).

Решение	Объяснение
ОБРАЗЕЦ $S_{\text{полн}} \approx 27 + 90 + 27 = 144 \text{ (см}^2\text{)}$	Вычисляются площади оснований и боковой грани и складываются.

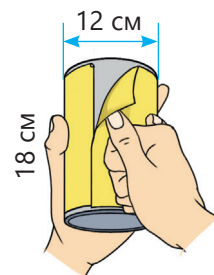


- 6 Найдите площадь полной поверхности цилиндра ($\pi \approx 3$).



Решение задач

- 7 Для покрытия боковой поверхности консервных банок используется самоклеящаяся бумага. У какого количества банок можно обклеить боковую поверхность бумагой, длина которой 2 м, а ширина равна высоте банки ($\pi \approx 3,14$)?



- 8 Чтобы обернуть коробку шоколада в виде прямой треугольной призмы, понадобится бумаги на 10% больше площади ее поверхности. Сколько бумаги нужно, чтобы обернуть 25 таких коробок шоколада?

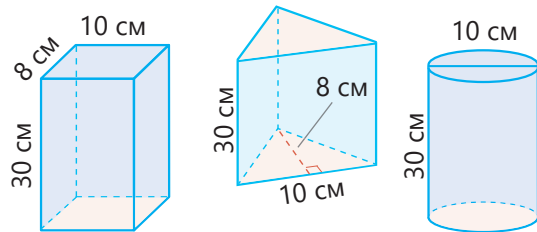


8.5. Объем прямой треугольной призмы и цилиндра

Исследование-обсуждение

На рисунке изображены контейнеры в виде кубоида, прямой треугольной призмы и цилиндра. Высота контейнеров равна.

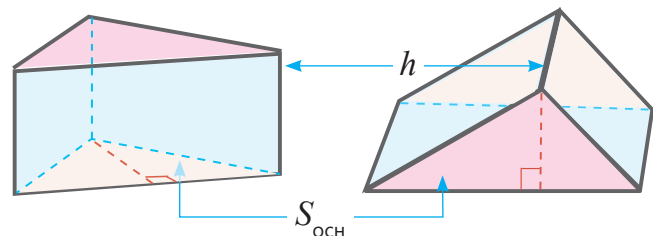
- У какого контейнера площадь основания наибольшая?
- Как изменяется емкость контейнера при увеличении площади основания?
- Если наполнить контейнеры водой, то какой контейнер вместит больше воды? Как это можно определить?



Изучение Объем прямой треугольной призмы

Объем прямой треугольной призмы равен произведению площади основания и высоты.

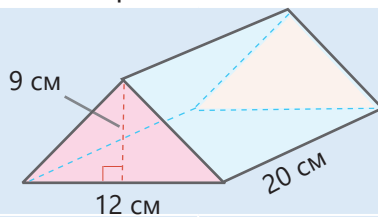
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$



Задания

- 1 Найдите объем прямой призмы.

ОБРАЗЕЦ



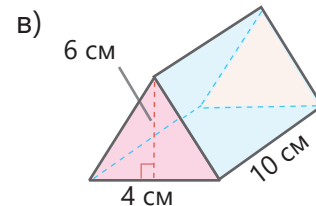
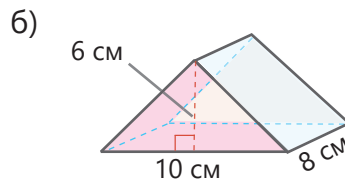
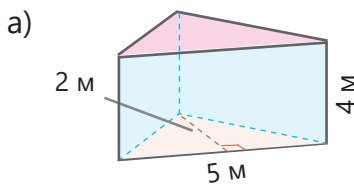
Решение

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54 \text{ (см}^2\text{)}$$

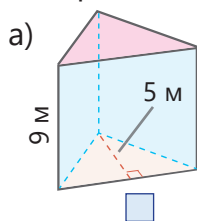
$$V = 54 \cdot 20 = 1080 \text{ (см}^3\text{)}$$

Объяснение

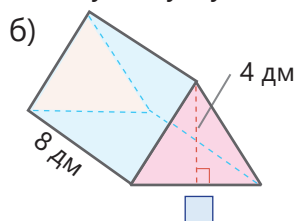
Определяется площадь основания призмы. Вычисляется произведение площади основания и высоты.



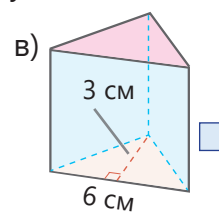
- 2 Объем призмы записан снизу. В пустую клетку впишите подходящее измерение.



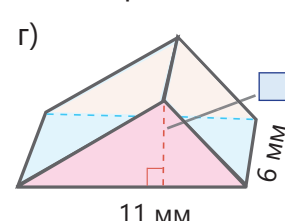
$$V = 180 \text{ м}^3$$



$$V = 96 \text{ дм}^3$$



$$V = 45 \text{ см}^3$$

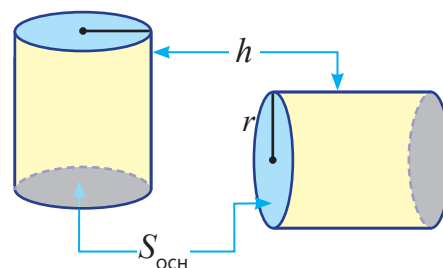


$$V = 198 \text{ мм}^3$$

Изучение Объем цилиндра

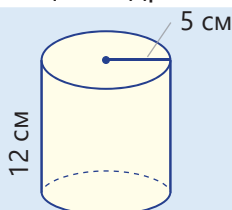
Объем цилиндра равен произведению площади основания и высоты.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h \quad \text{или} \quad V = \pi r^2 \cdot h$$

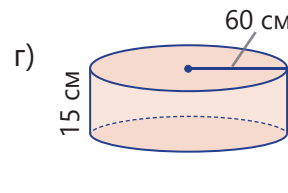
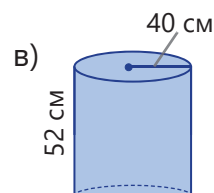
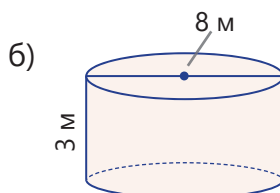
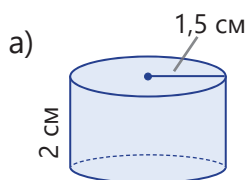


- 3 Найдите объем предметов в форме цилиндра ($\pi \approx 3$).

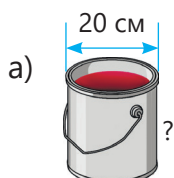
ОБРАЗЕЦ



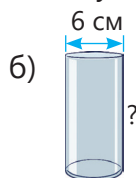
Решение	Объяснение
$S_{\text{осн}} \approx 3 \cdot 5^2 = 75 \text{ (см}^2\text{)}$ $V \approx 75 \cdot 12 = 900 \text{ (см}^3\text{)}$	Определяется площадь основания цилиндра. Вычисляется произведение площади основания цилиндра и его высоты.



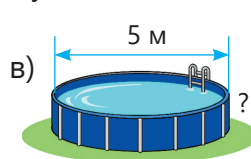
- 4 Объем цилиндра записан снизу. Найдите высоту этого цилиндра.



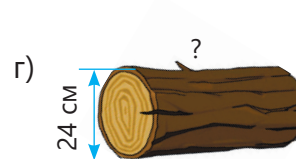
$$V = 3000 \pi \text{ (см}^3\text{)}$$



$$V = 376 \pi \text{ (см}^3\text{)}$$



$$V = 15 \pi \text{ (м}^3\text{)}$$



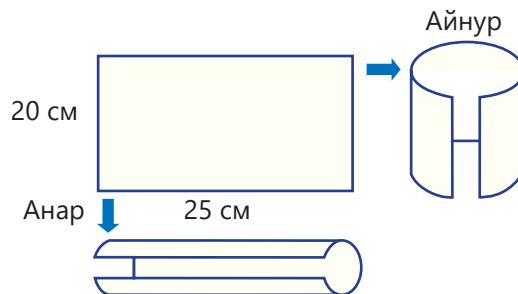
$$V = 11520 \pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Решение задач

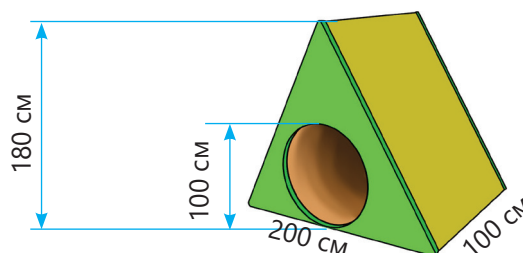


- 5 Анар и Айнур сложили прямоугольный лист бумаги в виде цилиндра как на рисунке и накрыли основания бумагой.

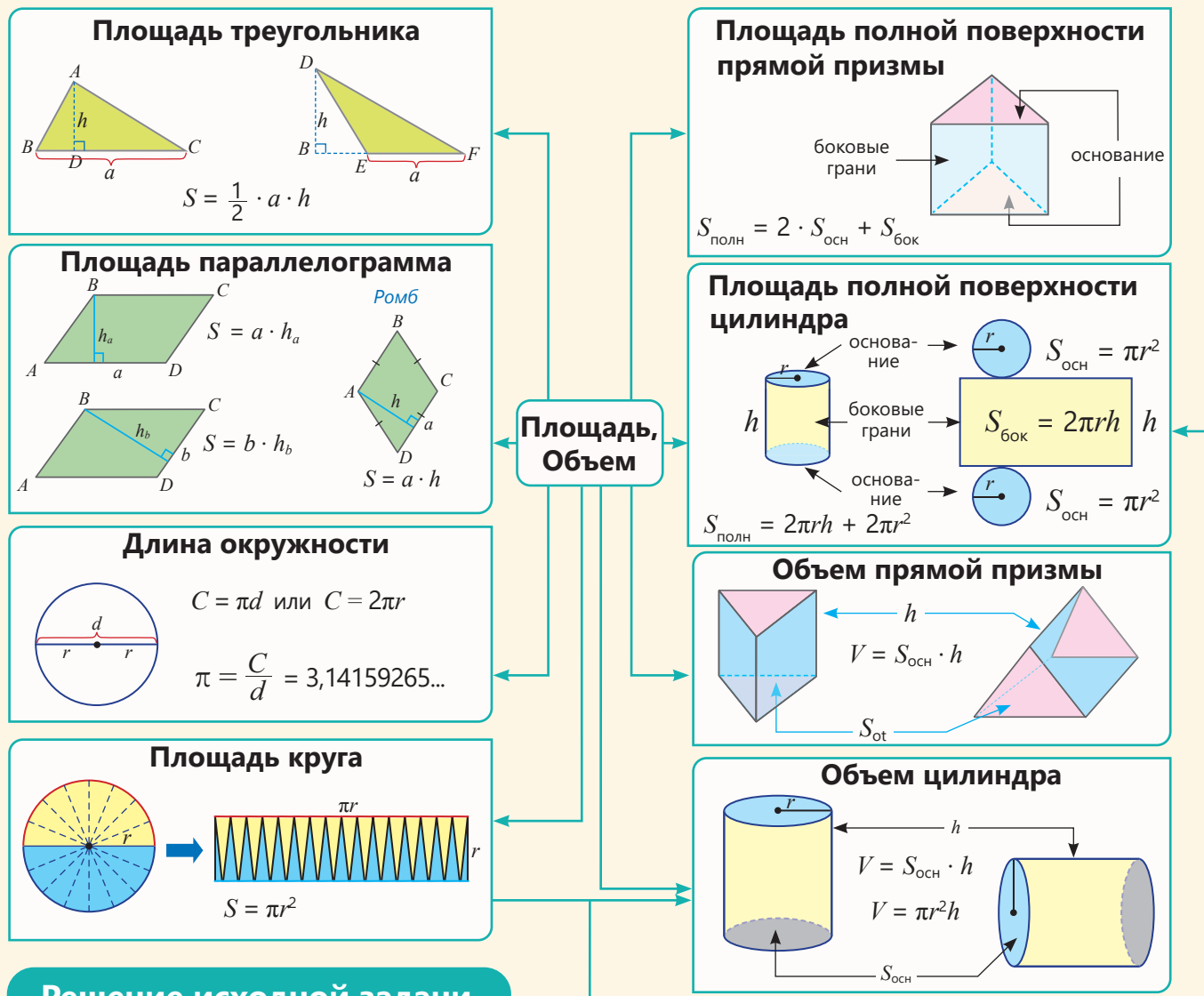
- Кто изготовил цилиндр большего объема?
- Какой формы должна быть бумага, чтобы объем обоих цилиндров был одинаковым?



- 6 В парке развлечений для детей построили деревянную игровую площадку в форме прямой треугольной призмы. Внутренняя часть игровой площадки изготовлена в форме цилиндра. Каков объем части, покрытой деревом ($\pi \approx 3$)?



ЗАКЛЮЧЕНИЕ



Решение исходной задачи

Глубина каждого бассейна выражается в метрах: 150 см = 1,5 м. Определяется радиус основания бассейна в форме цилиндра $6 : 2 = 3$ (м).

• Чтобы узнать, в каком бассейне больше воды, вычисляется объем фигур ($\pi \approx 3,14$).

Бассейн в форме цилиндра вмещает больше воды.

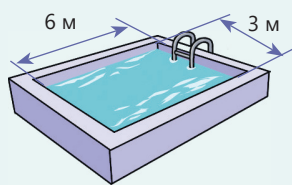
• Вычисляется площадь внутренней поверхности каждого бассейна. Поскольку одно из оснований находится на поверхности воды, площадь этого основания не учитывается.

Бассейн в форме кубоида: $S = 3 \cdot 6 + 6 \cdot 1,5 + 6 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1,5 = 45$ (м²).

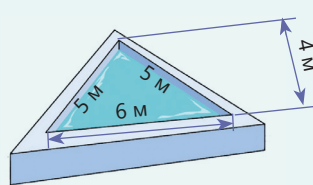
Бассейн в форме треугольной призмы: $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 + 1,5 \cdot 5 + 1,5 \cdot 5 + 6 \cdot 1,5 = 36$ (м²).

Бассейн в форме цилиндра: $S = \pi \cdot 3^2 + 6 \cdot \pi \cdot 1,5 \approx 56,5$ (м²).

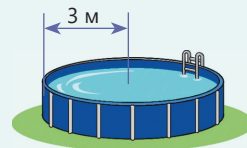
Для бассейна в форме цилиндра используется больше плитки, так как площадь внутренней поверхности больше.



$$V = 3 \cdot 6 \cdot 1,5 = 27 \text{ (м}^3\text{)}$$



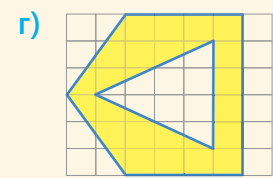
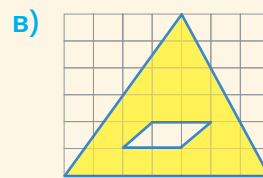
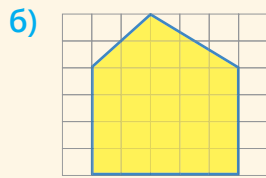
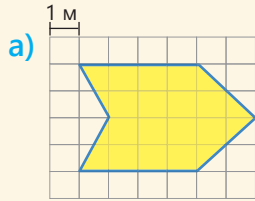
$$V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1,5 = 18 \text{ (м}^3\text{)}$$



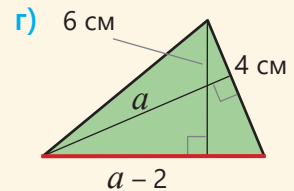
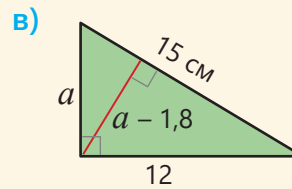
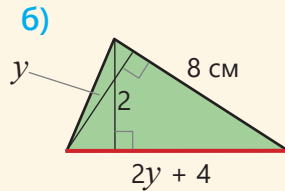
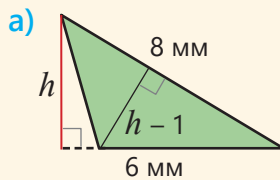
$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 1,5 \approx 42,4 \text{ (м}^3\text{)}$$

ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

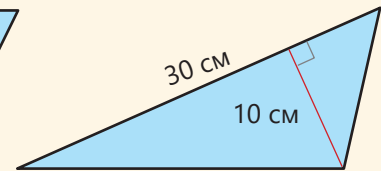
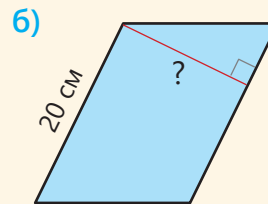
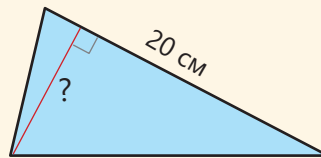
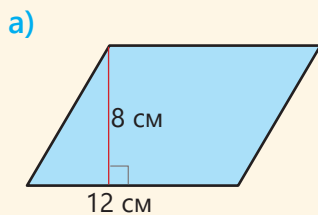
1. Найдите площадь закрашенной части.



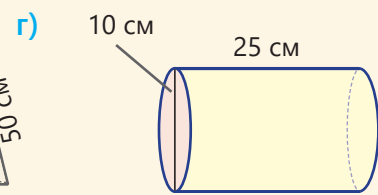
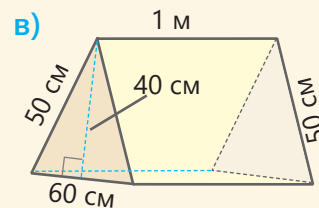
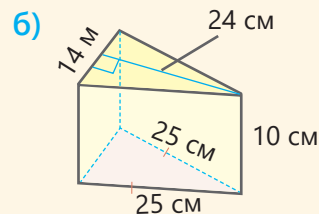
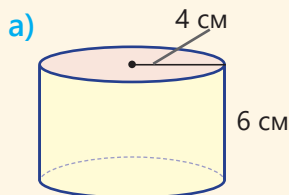
2. Найдите длину красного отрезка..



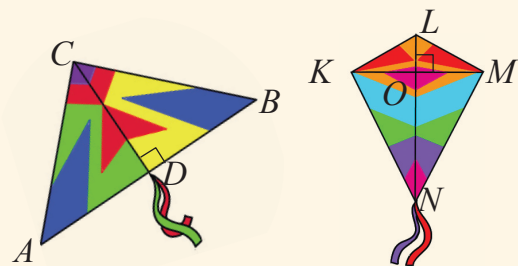
3. Площади параллелограмма и треугольника равны. Найдите неизвестную высоту параллелограмма или треугольника.



4. Найдите площадь полной поверхности и объем призмы и цилиндра ($\pi \approx 3$).



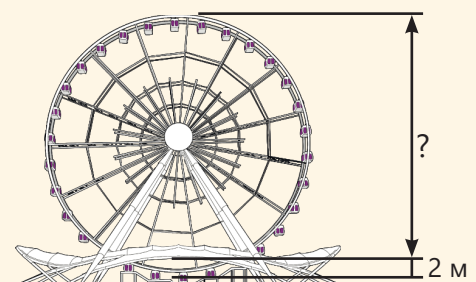
5. Лала сделала воздушного змея в форме равнобедренного треугольника, а Сабина – в форме четырехугольника. Чей воздушный змей будет иметь большую площадь, если $AB = 60$ см, $CD = 30$ см, $KL = LM$, $KO = 20$ см, $LN = 25$ см. На сколько?



6. Радиус аттракциона "колесо обозрения", расположенного в Приморском национальном парке, составляет 30 м.

• На каком расстоянии от земли находится самая высокая точка аттракциона?

• Ученики, которые сидели в одной из кабин аттракциона, сошли после 2-х полных оборотов. Какое расстояние они преодолели ($\pi \approx 3$)?

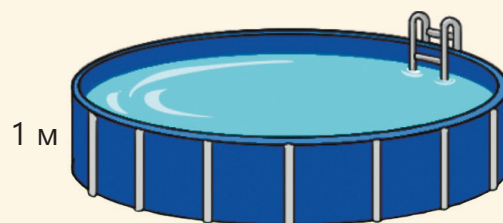


-  **7.** Консервы в форме цилиндра имеют равные объемы. Какова высота этих консервов? Округлите ответ до сотых.

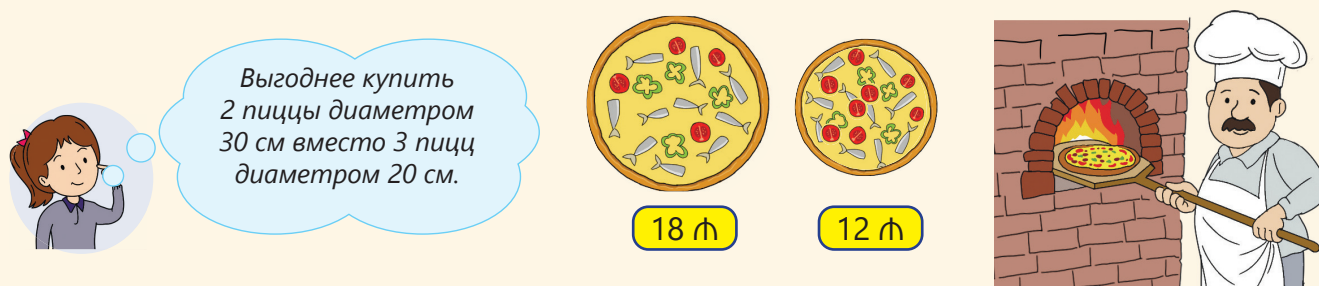


- 8.** Во дворе построили бассейн для детей. Внешняя поверхность этого бассейна была покрыта алюминиевым покрытием площадью 18 м^2 .

- Чему равен объем бассейна ($\pi \approx 3$)?
- Внутреннюю поверхность бассейна планируется уложить квадратной плиткой малых размеров. 1 м^2 плитки стоит 25 манатов. Сколько манатов нужно заплатить за плитку, уложенную внутри бассейна? Толщина стенки бассейна при вычислении не учитывается.



- 9.** В пиццерии продаются пиццы одинаковой толщины диаметром 20 см и 30 см.



Почему покупатель размышляет таким образом? Проверьте ответ, вычислив цену 1 см^2 пиццы ($\pi \approx 3$).

-  **10.** Одно из трех зданий на рисунке имеет форму цилиндра, а два других – форму призмы.

Высота здания в форме цилиндра – 187 м, а диаметр – 44 м.

Высота здания в форме треугольной призмы – 169 м.

Основание этого здания имеет форму равностороннего треугольника со стороной 58 м.

Высота здания в форме кубоида – 154 м, а основание имеет форму квадрата со стороной 37 м.

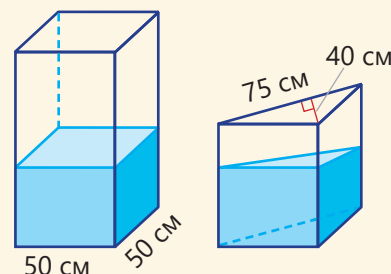
80% всего фасада этих зданий покрыто стеклянными окнами. Какова приблизительная площадь стеклянных окон?



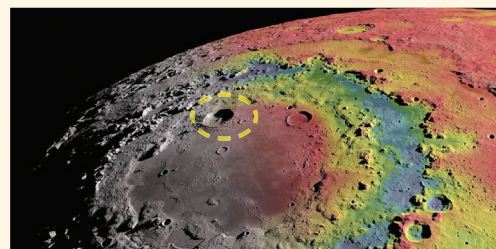


11. Контейнер для воды в форме прямоугольного параллелепипеда на рисунке вмещает 150 л воды. Часть воды из контейнера, наполненного водой, перелили в пустой контейнер в форме прямой треугольной призмы. Высота воды в обоих контейнерах стала одинаковой.

- Какой стала высота воды в каждом контейнере?
- Сколько воды оказалось в каждом контейнере?

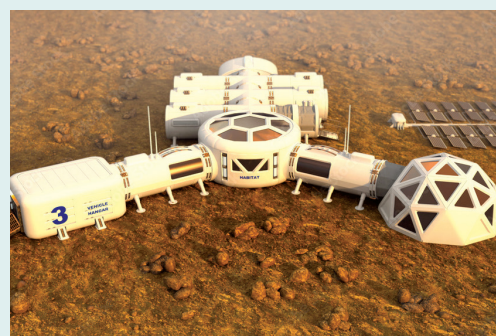


12. В декабре 2012 года два космических корабля Grail завершили свою миссию, врезавшись в поверхность Луны. На снимке виден кратер, образовавшийся одним из космических кораблей на поверхности Луны. На снимке масштаба 1 : 1000 кратер имеет форму круга диаметром 21,3 см. Какова площадь кратера в действительности?



ПОСЕЛЕНИЕ НА МАРСЕ

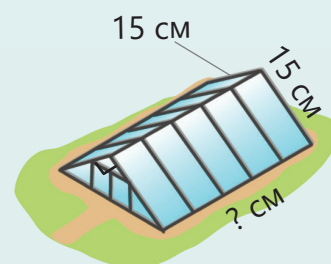
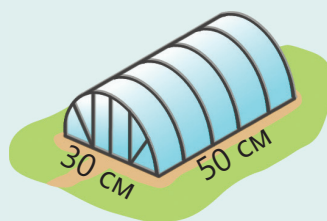
В 2022 году NASA удалось создать устройство под названием MOXIE, производящее кислород для жизни на Марсе. Это имело решающее значение для реализации проекта поселения на Марсе. Это устройство преобразовывает углекислый газ в кислород, которого достаточно для дыхания в течение 10 минут. В результате недавних исследований ученые нашли способ производить больше кислорода с помощью меньшего устройства. На снимке представлена модель теплицы, предназначенная для выращивания растений на основе виртуальной реальности.



1. Проведите исследование о сложности процесса получения необходимого для жизни кислорода на Марсе и о том, какие работы для этого проводятся.

2. Какие растения предназначены для выращивания на Марсе? Для чего?

3. На рисунке изображены модели теплиц для выращивания растений с одинаковыми площадями поверхности в форме полуцилиндра и призмы, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник. Найдите неизвестный размер второй теплицы ($\pi \approx 3,14$).



4. Какую из двух теплиц с одинаковыми площадями поверхности удобнее было бы построить на Марсе? Почему?

5. Какие источники энергии можно использовать на Марсе?

6. Подготовьте проект поселения на Марсе, состоящего из домов и различных объектов в виде цилиндров и призм. Назовите свой городок. Создайте презентацию и отметьте, какие факторы следует учитывать при строительстве этого городка.

Раздел 9

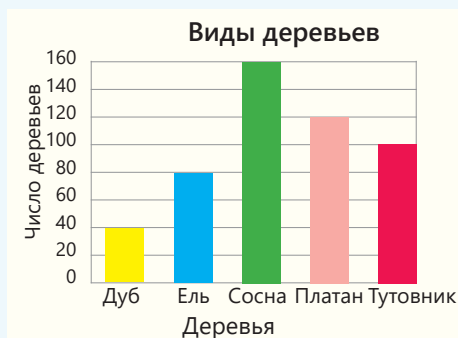
В этой главе вы научитесь:

- находить медиану и моду числовых данных
- различать случайные, достоверные и невозможные события
- определять частоту и вероятность события
- отображать данные на круговой диаграмме в процентах
- выражать увеличение и уменьшение данных на линейном графике в процентах

Попытайтесь!

На диаграмме представлена информация о видах и количестве деревьев, привезенных для посадки в парке.

- Какого вида деревьев больше каждого из двух других видов и меньше каждого из оставшихся двух видов?
- На сколько процентов дубов меньше, чем сосен?
- На сколько процентов платанов больше, чем елей?
- Какой вид деревьев вероятнее всего будет выбран при случайном выборе?
- Возможно ли, что случайно выбранное дерево окажется оливковым?



Статистика и вероятность

Чтобы предсказать некоторые события в повседневной жизни, необходимо рассмотреть все возможные случаи. Например, в прогнозах погоды, играх, определении страховых рисков необходимо учитывать все случаи для принятия правильного решения.

Статистический анализ данных, исследование благоприятных и возможных случаев, определение вероятности наступления событий помогают принимать правильные решения. Слово "вероятность" впервые использовал древнеримский философ Цицерон (Марк Туллий Цицерон, 106–43 гг. до н.э.): "В жизни нами управляет вероятность".



Предварительная проверка

1 Найдите среднее арифметическое данных чисел.

а) 12, 14, 20, 30 б) 23, 27, 31, 15 в) 32, 35, 43, 45, 65 г) 125, 275, 230, 370, 270, 230

2 В таблице приведена зарплата мастера Али, полученная им в течение года.

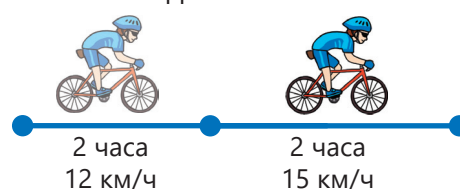
Янв	Февр	Март	Апр	Май	Июнь	Июль	Авг	Сент	Окт	Нояб	Дек
1100	1200	1300	1500	1400	1450	1500	1700	1800	1600	1900	2000

• Какой была средняя зарплата за месяц мастера Али за первое полугодие (январь-июнь) и второе полугодие (июль-декабрь)? В каком полугодии средняя зарплата за месяц мастера Али стала больше?

• Какой была средняя зарплата за месяц мастера Али в течение года?

3 Велосипедист первые 2 часа ехал со скоростью 12 км/ч, а следующие 2 часа – со скоростью 15 км/ч. Какой была его средняя скорость за 4 часа?

• С какой скоростью велосипедист должен ехать на обратном пути, чтобы проехать то же расстояние за 3 часа?



4 На столбчатой диаграмме показана масса фруктов, привезенных в школьную столовую за первые 4 месяца учебного года.

• Сколько килограммов фруктов в среднем было доставлено в школьную столовую за месяц?

• Изобразите данные в виде круговой диаграммы.



5 50 ученикам был задан вопрос: "Какое занятие вы бы предпочли в свободное время?" На диаграмме показаны результаты опроса. Ответы участвовавших в опросе составили 56%, 20%, 14% и 10%.

• Найдите количество учеников по каждому виду деятельности.

• Выберите правильное продолжение утверждения.



Случайно выбранный один ученик ... обязательно занимается музыкой.

вероятнее всего любит читать.

не смотрит телевизор.

6 В школьную библиотеку привезли 600 книг — учебники, художественную литературу и энциклопедию.

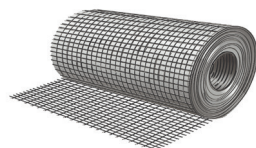
• Какой процент всех книг составляют энциклопедии и сколько их?

• Сколько учебников привезли в школьную библиотеку?

• На сколько процентов учебников больше, чем художественной литературы?



7 В 1-й день в цехе по изготовлению металлической сетки было изготовлено 200 м, во 2-й день — 300 м и в 3-й день — 400 м изделий. Если в течение первых четырех дней ежедневно производилось в среднем 350 м металлической сетки, то сколько метров изделия было произведено в цехе на четвертый день?



9.1. Медиана и мода

Исследование-обсуждение

Число голов	Число игр	
0		3
1		7
2		6
3		6
4		2
5		2
6		2

В таблице показано число игр в соответствии с числом голов, забитых футбольным клубом "Карабах" за сезон.

• Сколько игр в сезоне сыграла команда "Карабах" и сколько всего голов забила?

• Каких игр больше, в которых команда "Карабах" забила: 1 гол или 4 гола?

• Какие еще результаты можно получить из таблицы?



Ключевые слова

- медиана
- мода



Изучение Медиана

Если разность между значениями величин большая, то их среднего арифметического недостаточно для того, чтобы сделать общий вывод. Например, масса металлических отходов, собранных некоторыми учениками 6"А" класса, приведена в таблице. По этим данным можно найти массу металла, в среднем собранную каждым учеником.

$$(8 + 15 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1) : 7 = 5 \text{ (кг)}$$

Несмотря на то, что Самир собрал 15 кг металла, а Тарана всего 1 кг, их средние показатели по классу 5 кг.

В этом случае используется медиана для того, чтобы сделать общие выводы о данных. При расположении значений величины в порядке возрастания (или убывания) если их нечетное число, то число посередине, а если четное, то среднее арифметическое двух чисел, стоящих в середине, называют **медианой**.

6"А" класс	
Лала	8 кг
Самир	15 кг
Эльхан	4 кг
Сабина	2 кг
Айнур	3 кг
Фуад	2 кг
Тарана	1 кг

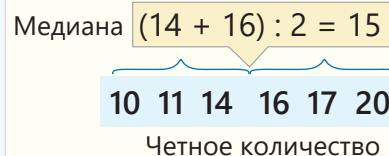
Если числа в образце расположены в порядке возрастания, число 3 посередине является медианой. Это означает, что количество детей, собравших менее 3 кг металла, равно количеству детей, собравших более 3 кг металла.



Чтобы найти медиану чисел 16, 11, 20, 14, 10, 17, эти числа сначала располагаются в порядке возрастания.

10 11 14 16 17 20

Поскольку количество чисел четное, находится среднее арифметическое чисел посередине: 14 и 16.



Задания

1 Найдите медиану заданных чисел.

а) 3, 8, 2

в) 21, 42, 32, 53, 65

д) 18, 134, 73, 91, 143

ж) 28, 44, 83, 95, 63, 83

б) 7, 6, 9, 11

г) 25, 35, 75, 82, 35

е) 23, 64, 93, 101, 93, 45

з) 48, 24, 24, 105, 33, 110



Подумай!

Какая существует связь между медианой треугольника и медианой заданных чисел? Объясните, исследовав значение слова "медиана".

2

Найдите медиану значений, которые принимает величина.

а) Рост участников баскетбольной команды: 189 см; 190 см; 190 см; 191 см; 192 см; 198 см.

б) Баллы, набранные учениками на экзамене: 63; 48; 75; 53; 64; 96; 86.

в) Размеры емкостей, привезенных на базу: 3,1 л; 3,5 л; 2,8 л; 2,2 л; 2,1 л; 1,5 л; 1,8 л; 2,4 л; 3,0 л; 3,4 л.

3

На диаграмме отображено количество книг, прочитанных учениками во время летних каникул. Ответьте на вопросы.

- Кто прочитал больше всего книг?
- Кто не прочитал ни одной книги?
- Найдите среднее арифметическое данных и объясните его значение.
- Найдите медиану данных и объясните ее значение.



Изучение Мода

Иногда особенно важно определить повторяющиеся значения среди данных. Среди заданных значений величины наиболее часто встречающееся значение называется **модой**. Например, размеры мужской обуви, которая была продана в магазине в течение дня, были следующими.

39 43 **41** 40 38 **41** 42 **41**

Мода данных чисел равна 41. Поэтому в магазине продается больше мужской обуви 41-го размера и существует большой спрос на обувь этого размера.

- Даже если данные не являются числом, можно определить их моду. Например, если цвет автомобилей на стоянке

красный белый **красный** черный зеленый серый белый черный
серый **красный** синий **красный** черный,

то модой цветов автомобилей является красный.

- Данные могут иметь несколько мод. Поскольку среди следующих чисел числа 5 и 8 повторяются трижды, эти данные имеют две моды: 5 и 8.

5 **8** 9 **8** 6 2 11 **8** **5** 12 **5**

- Если все данные встречаются в последовательности только один раз, то такие данные не имеют моды. Например, следующие данные не имеют моды.

1 5 3 8 2 7 100



Запомни!

Мода всегда является одной из заданных величин. Среднее арифметическое и медиана могут отличаться от заданных величин.

4 Найдите моду заданных чисел.

а) 12, 13, 15, 12, 16 б) 24, 26, 34, 24, 35, 24 в) 11, 13, 11, 15, 13, 11, 13, 15 г) 5, 7, 6, 3

5 Найдите медиану, моду и среднее арифметическое для заданных чисел.

а) 2, 8, 3, 2, 5

в) 3, 10, 10, 12, 13, 12

д) 6, 6, 10, 15, 15, 16, 16

б) 1, 3, 4, 3

г) 5, 14, 14, 15, 16, 20

е) 4, 6, 13, 18, 18, 13, 19

6 Найдите среднее арифметическое, медиану и моду заданных чисел. Сравните их.

а) 14, 19, 15, 29, 23

б) 35, 49, 45, 35, 53, 35

в) 16, 24, 46, 16, 24, 34, 23, 17

7 Баскетболист за последние 7 игр набрал 19, 24, 15, 12, 23, 25, 29 баллов.

а) Каков средний балл, набранный за эти игры?

б) Какова медиана набранных баллов?

в) Если в следующей игре баскетболист наберет 34 балла, изменится ли медиана или мода набора этих чисел?



8 Найдите среднее арифметическое данных по моде.

ОБРАЗЕЦ 2, 4, a , 15, a мода 4

Решение	Объяснение
2, 4, a , 15, a 2, 4, 4, 15, 4 (2 + 4 + 4 + 15 + 4) : 5 = 5,8	Чтобы мода была 4, 4 должно повторяться чаще всех. Тогда $a = 4$. Найденное значение a записывается в ряд. Находится среднее арифметическое число.

а) 3, 5, x , 6, 8, x , 8 мода 6

в) 5, 7, y , 11, y , 23, y , 1 мода 11

б) 14, 15, a , 11, a , 10 мода 8

г) 25, b , b , 15, b , 23, b , 5 мода 13

Изучение Сравнение по среднему арифметическому, медиане и моде

При анализе собранных данных можно сделать о них общие выводы, найдя среднее арифметическое, моду или медиану. В таблице представлена информация о зарплате сотрудников компаний A и B . Можно вычислить среднее арифметическое, медиану и моду зарплат сотрудников этих компаний и сравнить их.

Компания	Зарплата сотрудников						Среднее арифметическое	Медиана	Мода
A	550	550	550	850	900	1400	800	700	550
B	500	500	700	900	2300		980	700	500

Здесь средняя зарплата сотрудников компании A выше средней зарплате сотрудников компании B . В каждой компании количество людей, получающих зарплату менее 700 манатов и более 700 манатов, одинаково. В компании A наибольшее число работников с зарплатой 550 манатов, а в компании B — с зарплатой 500 манатов.

- 9 Найдите среднее арифметическое, медиану и моду чисел в каждом ряду. В каком ряду среднее арифметическое; медиана; мода наибольшая?

а) 9, 5, 9, 13 5, 7, 17, 7	б) 11, 9, 11, 19, 11, 29 23, 12, 23, 30, 12	в) 17, 23, 7, 15, 13 25, 32, 24	г) 24, 16, 21, 24, 35 18, 23, 36, 23 32, 35, 32
-------------------------------	--	------------------------------------	---

- 10 В таблице дана некоторая информация о проданных за 5 дней тетрадях, ручках и ластиках в магазине школьных принадлежностей. Впишите подходящие числа вместо знака "?".

Товар	Число проданных товаров	Среднее арифметическое	Медиана	Мода
Ручка		230	?	?
Тетрадь		?	?	120
Ластик	80 130 150 150 ?	?	140	?

Решение задач

- 11 Продавец указал массу проданных им арбузов в килограммах:

5 5 3  8 9 10 12 5

Среднее арифметическое этих чисел больше медианы, а медиана больше моды. Какое из данных чисел может быть на месте стертого числа? 4 6 15

- 12 В соревнованиях по парному фигурному катанию судьи присудили парам, занявшим I и II места, следующие баллы. По какому критерию был выбран победитель?

I МЕСТО	10,0	9,6	9,9	9,6	9,8	10,0
II МЕСТО	9,7	10,0	10,0	9,4	9,5	10,0



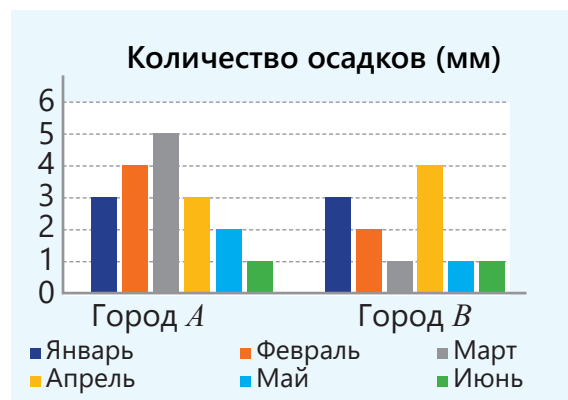
- 13 В таблице показаны баллы Самира, Айнура и Анара по оцениваниям, проведенным в течение первого полугодия.

Самир	52	78	80	90	94	80
Айнура	50	65	80	84	96	87
Анар	76	64	80	85	95	80

- а) У кого самый высокий средний балл?
б) Какова мода баллов, набранных Самиром?
в) У кого медиана набранных баллов наибольшая, а у кого наименьшая?

- 14 На диаграмме отображено количество осадков, выпавших в городах А и В в первом полугодии.

- а) Какова мода показателей для городов А и В?
б) Каково среднее количество осадков в городах А и В?
в) Медиана показателей какого города больше?



9.2. Случайное событие



Ключевые слова

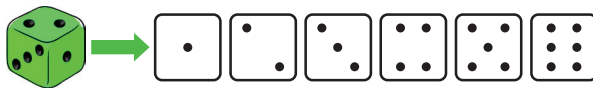
- событие
- случайное событие
- достоверное событие
- невозможное событие
- равновозможные события

Исследование-обсуждение

Практическая работа.

Принадлежности:

игральная кость.



Ход работы:

Бросьте кости по 10 раз по очереди со своим товарищем по парте и запишите полученный результат. Ответьте на вопросы и объясните свое мнение.

- Можно ли заранее определить, будет результат очередного броска кости чётным или нечётным?
- Возможно ли каждый раз получать один и тот же результат?
- Какие примеры ситуаций при броске игральной кости, выражаемых словами "невозможно", "маловероятно", "скорее всего", "определенно будет", можете привести?

Изучение Случайное событие

В повседневной жизни часто можно услышать такие слова, как "это невозможно", "это маловероятно", "это обязательно произойдет", "это может произойти, а может и не произойти". Эти слова используются для предсказания исхода любого события, которое произойдет. По вероятности события делятся на 3 группы: *достоверное событие*, *невозможное событие* и *случайное событие*.

- Существуют события, исход которых уже известен. Например, если сегодня пятница, завтра будет суббота. Такие события называются *достоверными событиями*.
- Некоторые события являются невозможными при заданных условиях. Во время футбольного матча мяч, брошенный вверх, не может остаться в воздухе. Такие события называются *невозможными событиями*.
- Существуют события, которые возможны, но исход не может быть определен заранее. Например, хотя известно, что брошенная монета обязательно упадет на одну сторону, невозможно заранее определить, на какую сторону она упадет. Такие события называются *случайными событиями*.

Пятница Суббота



Подумай!

Какие события можете привести в качестве примеров для высказываний: "это невозможно", "это маловероятно", "это обязательно произойдет", "это может произойти, а может и не произойти"?

Задания

- 1 Определите, является ли событие случайным, достоверным или невозможным.

ОБРАЗЕЦ На 7-й странице книги выберите любое слово. В этом слове:

- будет буква "а".
- будет буква арабского алфавита.
- будет буква русского алфавита.

Решение	Объяснение
• Появление буквы “а” является случайным событием. • В этом слове не может быть буквы арабского алфавита. • Обязательно будет присутствовать буква русского алфавита.	Произвольно выбранное слово может содержать или не содержать букву “а”. Поскольку слово написано буквами русского алфавита, буквы арабского алфавита быть не может. Поскольку слово написано буквами русского алфавита, то обязательно будут буквы этого алфавита.

а) Вытащить зеленый шар из коробки, в которой находятся только красные шары.

б) Два произвольно выбранных ученика из класса сообщили о дне своего рождения. Их дни рождения придется на один и тот же день.

в) Бросаются игральные кости. Выпадет очко меньше 10.

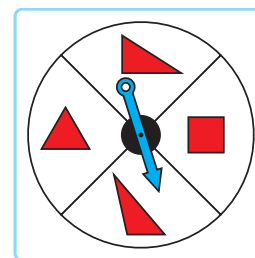
- 2 При вращении спиннера стрелка останавливается на одной из поровну разделенных частей. Опишите фигуру в этой части одним из выражений “это невозможно”, “это обязательно произойдет”, “это может произойти, а может и не произойти”.

а) Фигура будет красного цвета.

в) Фигура будет квадратом.

б) Фигура будет желтого цвета.

г) Фигура будет треугольником.



Изучение Равновозможные события

При прогнозировании наступления событий используются такие выражения, как “вероятность высока”, “вероятность мала”, “нулевая вероятность”. Часто выражения “Вероятность равна 100 процентам” используются для достоверных событий, а “Вероятность равна нулю” — для невозможных событий.

Вероятность выражает степень возможности наступления события.

• Вероятность наступления событий может быть одинаковой или различной. Например, при подбрасывании монеты существуют два возможных исхода: монета упадет либо на сторону с числом, либо на сторону с изображением карты. Третий исход невозможен. Поскольку неизвестно, какая сторона выпадет, оба события являются случайными событиями и вероятность выпадения обеих сторон одинакова. Такие события называются *равновозможными* или *равновероятными* событиями.

ОБРАЗЕЦ. Лала положила в мешок по одному шару каждого цвета: красного, желтого, зеленого и синего. Она вытащила мяч, не заглядывая внутрь мешка. Это событие может иметь 4 исхода:

- цвет мяча красный;
- цвет мяча желтый;
- цвет мяча зеленый;
- цвет мяча синий.

Эти исходы равновозможны.



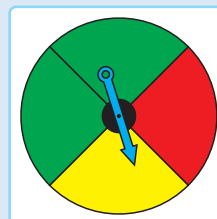
Подумай!

Что можно сказать о вероятности того, что цвет мяча, извлеченного из мешка, будет белым?

- 3 Стрелка спиннера, разделенного на равные части, вращается и останавливается на одной из частей. Определите, являются ли события равновероятными.

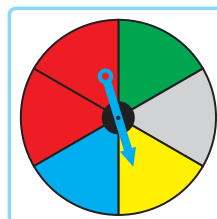
ОБРАЗЕЦ

- а) Остановка стрелки на красной части — остановка стрелки на желтой части
 б) Остановка стрелки на желтой части — остановка стрелки на зеленой части



Решение	Объяснение
а) Эти события равновероятны.	Поскольку размеры красной и желтой частей одинаковы, то с одинаковой вероятностью стрелка остановится именно на этих частях. При вращении стрелки она остановится на одной из 4 одинаковых частей.
б) Эти события не являются равновероятными.	Поскольку размеры желтой и зеленой частей разные, то остановка стрелки в этих частях не равновероятна.

- в) Остановка стрелки на синей части — Остановка стрелки на желтой части
 г) Остановка стрелки на красной части — Остановка стрелки на серой части
 д) Остановка стрелки на желтой части — Остановка стрелки на зеленой части
 е) Остановка стрелки на красной части — Остановка стрелки на желтой части



Решение задач

- 4 В мешке 1 красный, 1 зеленый, 2 черных и 2 синих шара. Из мешка случайным образом извлекается шар. Определите, являются ли события равновероятными.
- а) Вытянутый шар красного цвета. — Вытянутый шар зеленого цвета.
 б) Вытянутый шар черного цвета. — Вытянутый шар синего цвета.
 в) Вытянутый шар зеленого цвета. — Вытянутый шар черного цвета.

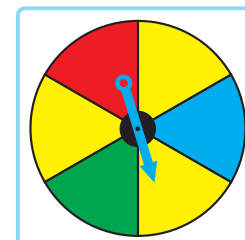


- 5 Расположив карты лицевой стороной вниз, открыли одну из них. Число на открытой карте:



- будет положительным или отрицательным. Равновероятны ли эти события?
- будет целым числом. Достоверное, невозможное или случайное событие?
- будет числом, делящимся на 3. Достоверное, невозможное или случайное событие?
- будет нечетным числом. Достоверное, невозможное или случайное событие?

- 6 Вращают стрелку спиннера.
- В каких частях остановка стрелки равновероятна?
 - Возможна ли остановка стрелки в коричневой части?



9.3. Вероятность события

Исследование-обсуждение

Лала положила в мешок 3 красных мячика и 1 желтый мячик одинакового размера. Не заглядывая внутрь мешка, она вынула мячик, отметила его цвет и вернула мячик в мешок. Лала повторила эту процедуру 15 раз и каждый раз записывала результат в таблицу.

Попытки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Вытащенный мячик	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

- Какое из событий происходит чаще: извлечение жёлтого мячика или извлечение красного?
- Каково отношение числа случаев, когда был извлечён красный мячик, к общему числу попыток? Как это записать для жёлтых мячиков?
- Если Лала сделает ещё одну попытку, мячик какого цвета с большей вероятностью будет извлечён?



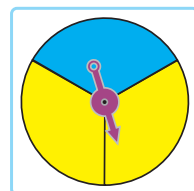
Ключевые слова

- частота события
- вероятность
- благоприятные исходы



Изучение Частота события

Исход случайного события не может быть известен заранее. Поэтому часто проводится определенное количество испытаний и определяется количество повторений интересующего нас события. На основе этого количества можно с определённой вероятностью предсказать, произойдёт ли интересующее нас событие.



ОБРАЗЕЦ. Эльхан покрутил 40 раз стрелку спиннера, состоящего из трех равных частей, две из которых желтые, а одна — синяя. Он отметил в таблице цвет той части, где каждый раз останавливалась стрелка, и подсчитал количество результатов. Эльхан разделил

количество выпадений жёлтой части на общее число попыток, чтобы предсказать возможность её выпадения в следующий раз: $\frac{26}{40} = 0,65$. По его заключению, в 65 из 100 попыток, то есть в 65% попыток, стрелка остановится на желтой части.

- Отношение количества возникновения интересующего нас события (n) к общему числу испытаний (N) называется **частотой события** ($\frac{n}{N}$). Частота события помогает предсказать или определить вероятность его возникновения. Например, если Эльхан в следующий раз прокрутит стрелку спиннера, вероятность остановки на желтой его части довольно большая.

Событие	Подсчеты	Всего
Желтый		26
Синий		14
Всего		40



Подумай!

По таблице, какова частота выпадения синего цвета? Найдите сумму частот выпадения жёлтого и синего цветов и объясните результат.

Задания

1

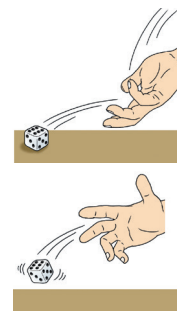
Найдите частоту событий.

а) Если подбросить монету 50 раз, она выпадет стороной с картой 27 раз.

б) При вращении 60 раз стрелки спиннера, разделенного на желтую, синюю и красную части, она остановилась на красной части 24 раза.

- 2 При каждом броске игральной кости количество выпавших граней отметили в таблице.
- Заполните таблицу, указав количество повторений каждого события.
 - Вычислите частоту каждого события.
 - Найдите сумму частот событий.

Событие	Подсчеты	Всего
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Всего		



Изучение Вероятность события

Шахматист, играющий белыми фигурами в шахматной партии, или команда, начинающая футбольный матч, определяются жеребьевкой. Обычно для этого бросают монету. События выпадения числовой стороны монеты или стороны с картой равновозможны.

• В испытании с равновозможными исходами можно заранее вычислить вероятность наступления события A . Для того чтобы найти вероятность этого события, сначала определяется число *всевозможных исходов* испытания. Затем находится число *благоприятных исходов* для этого события. Вероятность события A обозначается как $P(A)$ и рассчитывается следующим образом.



$$P(A) = \frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всевозможных исходов}}$$

P — на английском probability, означает "вероятность". Например, при подбрасывании монеты число возможных исходов равно 2, а число исхода выпадения стороны с картой — 1. Вычисляется вероятность выпадения стороны с картой.

Событие A : выпадение стороны с картой. $P(A) = \frac{1}{2}$

ОБРАЗЕЦ 1. Какова вероятность выпадения грани с числом пять при бросании игральной кости?

Число всевозможных исходов — 6

Число благоприятных исходов — 1

Событие B : выпадение числа пять. $P(B) = \frac{1}{6}$

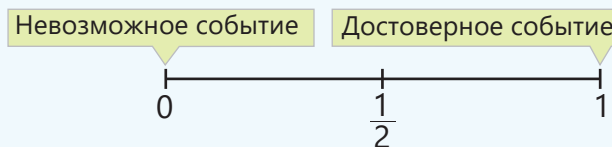
← Число благоприятных исходов
← Число всевозможных исходов

ОБРАЗЕЦ 2. Сабина купила 1 клубничное, 1 пломбир, 1 шоколадное и 2 сливочных мороженых и положила их в пакет. Вероятность того, что мороженое, которое Сабина достанет, не глядя в пакет, будет сливочным, можно найти следующим образом:

Событие C : мороженое будет сливочным. $P(C) = \frac{2}{5}$

← Число благоприятных исходов (сливочное мороженое — 2 шт.)
← Число всевозможных исходов (количество мороженого — 5 шт.)

- Вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0. Вероятность случайного события находится между 0 и 1.
- Вероятность может быть выражена в виде обыкновенной дроби, десятичной дроби или процента. Например, вероятность того, что мороженое Сабины сливочное, составляет $\frac{2}{5}$, 0,4 или 40%.



Подумай!

Какова вероятность того, что Сабина достанет клубничное мороженое?

- 3 Найдите число всевозможных исходов для данных событий.
- Учитель вызывает к доске одного случайно выбранного ученика из 25 учеников класса.
 - Выпадение грани с четным числом при бросании игральной кости.
 - Выпадение грани с числом больше 2 при бросании игральной кости.

- 4 Вычислите вероятность события.
- Учитель хочет случайным образом вызвать одного из 25 учеников класса к доске. Если в классе 5 отличников, какова вероятность того, что вызванный к доске ученик окажется отличником?



- Спиннер разделен на 4 равные части: 2 желтые, 1 синюю и 1 красную. Стрелка спиннера приводится в движении.
 - Какова вероятность того, что стрелка попадет в красную часть?
 - Какова вероятность того, что стрелка попадет в желтую часть?



Из истории математики

Теория вероятностей начала формироваться в XVI веке как попытка создать теорию игр со ставками. Первые шаги в вычислении вероятности можно найти в работах таких ученых, как Никколо Тарталья (1499-1557), позднее Галилео Галилей (1564-1642), Блез Паскаль (1623-1662), Пьер Ферма (1601-1665). Начиная с XVIII века понятие "вероятность" стало применяться для решения таких задач, как математическая теория страхования жизни, изучение статистики смертности и рождаемости. Основы современной теории вероятностей были заложены Андреем Колмогоровым, одним из великих математиков XX века.



Андрей Колмогоров
(1903–1987)

Решение задач

- 5 Из 50 книг в шкафу 10 — энциклопедии, 17 — научная, остальные — художественная литература. Книга выбрана случайно.
- какова вероятность того, что это энциклопедия?
 - какова вероятность того, что это научная литература?
 - какова вероятность того, что это художественная литература?
- 6 Сабина написала различные цифры на 10 маленьких листочках бумаги, положила их на стол лицевой стороной вниз и перемешала. Эльхан назвал цифру и открыл один из листочков, лежавших на столе. Какова вероятность того, что цифра Эльхана совпадает с цифрой на открытом им листочке?



Игра. Необходимо бросить бумажный стаканчик с определенного расстояния на стол так, чтобы он упал на основание. Попробуйте вместе с другом выполнить это по 10 раз с одинакового расстояния. Заполните таблицу и определите частоту события, при котором стакан падает на основание для каждого игрока. Игрок, у которого эта частота выше, выигрывает.

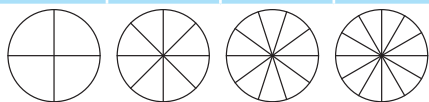


Игрок	Подсчеты	Всего
1-й		
2-й		

9.4. Представление информации

Исследование-обсуждение

Лето	Осень	Зима	Весна
200	50	150	100



В таблице приведены результаты опроса, проведенного среди учеников о любимом времени года.

- Сколько учеников приняло участие в опросе?
- На каком из данных кругов можно изобразить информацию из таблицы? Объясните свое мнение.

Изучение Представление в процентах данных на круговой диаграмме

Для сравнения частей целого удобнее использовать круговую диаграмму. Чтобы отобразить данные на круговой диаграмме, круг делится на части, соответствующие данным, и каждая часть выделяется своим цветом.

Например, 2 ученика получили оценку "2", 8 учеников — оценку "3", 20 учеников — оценку "4" и 10 учеников получили оценку "5". Эту информацию можно отобразить в виде круговой диаграммы. Для этого:

- 1 Находится, сколько процентов составляет число учеников по каждой оценке от всех учеников, и записывается в таблицу.
- 2 Круг делится на части в соответствии с числом учеников, получивших оценки, в процентном отношении. Для этого угол с вершиной в центре круга (центральный угол) делится на основе процентных отношений. Поскольку в круге полный угол равен 360° , находится градусная мера угла, соответствующего каждой оценке.

$$\text{"2"} \quad 360^\circ \cdot \frac{2}{100} = 7.2^\circ$$

$$\text{"3"} \quad 360^\circ \cdot \frac{8}{100} = 28.8^\circ$$

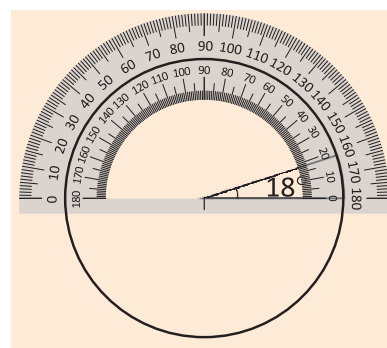
$$\text{"4"} \quad 360^\circ \cdot \frac{20}{100} = 72^\circ$$

$$\text{"5"} \quad 360^\circ \cdot \frac{10}{100} = 36^\circ$$

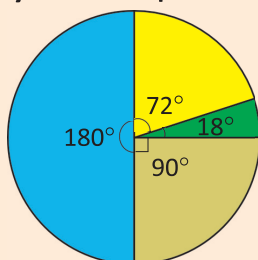
- 3 Чертится круг. С помощью транспортира последовательно строятся углы, вершина которых находится в центре круга (центральный углы), и закрашиваются соответствующие части.

Результаты оценивания

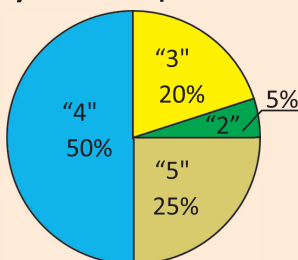
Оценка	Число	%
"2"	2	2%
"3"	8	8%
"4"	20	20%
"5"	10	10%
Всего	40	100



Результаты оценивания



Результаты оценивания



Результаты оценивания

Оценка	Число	%	Угол
"2"	2	5	18°
"3"	8	20	72°
"4"	20	50	180°
"5"	10	25	90°
Всего	40	100	360°

Задания

- 1 В таблице приведена информация о виде транспорта, которым пользуются сотрудники банка, приезжая на работу. Найдите соответствующий процентный показатель для каждого вида транспорта и определите соответствующую круговую диаграмму.

Виды транспорта	Число
Общественный транспорт	32
Велосипед	8
Мотоцикл	4
Скутер	16
Личный автомобиль	20

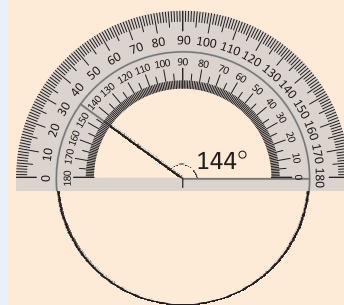


- 2 В таблице указано количество мячей, имеющих в продаже. Определите, какой процент всех мячей составляют баскетбольные, волейбольные и футбольные мячи, и изобразите их на круговой диаграмме.

Разновидности мячей	Число
Баскетбольный	8
Волейбольный	5
Футбольный	7

ОБРАЗЕЦ • Баскетбольные мячи

Решение	Объяснение
$7 + 5 + 8 = 20$ $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$ или 40% $\frac{360^\circ \cdot 40}{100} = 144^\circ$	Находится количество всех мячей. Находится, какой процент всех мячей составляют баскетбольные мячи. Соответствующий угол находится на круговой диаграмме.



- Футбольные мячи.
- Волейбольные мячи.

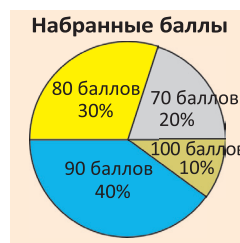
- 3 На диаграмме представлены результаты опроса о любимом музыкальном жанре среди членов клуба "Меломан" и соответствующее число членов клуба. Найдите, какой процент от всего клуба составляет каждая группа.

- Сколько всего процентов составляют любители народной музыки и эстрады вместе взятые?



- 4 На диаграмме и в таблице показаны баллы 10 учеников, участвующих в конкурсе "Знания". Заполните таблицу на основе диаграммы.

- Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик наберет 100 баллов?
- Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик наберет 70 баллов?



Балл	Число учеников
70	
80	
90	
100	1

Изучение Линейная диаграмма

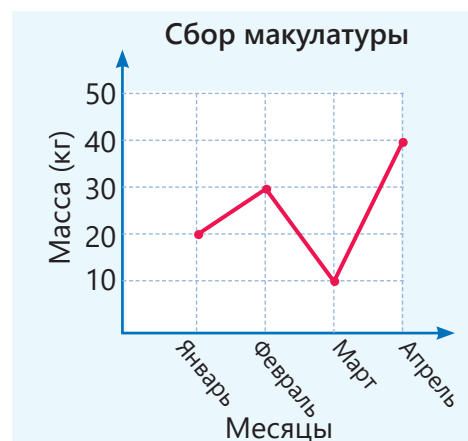
Изменение величины в зависимости от времени удобнее изображать на линейной диаграмме. По диаграмме можно проследить изменение величины, т.е. увеличение или уменьшение, в процентах.

На диаграмме показана масса макулатуры, собранной несколькими учениками за 4 месяца. По диаграмме можно узнать, в каком месяце собрали больше макулатуры и на сколько процентов больше. Например, макулатуры, собранной в феврале, на 50% больше, чем в январе:

$$\frac{30 - 20}{20} \cdot 100\% = 50\%.$$

В марте было собрано на 50% меньше макулатуры, чем в январе:

$$\frac{20 - 10}{20} \cdot 100\% = 50\%$$

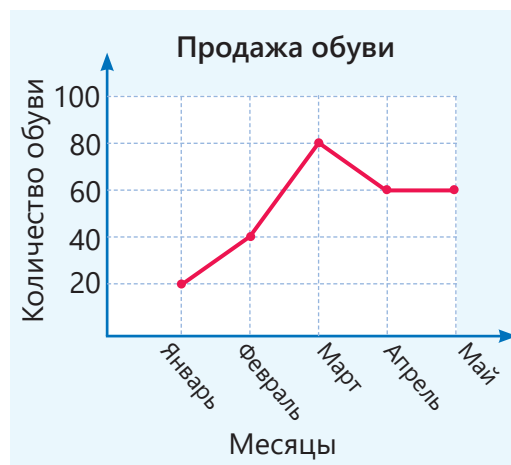


Подумай!

Как можно изобразить информацию о сборе макулатуры с помощью круговой диаграммы?

- 5 На диаграмме представлена информация о продаже обуви в магазине за первые 5 месяцев года.

- В каком месяце наблюдался самый большой рост продаж обуви по сравнению с предыдущим месяцем?
- На сколько процентов количество обуви, проданной в марте, больше по сравнению с февралем?
- На сколько процентов уменьшилось количество проданной обуви в апреле по сравнению с мартом?
- Сформулируйте вопросы по линейной диаграмме и ответьте на них.



- 6 Футбольный матч должен был начаться в 15:00. Болельщиков стали впускать на стадион с 14:00. На диаграмме представлена информация о количестве болельщиков на стадионе в разное время.

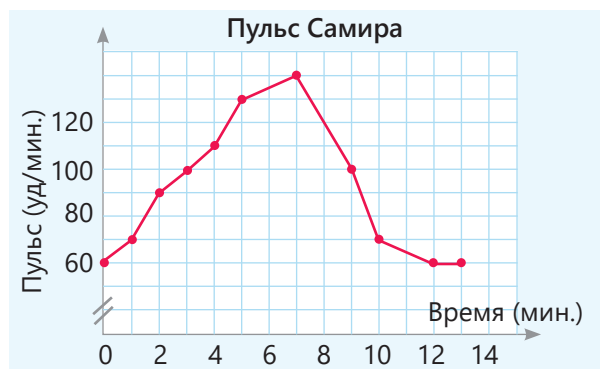
- На сколько процентов количество болельщиков на стадионе в 14:50 больше количества болельщиков в 14:40?
- На сколько процентов увеличилось количество болельщиков в 14:40 по сравнению с количеством болельщиков в 14:20?
- Сформулируйте вопросы по линейной диаграмме и ответьте на них.



Решение задач

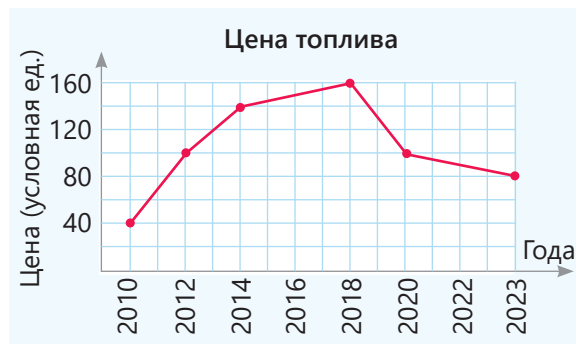
- 7 Когда Самир едет на рынок на велосипеде, показатели пульсометра на его руке, то есть количество ударов сердца за 1 минуту, отображаются на планшете в виде линейной диаграммы.

- Каким был его пульс через 2 минуты?
- На сколько процентов увеличился пульс на 7-й минуте по сравнению с 3-й минутой?
- Через сколько минут после того, как он начал двигаться, его пульс начал стабилизироваться?
- На сколько процентов пульс на 10-й минуте меньше пульса на 9-й минуте?
- Как вы можете объяснить, почему частота пульса увеличивается или уменьшается во время движения?



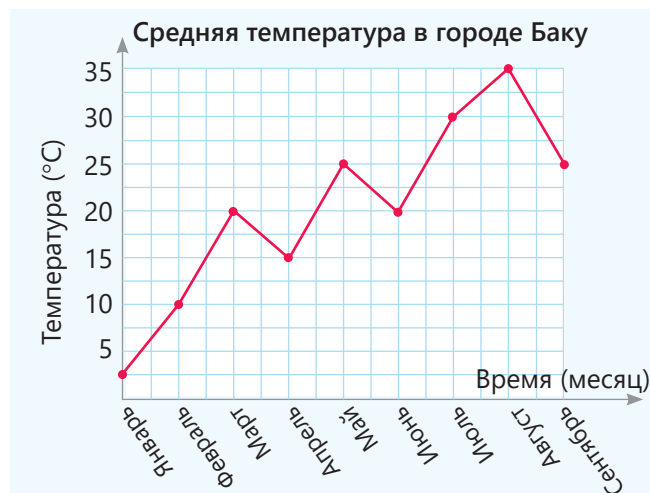
- 8 На линейной диаграмме представлена информация о цене топлива в одной из стран.

- На сколько процентов цена на топливо в 2014 году выросла по сравнению с 2012 годом?
- На сколько процентов цена в 2010 году была ниже цены в 2023 году?
- На сколько процентов изменилась цена в 2020 году по сравнению с ценой в 2012 году?
- Сформулируйте вопросы на основе линейной диаграммы и ответьте на них.



- 9 Среднее значение температуры в Баку за первые 9 месяцев года изображено на линейной диаграмме.

- На сколько процентов выросла средняя температура в мае по сравнению с февралем?
- На сколько процентов снизилась средняя температура в июне по сравнению с маем?
- Сформулируйте вопросы на основе линейной диаграммы и ответьте на них.



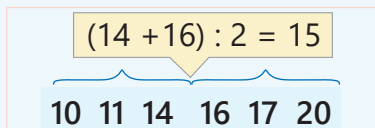
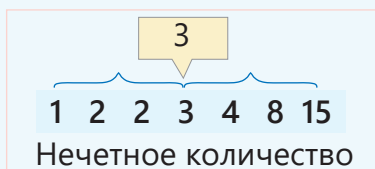
- 10 За 1-й день было продано 20 пирожков.

- Сколько пирожков было продано за каждый день?
- Постройте линейную диаграмму на основе круговой диаграммы.
- Сформулируйте вопросы по линейной диаграмме и ответьте на них.

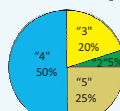


ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Медиана



Круговая диаграмма



Линейная диаграмма



Мода

39 43 41 40 38 41 42 41
Мода 41

Среди заданных значений величины наиболее часто встречающееся значение называется **модой**.

Частота события

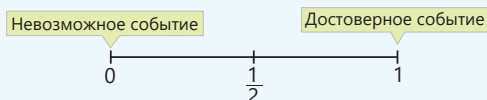
Событие	Подсчеты	Всего
Желтый		26
Синий		14
Всего		40

Отношение количества возникновения события к общему числу испытаний $(\frac{n}{N})$.

Частота выпадения желтого цвета
 $\frac{26}{40} = 0,65$.

Событие

События делятся на 3 группы: достоверное событие, невозможное событие и случайное событие.



Равновозможные события

При броске монеты выпадение стороны с числом, либо стороны с картой — равновозможные события.



Статистика и вероятность

Вероятность события

Число всевозможных исходов — 6



Число благоприятных исходов — 1



$$P(A) = \frac{1}{6}$$

← Число благоприятных исходов
← Число всевозможных исходов

Решение исходной задачи

- Определяется медиана.
40 80 **100** 120 160
- Тутовых деревьев больше, чем дубов и елей, и меньше, чем сосен и платанов.
- Количество дубов на 75% меньше количества сосен.

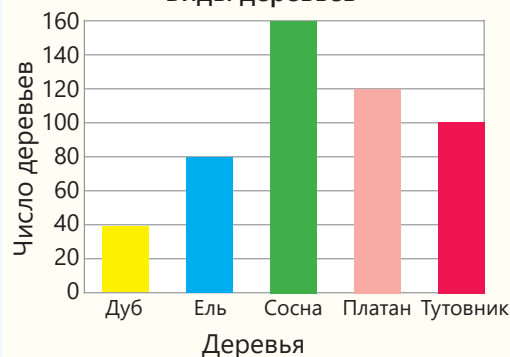
$$\frac{160 - 40}{160} \cdot 100\% = \frac{120}{160} \cdot 100\% = 75\%$$

- Количество платанов на 50% больше количества елей.

$$\frac{120 - 80}{80} \cdot 100\% = \frac{40}{80} \cdot 100\% = 50\%$$

- Поскольку количества елей больше всего, то более вероятно, что случайно выбранным деревом окажется ель.
- Поскольку среди деревьев нет оливковых, то невозможно, что случайно выбранным деревом окажется оливковое дерево.

Виды деревьев



ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Самир и Лала нашли медиану двух различных данных. Кто нашел ответ правильно?



Лала

Медиана: 35,5

22 24 35 36 38 40

Медиана: 28

12 26 28 14 25



Самир

2. Найдите медиану, моду и среднее арифметическое.

а) 32, 38, 36, 34

в) 59, 56, 59, 42, 42

д) 56, 85, 84, 56, 56, 92, 120

б) 25, 37, 29, 29

г) 61, 36, 48, 36, 36

е) 52, 43, 26, 63, 77, 26, 99

3. Найдите моду данных и объясните значение.

а) Геометрические фигуры, начерченные Эльханом: круг, квадрат, круг, прямоугольник, треугольник, трапеция, круг

б) Месяцы рождения друзей Айнур: апрель, март, май, июнь, март, июль, март, апрель, апрель

в) Любимые цвета детей в кружке по рисованию: белый, черный, белый, красный, желтый, белый, черный, серый, синий, синий

4. Найдите медиану и среднее арифметическое, сравните их. Какой вывод можно сделать из среднего арифметического и медианы этих чисел?

а) Цены на различные компьютеры, продаваемые в магазине компьютерной техники: 1350 ₼, 1420 ₼, 1350 ₼, 1450 ₼, 3600 ₼.

б) Цены на различные велосипеды, продаваемые в спортивном магазине: 120 ₼, 140 ₼, 160 ₼, 180 ₼, 200 ₼, 240 ₼, 3000 ₼.



5. В баскетбольном соревновании за один бросок начисляются 1, 2 или 3 балла в зависимости от дистанции броска. В соревновании между 6"А" и 6"В" классами баллы начисляются в зависимости от количества бросков, сделанных каждой командой во время игры.

- Чему равна мода начисленных баллов каждого из классов 6"А" и 6"В"?
- Какой класс выиграл в соревновании?

6"А"		
1, 1, ..., 1, 2, 2, ..., 2, 3, 3, ..., 3		
15 бросков	20 бросков	14 бросков

6"В"		
1, 1, ..., 1, 2, 2, ..., 2, 3, 3, ..., 3		
17 бросков	18 бросков	21 бросок

6. Определите, являются ли события невозможными, маловероятными, высоковероятными или достоверными.

а) Вы будете есть завтра.

б) Человек проживет более 100 лет.

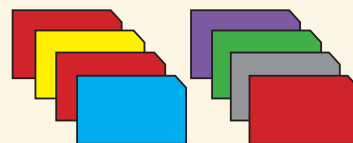
в) Завтра будет солнечное затмение.

г) Человек проживет без еды 1 месяц.

д) Вы отправитесь на Марс.

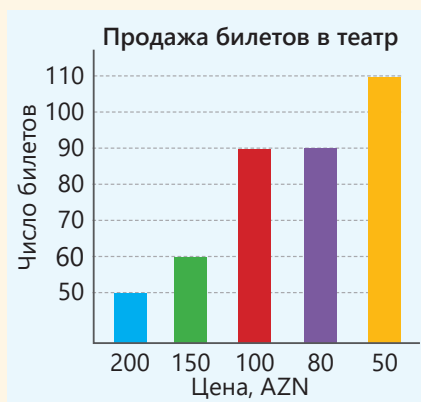
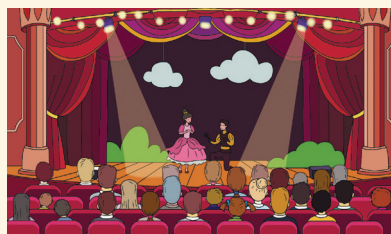
е) В январе в Баку пойдет снег.

7. Айнур разложила на столе 8 разноцветных карточек цветной стороной вниз; у каждой одна сторона — белая. Она перемешала эти карточки и случайно открыла одну, не глядя на них.



- Каково количество возможных исходов?
- Сколько благоприятных исходов у события, при котором открытая карточка окажется красной?
- Найдите вероятность выбора красной карточки.

8. На диаграмме показаны количество и цены проданных билетов на театральный спектакль. Зритель был выбран случайным образом.



- По какой цене этот зритель с наименьшей вероятностью купит билет?
- Какой билет зритель купит с наибольшей вероятностью?
- Какова вероятность того, что зритель купит билет за 100 манатов?
- На сколько процентов продажа билета за 50 манатов больше продажи билета за 200 манатов?

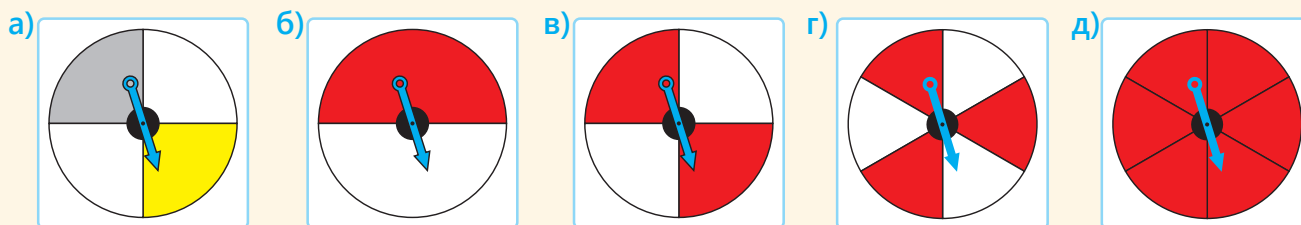
9. Страусиные яйца различаются по размеру.

14 см 15 см 18 см 18 см 17 см 21 см 17 см

- Каков среднеарифметический размер страусиного яйца?
- Найдите медиану и среднее арифметическое данных чисел. Сравните медиану и среднее арифметическое.
- Какой размер страусиных яиц наиболее распространен?

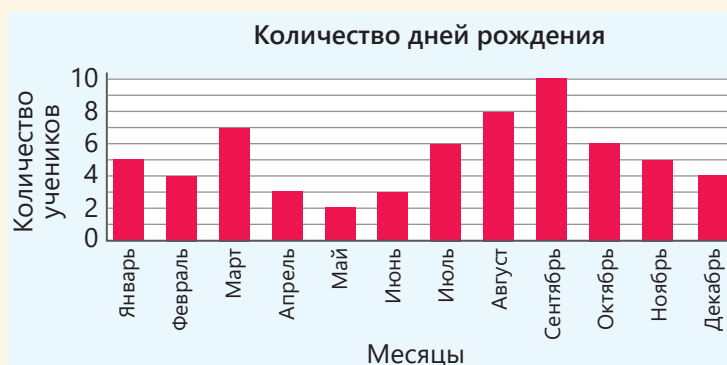


10. Спиннер разделен на равные части. Найдите вероятность попадания в красную часть при вращении стрелки.



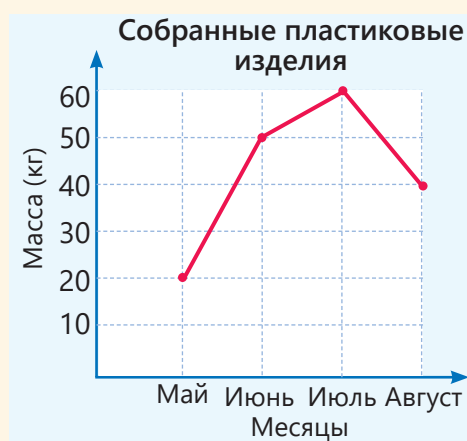
11. На диаграмме представлена информация о количестве дней рождения в каждом месяце у учеников 6-х классов.

- Найдите моду данных, состоящих из месяцев. Что означает мода?
- Какова вероятность того, что у случайно выбранного ученика день рождения в марте?



12. Члены клуба «Зелёный мир» собрали и сдали в летние месяцы пластиковые изделия.

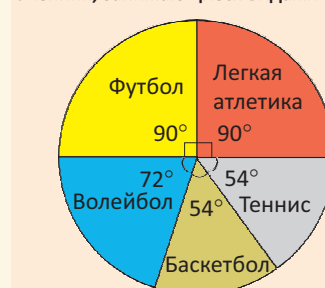
- Сколько килограммов пластиковых изделий в среднем собирали и сдавали члены клуба каждый месяц?
- На сколько процентов количество изделий, собранных в июле, больше, чем в июне?
- Увеличилось или уменьшилось количество изделий, собранных в августе по сравнению с маем? На сколько процентов?



13. На диаграмме представлен результат опроса о том, каким видом спорта занимаются 60 учеников. Найдите число учеников (в процентах), которые занимаются тем или иным видом спорта.

- Каким видом спорта ученики занимаются больше всего?
- Сколько учеников занимаются теннисом?
- Сколько процентов составляют ученики, которые занимаются футболом и волейболом, от всех учеников?
- Сколько всего процентов учеников занимаются легкой атлетикой и баскетболом?
- Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик занимается футболом?

Ученики, занимающиеся видами спорта



ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЙ ДНК-ТЕСТ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

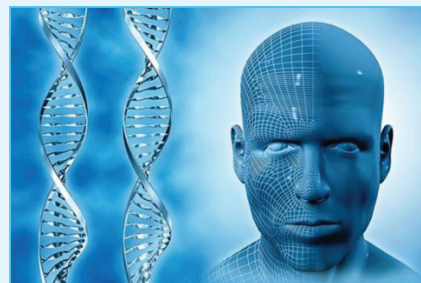
Генеалогический анализ ДНК позволяет получить информацию о родственных отношениях и предках человека путем изучения определенных участков генома человека (наследственного материала, содержащегося в клетке человека). Биоинформатика — специальная область науки, занимающаяся моделированием и изучением молекулы ДНК математическими методами.

1. Найдите изображения молекулы ДНК в Интернете и создайте простую модель ДНК.

2. 99% структуры молекул ДНК у всех людей одинаковы, а оставшийся 1% различен. Согласно современным технологиям распознавания ДНК сравниваются 13 различных участков генома двух людей. Вероятность того, что данные ДНК части генома совпадают у двух людей, равна 0,1. Вероятность совпадения двух частей геномов двух людей равна $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$. Вычислите вероятность того, что 13 различных частей геномов двух людей случайно совпадут.

3. Основываясь на полученных результатах, обсудите вероятность того, что результаты ДНК-тестов двух людей совпадут.

4. Найдите информацию из Интернета о генетике человека, анализе ДНК и областях его применения. Изучите роль молекул ДНК в передаче генетических заболеваний от одного поколения к другому и то, каким образом используется вероятность. Подготовьте презентацию по собранной информации.

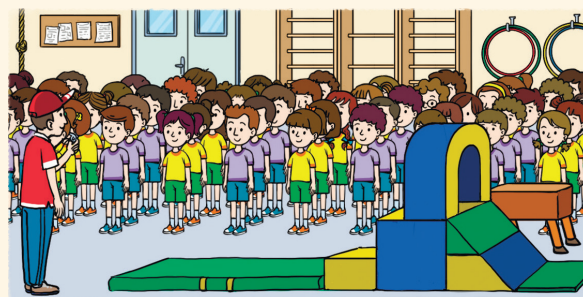


ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ ЗА 6-й КЛАСС

Задачи с относительно высокой степенью сложности отмечены знаком “*”.

- 1 Сначала запишите сумму, а затем разность данных выражений. Упростите полученные выражения.
 а) $7a + 3$ и $9 - 3a$ б) $a + 3b$ и $a - 3b$
- 2 Раскройте скобки.
 а) $9 \cdot (x + 2y + 1)$ в) $-(-a - b + 7)$
 б) $3 \cdot (-c - 2d + 2)$ г) $-9 \cdot (2k - n - 9)$
- 3 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство было верным при любом значении переменной.
 а) $-3 \cdot (4c - \square d + 1) = -\square c + 9d - \square$
 б) $\square \cdot (x + \square y - 1) = -2x - 6y + \square$
- 4 Решите уравнения и проверьте ответ.
 $0,5 \cdot x + 3 = 6$ $3x + 6 = -2x + 21$
 $0,2 \cdot (2 + x) = 2$ $(7 - 3x) : (-2) = 1$
 $-(x - 3) - 2x = 3x - 3$
 $3 \cdot (2x - 4) = -2 \cdot (7 - 2x) + 8$
 $2 \cdot (2x - 4) + 14 = 3 \cdot (2 - 3x)$
 $-2 \cdot (1 - 2x) = 2 \cdot (x - 2)$
- 5 При каком наибольшем значении k значения дробей $\frac{56}{k}$ и $\frac{98}{k}$ натуральные числа?
- 6 Сократите каждую дробь до несократимой.
 $\frac{84}{96}$ $\frac{72}{90}$ $\frac{270}{306}$ $\frac{297}{405}$ $\frac{532}{646}$ $\frac{840}{1036}$
- 7 Сколько различных значений может принять сумма $a + b$, если $|a| = 5$ и $|b| = 2$? Найдите эти значения.
- 8 Вычислите значения данных выражений при $a = -6^2$ и $b = (-3)^2$ и запишите в порядке возрастания.
 $a \cdot b$ $a : b$ $a - b$ $-a + b$ $2a \cdot (-b)$
- 9 Вычислите значения выражений $|x + y|$ и $|x| + |y|$ при заданных значениях x и y и сравните их.
 а) $x = 7, y = 2$ в) $x = 7, y = -2$
 б) $x = -7, y = 2$ г) $x = -7, y = -2$
- 10 Найдите возможные значения k , если $\text{НОК}(k, 75) = 75$.
- 11 Найдите наибольшее двузначное значение a , если $\text{НОД}(a, 24) = 12$.
- 12 Из заданных значений переменной выберите те, которые удовлетворяют неравенству.
 а) $8 < 5x + 18$ б) $3x - 2 \leq 13$

2	1	0	-1	-2	-3	-2	0	3	5	6
---	---	---	----	----	----	----	---	---	---	---
- 13 Остаток от деления 75 на число a равен 3, а остаток от деления 85 на число a равен 1. Найдите наибольшее значение a .
- 14 В школьную библиотеку привезли 18 учебников по физике и 30 учебников по математике. На каждой полке должны быть учебники только по одному предмету. Какое наименьшее количество полок нужно, чтобы на всех полках разместить одинаковое количество учебников?
- 15 В спортивном классе одна половина учеников выстроилась в ряд по 8 человек, а другая половина – по 12 человек в ряд. Каково наименьшее количество этих учеников?



- 16 Инженер тратит 12% своей зарплаты на свою машину. 20% этих расходов уходит на топливо. Если инженер каждый месяц тратит на топливо 48 манатов, то какая у него зарплата?

- 17 Переменная y прямо или обратно пропорциональна переменной x . Определите эту зависимость и дополните таблицу.

а)

x	6	3	1	2
y		8		12

б)

x	6	2	1	4
y		8		16

- 18 Магазин добавляет 20% к стоимости купленного им товара и продает его за 180 манатов. Какую прибыль получает магазин от этого товара?

- 19 Расстояние между двумя точками на плане равно 8 см. Расстояние между этими точками на местности составляет 40 м.

а) Найдите масштаб плана.

б) Если длина прямоугольного дома на этом плане равна 3 см, а ширина 1,6 см, сколько квадратных метров составляет площадь этого дома на местности?

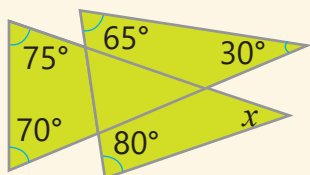
- 20 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку $A(2; 6)$. Запишите подходящую формулу, составьте таблицу и постройте график. Найдите неизвестные координаты точек $B(m; 15)$ и $C(4; n)$, расположенных на этом графике.

- 21 Клиент положил на банковский счет 800 манатов с годовым приростом 10%.

а) Каким будет прирост через 2 года; через 3 года; через 5 лет?

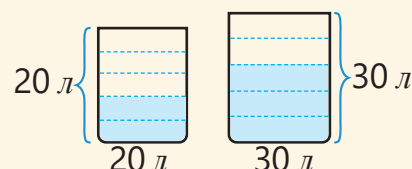
б) Через сколько лет прирост будет равен первоначальной сумме?

- 22* Найдите x по рисунку.



- 23 Из 25 учеников класса 40% – девочки. 30% девочек и 20% мальчиков – отличники. Сколько процентов класса составляют отличники?

- 24 Сосуды емкостью 20 и 30 литров разделены линиями на равные части. Спирт составляет 32% жидкости в маленьком сосуде и 45% жидкости в большом. Если смешать эти жидкости, какой процент спирта будет в составе полученной смеси?

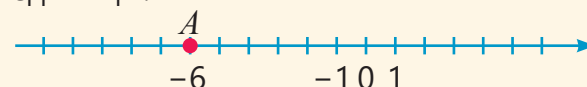


- 25 Высота прямой призмы, основанием которой является равнобедренный треугольник, равна 5 см.

а) Найдите площадь боковой поверхности призмы, если стороны ее основания равны 6 см, 6 см и 8 см.

б) Найдите объем призмы, если одна из сторон треугольника равна 10 см, а высота, опущенная к этой стороне, равна 4,8 см.

- 26 Найдите возможные значения x , если расстояние между точкой $A(-6)$ и точкой $B(x)$ на числовой оси составляет 2 единицы.



- 27 Ответьте на следующие вопросы, составив и решив уравнение.

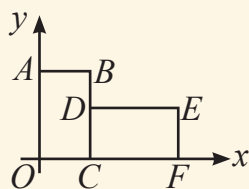
а) У какого числа противоположное ему число на 10 единиц больше его самого?

б) Разность какого числа и противоположного ему числа равна 12?

- 28* Евклид написал "Начала" в 300 г. до н.э. Этот труд составляет основу геометрии и теории чисел. Сколько лет тому назад были написаны "Начала" Евклида?

- 29 Отметьте точки $A(-4; -2)$ и $B(-1; -2)$ в системе координат. Фигура $ABCD$ является квадратом. Сколько существует различных точек C и D ? Запишите их координаты. Найдите периметр и площадь квадрата $ABCD$.

- 30 В прямоугольной системе координат изображены конгруэнтные прямоугольники $OABC$ и $DEFC$. Если координаты точки B равны $(3; 5)$, найдите координаты точек D и E .



- 31 Точки A и B симметричны относительно оси абсцисс, а точки B и C — относительно оси ординат. Найдите координаты точки C , если координаты точки A равны $(2; 1)$.

- 32 Отметьте точки $A(-5; 3)$, $B(6; 3)$, $C(4; 7)$ и $D(4; -2)$ в прямоугольной системе координат.

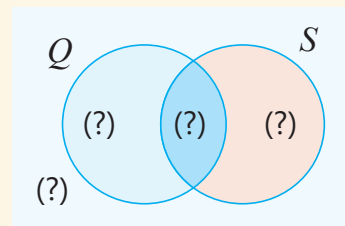
- Нарисуйте отрезки AB и CD и найдите координаты точки пересечения.
- Найдите периметр и площадь прямоугольника, полученного в результате пересечения этих отрезков с осями координат.

- 33 Если периметр квадрата $ABCD$, вершины которого находятся в разных четвертях, равен 20 единиц, впишите подходящие координаты в пустые клетки.

$A(-3; 4)$, $B(2; \square)$, $C(\square; \square)$, $D(\square; \square)$

- 34 Нарисуйте треугольник с вершинами $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$ и $C(5; -1)$ в системе координат. Измените положение этого треугольника так, чтобы точка A попала в начало координат. Найдите координаты остальных вершин полученной фигуры.

- 35 Из 30 учеников класса 18 уехали в Губу, а 14 — в Шушу. 5 человек не поехали ни в один из этих городов. Сколько человек поехали и в Губу, и в Шушу?



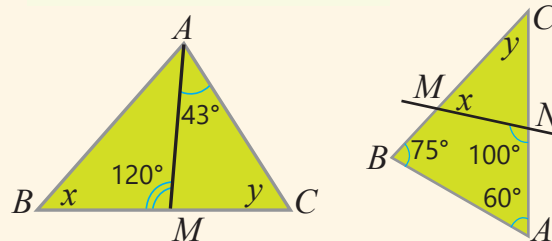
- 36 Элементы множества $M = \{1, 2, 3, \dots, 27, 28\}$, делящиеся на 2, обозначили множеством A , а делящиеся на 3 — множеством B . Покажите элементы заданных множеств на диаграмме Эйлера-Венна и найдите их количество.

$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$ $A \setminus B$

- 37 Сколько существует различных множеств C для множеств $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, b, c, d, e\}$, удовлетворяющих условию $A \subset C$ и $C \subset B$? Напишите элементы этих множеств.

- 38 Найдите неизвестное.

а) AM биссектриса. б)



- 39 У покупателя есть 100 манатов. Он купил b книг, цена каждой из которых составляет a манатов. Напишите выражение, определяющее оставшиеся деньги покупателя.

- Вычислите оставшиеся деньги покупателя при данных значениях a и b .

а) $a = 8, b = 3$ б) $a = 12, b = 6$

б) $a = 10, b = 4$ г) $a = 20, b = 5$

40 Каждый из 18 туристов, поехавших на экскурсию, знает немецкий или английский язык. Среди них число знающих оба языка на 2 больше, чем тех, кто знает только немецкий, и в 2 раза меньше тех, кто знает только английский. Постройте диаграмму Эйлера-Венна и найдите количество людей, говорящих только на английском.

41 В первом баке 1 т воды, во втором – 1,2 т. Одновременно начали опустошать баки. Каждый час из первого бака выливается 60 л воды, из второго – 100 л. Через сколько часов в баках останется одинаковое количество воды?

42* 0,4 часть учеников, участвующих в соревновании, составляют мальчики. 10 девочек покинули соревнование. Тогда мальчики составили 0,5 части от оставшихся учеников.

а) Сколько учеников участвовало в соревновании изначально?

б) Сколько мальчиков участвовало в соревновании?

43 Если игрок в тире попадает в мишень, он получает 3 очка, а если не попадает – из его счета вычитается 1 очко. Если после 10 бросков Эльхан набрал 14 очков, то сколько раз он попал в мишень?

44 Айнур подбросила монету 8 раз и записала выпавшие стороны в таблицу. Найдите по таблице частоту выпадения стороны с картой.

Попытки	1	2	3	4	5	6	7	8
Выпавшая сторона								

45 В таблице указаны сладости, купленные Эльханом в течение 10 дней, и время (в минутах), которое он простоял в очереди за ними в буфете.

День	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Сладости	пирожок	булка	гогал	булка	гогал	пирожок	булка	булка	гогал	булка
Время	2	4	5	1	4	2	3	4	4	1

На основе данной информации найдите моду сладостей и среднее арифметическое, моду и медиану чисел, показывающих время ожидания сладостей, которые Эльхан покупал по дням, и объясните их значение.

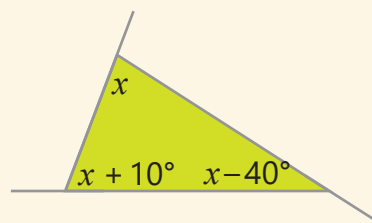
46 Два автомобиля одновременно начали двигаться навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 500 км. Если скорости автомобилей 60 км/ч и 70 км/ч, сколько километров будет между ними через t часов? Напишите соответствующее выражение и вычислите это расстояние при $t = 2$ и $t = 3$.

47 Напишите неравенство, соответствующее выражению, и определите, какие из данных чисел являются решениями неравенства.

а) Сумма x и 4, увеличенная в 2 раза, больше 12. $-2; 0; 2; 3$

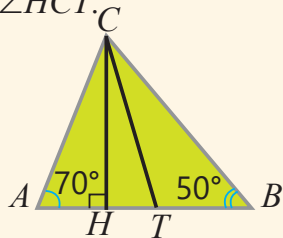
б) Разность чисел 10 и z меньше -4 . $40; 28; 14; 10$

48 Найдите внешние углы треугольника.

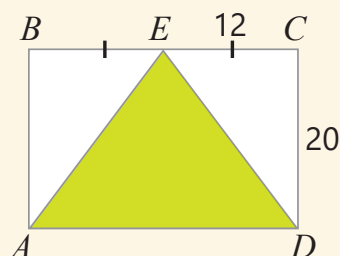


49 Параллельные прямые a и b пересекаются с прямой c . Если сумма двух полученных соответственных углов равна 200° , найти острый угол между прямыми a и c .

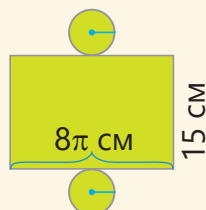
- 50 В треугольнике ABC из вершины C проведены высота CH и биссектриса CT . Если $\angle CAB = 70^\circ$ и $\angle CBA = 50^\circ$, найдите $\angle HCT$.



- 51 $ABCD$ – прямоугольник. Найдите площадь закрашенной части двумя способами.



- 52 Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра по развертке ($\pi \approx 3$).



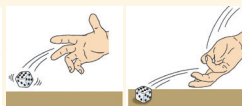
- 53 Сколько сантиметров составляет периметр параллелограмма, если его высоты равны 8 см и 6 см, а площадь — 72 см^2 ?

- 54 Найдите сумму наименьших значений b и c , если для натуральных чисел a , b и c верно $a \cdot b = 96$ и $a \cdot c = 156$.

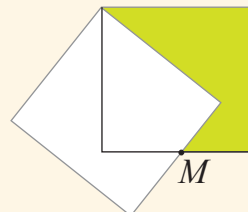
- 55 Количество очков, выпадающих при 20-кратном броске игральной кости, указано в таблице.

- а) Найдите частоту выпадения числа 5.
б) Какова частота выпадения нечетного числа?
в) Какова частота события, когда выпадает число, большее 3?

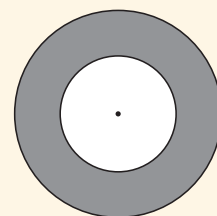
Очко	1	2	3	4	5	6
Количество	2	3	6	3	2	4



- 56* Точка M – середина сторон двух конгруэнтных квадратов. Сколько квадратных сантиметров составляет площадь закрашенной части, если ее периметр равен 36 см?



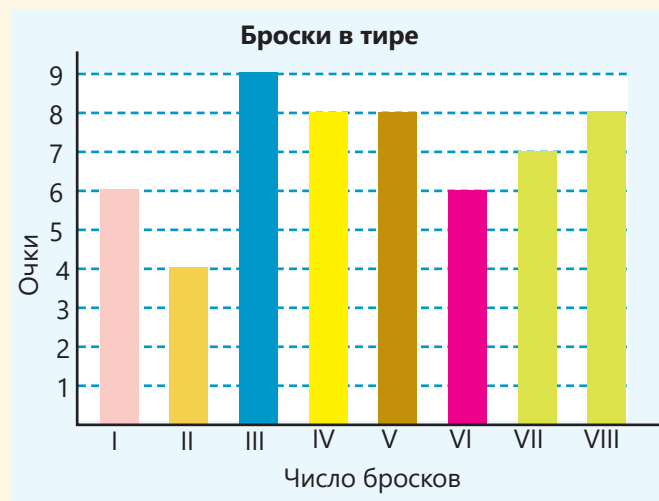
- 57* Площадь фигуры между двумя окружностями, центры которых находятся в одной и той же точке, равна $56\pi \text{ см}^2$. Найдите радиус большей окружности, если радиус меньшей окружности равен 5 см.



- 58 Показана температура в $^\circ\text{C}$, измеренная за первые 7 дней января 2024 года в определенной местности. Найдите медиану, моду и среднее арифметическое этих данных и объясните их значение.

-35°C -35°C -35°C -43°C -47°C -44°C -42°C

- 59 На диаграмме показаны очки, набранные Собиной в тире за 8 бросков.
а) Найдите моду этих данных.
б) Найдите медиану этих данных.
в) Найдите среднее арифметическое этих данных.



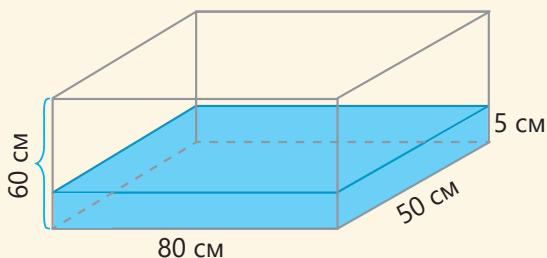
60 В треугольнике ABC проведена высота BD . Если $\angle ABD : \angle DBC = 2 : 3$ и $\angle CAB = 74^\circ$, найдите $\angle ACB$.

61 Принтер I может распечатать 3 страницы за 1 секунду, а принтер II – 1 страницу за 2 секунды. Сколько страниц может распечатать принтер II за то время, пока принтер I напечатает 84 страницы?

62 На числовой оси точка A находится на расстоянии 8 единиц от начала координат, а точка B – на 3 единицы от точки A . Найдите произведение возможных значений координат B .

63 Вероятность того, что один случайно выбранный из класса ученик окажется мальчиком, равна 0,4. Найдите количество учеников класса, если в нем девочек на 8 человек больше, чем мальчиков.

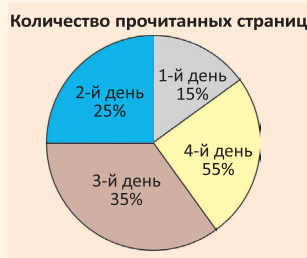
64 Бак в форме куба имеет длину 80 см, ширину 50 см и высоту 60 см. Высота воды в баке 5 см. Если в этот бак долить 6000 см^3 воды, какой будет высота воды?



65 На диаграмме представлена информация о количестве страниц, прочитанных Анаром за 4 дня.

- Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего каждой части диаграммы.

- Анар прочитал 50 страниц на 4-й день. На сколько больше страниц он прочитал во второй день, чем в первый?



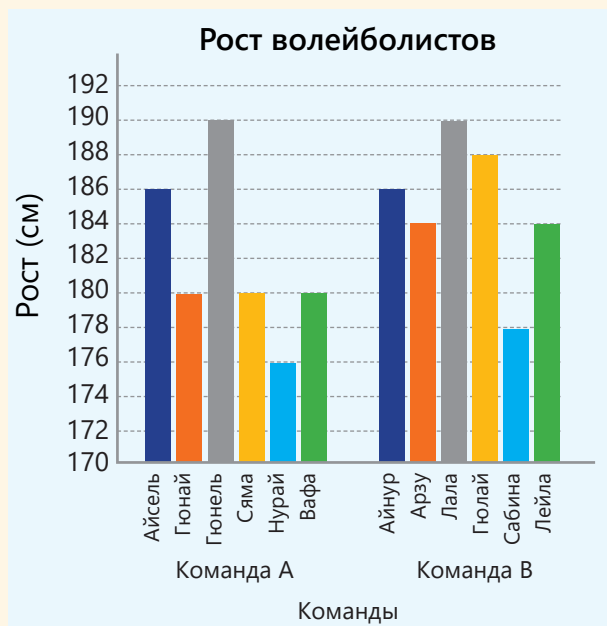
66 Радиус основания бака в форме цилиндра – 50 см, а его высота – 2 м. В этом баке 600 литров воды. Сколько еще литров воды можно долить в этот бак, чтобы он наполнился полностью ($\pi \approx 3$)?

67 1-литровый стеклянный сосуд на 60% заполнен водой. Если в стакан налить $\frac{1}{5}$ часть этой воды, то 80% стакана наполнится водой. Каков объем стакана?

68 Во дворе всего 240 кур, гусей и уток. 70% из них – куры. Найдите количество гусей, если отношение количества гусей к количеству уток равно $1 : 2$. Изобразите количество птиц на круговой диаграмме в процентах и градусах.

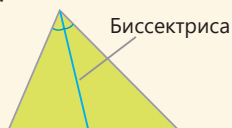
69 В 1-м ящике находится 80 кг фруктов, а во 2-м ящике – 92 кг фруктов. Фруктов, проданных из 2-го ящика, в 3 раза больше, чем проданных фруктов из 1-го ящика. Если в ящиках осталось одинаковое количество фруктов, сколько килограммов фруктов было продано всего из двух ящиков?

70 На диаграмме показан рост (в см) игроков двух волейбольных команд. Вычислите и сравните среднее арифметическое, моду, медиану для каждой команды.



СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

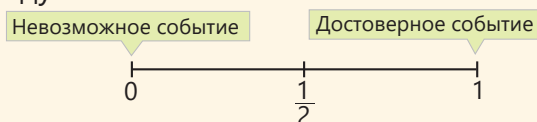


Благоприятные события – события из всех возможных событий, которые нас интересуют.

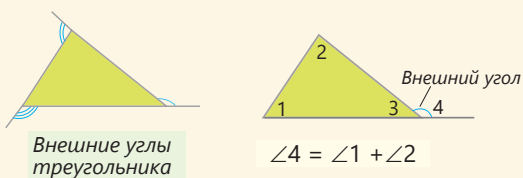
Вероятность события – отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всевозможных исходов}}$$

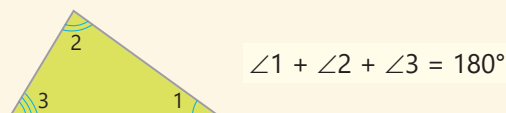
Вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0. Вероятность случайного события находится между 0 и 1.



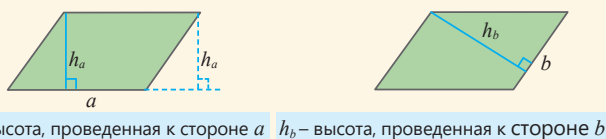
Внешний угол треугольника – угол, смежный внутреннему углу треугольника.



Внутренний угол треугольника – угол, образованный двумя сторонами внутри треугольника.



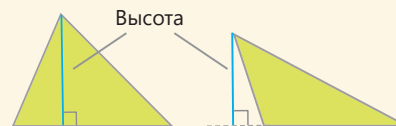
Высота параллелограмма – это перпендикуляр, опущенный из любой точки одной стороны параллелограмма на противоположную сторону или ее продолжение.



h_a – высота, проведенная к стороне a

h_b – высота, проведенная к стороне b

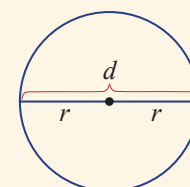
Высота треугольника – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к противоположной стороне треугольника или ее продолжению.



Длина окружности – равна произведению числа π и диаметра этой окружности.

$$C = 2\pi r \text{ или } C = \pi d$$

$\pi \approx 3,14159265...$



Коэффициент – числовой множитель в произведении числа и переменной. Например, в выражении $-xy$ коэффициент равен -1 , а xy – буквенная часть.

Медиана – при расположении значений величины в порядке возрастания (или убывания) если их нечетное количество, то число по середине, а если четное, то среднее арифметическое двух чисел, стоящих в середине.



Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой точки противоположной стороны. Точка пересечения медиан треугольника называется *центром тяжести*.



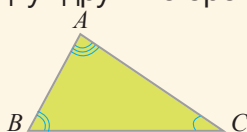
Множество – совокупность определенных предметов, символов, чисел или объектов. Множества обозначаются заглавной буквой ($A, B, C, ...$). Множество натуральных чисел обозначается буквой N , а множество целых чисел – буквой Z .

Мода – среди заданных значений величины наиболее часто встречающееся значение. Данные могут и не иметь моды.

Невозможное событие – событие, которое невозможно в нынешних условиях.

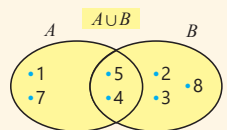
Неравенство треугольника – каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

$$\begin{aligned} AB &< AC + BC, \\ AC &< AB + BC, \\ BC &< AC + AB. \end{aligned}$$



Объединение множеств

– множество, состоящее из всех элементов двух множеств.

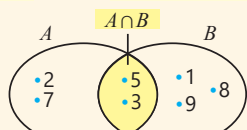


$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

Объем цилиндра – $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ или $V = \pi r^2 \cdot h$

Пересечение множеств

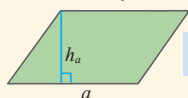
– множество, которое состоит из всех общих элементов двух множеств.



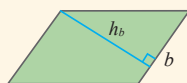
$$A \cap B = \{3, 5\}$$

Площадь круга – $S = \pi r^2$ или $S = \frac{\pi d^2}{4}$

Площадь параллелограмма – равна произведению его стороны и высоты, опущенной к этой стороне.

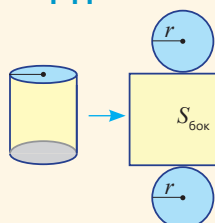


$$S = a \cdot h_a$$



$$S = b \cdot h_b$$

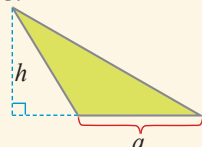
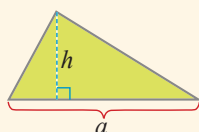
Площадь полной поверхности цилиндра –



$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Площадь треугольника – равна половине произведения его стороны на высоту, опущенную к этой стороне.



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Подмножество – если каждый элемент множества B принадлежит множеству A , то множество B называется подмножеством множества A : $B \subset A$. Пустое множество – подмножество каждого множества: $\emptyset \subset A$. Каждое множество является своим подмножеством: $A \subset A$.



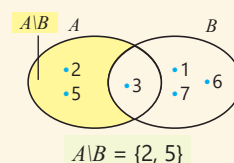
Подобные слагаемые – одинаковые слагаемые в выражении с переменной или слагаемые, отличающиеся только коэффициентом. Например, в выражении $2x + (-5x) + 1$, $2x$ и $-5x$ являются подобными слагаемыми.

Пустое множество – множество, в котором нет элементов. Пустое множество обозначается $\emptyset$.

Равновозможные (равновероятные) события – события, у которых одинаковые возможности наступления.

Равные множества – множества, состоящие из одних и тех же элементов. Например: $\{1, 3, 5\} = \{5, 3, 1\}$.

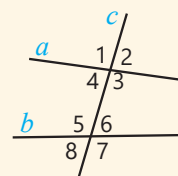
Разность множеств – множество, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A , но не входят в множество B .



$$A \setminus B = \{2, 5\}$$

Углы, образованные пересечением двух прямых третьей –

- соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$
- внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$
- внешние накрест лежащие углы: $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$
- внутренние односторонние углы: $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$
- внешние односторонние углы: $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$



Частота события – отношение $(\frac{n}{N})$ количества возникновения интересующего нас события (n) к общему числу испытаний (N).

Эквивалентные уравнения – уравнения, у которых одинаковые корни. Если слагаемое из одной части уравнения перенести в другую часть с противоположным знаком, то полученное уравнение эквивалентно исходному уравнению.

Элемент множества – каждый объект, из которого состоит множество. Если объект является элементом множества, то записывается со знаком $\in$, а если не является элементом – то со знаком $\notin$. Например, $5 \in \mathbb{N}$, $-5 \notin \mathbb{N}$.

ОТВЕТЫ

5-й раздел

- стр.6 6. 2 человека
 стр.8 7. $A=D$ $B=F$ $C=E$
 стр.9 8. а) верно б) ложно
 11. е) {ч, и, с, л, о} 5 элементов
 стр.11 1. а) {4, 7} б) {1, 3, 5}
 стр.12 6. {1, 2, 3, 6},
 НОД (12, 18) = 6
 стр.13 12. г) {4, 6, 8} 3 элемента
 е) {9} 1 элемент
 стр.14 13. а) $A \setminus B = \{1, 4\}$
 $B \setminus A = \{2, 3\}$
 стр.17 1. 11, 9, 4, 16, 4, 20
 2. 11, 10, 16, 9
 стр.19 3. 5, 8, 20
 4. 12, 9, 24
 5. 3 человека
 6. 22 ученика
 7. 2, 5, 3
 8. 20, 10, 6
 9. 2, 10, 3
 стр.20 10. 6 квартир
 11. 16 человек
 12. 30, 12, 18
 13. 28%, 24%, 84%
 стр.23 13. а) 18 б) 8 в) 38
 14. 7, 6, 15, 14, 25, 21
 стр.24 16. 40%
 17. 50%, 80%, 10%, 20%

6-й раздел

- стр.26 6. $2m+6$, 14
 7. $16+2x$, 22; 4,5
 10. 2 литра
 стр.28 4. а) $0,4a+0,8b$, 10
 б) $a+2b$, 22
 в) $3m+4n$, 120
 стр.30 12. $2a+3b$, 370
 13. $6y+x^2$, 58; 10
 14. $3a+4b$, 23; 3
 15. $0,8p+0,7q$, 46 руб
 стр.33 11. а) -15 б) 60 в) -30
 13. $30-(a+b)$, 8
 14. $100 \cdot (a+b-2)$, 60 руб
 стр.35 6. а) 340 в) -90 г) 38
 стр.36 8. а) 10 б) -15 в) 18
 9. $2a+18$, 27 единичных
 квадратов
 10. $a+b$, $7a+2b$, 12,50 руб
 11. $3x+36$, 15 см
 12. $0,5+0,2d$

- стр.39 4. б) -3 в) -2 е) -2
 5. а) -5 б) 1 в) 2,2
 г) 6 е) 2 ж) -1
 6. а) -10 б) -3
 стр.40 7. а) -4 в) -2 к) 1
 8. а) -11 б) 11 в) -18
 11. 2 литра
 стр.42 1. 65 единичных квадратов
 2. 3 литра, 7 литров
 3. 5 столов, 20 стульев
 4. 5 овец, 12 гусей
 стр.43 6. 24 единичных квадрата
 7. 1,5 руб
 8. 30 минут
 9. 20 см
 10. 5 км
 12. 12 лет
 13. 2 кг, 4 кг, 10 кг
 14. 14 книг
 15. 10
 стр.45 3. б) -1 в) -12 г) 0
 4. а) -9 б) -13 в) 1
 стр.46 6. $n+10 \leq 175$
 7. в) $6+2x > 18$,
 г) $1+m \geq 9$
 11. $5+n < 9$,
 возможные случаи: 1, 2, 3
 стр.48 6. а) -7 б) 14 в) -21
 7. а) -12 б) -68 в) -26
 8. а) $3m+21$ б) $10-7n$
 11. а) 6 б) 2 в) 7
 стр.49 13. Стороны 3 и 8,
 периметр 22, площадь 24
 14. $2x$, $12x+12$,
 $10x+12$; 42, $x=2,8$
 15. $x+16$, 84 м²
 16. 10 литров, 20 литров
 17. $3a+5b$, 35; 2
 18. $8p+16q$, 528 руб
 19. а) $T \leq -18$
 б) $0,4+m > 1$,
 в) $h - 0,5 \leq 2,2$
 стр.50 22. 14
 23. 18 кг

7-й раздел

- стр.52 1. а) 30° в) 75°
 2. а) 75° б) 100° в) 115°
 3. б) 36°, 144° в) 130°
 стр.54 3. 5 см
 4. 8 см
 стр.56 12. 18 см²

- стр.58 3. а) $\triangle ABC \cong \triangle MNK$,
 $x=8$, $y=60$
 стр.59 5. а) $\triangle CBA \cong \triangle NKM$
 7. а) $x=12$, $y=50$
 б) $CN=ND=7$,
 $AD=BC=9$
 стр.61 11. а) 3 см, 40°
 б) 5 см, 30°
 стр.62 13. а) $\angle C = \angle M = 60^\circ$
 б) $\angle T = \angle E = 120^\circ$
 стр.63 15. а) 36 см б) 8 см
 стр.67 9. е) $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 110^\circ$
 стр.69 4. а) $\angle 1 = 40^\circ$,
 $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$
 5. г) $\angle F = 40^\circ$, $\angle H = 70^\circ$
 6. б) 30°, 30°, 120° в) 75°
 стр.70 8. 20°, 40°, 100°, 80°
 9. 30°, 60°, 90°
 стр.71 14. а) 70° в) 60°
 стр.72 2. а) $\angle B$ б) $\angle M = \angle K$
 стр.74 9. а) 12 см
 б) 10 см или 11 см
 10. 2 см, 4 см, 4 см
 стр.76 3. а) $x=40^\circ$
 4. б) $\angle 1 = 130^\circ$, $\angle 2 = 82^\circ$
 в) $\angle 1 = 110^\circ$, $\angle 2 = 120^\circ$,
 $\angle 3 = 60^\circ$, $\angle 4 = 70^\circ$
 6. а) $x = 30^\circ$ б) $x = 20^\circ$
 стр.77 10. 40°, 40°, 100°
 11. б) 54°, 82° в) 64°, 90°
 12. а) 80° б) 80°, 100°
 13. 70°
 стр.78 17. 85°

8-й раздел

- стр.80 1. а) 45 см² б) 45 см²
 3. 24 см²
 4. 8 см
 7. 200 см³
 стр.82 2. а) 22,5 м² б) 5 см²
 в) 50 мм²
 4. а) 12 см б) 3 м
 5. а) 10,8 см б) 3,75 см
 в) 4,8 см
 стр.84 1. в) 88 мм² г) 60 см²
 2. а) 5 см б) 25 мм в) 5 см
 3. а) 5 см б) 6 см
 г) 6 см, 4 см
 4. а) 80 см² б) 60 см

- стр.85 6. 7,5 см
7. 80 см^2
8. 24 см^2
9. 200 кафеля
10. $1920(a+b)$, 211200 л
11. 0,6 м, 0,8 м
- стр.86 1. а) 12,56 м б) 18,84 см
- стр.87 2. а) 2 см б) 5 мм в) 6 м
3. а) 43,98 см б) 94,25 см
4. а) $78,5 \text{ мм}^2$ б) $28,26 \text{ см}^2$
- стр.88 5. а) $13,73 \text{ см}^2$ г) $2,86 \text{ м}^2$
8. а) $39,27 \text{ см}^2$ г) $12,57 \text{ см}^2$
9. 42 см, 84 см^2
- стр.89 1. б) $6,88 \text{ см}^2$ в) $4,43 \text{ м}^2$
2. 22 см
3. 10 см, 15 см
4. 4,8 см
7. 15 м, 5 оборотов
- стр.91 1. а) 2480 см^2 б) 740 см^2
2. а) 256 см^2 б) 204 см^2
- стр.92 5. а) 450 см^2 б) 120 см^2
6. а) $67,5 \text{ см}^2$ б) 192 м^2
8. 7260 см^2
- стр.93 1. а) 20 м^3 б) 240 см^3
2. а) 8 м б) 6 дм
- стр.94 3. а) $13,5 \text{ м}^3$ б) 144 м^3
4. а) 30 см г) 80 см
6. $1,05 \text{ м}^3$
- стр.96 1. а) 18 м^2 б) 25 м^2
2. б) 8 см в) 7,2 см
3. а) 9,6 см б) 7,5 см
4. а) 240 см^2 , 288 см^3
б) 976 см^2 , 1680 см^3
- стр.97 7. 27 см, 6,75 см
8. 27 м^3 , 1125 л
11. 37,5 см, 93750 см^3 ,
 56250 см^3

9-й раздел

- стр.100 1. а) 19 б) 24
2. 1325 л , 1750 л ,
 $1537,5 \text{ л}$
3. 13,5 км/час,
18 км/час
4. 170 кг
6. 25%, 150, 250, 25%
- стр.101 1. а) 3 б) 8 в) 42 е) 78,5
- стр.102 2. а) 190,5 см б) 64

- стр.103 4. а) 12 б) 24
6. б) ср. арифм. 42, мода
35, медиана 40
7. а) 21 б) 23 г) медиана
8. а) 6 б) 11
- стр.104 11. 6
12. по сред. арифметич.
14. а) A : 3 мм, B : 1 мм
б) A : 3 мм, B : 2 мм
в) город A
- стр.107 3. а) равновозможные
4. б) равновозможные
- стр.108 1. а) 0,54 б) 0,4
- стр.110 4. а) $\frac{1}{5}$ б) на красную $\frac{1}{4}$,
на жёлтую $\frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{5}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{23}{50}$
- стр.112 1. Общ. транспорт 40%,
велосипед 10%,
мотоцикл 5%,
скутер 20%,
личный автомобиль 25%
диаграмма В
4. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$
- стр.113 5. Март, увеличилось на 100%,
уменьшилось на 25%
- стр.114 8. дорожке на 40%, меньше
на 50%, не изменилось
- стр.116 4. а) ср. арифм. 1834,
медиана 1420
- стр.117 7. 8 возм. случаев, 3 благопр.
случаев, вероятность $\frac{3}{8}$
- стр.118 13. футбол и легкая атлетика,
на теннис 9 человек,
футбол и волейбол 45%,
легкая атл. и баскетбол 40%,
вероятность того, что зани-
мается футболом равна $\frac{1}{4}$

Обобщающие задания

- стр.119 5. 14
10. 1, 3, 5, 15, 25, 75
11. 84
13. 12
14. 8
15. 48
16. 2000 л

18. 30 л
19. а) $1 : 5000$ б) 120 м^2
20. $y = 3x$, $m = 5$, $n = 12$
21. а) 160 л , 240 л , 400 л , 10
22. 40°
23. 24 %
24. 41
25. а) 100 см^2 б) 240 см^3
29. Два, $C(-1; 1)$ $D(-4; 1)$
 $C(-1; -5)$ $D(-4; -5)$
периметр 12, площадь 9
30. $D(3; 3)$ $E(8; 3)$
31. $(-2; -1)$
32. (4; 3), периметр 14,
площадь 12
33. 4, 2, -1, -3, -1
34. (3; 7) (7; 2)
36. 19, 4, 10, 5
37. четыре, $\{a, b, c\}$ $\{a, b, c, d\}$
 $\{a, b, c, e\}$ $\{a, b, c, d, e\}$
38. б) $y = 45^\circ$, $x = 55^\circ$
40. 10
41. 5
42. а) 50, б) 20
43. 6
45. булка, ср. арифм 3,
мода 4, медиана 3,5
46. $500 - 130t$
240 км, 110 км
48. 100° , 110° , 150°
49. 80°
50. 10°
52. 456 см^2 , 720 см^3
53. 42 см
54. 21
55. а) 0,1 б) 0,5 в) 0,45
56. 40,5
57. 9 см
59. а) 8 б) 7,5 в) 7
60. 66°
61. 14 страниц
62. 3025
63. 40
64. 6,5 см
65. 54° , 90° , 90° , 126° 20
66. 900 литров
67. 150 мл
69. 24 кг
70. A : 182, 180, 180,
 B : 185, 184, 185

BURAXILIŞ MƏLUMATI

*Ümumi təhsil müəssisələrinin 6-cı sinifləri üçün
riyaziyyat fənni üzrə*

***Dərslük
rus dilində
(2-ci hissə)***

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər	Zaur İsayev Məhəmməd Kərimov Günay Hüseynzadə Aqşin Abdullayev
Redaktor	Ayhan Kürşat Erbaş
Tərcüməçi	İradə Şıxəliyeva
Tərcümə redaktoru	Naidə İsayeva, Sahib Abdurahimov
Dil redaktoru	Aygün Əliyeva
Bədii redaktor	Eldəniz Xocayev
Texniki redaktor	Zeynal İsayev
Dizayner	Eldəniz Xocayev
Üz qabığı	Taleh Məlikov
Rəssam	Fərid Quliyev, Elmir Məmmədov
Korrektor	Olqa Kotova

Məsləhətçi qurum **“Kavendiş” Nəşriyyat Evi**

© Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2 025-017

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri
və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq,
elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

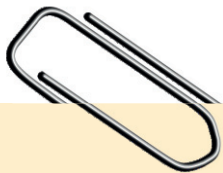
ISBN 978-9952-550-13-9

Hesab-nəşriyyat həcmi: 14,5. Fiziki çap vərəqi: 16.
Səhifə sayı: 128. Kəsimdən sonra: 220 × 275. Kağız formatı: 57 × 90 ¹/₈.
Şriftin adı və ölçüsü: Segoe UI, 12 pt. Ofset kağızı. Ofset çapı.
Sifariş _____. Tiraj: 18000. Pulsuz. Bakı – 2025.

Əlyazmanın yığma verildiyi və çapa imzalandığı tarix:

Çap məhsulunu hazırlayan:
Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutu (Bakı ş. A.Cəlilov küç., 86).

Pulsuz



Əziz məktəbli !

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!

