# МАТЕМАТИКА

# 7

УЧЕБНИК

# Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

*Musiqisi Üzeyir Hacıbəylinin,*
*sözləri Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

# ГЕЙДАР АЛИЕВ
## ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Севда Исмайылова

# МАТЕМАТИКА

# 7

**УЧЕБНИК**

*по предмету Математика*

*для 7-го класса общеобразовательных школ*

Замечания и предложения, связанные с этим
изданием, просим отправлять на электронные адреса:
info@eastwest.az и derslik@edu.gov.az
Заранее благодарим за сотрудничество!

ŞƏRQ - QƏRB
BAKI 2018

# Содержание

# ГЛАВА I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

## 1.1. Представление и чтение рациональных чисел

**Деятельность** — **Множество рациональных чисел – Q**

**1.** Какие целые числа больше на 1 единицу и меньше на 1 единицу числа $-3$? К какому множеству принадлежат эти числа?
**2.** Между какими двумя целыми числами располагается число 2,7.
**3.** Определите самое близкое целое число большее $-2,7$. Определите самое близкое целое число меньшее $-2,7$.
**4.** Запишите число 1,5 в виде дроби со знаменателем 2. Каким должен быть числитель в записи числа $-1,5$ в виде обыкновенной дроби со знаменателем 2.
**5.** Какое число должно быть записано в числителе равенства $11=\frac{\square}{3}$?

Какое число должно быть записано в знаменателе равенства $6=\frac{36}{\square}$?

Как вы считаете, можно ли представить все числа в виде дробей? Обоснуйте свой ответ.

Число, которое можно представить в виде $\frac{a}{n}$ называется рациональным, где $a$ – целое число, $n$ натуральное число. $a \in Z$, $n \in N$.

**Образец**

Представьте данные числа в виде дроби с натуральным знаменателем: 0,5; 1,3; $-0,25$.

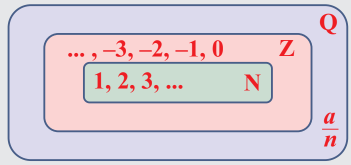
*Решение:* $0,5=\frac{1}{2}$; $1,3=\frac{13}{10}$; $-0,25=\frac{-25}{100}=\frac{-1}{4}$.

**Примечание:** Знак минуса в числителе дроби можно записать как перед самой дробью, так и перед знаменателем: $\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}=\frac{1}{-4}$.

Любое целое число является также рациональным числом, так как любое целое число можно представить в виде дроби с натуральным знаменателем:

$$7=\frac{7}{1};\quad -5=\frac{-15}{3};\quad 0=\frac{0}{1}.$$

Множество рациональных чисел обозначается буквой Q. Значит $Q=\left\{r \mid r=\dfrac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$




Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, а множество целых чисел подмножеством множества рациональных чисел: **N** $\subset$ **Z** $\subset$ **Q.** Множество рациональных чисел, как и множество натуральных чисел и множество целых чисел, является бесконечным множеством.

Над рациональными числами можно выполнять действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Результат этих действий является также рациональным числом.

## Упражнения

**1.** Какое из нижеприведённых утверждений верно? Обоснуйте свой ответ примерами.

а) любое рациональное число является также натуральным числом;
б) любое целое число является также рациональным числом;
в) любое целое число является также натуральным числом;
г) любое натуральное число является также целым числом;
д) 0 – рациональное число, 1 не является рациональным числом;
е) любое натуральное число является также рациональным числом.

**2.** Число –27 можно представить в виде дроби с любым натуральным числом в знаменателе, например: $\dfrac{-27}{1}$ или $\dfrac{-54}{2}$. Как вы представите следующие числа в виде дроби с любым натуральным числом в знаменателе: –1,2; –0,33; $-3\dfrac{8}{15}$; 6; 0; 12; 4,1; 53,2?

**3.** Запишите числа: 1) –7; 0; 9; 12; 100 в виде дроби со знаменателями:
а) 1; б) 3;
2) – 3,2; – 0,8; 4,5; 83,5 в виде дроби со знаменателями а) 10 б) 1000.

**4.** Запишите такое число, которое будет:
а) как целым, так и рациональным; б) рациональным, но не дробным;
в) целым, но не натуральным; г) смешанным числом.

**5.** Напишите подмножества данных множеств A и B, состоящие из целых чисел.
A={14; 3,5; –5; 0; –8,2; $\dfrac{4}{9}$; –82}, B= {$\dfrac{-11}{15}$; –22,3; –11; 1,7; 17; 22,1; 0,93}.

**6.** Выполните действия, скажите к какому множеству чисел принадлежит полученный результат:
а) 7,3 + (–22,8); б) $\dfrac{3}{4}-(-0,25)$; в) $\dfrac{-21}{44}+\dfrac{7}{22}$;

г) $-12,4\cdot 0,2$; д) $\frac{5}{6}:\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$; е) $-4,6+\left(-9,2-4\frac{2}{3}\right)$;

ж) $1\frac{3}{11}:\frac{-1}{11}$; з) $1,5\cdot\frac{8}{9}:\frac{-5}{12}$;

и) $-3\frac{1}{2}+4\frac{4}{5}-6,7$; й) $8-15\frac{6}{7}+0\cdot\left(-\frac{55}{201}\right)$.

$$1,5\cdot\frac{8}{9}:\frac{-5}{12}=-\frac{\cancel{3}\cdot 8\cdot \cancel{12}^{\cancel{6}^{2}}}{\cancel{2}\cdot\cancel{9}_{\cancel{3}}\cdot 5}=-\frac{8\cdot 2}{5}=$$
$$=-\frac{16}{5}=-3\frac{1}{5}=-3,2.$$

**7.** Вычислите значения выражений:

а) $\dfrac{0,15-0,15\cdot 6,4}{-\frac{3}{8}+0,175}$; б) $\dfrac{0,45-0,45\cdot 3,4}{1\frac{1}{2}-1,1}$; в) $\dfrac{0,47\cdot 3,5-3,5}{\frac{1}{8}-1,125}$.

Объясните запись полученных в ответе результатов и обоснуйте к какому множеству чисел они принадлежат.

**8.** Найдите значения выражений:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **а)** | –9 | | 8·A + 121 |
| **б)** | $\frac{15}{16}$ | | $\frac{15}{16}-\left(A-\frac{3}{4}\right)$ |
| **в)** | 1,45 | – 0,32 | 2A – 3B |
| **г)** | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | (2A + 5B) : (4A – 2B) |
| **д)** | 0,12 | –0,2 | (5A – 3B) : (3A + 2B) |

$$=\frac{5\cdot 0,12-3\cdot(-0,2)}{3\cdot 0,12+2\cdot(-0,2)}=$$
$$=\frac{0,6+0,6}{0,36-0,4}=\frac{1,2}{-0,04}=$$
$$=-30$$

**9.** Вычислите значения выражений:

а) $\dfrac{0,7m-1,3}{0,29-0,18n}$; если $m=2,1$; $n=3,5$, б) $\dfrac{x^2+1,37}{3,1y-0,17}$ если $x=5,3$; $y=0,7$.

**10.** Составьте выражения с переменной и найдите значение каждого из них при произвольных рациональных значениях переменной.

**11.** Запишите сумму чисел, стоящих в столбце и строке данной таблицы, в виде математического выражения и найдите значение этого выражения. Заполните таблицу, записав в пустые ячейки на пересечении строк и столбцов полученные числа. Выскажите свое мнение о том, к какому множеству чисел принадлежат эти результаты.

| + | $2\frac{1}{3}$ | –1 | $-\frac{9}{10}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –2 | | | | | $-1\frac{4}{5}$ | | |
| $\frac{5}{9}$ | | | | | | | |
| 0,5 | | | | 0,5 | | | |

**12.** Составьте таблицу умножения, состоящую из 6 столбцов и 6 строк. На первой строке запишите: × (умножение); числа $-\frac{7}{12}$; 0,25; 2; $3\frac{5}{11}$; 0,7, в первом же столбике запишите: × (умножение); числа $\frac{11}{7}$; $-3\frac{1}{2}$; 0,2; –3; $-\frac{5}{9}$. Заполните таблицу.

## 1.2. Числовая ось. Расстояние между двумя точками

**Деятельность** — **Числовая ось**

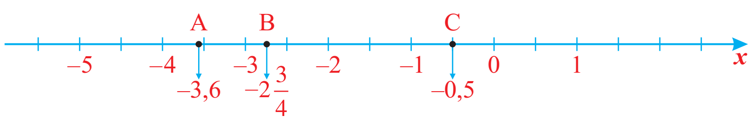
1. Нарисуйте в тетради числовую ось.
2. Отметьте на числовой оси целые числа между –3 и 3.
3. Укажите расположение числа 2 на числовой оси. Где расположено число –2? Обоснуйте свой ответ.
4. Покажите дробь $\frac{1}{2}$ на числовой оси. Определите место расположения на числовой оси дроби $-\frac{1}{2}$.

Прямая, на которой указано начало координат (отсчета) точка $O$, направление и единица отсчета, называется **числовой осью**. Каждому рациональному числу $r \in Q$ соответствует единственная точка A на числовой оси. Если число $r$ положительное, то соотвествующая точка расположена правее, если число $r$ отрицательное, то левее точки $O$, на расстоянии $|r|$, $r \to A$, $OA = |r|$, $0 \to O$.

**Образец**

Отметьте на числовой оси точки, соответствующие числам: –3,6; $-2\frac{3}{4}$; –0,5

*Решение:* Обозначим заданные числа точками A, B и C:




Как видно, число –3,6 располагается между числами –4 и –3; число $-2\frac{3}{4}$ между –3 и –2, а число – 0,5 между –1 и 0.

Определим расстояние между любыми заданными точками A и B на числовой оси.

**Деятельность** — **Расстояние**

Найдите расстояние между точками A(–3) и B($2\frac{1}{5}$).

1. Начертите числовую ось с точкой отсчета O.
2. Обозначьте точки A(–3) и B($2\frac{1}{5}$) на этой числовой оси.
3. Вспомните определение модуля числа. Найдите расстояние OA и OB.
4. Определите расстояние AB. Выскажите свои мысли.
5. Найдите разность $2\frac{1}{5} - (-3)$. К какому выводу вы пришли?

Какая связь между расстоянием AB и разностью $2\frac{1}{5} - (-3)$?

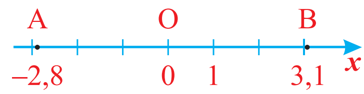
## Образец

Определите расстояние между точками:

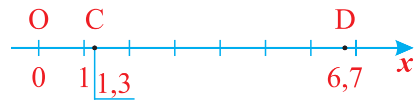
а) A(–2,8) и B(3,1); б) C(1,3) и D(6,7).

*Решение:*

а) Отметим точки A и B на числовой оси: расстояние между A и B равно длине отрезка AB.




Согласно рисунку, можем записать, что AB = OA + OB. Знаем, что OA = |–2,8| = 2,8 и OB = |3,1| = 3,1.
Тогда AB = 2,8 + 3,1 = 5,9.
Также 3,1 – (–2,8) = 5,9. Следовательно, при нахождении расстояния между точками A и B, вычислили разность координат B и A.




б) Отметим на числовой оси точки C и D. Согласно рисунку, CD = OD – OC = 6,7 – 1,3 = 5,4. **Ответ:** а) 5,9; б) 5,4.

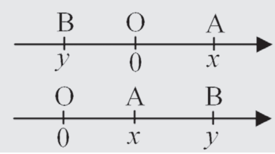
Расстояние ($d$) между двумя точками на числовой оси равно модулю разности координат этих точек.

Действительно, для точек A($x$) и B($y$), расположенных на числовой оси с началом O (0) выполняется:

$d$ = AB = OA – OB = $x - y$ (если $x > y$) или же

$d$ = AB = OB – OA = $y - x$ (если $y > x$).

В общем: $d$ = AB = $|x - y|$.




## Упражнения:

**1.** Отметьте на числовой оси точки, соответствующие заданным числам.

$-4\frac{1}{2}$; –3,5; –1,2; –0,8; $1\frac{3}{5}$; 4,5; 0,5.

Укажите несколько точек самостоятельно.

**2.** Определите приблизительные координаты заданных на числовой оси точек (рис. 1).


*рис. 1*

Обозначьте любую точку на этой числовой оси и найдите её координату.

**3.** Выскажите мнение о координатах точек на числовой оси, находящихся: а) левее, б) правее, с) совпадающих с началом координат.

**4.** Найдите расстояние AB, если а) A(–3) и B(2,5); б) A($-\frac{3}{4}$) и B($-2\frac{1}{4}$);

в) A(10,5) и B(22,7); г) Напишите координаты двух любых точек и определите расстояние между ними.

**5.** Найдите: а) координаты точки N, если MN = 3,54 и M(–2,9); б) координаты точки M, если MN = 6,8 и N(4,35).

**6.** Отметьте на числовой оси две точки с противоположными координатами. Верно ли предположение, что расстояние между ними равно 0?

**7.** Как можно определить расстояние AB по рисунку 2?

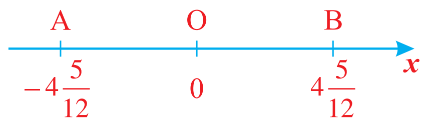



*рис. 2*

Отметьте на этой числовой оси любую точку C, координата которой будет выражена целым числом. Найдите длину отрезков AC и BC.

**8.** Какие действия необходимо совершить, чтобы найти координату точки K согласно рисунку 3? Найдите координаты точки K.


*рис. 3*

**9.** На числовой оси с точкой отсчета O заданы точки A, B, M и N.

а) Как будут расположены точки A и B на числовой оси, если AB = OA – OB?

б) С какой стороны от точки отсчета будут располагаться точки M и N, если MN = OM + ON? Обоснуйте свой ответ.

с) Запишите координаты каких-либо трёх точек числовой оси, расположенных на расстоянии более, чем 100 единиц от точки – 25.

**10.** Вычислите AB + AC – BC + DK – DC, если A(–3), B(–2,5), C(13), D(0), K(–100).

**11.** На координатной оси между первой точкой A(–5) и последней B(X) отмечены 30 точек. Расстояние между любыми двумя соседними точками 4 см. Определите расстояние между крайними точками.

**12.** На координатной оси с началом в точке O отмечены точки A, B, M и N.

а) Как расположены точки A и B, если AB = OA – OB.

б) По какую сторону от начала координат расположены точки M и N, если MN = OM + ON? Ответ обоснуйте.

**13.** Найти расстояние AB (рассмотрите все случаи), если OB = 3,5 см, OA = 4 OB. Для каждого случая определите координаты и положение точек A и B относительно точки O.

## 1.3. Бесконечная периодическая десятичная дробь

В младших классах вы научились переводить обыкновенную дробь в десятичную. Но не все обыкновенные дроби можно представить в виде конечных десятичных дробей.

**Деятельность** 0,(6); 5,2(7)

Преобразуйте $\frac{2}{3}$ в десятичную дробь.

**1.** Разделите число 2 на 3. Полученное целое число отделите запятой.
**2.** Определите цифру, следующую после целой части дроби в разряде десятых.
**3.** Затем определите цифру, следующую после целой части дроби в разряде сотых.
**4.** Продолжая деление, найдите цифру, следующую после целой части дроби в разряде тысячных. К какому выводу вы пришли?
**5.** До каких пор можно продолжать деление? Выразите своё мнение.

Если в записи десятичной дроби одна или группа цифр бесконечно повторяются, то такую дробь называют **периодической десятичной дробью.** Повторяющаяся группа цифр называется периодом дроби.

Для краткой записи периодических десятичных дробей повторяющуюся цифру или группу цифр записывают в скобках. $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6)$. **Читаем:** *ноль целых шесть в периоде.*

**Образец**

Перевести 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $6\frac{2}{99}$ в десятичные дроби.

*Решение:*

1) $$\begin{array}{r|l} -7 & 9 \\ \underline{0} & 0,777\ldots \\ -70 & \\ \underline{63} & \\ -70 & \\ \underline{63} & \\ 7\ldots & \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|l} -5 & 12 \\ \underline{0} & 0,416\ldots \\ -50 & \\ \underline{48} & \\ -20 & \\ \underline{12} & \\ -80 & \\ \underline{72} & \\ -80 & \\ \underline{72} & \\ 8\ldots & \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r|l} -2 & 99 \\ \underline{0} & 0,0202\ldots \\ -20 & \\ \underline{0} & \\ -200 & \\ \underline{198} & \\ -20 & \\ \underline{0} & \\ -200 & \\ \underline{198} & \\ 2\ldots & \end{array}$$

1) $\frac{7}{9} = 0,777... = 0,(7)$

2) $\frac{5}{12} = 0,41666... = 0,41(6)$

3) $6\frac{2}{99} = 6,0202... = 6,(02)$

$$6\frac{2}{99} = 6,020202... = 6,(02)$$

целая часть    повторяющаяся группа цифр    период

Периодические десятичные дроби бывают двух видов: 1) **чистые периодические десятичные** дроби; 2) **смешанные периодические десятичные** дроби.

**Чистой периодической десятичной дробью** называется десятичная дробь, в записи которой сразу после запятой следует период. Например: 2,(5); 0,(37); 12,(524) и т.д.

**Смешанной периодической десятичной дробью** называется десятичная дробь, в записи которой после запятой через одну или несколько цифр начинается период. Например: 8,7(5); 0,02(63); 4,0(172) и т.д.

3,25(7) – **читаем:** *три целых двадцать пять сотых семь в периоде.*

Если разложение обыкновенной несократимой дроби на простые множители состоит только из 2 или 5, то такая дробь обращается в конечную десятичную дробь.

Если в разложении знаменателя несократимой дроби на простые множители, кроме 2 и 5, появляются другие простые множители, то такая дробь при преобразовании в десятичную дробь становится периодической десятичной дробью.

**Конечные десятичные дроби:** $\frac{5}{16}=0,3125;$ $\frac{72}{25}=2,88;$ $\frac{19}{50}=0,38;$ $\frac{13}{20}=0,65.$

**Периодические десятичные дроби:** $\frac{1}{6}=0,1(6);$ $\frac{5}{12}=0,41(6);$ $\frac{9}{26}=0,3(461538).$

## Упражнения

**1.** Запишите данные дроби в виде десятичной дроби. Предварительно определите, какие десятичные дроби будут являться конечными и какие периодическими.
$\frac{1}{3};\ \frac{5}{9};\ \frac{7}{12};\ \frac{3}{16};\ \frac{12}{18};\ \frac{9}{20};\ \frac{11}{21};\ \frac{17}{28};\ \frac{30}{32};\ \frac{10}{48};\ \frac{21}{50};\ \frac{16}{72};\ \frac{10}{75};\ \frac{20}{99};\ \frac{84}{200};\ \frac{465}{555};\ \frac{999}{1000}.$

**2.** Для множества A={3,4; 0,(7); 2,003; 5,333...; 32,(56); 0,444; 6,98(3); 0,(345); 11,43(12); 0,5; 8,111; 2,0(7)} составьте подмножества, элементами которых являются: а) периодические десятичные дроби; б) чистые периодические десятичные дроби; в) смешанные периодические десятичные дроби.

**3.** Напишите несколько периодических десятичных дробей с помощью цифр 0, 1, 2, 4, 8. Выделите чистые и смешанные периодические десятичные дроби.

**4.** Исследуйте данные периодические десятичные дроби так, как показано в таблице:
0,777... ; 0,54222... ; 9,8101010... ; 3023,555... ; 29,00787878... ; 8,0020202... ; 0,191919... ; 3,678678678... ; 0,73827382...

| Число | Краткая запись | Целая часть | Повторяющаяся группа цифр | Цифры перед периодом | Количество цифр в периоде | Количество цифр перед периодом |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,090909... | 1,(09) | 1 | 09 | – | 2 | 0 |
| 78,12666... | 78,12(6) | 78 | 6 | 12 | 1 | 2 |

**5.** Исследуйте алгоритм перевода смешанного числа в периодическую десятичную дробь:

1) Запишите смешанную дробь в виде суммы целой и дробной части и разделите числитель дробной части на знаменатель. Например: $5\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}=5+0,(3)$.

2) Сложите целое число с полученной периодической десятичной дробью: 5 + 0,(3) = 5,(3).

3) Полученное число является искомым.

На основе алгоритма, переведите числа $1\frac{11}{15}$; $3\frac{7}{12}$; $\frac{45}{11}$; $2\frac{41}{99}$ в периодические десятичные дроби. Определите их вид.

**6.** Переведя дробь $\frac{11}{12}$ в десятичную дробь, Ахмед получил число 0,916(6). Правильно ли его решение?

**7.** Напишите несколько дробей со знаменателем 9, 99, 999, 9999 и переведите их в периодические десятичные дроби. Какими свойствами обладают эти дроби? Обоснуйте свой ответ.

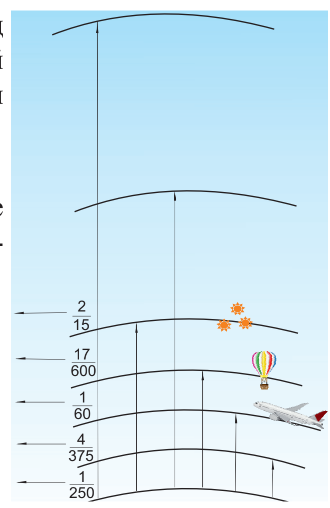
**8.** Айнур считает, что дроби $\frac{3}{12}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{49}{14}$; $\frac{18}{36}$; $\frac{121}{55}$ можно представить в виде конечных десятичных дробей. А Анар считает, что это утверждение неверное и объясняет это тем, что среди простых множителей знаменателя существуют такие числа, как 3, 7, 11. По-вашему, кто из них прав? Обоснуйте свои мысли.

**9.** Атмосфера поднимается на расстояние 3000 км над поверхностью Земли. На рисунке показано на какой высоте происходят некоторые события. Используя рисунок ответьте на вопросы:

а) На какую высоту может подняться воздушный шар?

б) На сколько высота расположения звёзд больше высоты, на которой происходят метеорологические явления?

| |
|---|
| Высота появления северного сияния |
| Высота расположения звёзд |
| Высота, на которую поднимается воздушный шар |
| Высота, на которую поднимается пассажирский самолёт |
| Высота, на которой происходят метеорологические явления |




в) Что может произойти на высоте 275 км, $\frac{1000}{70}$ км, $\frac{501}{9}$ км? Запишите эти числа в виде периодической десятичной дроби.

г) На сколько высота полёта пассажирского самолёта ниже высоты, на которую может подняться воздушный шар? Придумайте вопросы по рисунку и ответьте на них.

## 1.4. Преобразование периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

### Деятельность

Обратите чистую периодическую десятичную дробь 23,(45) в обыкновенную дробь.

*Решение:* Для обращения чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь используйте следующий алгоритм:

1. Обозначьте данное число через X: X = 23,4545….
2. Определите количество цифр в периоде периодической десятичной дроби: 23,4545… = 23,(45) количество цифр в периоде дроби = 2.
3. Умножьте периодическую десятичную дробь на разрядную единицу с количеством нолей, соответствующим количеству цифр в периоде (в данном случае таких цифр две, поэтому умножаем на 100): 23,4545... · 100 = 2345,45...
4. Найдите разность полученного числа и данного числа:
$$100X - X = 2345{,}45... - 23{,}4545... = 2322.$$
5. В тождестве 99X = 2322 найдите X: $X = \frac{2322}{99}$

Таким образом, $23{,}(45) = \frac{2322}{99} = 23\frac{45}{99} = 23\frac{5}{11}$.

$0{,}(8) = \frac{8}{9}$ $\quad 0{,}(23) = \frac{23}{99}$ $\quad 1{,}(034) = 1\frac{34}{999}$

**Внимание:** $0{,}(9) = \frac{9}{9} = 1$

Другими словами, при обращении чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную целая часть остаётся неизменной, в дробной части в знаменателе пишется столько девяток, сколько цифр в периоде, а в числителе – число, записанное в периоде.

### Деятельность

Переведите смешанную периодическую десятичную дробь 0,12(3) в простую дробь.

*Решение:* Используйте следующий алгоритм для перевода смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.

1. Обозначим X = 0,12(3). Количество чисел в периоде – 1.
2. Умножим периодическую десятичную дробь на разрядную единицу с количеством нолей, соответствующим количеству цифр в периоде (в данном случае такая цифра одна, поэтому умножаем на 10). 0,12333... · 10 = 1,2333...
3. Найдём X в тождестве 10X – X = 1,2333... – 0,12333.

$$9X = 1{,}11; \qquad X = \frac{111}{100} : 9; \qquad X = \frac{111}{900}$$

Таким образом, $0{,}12(3) = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$.

Другими словами, при обращении смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную целая часть остаётся неизменной, в знаменателе записывается столько цифр 9, сколько цифр в периоде, за ними столько цифр 0, сколько цифр от запятой до периода. От числа, стоящего после запятой, вычитается число, стоящее между запятой и периодом, и полученная разница записывается в числителе дроби.

В смешанной периодической десятичной дроби **12, 214(17)** целая часть числа равна **12,** дробная часть **21417**, число, следующее до запятой периода, **214**, число же в периоде **17**.

$$0,12(3)=\frac{123-12}{900}=\frac{111}{900}=\frac{37}{300} \qquad 5,2(37)=5\frac{237-2}{990}=5\frac{235}{990}=5\frac{47}{198}$$

## Упражнения

**1.** В данные тождества вместо звёздочек впишите необходимые числа:

$0,(8)=\frac{8}{*}$; $\quad 1,(7)=*\frac{*}{9}$; $\quad 10,(45)=10\frac{*}{11}$;

$0,1(6)=\frac{*}{90}$; $\quad 8,7(5)=8\frac{*}{90}$; $\quad 15,1(34)=*\frac{133}{*}$.

**2.** На основе тождества 10X – X = 4,333... – 0,4333... запишите X в виде обыкновенной дроби.

**3.** а) Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:
0,(2); 1,(3); 3,(54); 21,(23); 0,(673); 7,(256); 16,(002); 0,(0001); 5,(01).

б) Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные:
0,1(3); 1,2(5); 7,0(4); 2,23(7); 10,1(45); 0,25(83); 16,5(02); 0,000(1).

**4.** Обратите периодические десятичные дроби в обыкновенные и выполните вычисления:

а) 9,(4) + 1,(2); б) 2,(34) + 0,(21); в) 19,(27) – 3,(73);

г) 6,(5) · 18; д) $8,1(6):2\frac{11}{19}$; е) 1,(645) – 4,(001).

**5.** Заполните таблицу:

| № | Периодическая десятичная дробь | Обыкновенная дробь | Числитель | Знаменатель | Целая часть |
|---|---|---|---|---|---|
| а) | 0,(28) | | | | |
| б) | | $\frac{6}{11}$ | | | |
| в) | | | 17 | 51 | |
| г) | 6,2(46) | | | | |
| д) | | $\frac{101}{90}$ | | | |
| е) | | | 35 | 45 | 1 |

**6.** Найдите:

а) 10% от числа 0,(12);
б) число, 1,(5) часть которого равна 25;
в) 3,(1) числа 45;
г) число, 75% которого равно 10,2(7).

**7.** Адиля к числу, 0,(5) часть которого равна 50, прибавила число, 15 % которого равно 2,1(2). Какое число получила Адиля?

**8.** Составьте и решите задачу, в условии которой применяется периодическая десятичная дробь.

**9.** Найдите нижеследующие:

а) Сколько месяцев составит 0,(6) часть года?
б) Сколько граммов составит 0,0(5) часть от 180 кг?
в) Чему равна 0,4(35) часть числа 660?
г) У какого числа 3,(5) часть равна 4,(12)?

Найдём число по его части:

$$4\frac{12}{99}:3\frac{5}{9}=\frac{408}{99}\cdot\frac{9}{32}=\frac{51}{11}\cdot\frac{1}{4}=\frac{51}{44}=1\frac{7}{44}.$$

**10.** Найдите ошибки в записях: а) $8,(m)=8\frac{m}{10}$; б) $0,n(mk)=\frac{\overline{nmk}-m}{999}$. Запишите их верно.

**Примечание.** Написание $\overline{nmk}$ выражает трёхзначное число.

**11.** 0,($a$) и 7,$b$($a$) запишите в виде обыкновенной дроби.

**12.** Смешанную периодическую десятичную дробь можно обратить в обыкновенную путём разложения её на разрядные слагаемые. Обратите данные смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные путём разложения на разрядные слагаемые, как указано в образце.

а) 1,2(5); б) 0,23(4); в) 7,9(2);
г) 1,5(4); д) 0,64(7); е) 0,25(14)

$$3,1(3)=3+0,1+0,0(3)=$$
$$=3+\frac{1}{10}+\frac{3}{90}=3+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=$$
$$=3\frac{4}{30}=3\frac{2}{15}=\frac{47}{15}.$$

**13.** Вычислите:

а) $\dfrac{\left(0,333...+\frac{1}{6}\right)\cdot 4}{0,2555...:1,5(3)}$;  б) $\dfrac{0,777...+0,090909...}{7,4-8\frac{2}{5}}+7,3:21,9$;

в) $\dfrac{\left(0,4111...+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{9}{47}}{0,3(5):0,555...:32}$;  г) $\dfrac{\left(0,666...+\frac{1}{3}\right):0,25}{0,12333...:0,0925}+12,5\cdot 0,64$.

**14.** Проанализируйте верность равенств: 3,(9) = 4; –2,(99) = –3; 6,56(9) = 6,57. В какое число обращаются периодические десятичные дроби 7,(9999); 0,12(99); –3,8(999). По такому же принципу объясните, почему периодические десятичные дроби обращаются здесь в конечную десятичную дробь или целое число?

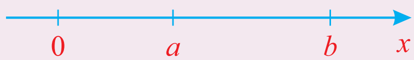
## 1.5. Сравнение рациональных чисел

В младших классах вы научились сравнивать целые и положительные дробные числа.

### Деятельность

Просмотрите три положения рациональных чисел $a$ и $b$ на числовой оси:

**1.** Рациональные числа $a$ и $b$ расположены справа от начала координат.

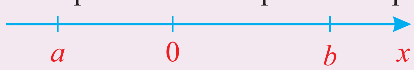



Выскажите своё мнение по поводу сравнения рациональных чисел $a$ и $b$ в этом случае.

**2.** Рациональные числа $a$ и $b$ расположены слева от начала координат.


Выскажите своё мнение по поводу сравнения рациональных чисел $a$ и $b$ в этом случае.

**3.** Рациональные числа $a$ и $b$ расположены с разных сторон от начала координат.




Выскажите своё мнение по поводу сравнения рациональных чисел $a$ и $b$ в этом случае.

### Образец

Сравните дроби $-\frac{2}{15}$ и $-\frac{5}{21}$.

*Решение:* Как вы знаете из курса математики VI класса, из двух отрицательных чисел число с большим модулем меньше числа с меньшим модулем.

$$\left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} = \frac{14}{105} \quad \text{и} \quad \left|\frac{-5}{21}\right| = \frac{5}{21} = \frac{25}{105}.$$

Так как $\frac{14}{105} < \frac{25}{105}$, т.е. $\frac{2}{15} < \frac{5}{21}$, то $-\frac{2}{15} > -\frac{5}{21}$. **Ответ:** $-\frac{2}{15} > -\frac{5}{21}$.

### Образец

Сравните числа 2,(34) и 2,34.

*Решение:* 2,(34) – периодическая дробь. Раскроем её: 2,(34) = 2,343434... 2,34 – это конечная десятичная дробь. К ней мы можем приписать бесконечное количество нолей: 2,34 = 2,34000...

Как мы видим, в записи обоих чисел стоят одинаковые цифры в целой части, в разрядах десятых и сотых. Однако в первом числе в разряде тысячных стоит 3, во втором же – 0. Следовательно, 2,(34) > 2,34. **Ответ:** 2,(34) >2,34.

## Упражнения

**1.** Нубар заполнила таблицу, найдя противоположные и обратные числа заданных чисел. Проанализируйте верны ли полученные ею результаты:

| **№** | **число** | **противоположное число** | **обратное число** | **№** | **число** | **противоположное число** | **обратное число** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **а)** | $-0{,}8$ | $\frac{4}{5}$ | $1\frac{1}{4}$ | **г)** | $7{,}(35)$ | $-7\frac{7}{20}$ | $\frac{147}{20}$ |
| **б)** | $4{,}2$ | $-4\frac{1}{5}$ | $-\frac{5}{21}$ | **д)** | $-1\frac{11}{13}$ | $\frac{24}{13}$ | $\frac{13}{24}$ |
| **в)** | $\frac{9}{11}$ | $\frac{-9}{11}$ | $1\frac{2}{9}$ | **е)** | $21{,}0(3)$ | $\frac{631}{30}$ | $-21\frac{1}{30}$ |

**2.** Расставьте числа в порядке возрастания:

$-\frac{2}{5};\ -\frac{15}{7};\ -\frac{4}{15};\ -3\frac{1}{32};\ 0,3;\ \frac{2}{25};\ \frac{20}{7};\ -3,(5).$

**3.** Расставьте числа в порядке убывания:

$\frac{-1}{12};\ \frac{-5}{9};\ \frac{-4}{3};\ -7\frac{1}{2};\ 0,07;\ -2,(6);\ \frac{9}{4};\ \frac{5}{24}.$

**4.** Найдите, между какими соседними целыми числами располагаются данные дроби:
а) $-4{,}009$; б) $-0{,}999$; в) $4{,}(3)$; г) $-91{,}(72)$; д) $-\frac{7}{85}$; е) $\frac{67}{7}$.

**5.** Напишите несколько рациональных чисел, располагающихся между числами
а) $-4$ и $-3$; б) $-18$ и $-17$; в) $-100$ и $-99$; г) $-1$ и $0$; д) $4$ и $5$.

**6.** Вспомнив правила сравнения чисел, сравните числа:
а) $-\frac{12}{25}$ и $-\frac{34}{71}$; б) $-2{,}(42)$ и $-2{,}42$; в) $-\frac{7}{90}$ и $0$;
г) $0{,}0(56)$ и $0{,}0(1)$; д) $\frac{17}{99}$ и $-\frac{1}{2}$; е) $0$ и $-19{,}(9888)$.

**7.** Приблизительно отметив на числовой оси точки, соответствующие данным числам, сравните их:
$-1{,}(21)$; $-4{,}00(9)$; $-3,5$; $-\frac{39}{19}$; $0$; $-1$; $\frac{7}{99}$; $5,8(37)$.

**8.** На числовой оси были обозначены числа $m$ и $n$ (рис. 1).

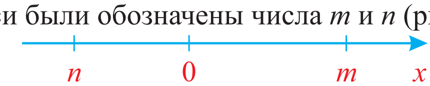


*рис. 1*

а) На этой числовой оси отметьте числа $-m$, $-n$; $2m$; $3n$; $0,5m$; $1\frac{1}{2}n$.

б) Какое число больше $3n$ или $\frac{1}{3}n$?

в) Модуль какого числа меньше: $m$ или $0{,}5m$?

**9.** На числовой оси изображены точки с координатами $a$ и $b$ (рис. 2).

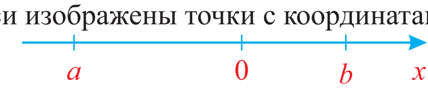


*рис. 2*

а) Отметьте на этой числовой оси точки с координатами $b+a$ и $b-a$.
б) Какое число больше: $b + a$ или $b - a$?
в) Модуль какого числа меньше: $b + a$ или $b - a$?

**10.** а) Можно ли утверждать, что некоторое число больше другого, если модуль первого числа больше модуля второго числа?
б) Что можно сказать о сравнении двух отрицательных чисел, если модуль первого числа больше модуля второго числа?

**11.** Ответьте на следующие вопросы. Обоснуйте свой ответ примерами:
а) Может ли сумма двух чисел быть больше одного слагаемого и меньше второго слагаемого?
б) Может ли сумма двух чисел быть меньше обоих слагаемых?
в) Может ли сумма двух чисел быть больше обоих слагаемых?
г) Может ли произведение двух чисел быть больше обоих множителей?
д) Может ли сумма двух чисел быть равной их произведению?
е) Может ли сумма двух чисел быть больше произведения этих чисел?

**12.** Приведите несколько значений числа $a$, отвечающих условию неравенства
а) $|a| > |a + 5|$;   б) $|a| < |a - 5|$.

**13.** 1) Увеличьте число18 на   а) 20%;   б) 45%;   в) 130%.
2) Уменьшите число 30,(8) на   а) 10%;   б) 62%;   в) 90%.

**14.** Сократив, сравните дроби: $\dfrac{7\cdot15\cdot48}{25\cdot49\cdot24}$ и $\dfrac{16\cdot81\cdot118}{59\cdot90\cdot32}$.

**15.** 1) Если a и b отрицательны, какое из неравенств верно:
а) $|a| > |b|$;   b) $a > b$;   c) $a < b$ какие из неравенств верны?
2) Сравните модули чисел $a$ и $b$ (рассмотрите все случаи), если $a$ и $b$ отрицательны.
3) Сравните модули чисел $a$ и $b$ (рассмотрите все случаи), если $a$ и $b$ имеют различные знаки.

**16.** Запишите несколько чисел между числами 2, (1) и 2, 111.

**17.** **Ситуационная задача:** Даны числа $a$ = 5, (1) и $b$ = 2,12589. Сумма $a + b$ расположена между числами 7 и 9.
Эти числа являются приближениями снизу и сверху на 1 единицу чисел $a$ и $b$. Определить более точные границы суммы $a + b$ (границы могут быть десятичными дробями) при приближении чисел $a$ и $b$ с точностью до
а) 0,1;   б) 0,01;   в) 0,001.
Определить точные границы разности $a - b$ при приближении чисел $a$ и $b$ с точностью до 0,0001.
Для разности $a-b$ запишите в виде десятичных дробей несколько граничных значений и ближайшие целые границы.

# 1.6. Неравенство

## Деятельность

$>, <, \geq, \leq$

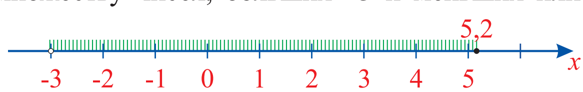
1. Назовите натуральные решения неравенства $\boldsymbol{x - 4 < 5}$. Каково множество целых решений этого неравенства? Являются ли числа $-10\frac{1}{4}$ и $10\frac{1}{4}$ решениями этого неравенства?
2. Найдите наибольшее целое число во множестве решений неравенства $\boldsymbol{x + 3 < 0}$. Какое у этого неравенства наименьшее целое решение?
3. Как можно выразить числа, большие $-8$ и меньшие 11, в виде неравенства? Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых чисел, отвечающих этому неравенству.

Неравенство, за данное в виде $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ или $a \leq x \leq b$ называется **двойным неравенством** (здесь $a$ и $b$ являются рациональными числами $a, b \in Q$). Решением неравенства называется значение переменной, превращающее данное неравенство в истинное. У неравенства может быть одно решение, несколько решений, бесконечное число решений или не может быть решения вовсе. Неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$, т.е. имеет то же множество решений, а неравенство $|x| \leq a$ равносильно двойному неравенству $-a \leq x \leq a$.

## Образец

**1)** Напишите множество натуральных решений неравенства $-3 < x \leq 5{,}2$.

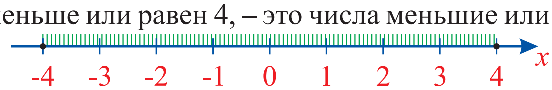
*Решение:* Число $x$ относится к множеству чисел, больших $-3$ и меньших или равных 5,2. Обозначим это множество чисел штрихами на числовой оси. Таким образом, 1, 2, 3, 4, 5 – это натуральные числа, являющиеся решением неравенства.




**Ответ:** $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

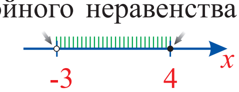
**2)** Напишите множество целых чисел, являющихся решением неравенства $|x| \leq 4$.

*Решение:* Числа, модуль которых меньше или равен 4, – это числа меньшие или равные 4, а также большие или равные $-4$. Изобразим эти числа в виде штрихов на числовой оси.




Таким образом, $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ – это целые числа, являющиеся решением неравенства. **Ответ:** $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

**Примечание 1.** При изображении множества решений двойного неравенства $-3 < x \leq 4$ на числовой оси, непринадлежность числа $-3$ множеству решений показывается знаком ○ как на рисунке, а принадлежность числа 4 множеству решений обозначается знаком ●.




**Примечание 2.** Неравенство $|x| > a$ равносильно неравенствам $x > a$ и $x < -a$ вместе взятым, неравенство $|x| \geq a$ и равносильно неравенствам $x \geq a$ и $x \leq -a$ вместе взятым.

**3)** Изобразите числа, являющиеся решением неравенства $|x| > 4$, на числовой оси.


*Решение:* Числа с модулем больше 4 располагаются на числовой оси либо справа от числа 4, либо слева от числа $-4$.

## Упражнения

**1.** Какое из чисел $-3$; $-1{,}3$; $-0{,}9$; $0$; $2{,}8$; $7$ является решением нижеприведённого неравенства?

а) $-2{,}5 \leq x < 9$; б) $|x| < 19$; в) $|x| \geq 0$; г) $|x+6| \leq -3$.

**2.** Представьте данные выражения в виде неравенства и запишите любое их решение.

а) сумма $x$ и числа $2{,}5$ меньше числа $7{,}(2)$;

б) число $a$ больше $-3$, меньше $2$;

в) разность числа $b$ и числа $0{,}5$ больше суммы чисел $4{,}8$ и $3{,}(5)$;

г) модуль суммы числа $a$ и $8$ больше $-4$.

**3.** Прочтите приведённые неравенства и запишите несколько решений:

а) $-12 \leq a < 0$; б) $0 \leq x \leq 17{,}5$; в) $|y| \geq -8$; г) $|x| \leq -11$;

д) $|b| \leq 0$; е) $|x| < 0$; ж) $|x - 2{,}9| \leq 1$; з) $|5 - m| > 1$.

**4.** а) Ширина прямоугольника меньше длины. Напишите неравенство для определения ширины прямоугольника на основе рисунка (рис.1), и найдите возможные значения, соответствующие ширине прямоугольника.

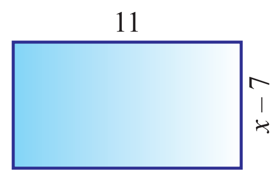


*рис. 1*

б) Ширина прямоугольника не больше длины, периметр же (рис.1) равен 28 см. Какое наибольшее натуральное значение может принять ширина прямоугольника?

в) Периметр треугольника больше 36 мм, но меньше 38 мм. Между какими натуральными числами находится длина его третьей стороны, если длина двух других сторон равна соответственно 11 и 9 мм?

**5.** Напишите любое неравенство со множеством целых решений:

а) $x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$; б) $x = -1; 0; 1$;

в) $x = -20; -19; \ldots; -1$; г) $x = 2; 3; 4; \ldots$; д) $x = \ldots; -10; -9$ е) $x = \varnothing$.

**6.** Напишите несколько решений данных неравенств:

а) $|x + 4{,}2| < 1{,}4$; б) $|x - 8{,}3| \geq 4$; в) $|10 - x| > 7$;

г) $|x| + 2{,}5 < 0$; д) $18 + |x| \leq 25$; е) $|x| + 2|x| \geq 42$.

**7.** Найдите наибольшее и наименьшее целые числа, являющиеся решениями приведённых неравенств.

а) $|x| < 10$; б) $|a| < 7{,}8$; в) $|x| \leq 27$; г) $-2 < x < 10$.

**8.** Напишите несколько чисел, являющихся решением обоих неравенств: $2 - x \geq 0$ и $|2 - x| \geq 0$. Напишите такое число, которое было бы решением второго неравенства и не было бы решением первого неравенства.

**9.** Напишите такое неравенство с переменной в модуле, чтобы оно:

а) имело одно решение; б) не имело решения;

в) имело бесконечное число решений.

## 1.7. Действия над рациональными числами

Принципы выполнения действий сложения, вычитания, умножения и деления над рациональными числами такие же, как и у целых чисел. Из курса математики 6 класса вы знаете, что выражения, в записи которых присутствуют только числа и действия, производимые над ними, называются числовыми выражениями. Выражения, в записи которых наряду с числами присутствуют и буквы, называются **буквенными**. Рациональные выражения нельзя делить на ноль. У выражения с делителем 0 нет значения.

**Деятельность** **Последовательность действий, калькулятор**

Найдите значение выражения $\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{4}{2+\dfrac{2}{3}}$.

1. Какое действие следует совершить в первую очередь, чтобы найти значение этого выражения? Как вы пришли к этому решению?
2. Какие действия затем вы должны совершить?
3. В этом выражении дробную черту замените знаком деления. Найдите значение полученного выражения и ответ сопоставьте с предыдущим результатом.
4. Сравните ответы.

**Образец**

Вычислите значение выражения $\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)}{\left(2-\dfrac{2}{3}\right)+3}$.

*Решение:* Сначала найдем значение выражения в числителе дроби:

$\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{7}{6}$.

Затем, найдем значение выражения в знаменателе дроби:

$\left(2-\dfrac{2}{3}\right)+3=\left(1\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}\right)+3=1\dfrac{1}{3}+3=4\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$.

Разделим выражение, полученное в числителе на выражение, полученное в знаменателе: $-\dfrac{7}{6}:\dfrac{13}{3}=-\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{3}{13}=-\dfrac{7}{26}$.

Заменяя основную дробную черту на знак деления, мы можем записать это выражение в следующем виде:

$$\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)}{\left(2-\dfrac{2}{3}\right)+3}=\left(\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)\right):\left(\left(2-\dfrac{2}{3}\right)+3\right)=-\dfrac{7}{26}$$

**Ответ:** $-\dfrac{7}{26}$.

**Образец**

Вычислите значение выражения $-5\dfrac{7}{9}+3,(5)-2,0(23)$.

*Решение:* Это числовое выражение и его можно вычислить следующим образом:

$$-5\frac{7}{9}+3,(5)-2,0(23)=-5\frac{7}{9}+3\frac{5}{9}-2\frac{23}{990}=-2\frac{2}{9}-2\frac{23}{990}=$$
$$-2\frac{220}{990}-2\frac{23}{990}=-4\frac{243}{990}=-4\frac{27}{110}.$$

**Ответ:** $-4\frac{27}{110}$.

## Упражнения

**1.** Напишите такие числовые выражения, чтобы при нахождении их значения были последовательно выполнены следующие действия:
а) деление, сложение и умножение;
б) умножение, вычитание и деление;
в) сложение и возведение в куб;
г) умножение, возведение в квадрат и сложение.

**2.** Вычислите значение выражений:
а) $-6,965 + 23,3$; б) $6,2 \cdot (-1,33)$; в) $53,4 : (-15)$;
г) $60,9 - 88,89$; д) $0,78 \cdot (-2,5)$; е) $-16,94 : 2,8$;
ж) $99 - 9,904$; з) $-0,016 \cdot 0,25$; и) $75 : 1,25$.

**3.** Вычислите:
а) $6\frac{1}{3}-9$; б) $\frac{3}{8}:\left(-\frac{6}{32}\right)$; в) $\frac{9}{14}\cdot(-4,(2))$; г) $-0,9 \cdot (-0,1)$;
д) $-12\frac{5}{7}+5\frac{3}{5}$; е) $\frac{7}{12}\cdot(-36)$; ж) $-64:\left(-\frac{16}{9}\right)$; з) $38 : (-0,019)$;
и) $5\frac{1}{3}-7,0(3)$; й) $-6\frac{2}{9}:18$; к) $-3\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{3}{7}\right)$; л) $-45,5 : 0,005$.

**4.** У каких из приведённых выражений нет значения? Объясните, почему вы пришли к такому выводу:
а) $126 : (36 \cdot 2 - 5 \cdot 8)$; б) $(1,7 \cdot 2 - 3,4) : 11$; в) $\frac{2,6-13\cdot 0,2}{8}$;
г) $\frac{0,57}{0,08-0,02\cdot 4}$; д) $\frac{2,7+1,3}{-7,2+3,6\cdot 2}$; е) $\frac{-12,3+4,1\cdot 3}{7,26-2\cdot 3,13}$.

**5.** Найдите значение выражений с модулем:
а) $\left|-\frac{19}{25}\right|+\left|2\frac{3}{15}\right|$; б) $\left|-\frac{19}{25}+2\frac{3}{15}\right|$; в) $\frac{|-2,3|+|-4,1|\cdot 3}{-2\cdot|-3,13|}$.

**6.** Найдите значение выражений:
а) $\left|-3,(6)+2\frac{1}{4}\right|-|-5,3+2,(3)|$; б) $|-7,(5)|+\left|-4,8-3\frac{1}{5}+3,9\right|$;
в) $12,7(3)+|-6,5(21)|-0,2(54)$; г) $|9,(1)+(-3,(7))|-|6,(5)|:|-1,(8)|$;

д) $\dfrac{\frac{3}{4}+\left|-16\frac{1}{4}\right|-|20,5|}{-1\frac{7}{8}\cdot 0,5(3)}$;  е) $\dfrac{0,(27)\cdot 3\frac{2}{3}}{\left|2\frac{5}{16}-4,31(25)\right|}+\left|-\frac{1}{2}\right|$.

**7.** Составьте алгоритм для нахождения значений выражений. На что вы опирались, определяя последовательность действий?

а) $\dfrac{8}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}}$;  б) $2-\dfrac{1}{-2+\frac{1}{3}}+\dfrac{9}{-\frac{7}{4}:\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}$;  в) $\dfrac{\left(\frac{5}{6}+1\frac{1}{2}\right):\frac{7}{12}}{-\frac{5}{9}+\left(11-7\frac{5}{18}\right)}$;

г) $\dfrac{(2,73+4,81+3,27-2,81):\left(\frac{2}{5}-\frac{14}{15}\right)}{25\cdot 37\cdot 0,4}$;  д) $3:\frac{1}{3}+\frac{7}{2}\left(\left(-\frac{7}{6}\right)\cdot\frac{3}{14}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)$.

**8.** Найдите значение представленных выражений и запишите в пустые клетки соответствующие знаки « >, <, = »:

а) $\frac{7}{4}:\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)\ \square\ \left(\frac{7}{4}:\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}$;  б) $\dfrac{2}{-3+\frac{1}{5}}\ \square\ 1\frac{4}{7}$.

**9.** Найдите значения выражений:

а) $((21,85:43,7+8,5:3,4):4,5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}$;

б) $\left(1\frac{2}{5}+3,5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3,4:2\frac{1}{8}-0,35$;

в) $\left(\dfrac{3,75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1,875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1,5}{2,75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}$;  г) $\dfrac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

**10**. Определите значения выражений, преобразовав периодические десятичные дроби в обыкновенные.

а) $\dfrac{\left(0,666...-\frac{1}{3}\right)\cdot 0,25}{0,12333...:0,0925}+12,5\cdot 0,64$;

б) $\dfrac{0,8333...-0,4(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1,125+1\frac{3}{4}-0,41(6)}{0,59}$.

## 1.8. Множества

**Деятельность** — Переместительное и сочетательное свойства

Основываясь на диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1):

1. Выпишите элементы множеств: A∪B и B∪A; A∩B и B∩A. Что вы можете сказать об этих множествах?
2. Напишите формулу нахождения числа элементов объединения двух конечных множеств. Определите: n(A), n(B), n(A∩B), n(A∪B).
3. Выпишите элементы множеств: A∪(B∪C) и (A∪B)∪C; A∩(B∩C) и (A∩B)∩C. Выскажите свое мнение об этих выражениях.

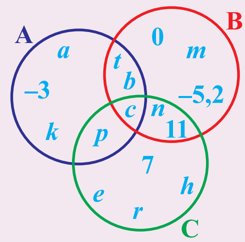



*рис. 1*

4. Выпишите элементы множеств: A\B, A\(B∪C), B\(A∩C). Изобразите эти множества на диаграммах Эйлера-Венна.

**Свойства действий над множествами**

Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

1. A∪B = B∪A и A∩B = B∩A (переместительное свойство);
2. A∪(B∪C) = (A∪B)∪C и A∩(B∩C) = (A∩B)∩C (сочетательное свойство);
3. Если B ⊂ A (т.е. множество B является подмножеством множества A), то A∪B = A, A∩B = B;
4. Если B⊂A, то множество B\` = A\B называется разностью множества A и B и является дополнением множества B до множества A;
5. A\A = ∅. Разность множества A с самим собой является пустым множеством;
6. A∪∅ =A. Объединение множества A с пустым множеством является множество A. A∩ ∅ = ∅. Пересечение множества A с пустым множеством является пустым множеством.

### Упражнения

1. Найдите число элементов каждого из множеств $A = \{m, n, l, k, p\}$ и $B = \{n, p, g, j\}$. Определите число элементов объединения и пересечения этих множеств. Продемонстрируйте выполнение переместительного свойства.
2. Что вы можете сказать о числе элементов множеств натуральных, целых и рациональных чисел? Какие из них являются подмножествами других множеств? Изобразите их с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Для множеств A, C, D, приведённых на рисунке 2, проанализируйте нижеследующее:

   а) A ∩ C; д) A ∩ D;
   б) C ∩ D; е) A ∩ C ∩ D;
   в) n(A), n(C), n(D); ж) A ∪ C;
   г) A ∪ D; з) A ∪ C ∪ D;
   и) элементы, входящие только в множество A;
   й) элементы, входящие только в множество C;
   к) элементы множеств A\D, A\C и D\C.

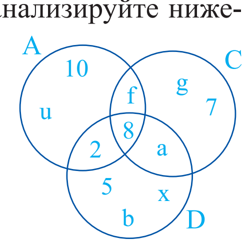



*рис. 2*

**4.** а) Покажите состоящие каждое из трёх элементов два таких множества, чтобы их объединение имело четыре элемента.

б) Покажите такие три множества A, B и C, чтобы $n(A) = 4$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 2$. Найдите $n(A \cup B)$. Изобразите эти множества с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

**5.** Каждая семья, проживающая в нашем доме, подписалась на газету, журнал или на то и другое. 75 семей получают газеты, 26 семей – журналы, 18 семей – и газеты, и журналы. Сколько семей проживает в нашем доме?

**6.** На школьных спортивных соревнованиях по бегу и прыжкам в высоту из учащихся VII класса выполнили нормативы 25 участников. 7 человек выполнили нормативы по обоим видам, 11 человек – только по бегу. Сколько учащихся выполнили нормативы:

а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) только по прыжкам в высоту?

**7.** Из 61 учащегося 27 человек занимается коллекционированием медалей, а 35 – марок. 6 человек коллекционируют как медали, так и марки. Сколько учащихся ничего не коллекционирует?

**8.** 85% населения города A говорит на азербайджанском языке, 75% на русском. Сколько процентов населения знает оба языка?

**9.** Решите составленную на основе диаграмм Эйлера-Венна задачу (рис. 3). Обоснуйте соблюдение сочетательного свойства.

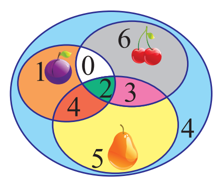


*рис. 3*

**10.** В классе 15 учащихся изучает английский язык, 11 человек – русский язык, а 9 человек – оба языка. Сколько учащихся в классе?

**11.** В группе 20 детей. Из них 14 любит животных, а 10 – птиц. Двое из детей не любят ни животных, ни птиц. Сколько детей любит и животных, и птиц?

**12.** а) если $n(A) = 18$, $n(B) = 23$ и $n(A \cap B) = 9$, то $n(A \cup B) = ?$

б) если $n(M \cup K) = 42$, $n(M) = 35$, $n(K) = 28$ то, $n(M \cap K) = ?$

в) если $n(C \cap D) = 7$, $n(C) = 19$, $n(C \cup D) = 22$ то, $n(D) = ?$

**13.** На основе данных напишите элементы требуемых множеств.

1) $B \setminus (A \cup C)$;
2) $(A \cup C) \setminus B$;
3) $(A \cup C) \setminus (B \cap C)$;
4) $(B \setminus C) \cup A$;
5) $C \setminus (B \cap A)$;
6) $(A \setminus C) \cap B$;
7) $(A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

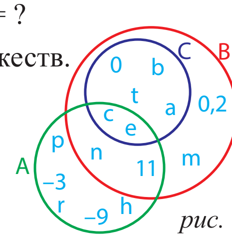


*рис. 4*

**14.** В VII классе учатся 30 мальчиков. 20 из них и 40% девочек класса занимаются в кружках. Зная, что в кружках занимается 60% учащихся класса, определите число учеников этого класса.

# 1.9. Построение биссектрисы угла

## Деятельность

1. Постройте с помощью транспортира и линейки угол в 70°. Назовите этот угол AOB.
2. Постройте от луча OB угол в 35° и отметьте точку C.
3. Проведите луч OC.
4. Выскажите своё мнение о полученных углах AOC и BOC.
5. Что вы можете сказать о луче OC?

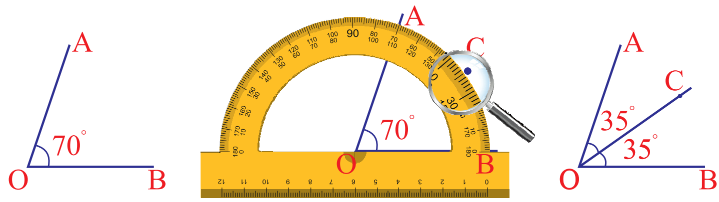
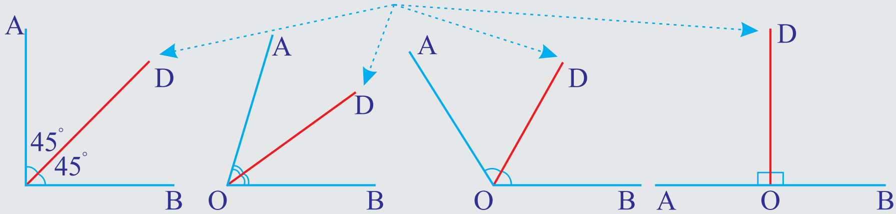



*рис. 1*

Внутренний луч с началом в вершине угла, делящий угол пополам, называется **биссектрисой** угла (рис. 2).

OD – биссектриса: $\angle AOD = \angle BOD$




Прямой угол, Острый угол, Тупой угол, Развёрнутый угол

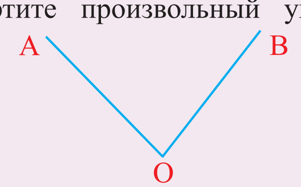
*рис. 2*

Биссектрису угла можно построить не только с помощью транспортира, но более точно с помощью циркуля и линейки. Чтобы построить биссектрису угла с помощью циркуля и линейки, следует осуществить следующую деятельность.

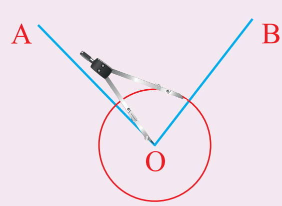
## Деятельность — Циркуль

**Построение биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки:**

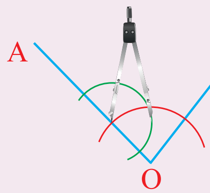
1. Начертите произвольный угол AOB.



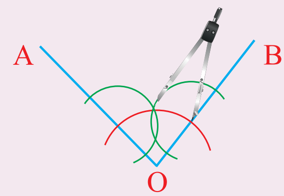

2. Начертите с помощью циркуля окружность с центром в точке O.



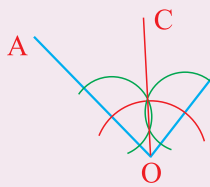
**3.** Начертите пересекающую стороны угла окружность меньшего радиуса с центром в точке пересечения первой окружности со стороной OA.



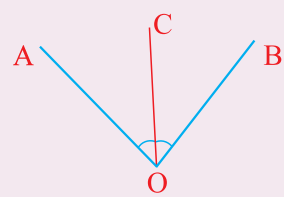

**4.** Не меняя радиуса, начертите еще одну пересекающую стороны угла окружность с центром в точке пересечения первой окружности со стороной OB.




**5.** С помощью линейки проведите прямую, которая проходила бы через точки пересечения зеленых окружностей. Эта прямая будет проходить также через точку O.




**6.** Удалите окружности ластиком. Полученный луч OC является биссектрисой угла AOB.



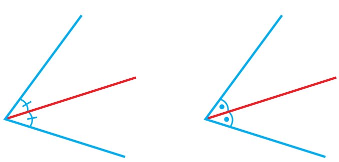



*рис. 3*

Изобразите биссектрису угла так, как дано на рисунке 3.

## Упражнения

**1.** Постройте с помощью циркуля и линейки биссектрисы углов в 30°, 60°, 90°, 120°, 160°. Объясните, как вы провели построение. Измерьте с помощью транспортира полученные углы. Проследите за тем, чтобы построение было проведено точно.

**2.** Постройте с помощью циркуля биссектрисы углов в 58°, 75°, 96°, 145°. Исследуйте результаты построения.

**3.** Начертите любой угол и постройте его биссектрису с помощью циркуля и линейки, а также транспортира. В каком случае биссектриса построена более точно?

## 1.10. Биссектрисы треугольника

**Деятельность** **Биссектриса**

1. Начертите произвольный треугольник ABC.
2. Постройте с помощью транспортира или циркуля биссектрисы $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.
3. Обозначьте полученные в результате пересечения биссектрис с противоположными сторонами точки буквами M, N и K.
4. Выскажите своё мнение об отрезках AM, BN и CK. Обозначьте точку их пересечения буквой O.
5. Выскажите своё мнение об углах, полученных в вершинах треугольника.

**Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противоположной стороне.

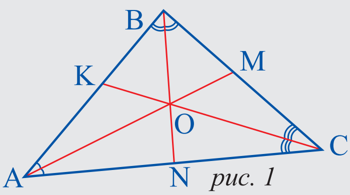


*рис. 1*

У треугольника имеются три биссектрисы (AM, BN, CK), и они пересекаются в одной точке O (рис. 1). Чтобы показать, что данные отрезки являются биссектрисами, достаточно указать, что $\angle BAM = \angle CAM$, $\angle ABN = \angle CBN$, $\angle BCK = \angle ACK$.

**Упражнения**

1. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрисы углов тупоугольного, остроугольного и прямоугольного треугольников. Определите расположение точки пересечения биссектрис.

2. Начертите биссектрису BK треугольника ABC с тупым углом в 140°. $\angle B = 140°$ Найдите градусную меру углов ABK и CBK.

3. Дан острый угол MON и его биссектриса OP. Определите градусную меру углов MON и NOP, если $\angle MOP = 25°$.

4. По рисунку 2 определите с помощью транспортира углы ABK, BCM, CAN. Укажите равные им углы. Запишите биссектрисы.

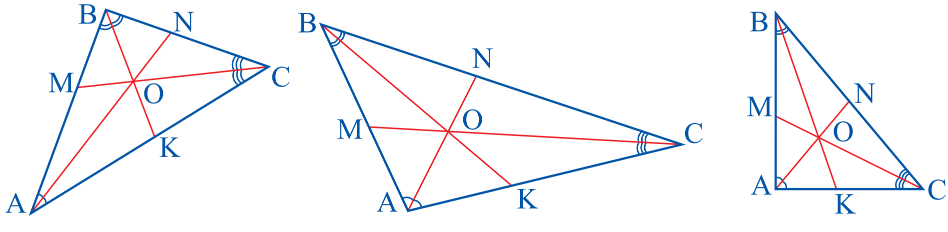


*рис. 2*

## 1.11. Медианы треугольника

**Деятельность** — **Медиана**

1. Начертите треугольник ABC.
2. Измерьте с помощью линейки сторону AB. Отметьте её середину точкой. Обозначьте эту точку буквой K.
3. Соедините отрезком вершину C с точкой K.
4. Измерьте длину стороны AC и отметьте её середину точкой. Эту точку обозначьте буквой M. Соедините точки B и M отрезком (рис. 1).
5. Измерьте длину стороны BC и отметьте её середину точкой. Эту точку обозначьте буквой N. Соедините точки A и N отрезком.
6. Выскажите своё мнение об отрезках AN, BM и CK.

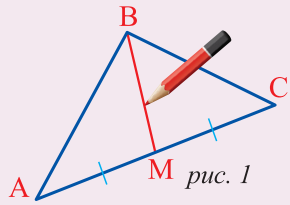


*рис. 1*

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется **медианой** треугольника (рис. 1). У треугольника есть три медианы (AT, BP и CF) и они пересекаются в одной точке (точке O) (рис. 2).

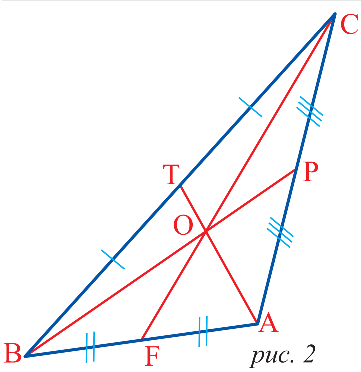


*рис. 2*

При изображении равные отрезки, полученные на стороне треугольника, отмечаются одинаковыми по количеству линиями (рис. 2).

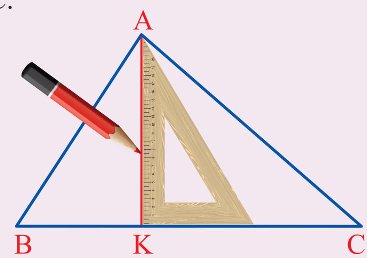
Чтобы доказать, что отрезки AT, BP и CF являются медианами треугольника, достаточно показать, что BT = TC, AP = PC и AF = BF.

**Упражнения**

1. Возьмите преизвольные остроугольный, тупоугольный и прямоугольный треугольники. Используя линейку, проведите медианы каждого треугольника.
2. В треугольнике ABC AK, CM, BN – медианы. Найдите периметр треугольника ABC, если: AN = 3 см, BK = 2,5 см, BM = 3,2 см.
3. В треугольнике ABC проведены медианы AK, CM, BN. Найдите периметр треугольника ABC, если AM + CK + NC = 34,5 см.
4. Периметр равнобедренного треугольника MNK равен 56 дм. Если длина основания MN будет равна 18,4 дм, то на отрезки какой длины будут поделены боковые стороны проведёнными к ним медианами (ответ дайте в сантиметрах).

# 1.12. Высоты треугольника

**Деятельность** — **Высота**




1. Начертите остроугольный треугольник ABC.
2. Расположив угольник, как показано на рисунке, начертите отрезок AK от вершины A до стороны BC.
3. Определите, как расположены по отношению друг к другу отрезки AK и BC.
4. Какова градусная мера угла, расположенного между меньшими сторонами угольника?
5. Какими углами являются ∠AKB и ∠AKC?

Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к противоположной стороне или её продолжению, называется **высотой** треугольника (рис. 1).

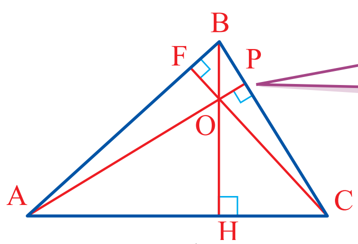



*рис. 1*

При изображении высоты треугольника, ставится знак прямоугольника на месте пересечения высоты со стороной треугольника (рис. 2). Чтобы доказать, что отрезки AP, BH и CF являются высотами треугольника, достаточно показать, что

BH ⊥ AC, AP ⊥ BC и CF ⊥ AB.

У треугольника имеются три высоты и они пересекаются в одной точке (рис. 1). Точка пересечения высот треугольника или их продолжений может быть расположена внутри или вне этого треугольника, а также на самом треугольнике.

**Деятельность**

**Где пересекаются высоты остроугольного треугольника?**

1. Начертите остроугольный треугольник ABC (рис. 2).
2. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины A к стороне BC.
3. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины B к стороне AC.
4. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины C к стороне AB.
5. Определите, в какой точке пересекаются высоты.

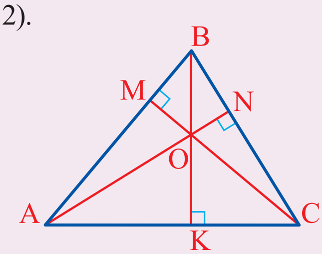



*рис. 2*

## Деятельность

**Где пересекаются высоты прямоугольного треугольника?**

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC (рис. 3).
2. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины A к стороне BC.
3. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины B к стороне AC.
4. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины C к стороне AB.
5. Определите, в какой точке пересекаются высоты.

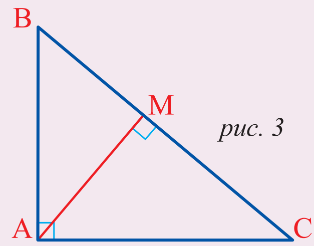


*рис. 3*

## Деятельность

**Где пересекаются высоты тупоугольного треугольника?**

1. Начертите тупоугольный треугольник ABC (рис. 4).
2. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины A к прямой линии, на которой лежит сторона BC.
3. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины B к прямой линии, на которой лежит сторона AC.
4. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины C к стороне AB.
5. Определите, в какой точке пересекаются высоты.

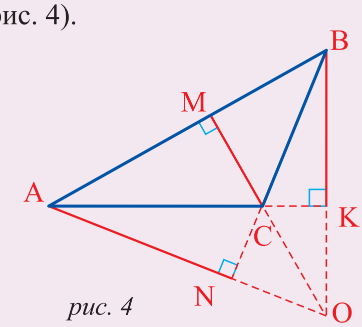


*рис. 4*

1. Точка пересечения высот (точка O) остроугольного треугольника лежит внутри треугольника (рис. 2).

2. Точка пересечения высот (точка A) прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла этого треугольника (рис. 3).

3. Точка пересечения высот (точка O) тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (рис. 4).

## Упражнения

**1.** Начертите остроугольный треугольник. Проведите из любой его вершины:
а) медиану;
б) биссектрису;
в) высоту.
Сравните длины полученных медианы, биссектрисы и высоты.

**2.** Начертите прямоугольный треугольник. Начертите медиану, высоту и биссектрису из вершины его прямого угла.

**3.** Севиль, строя медиану, высоту и биссектрису тупоугольного треугольника, исходящие из вершины его тупого угла, изобразила их так, как это показано на рисунке (рис. 5). В результате она отметила, что AM – это медиана, AH – высота, AT – биссектриса. Определите её ошибку. Изобразите правильный ответ на рисунке.

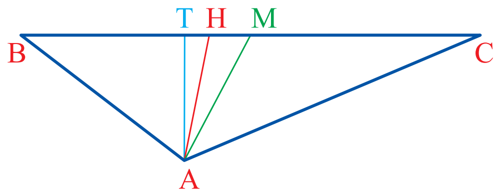


*рис. 5*

**4.** Начертите треугольник с углом в 150°. Изобразите высоты, проведенные из вершин его острых углов.

**5.** В треугольнике ABC построены биссектриса AT, высота BH и медиана CM. Дополните предложения:
а) если AT – биссектриса, то $\angle BAT = \ldots$
б) если CM – медиана, то BM …
в) если BH – высота, то … – перпендикуляр.
Поменяйте местами в каждом из полученных предложений условие и утверждение. Определите верность или неверность полученных предложений.

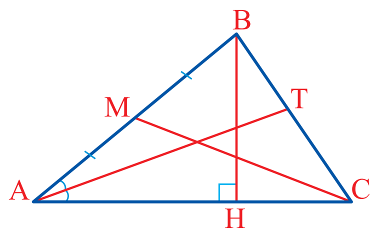


*рис. 6*

**6.** По рисунку 6 найдите:
а) $\angle BAC$, если $\angle BAT = 15°$;
б) AB, если BM = 2,45 см;
в) $\angle BHC$, если $BH \perp AC$.

**7.** Начертите высоту BK из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Определите вид полученных треугольников ABK и CBK.

**8.** Определите на глаз, какой из отрезков AM, AP и AK, изображённых на рисунке 7, является медианой, какой – высотой и какой – биссектрисой. Верность вашего предположения докажите измерениями, сделанными посредством линейки, угольника и транспортира. Выскажите своё мнение о том, как расположены медиана, высота и биссектриса, проведённые из одной вершины треугольника.

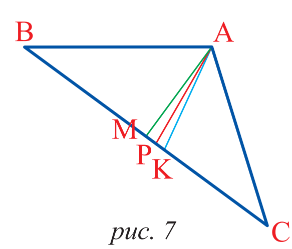


*рис. 7*

# 1.13. Аксиомы

**Деятельность** — **Аксиома**

1. Коснитесь кончиком ручки листа бумаги. Какая фигура получилась? Назовите её.
2. Отметьте на листе 2 разные точки. Соедините их с помощью линейки. Какая фигура получилась? Назовите её.
3. Обратите внимание на лист бумаги. Вы всегда на нём пишите. Задумывались ли вы, в форме какой фигуры этот лист? Может ли лист быть частью плоскости? Выразите своё мнение.

Геометрия как наука возникла в Древнем Египте из необходимости измерения земельных участков. Узнав от древних египтян об этой науке, древние греки назвали её геометрией (с греч. «geo» – земля, «metreo» – измерять). Геометрия изучает измерения фигур и тел, а также соотношения между их элементами. Свойства этих фигур и тел выражаются в форме определений, аксиом и теорем.

**Определение** объясняет значение какого-либо нового понятия с помощью известных нам понятий. По некоторым понятиям определения не даются по причине того, что они являются первичными. **Точка**, **прямая**, **плоскость** являются первичными понятиями геометрии. Свойства первичных понятий выражаются аксиомами.

**Аксиома** – математическое утверждение, которое принимается без доказательства.

Слово «аксиома» возникло от греческого «aksios» и означает «утверждение».

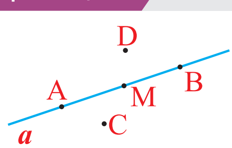
Впервые аксиомы использовал Евклид в своей книге «Начала», написанной за 300 лет до нашей эры.

Геометрия имеет 2 раздела: **планиметрия** и **стереометрия**. Планиметрия изучает плоские фигуры и их свойства, а стереометрия – пространственные фигуры и их свойства.

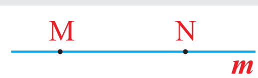
Рассмотрим некоторые аксиомы планиметрии.

- На каждой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей **(аксиома принадлежности)**.
- Через две различные точки проходит одна и только одна прямая **(аксиома прямой)**.

**Образец**



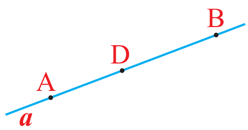

**$A \in a$, $B \in a$, $M \in a$**
**$D \notin a$, $C \notin a$.**




**Через точки M и N проходит прямая *m*.**

- Из трёх различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими **(аксиома расположения точек на прямой)**.

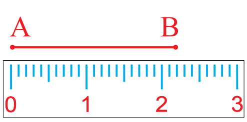
## Образец




**Точка D расположена между точками A и B.**

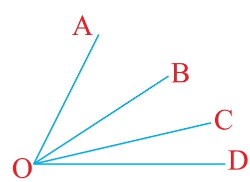
- Каждый отрезок имеет длину больше нуля и измеряется определёнными единицами измерения **(аксиома измерения отрезков)**.
- Длина отрезка равна сумме отрезков, полученных в результате деления данного отрезка произвольной точкой **(аксиома сложения отрезков)**.
- Любой угол имеет определенную градусную меру больше нуля. Развернутый угол равен 180° **(аксиома измерения углов)**.
- Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится внутренним лучом **(аксиома сложения углов)**.

## Образец




AB=2,2 sm


MN=MO+ON



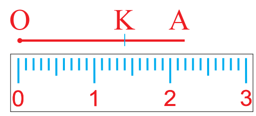

$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$

- Любая точка на прямой разбивает её на два луча с началом в этой точке **(аксиома деления прямой)**.
- От начальной точки луча можно отметить один и только один отрезок заданной длины **(аксиома откладывания отрезка)**.

  Совокупность прямой *a* и всех точек, лежащих по одну сторону от этой прямой на плоскости, называется **полуплоскостью** с границей *a*.
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости так, что все точки одной полуплоскости расположены по одну сторону от этой прямой, а точки, принадлежащие разным полуплоскостям, расположены по разные стороны от этой прямой **(аксиома деления плоскости)**.
- От любого луча в данной полуплоскости можно отложить один и только один угол, с заданной градусной мерой, меньшей 180° **(аксиома откладывания угла)**.

## Образец


лучи ОА и ОВ




ОК = 1,4 см


На будущих занятиях вы познакомитесь ещё с несколькими аксиомами.

## Упражнения

**1.** Отметьте точки, относящиеся к прямой, и точки, не относящиеся к прямой.

**2.** Отметив две любые точки, соедините их одной прямой. Назовите полученную прямую.

**3.** Отметьте точки M, N и K так, чтобы их а) можно было соединить одной прямой; б) невозможно было соединить одной прямой. Назовите, какая точка находится между двумя другими в разных случаях.

**4.** Отметьте на числовой оси точки N и K, расстояние между которыми равно 4,5 см. Выберите любую точку A на отрезке NK. Измерьте длину полученных отрезков. К какому выводу вы пришли?

**5.** Постройте $\angle AOB$, равный $150°$. Начертите луч OM во внутренней части угла. Измерьте полученные углы транспортиром. К какому выводу вы пришли?

**6.** Нарисуйте лучом на прямой плоскости OM. В каждой полуплоскости, отделенной прямой, постройте углы с вершиной в точке O, равные $45°$. Какова будет градусная мера полученного нового угла?

**7.** Отложите отрезки OB = 2,5 см, OM = 4,2 см, OK = 3,8 см, OP = 5,1 см на луче OA. Объясните положение полученных точек. Определите длину отрезков BM, PM, BP.

**8.** Отметьте точки A, B и C так, чтобы точки A и B находились по одну сторону от точки C, а точки A и C по одну сторону от точки B. Какая точка будет находиться между двумя точками в данном случае?

**9.** Прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке M. Назовите лучи с началом в точке M. Определите противоположные лучи.

**10.** Нарисуйте в тетради две пересекающиеся прямые $a$ и $b$. На сколько частей разделили ваш лист бумаги эти прямые? В каждой из частей отметьте одну точку и соедините их последовательно отрезками. Какая фигура получилась? Могут ли находиться три из этих точек на одной прямой? А четыре?

**11.** По-вашему, есть ли необходимость доказывать, что $2 + 2 = 4$? Можно ли это утверждение назвать аксиомой? Назовите такое утверждение, которое а) не нуждается в доказательстве; б) нуждается в доказательстве.

## 1.14. Теорема. Прямая и обратная теоремы

**Деятельность** | **Теорема, условие, утверждение, доказательство**

1. Нарисуйте развёрнутый угол АОВ.
2. Нарисуйте внутри этого угла луч ОС. Назовите полученные углы. Выскажите свои мысли об их сумме.
3. Что вы можете сказать об $\angle$BOC, если $\angle$AOC равен 25°? Обоснуйте свои утверждения.

**Теорема** – такое математическое утверждение, правильность которого выводят путём логических рассуждений на основе заранее известных верных утверждений. Эти рассуждения называются **доказательством**. «Теорема» – древнегреческое слово, означает «доказательство, взгляд, точка зрения». Теорема состоит из двух частей, называющихся **«условие»** и **«заключение»**. Часть теоремы, выражающая данные, называется условием, а часть, требующая доказательства, называется утверждением.

| | |
|---|---|
| **Условия теоремы** → | **Заданная часть** |
| **Утверждение теоремы** → | **Часть, требующая доказательства** |
| **Доказательство теоремы** → | **Доказательство обычно проводится двумя способами:** |

**Доказательство обычно проводится двумя способами:**

1. **Утверждение теоремы выводится из её условий путём логического рассуждения.**
2. **Доказывается путём обратного предположения. В этом случае предполагается, что утверждение теоремы ошибочно, и если получается результат, противоречащий условию или математическому факту, то теорема оказывается доказанной.**

**Теорема** | **Свойство смежных углов**

***Сумма смежных углов равна 180°.***

**Условие теоремы:** $\angle$AOB и $\angle$BOC смежные углы.

**Утверждение теоремы:** $\angle AOB + \angle BOC = 180°$.

**Доказательство:** По условию теоремы данные на рисунке 1 углы $\angle$AOC и $\angle$BOC смежные. По определению смежных углов: одна сторона общая, а другие стороны образуют прямую линию. Значит, AC – прямая и тогда $\angle$AOC – развёрнутый угол. Тогда на основе аксиомы от измерении углов $\angle AOC=180^o$. По теореме о сложении углов градусная мера угла AOC равна сумме градусных мер углов полученных при делении этого угла внутренним углом AB: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOS = 180^o$. Таким образом, сумма градусных мер смежных углов равна 180º.

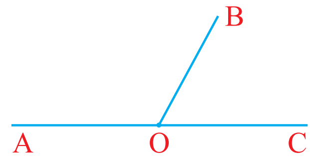


*рис. 1.*

**Деятельность** **Обратная теорема**

1. Определите условие и утверждение в предложении «Если сегодня суббота, то завтра воскресение». Поменяйте их местами. Исследуйте верность или неверность полученного предложения.
2. Озвучьте теорему о сумме смежных углов, поменяв местами условие и утверждение. Обоснуйте его верность или неверность.
3. Напишите утверждение, обратное предположению «числа, заканчивающиеся на четную цифру, делятся на 2 без остатка» и обоснуйте его верность.

Если при изменении местами условия и утверждения некоторой теоремы получается верное высказывание, то оно называется **теоремой обратной** данной теореме.

**Деятельность**

1. Нарисуйте острый угол АОВ.
2. Дорисуйте лучи, противоположные лучам ОА и ОВ. Назовите полученный угол COD. Выскажите своё мнение об этих углах.
3. Если угол АОВ будет равен 25°, то что вы можете сказать об угле COD? Обоснуйте свои мысли.
4. Чему будет равна градусная мера $\angle COD$, если $\angle AOB = 120°$. Обоснуйте свои мысли.
5. Чему будет равна градусная мера $\angle COD$, если $\angle AOB = 90°$. Обоснуйте свои мысли.

**Теорема** **Свойство вертикальных углов**

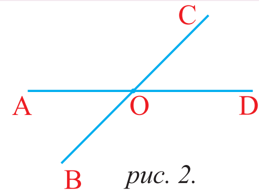


*рис. 2.*

***Вертикальные углы равны.***

**Условие теоремы:** $\angle AOB$ и $\angle DOC$ – вертикальные углы.

**Утверждение теоремы:** $\angle AOB = \angle DOC$ (рис. 2).

*Докажите самостоятельно.*

Используйте свойство смежных углов и аксиому деления угла.

**Упражнения**

1. Перечислите известные вам понятия и дайте их определения.
2. Докажите, что фигура, состоящая из развёрнутого угла и его внутренней области, является полуплоскостью.
3. Пусть прямая, не проходящая через вершины треугольника, пересекает одну из его сторон. Сколько сторон треугольника из двух оставшихся пересечёт эта прямая? Обоснуйте свой ответ.
4. Назовите теорему, обратную теореме о вертикальных углах, и выясните верность или неверность обратной теоремы.

**5.** Определите условие и утверждение в предложении «Если слагаемые 16 и 9, то сумма равна 25». Поменяв их местами, назовите обратное этому предложению утверждение. Является ли правильным полученное утверждение? Почему?

**6.** Напишите утверждение, обратное утверждению «Каждое число, которое может быть представлено в виде отношения двух целых чисел является рациональным». Выясните, является ли это утверждение истинным.

**7.** Нарисуйте пересекающиеся прямые AB и CD. Обозначьте их точку пересечения буквой O. Измерьте полученные углы транспортиром. Определите соблюдение теорем о вертикальных и смежных углах. Доказали ли вы верность этих теорем данным способом?

**8.** Сформулируйте в форме теоремы правило нахождения периметра равностороннего треугольника. Определив условие и утверждение, поменяйте их местами. Верно ли полученное обратное утверждение?

**9.** Сформулируйте в форме теоремы встречавшиеся вам до сих пор задачи. Поменяйте местами условие с утверждением и определите верность обратных предположений.

**10.** Определите условие и утверждение следующих предложений. Назовите предложения обратные этим предложениям и обоснуйте их верность или неверность:

а) Если сумма цифр числа делится на 3, то само число также делится на 3.

б) Число, оканчивающееся на два нуля, делится на 4.

в) Автомобиль, движущийся со средней скоростью 60 км/ч, пройдёт расстояние 240 км за 4 часа.

г) Если величина двух углов треугольника равна 60° и 35°, то третий угол равен 85°.

д) Если слагаемые равны 6793 и 9384, то сумма равна 16177.

е) Поменяйте местами условие и утверждение признаков деления на 5, 9, 6 и 15. Проверьте верность утверждений.

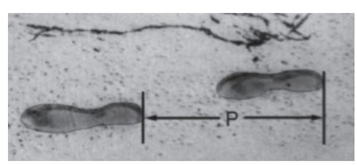


*рис. 3*

**11. Ситуационная задача: *Ходьба.*** На рисунке 3 изображены следы человека. Длина одного шага P – это расстояние между следом пятки одной ноги и следом пятки другой. Число шагов можно приближённо смоделировать с помощью формулы $\frac{n}{p} \approx 140$ где $n$ – количество шагов за 1 минутку, P – длина одного шага в метрах.

1. Вычислите длину шага Ибрагима, если за 1 минуту он прошёл 70 шагов.
2. Ахмед знает, что длина его шага 0,80 м. С помощью приведённой формулы сначала определите сколько метров пройдёт Ахмед за 1 минуту (м/мин.), затем – сколько километров за 1 час (км/час)?

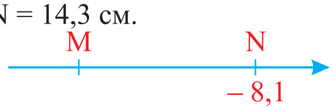
## Проверьте себя

**1.** Найдите сумму чисел –3; 0,8; –2,3; 4,7; –6,02.

**2.** На числовой оси отметьте точки, соответствующие числам $-3\frac{3}{4}$; 2,5; 0,3; –2,3; 7,8.

**3.** Найдите расстояние между точками A(–0,365) и B(–2,99).

**4.** Найдите координату точки M, если MN = 14,3 см.

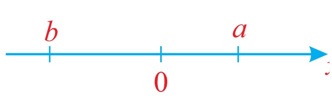



**5.** Прямые *a* и *b* пересекаются в точке O. Определите градусную меру углов, образованных в результате этого пересечения, если один из углов равен 31°.

**6.** Вычислите значение данных выражений:
а) 3,(6) + 4,12(3) – 0,5(7);
б) –1,(72) · 0,2(6) – 5,(123);
в) 0,5(43) – 1,7(54) + 2,19(2).

**7.** Дроби $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$ запишите в виде периодической десятичной дроби и выразите своё мнение о группах цифр, составляющих период.

**8.** Числа *a* и *b* размещены на числовой оси так, как показано на рисунке.




Сравните нижеследующие выражения:
а) $a$ и $b$; б) $-a$ и $-b$; в) $a$ и $-b$;
г) $\frac{1}{2}a$ и $2a$; д) $\frac{1}{6}b$ и $5b$.

**9.** Расставьте числа в порядке возрастания:
а) 0,3; 4,(2); –1,3; 4,2; 0,(3); 3.
б) $\frac{-5}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{-1}{3}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{12}$; 0.

**10.** Постройте биссектрису углов в 50°, 124°, 66°.

**11.** Найдите множество целых решений данных неравенств:
а) $-3,5 < x \le 4$; б) $0 \le y < 8,3$;
в) $-10 < m < -6,1$; г) $-\frac{7}{2} \le a < -3,1$.

**12.** Покажите наибольшее целое решение неравенств с переменной в модуле:
а) $|x| < 7,2$; б) $|2a| \le 1$.

**13.** Если $n(A) = 16; n(B) = 3; n(A \cup B) = 25$, то $n(A \cap B)$ = ? Изобразите эти множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

**14.** В треугольнике ABC угол A равен 130°. Постройте биссектрису этого угла.

**15.** Поменяв местами условие и утверждение признака деления на 3, 6 и 15, напишите обратное предложение и определите его верность или неверность.

**16.** В треугольнике ABC проведены медианы AM, BN и CK. CM = 38 мм, CN = 3,5 см, BK = 0,24 дм. Чему будет равна половина периметра треугольника ABC?

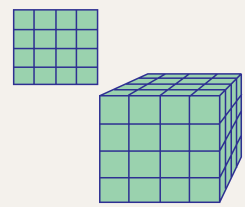
**17.** Определите, какое из нижеследующих измерений: 16 см, 1,7 дм, 0,18 м – будет соответствовать биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной и той же вершины треугольника MNK.

# ГЛАВА II. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. КОНГРУЭНТНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

## 2.1. Степень с натуральным показателем

**Деятельность** — Степень, основание – $a^n$

1. Начертите квадрат со стороной в 4 единицы длины.
2. Этот квадрат разложите на квадраты со сторонами в 1 единицу длины.
3. Определите количество полученных одинаковых квадратов. Найдите площадь квадрата.
4. Начертите куб с ребром в 4 единицы длины.
5. Этот куб разделите на кубы с рёбрами в 1 единицу длины.
6. Определите количество полученных одинаковых кубов. Найдите объём куба.
7. Выскажите своё мнение о результате.



**Деятельность**

Даны числа 9, 16, 64, 81, 343.

1. Данные числа разложите на простые множители ($9 = 3 \cdot 3$).
2. Число одинаковых множителей запишите над этим множителем ($9 = 3^2$).
3. Выскажите своё мнение о полученном выражении и подведите итог.

Степенью числа $a$ с натуральным показателем $n$ ($n > 1$) называется произведение $n$ одинаковых множителей, каждый из которых равен $a$: $a^n$. Здесь $a$ называется основанием, $n$ показателем степени или же степенью.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ раз}}$ Чтение выражения $a^n$: *«а в степени n или n-ая степень числа а»*.

Вычисление значения степени называется **возведением в степень**.

Степень числа $a$ с показателем 1 равна $a$. $a^1 = a$.

**Образец**

Вычислите значение степени: $3^5$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $(-1)^7$; $0^4$; $(-7)^4$.

*Решение:* $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$;

$(-1)^7 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

$(-7)^4 = -7 \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = 2401$.

Возведение в степень называется действием **третьей ступени**. В выражениях, в которых нет скобок, первоначально выполняются действия третьей ступени (возведение в степень), затем действия второй ступени (умножение, деление) и потом только действия первой ступени (сложение, вычитание).

Если в степени $a^n$ основание ($a$) является положительным числом, то степень $a^n$ – положительное число.

Если в степени $a^n$ основание ($a$) является отрицательным числом, а $n$ – чётное число, то $a^n$ является положительным числом, если $n$ – нечётное число, то $a^n$ – отрицательное число. То есть произведение четного числа отрицательных чисел является положительным числом, а произведение нечётного числа отрицательных чисел является отрицательным числом: $(-3)^4 = 81$; $(-3)^3 = -27$.

**Запомните:** $1^n = 1$; $0^n = 0, n > 0$; $a^0 = 1, a \neq 0$.

## Деятельность $a \cdot 10^n$

**Представление числа в стандартном виде:**

**1.** Разложите число 43672 на разрядные слагаемые:
$43672 = 4 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2$

**2.** Полученные разрядные слагаемые запишите в виде степени 10-ти:
$43672 = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2$

**3.** Прочитайте каждое слагаемое и выскажите своё мнение об их написании.

Любое положительное рациональное число можно записать в виде $\boldsymbol{a \cdot 10^n}$ ($n \in \mathrm{N}$). Такая запись называется **стандартным видом числа**. Здесь $1 \leq a < 10$.

$a$ называется **значащей частью числа**, а $n$ – его **порядком**. В основном представление чисел в стандартном виде применяется в записи больших чисел.

## Образец

Запишите числа 2937000; 7364; 6253,64 в стандартном виде.

*Решение:* для того, чтобы показать число в стандартном виде, необходимо представить его в виде произведения двух множителей. Первый множитель должен быть числом, стоящим между 1 и 10, а второй множитель – это разрядная единица, обращающая первый множитель в первоначальное число.

1) $2937000 = 2{,}937 \cdot 1000000 = 2{,}937 \cdot 10^6$;
2) $7364 = 7{,}364 \cdot 1000 = 7{,}364 \cdot 10^3$.

**$5383 = 5{,}383 \cdot 10^3$**
**значащая часть числа: 5,383**
**порядок числа: 3**

## Упражнения

**1.** Данные выражения представьте в виде степени:

а) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; б) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$;

в) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}5)$; г) $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$;

д) $(-5x) \cdot (-5x) \cdot (-5x) \cdot (-5x)$; е) $(p + k) \cdot (p + k) \cdot (p + k) \cdot (p + k)$;

ж) $(xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdot (xy)$; з) $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 4}_{12\ раз} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{25\ раз}$.

**2.** Запишите степени с
а) основанием 10, показателем 5; б) основанием 7, показателем 4;
в) основанием $x$, показателем 9; г) основанием $m$, показателем $k$.
Представьте эти степени в виде произведения.

**3.** Запишите в виде выражения: а) квадрат $-4{,}5$; б) куб $\frac{13}{4}$; в) четвёртую степень произведения чисел $m$ и $n$.

**4.** Выполните действие возведения в степень:

а) $2^7$; б) $5^3$; в) $(1{,}4)^2$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; д) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5$; е) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$;

ж) $(1{,}(5))^2$; з) $3^5$; и) $(-0{,}7)^3$; й) $\left(-\frac{7}{12}\right)^2$; к) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^3$; л) $(-0{,}(6))^2$.

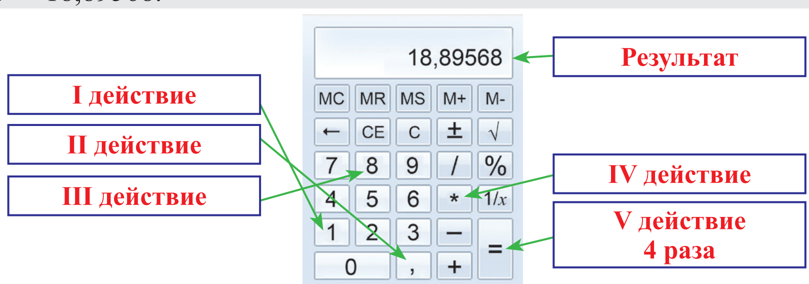
**5.** Вычислите степень с помощью калькулятора:
$16^3$; $(-4)^5$; $24^3$; $2{,}5^6$; $0{,}124^3$; $(-7{,}8)^5$; $3{,}1^7$; $124^4$.

**Указание:**

Чтобы вычислить с помощью калькулятора степень $1{,}8^5$, необходимо набрать на калькуляторе число 1,8 и нажать кнопку « * » один раз, а кнопку « = » 4 раза:

| 1 | , | 8 | * | = | = | = | = | 18,89568 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$1{,}8^5 = 18{,}89568$.




**6.** Вычислите с помощью калькулятора. Полученные числа округлите до одной десятой:
а) $4{,}12^3$; б) $(-0{,}78)^5$; в) $2{,}21^6$; г) $2{,}08^3 : 1{,}56$; д) $1{,}67^3 \cdot 4{,}7$;
е) $7{,}39^4$; ж) $(-1{,}053)^3$; з) $2{,}73^5 \cdot 27{,}4$; и) $(1{,}29 + 8{,}052)^3$.

**7.** Заполните таблицу:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | | | | | | | | | 81 | |
| $n^3$ | | | | 64 | | | | | | |
| $n^4$ | | | | | | | 2401 | | | |

**8.** Заполните таблицу:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | | | | | | | | | | |
| $3^n$ | | | | | | | | | | |

По таблицам установите свойство периодичности (повторяемости) последней цифры значения степеней с основанием 2 и 3. Какова периодичность последней цифры значения степеней с основаниями 1, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Основываясь на этом свойстве, определите последнюю цифру значений нижеприведённых степеней: $21^8$; $32^5$; $4^{89}$; $5^{100}$; $10^{99}$; $8^{54}$.

***Указание:*** *Показатель степени разделите на число периодов последней цифры значения степени, и основание возведите в степень, равную числу полученному в остатке.*

**9.** Вычислите степень $x^n$ при нижеприведённых значениях $x$ и натуральных чисел $n$:
а) $x = 1,(2)$; $n = 3$; б) $x = 0,0(7)$; $n = 2$; в) $x = 1,(2)$; $n = 4$.

**10.** Вычислите значение выражения а) $3^n + 2^n$, если $n = 2$;
б) $a^4 - a^2$ если $a = -\dfrac{3}{4}$.

**11.** Представьте:
а) каждое из чисел в виде квадрата: 0,49; 0,64; 169; $1\dfrac{11}{25}$; 1,44; $\dfrac{100}{121}$; 0,0004.
б) каждое из чисел в виде куба: 64; −216; 0,001; $\dfrac{-8}{125}$; $\dfrac{27}{64}$; $4\dfrac{17}{27}$; $-1\dfrac{127}{216}$.
в) каждое из чисел в виде степени числа 5: 25; 125; 625; 15625.

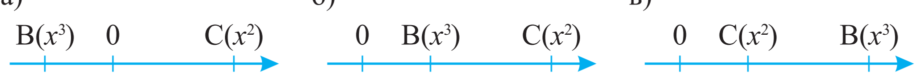
**12.** Представьте данные числа в стандартном виде: 20000; 24363; 89,0736; 73553535; 356,4; 1000000; 857164; 12,554; 9827; 3747583; 63543,63.

**13.** а) Найдите значение выражения: $8 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1$;
б) Разложите данные числа на разрядные слагаемые:
6354; 839400; 178005; 203004 (используйте возведение 10-ти в степень).
в) Используя степень 10, число $8{,}45 \cdot 10^8$ запишите в трёх вариантах.

**14.** Расставьте в порядке возрастания значения выражений $7^n$; $(-5)^n$; $0{,}6^n$; $(-1{,}7)^n$; $0^n$ если а) $n$ чётное число, б) $n$ нечётное число.

**15.** На основе нижеприведённых неравенств определите, является ли $n$ чётным или нечётным числом (если это возможно):
а) $(-7)^n > (-5)^n$; б) $(-7)^n < (-5)^n$; в) $(-7)^n > 5^n$;
г) $(-7)^n < 5^n$; д) $7^n > 5^n$; е) $7^n > (-5)^n$.

**16.** Основываясь на рисунки, определите место точки A($x$):
а) б) в)




**17.** Не производя вычисления, расставьте степени в порядке возрастания:
а) $(-0{,}7)^9$; $(-0{,}7)^6$; $(-0{,}7)^2$; б) $(-0{,}3)^4$; $(-0{,}3)^2$; $(-0{,}3)^6$;
в) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^4$; $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^5$; $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2$; г) $(-0,(1))^2$; $(-0,(1))^5$; $(-0,(1))^7$.

## 2.2. Произведение степеней с одинаковыми основаниями

**Деятельность** $a^m \cdot a^n$

1. Найдите произведение степеней $a^3$ и $a^2$.
2. Каждую из степеней представьте в виде произведения одинаковых множителей.
3. Определите число всех множителей каждой из степеней.
4. Результат запишите в виде одной степени.
5. Выскажите своё мнение о полученном результате.

**Образец**

Найдите произведение степеней $7^3$ и $7^6$.

*Решение:* $7^3 \cdot 7^6 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{3+6} = 7^9$.

$7^3 \cdot 7^6 = 7^{3+6} = 7^9$.

**Свойство 1.** Для любого числа $a$ и натуральных чисел $m$ и $n$ равенство $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ является верным. Чтобы найти произведение степеней с одинаковым основанием, следует оставить основание степеней без изменений, а показатели степеней сложить и их сумму записать над основанием.

**Образец**

Найдите произведение степеней:

а) $2^8 \cdot 2^5$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^7$; в) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3$; г) $25 \cdot 5^4$.

*Решение:* а) $2^8 \cdot 2^5 = 2^{8+5} = 2^{13}$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^7 = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{11}$;

в) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3 = (-2)^{10+3} = (-2)^{13}$; г) $25 \cdot 5^4 = 5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$.

Основное свойство степени верно также для произведения трёх и более степеней $\boldsymbol{a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}}$.

Поменяв местами правую и левую сторону в равенстве $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, получаем $\boldsymbol{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$.

**Образец**

Представьте степени в виде произведения:

а) $8^{12+7}$; б) $(-11)^{2+9}$; в) $\left(\frac{9}{17}\right)^{4+3}$; г) $(0,(56))^{7+2}$.

*Решение:* а) $8^{12+7} = 8^{12} \cdot 8^7$; б) $(-11)^{2+9} = (-11)^2 \cdot (-11)^9$;

в) $\left(\frac{9}{17}\right)^{4+3} = \left(\frac{9}{17}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{17}\right)^3$; г) $(0,(56))^{7+2} = (0,(56))^7 \cdot (0,(56))^2$.

## Упражнения

**1.** В приведённых примерах, исправляя ошибки, правильно запишите степени и объясните
а) $a^6 \cdot a^7 = a^{12}$; б) $x^{16} \cdot x^2 = x^{18}$; в) $b^3 \cdot b^5 \cdot b = b^8$; г) $m^{7+8} = m^7 + m^8$;
д) $a^3 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot a^5 = a^{13}$; е) $k \cdot k^2 = k^3$; ж) $n^3 \cdot n^5 + n = n^9$; з) $b^4+b^2+b^7 = b^{13}$.

**2.** Дано произведение $a^k \cdot a^m \cdot a$. Запишите его в виде степени и вычислите значение степени при $a = 3$, $k = 2$, $m = 4$.

**3.** Имея в виду, что в произведении $m^5 \cdot m^2 \cdot m^3$: а) $m = 2$; б) $m = 10$; в) $m = (-3)$; г) $m = \dfrac{2}{5}$ запишите его в виде степени и вычислите.

**4.** Записав произведение в виде степени, заполните таблицу:

| | | |
|---|---|---|
| $(-3{,}2x)^2 \cdot (-3{,}2x)^4 =$ | $3^7 \cdot 3^5 \cdot 3^2 =$ | $(-0{,}6)^4 \cdot (-0{,}6) =$ |
| $(a-b)^5 \cdot (a-b)^8 =$ | $7^2 \cdot 7^4 \cdot 7 \cdot 7^6 =$ | $16^2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16^5 =$ |
| $(x+2y)^9 \cdot (x+2y)^{10} =$ | $12^4 \cdot 12 \cdot 12^9 =$ | $2{,}3 \cdot 2{,}3^8 \cdot 2{,}3^6 \cdot 2{,}3 =$ |
| $\left(\dfrac{3}{4}x\right)^{11} \cdot \left(\dfrac{3}{4}x\right)^{8} \cdot \left(\dfrac{3}{4}x\right)^{9} =$ | $x^{11} \cdot x^8 \cdot x \cdot x^3 =$ | $\left(1{,}(5)\right)^3 \cdot \left(\dfrac{14}{9}\right)^8 =$ |

**5.** В каждой клетке вместо «?» запишите число в виде степени:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2^4 \leftarrow 16$ | $? \leftarrow 32$ | $? \leftarrow 25$ | $? \leftarrow 64$ | $? \leftarrow 225$ |
| $? \leftarrow 128$ | $? \leftarrow 512$ | $? \leftarrow 256$ | $? \leftarrow 27$ | $? \leftarrow 1024$ |
| $? \leftarrow 81$ | $? \leftarrow 243$ | $? \leftarrow 361$ | $? \leftarrow 729$ | $? \leftarrow 2187$ |

**6.** Используйте степень с основанием 2 для вычисления произведений:
а) $8 \cdot 32$; б) $4 \cdot 32$; в) $16 \cdot 64$; г) $128 \cdot 2$; д) $256 \cdot 64$; е) $8 \cdot 1024$.

**7.** Используйте степень с основанием 3 для вычисления произведений:
а) $9 \cdot 3$; б) $27 \cdot 81$; в) $3^4 \cdot 9$; г) $243 \cdot 3^2$; д) $729 \cdot 27$; е) $81 \cdot 3^6$.

**8.** Определите значение $n$ в равенствах:
а) $3^n = 27$; б) $2^n = 64$; в) $5^n = 125$;
г) $2^n = 32$; д) $7^n = 343$; е) $3^{2n} = 729$.

$5^n = 625$; $5^4 = 625$;
$n = 4$

**9.** Упростите выражения:
а) $5^{n-2} \cdot 5^n$; б) $17^{m+1} \cdot 17^{m-1}$;
в) $6^{1-k} \cdot 6^{k+3}$; г) $4^{n-3} \cdot 4^{m-1}$.

$= 4^{n-3+(m-1)} = 4^{n-3+m-1} =$
$= 4^{n+m-4}$

## 2.3. Отношение степеней с одинаковыми основаниями

**Деятельность** $a^m : a^n$

1. Запишите в виде дроби отношение степеней $a^3$ и $a^2$.
2. Обратите каждую степень в произведение с одинаковыми множителями.
3. Сократите одинаковые множители в числителе и знаменателе дроби.
4. Выскажите своё мнение о полученном результате.
5. Каким другим способом можно найти отношение степеней $a^3$ и $a^2$?

**Образец**

Найдите отношение степеней $11^9$ и $11^6$.

*Решение:* $11^9 : 11^6 = \frac{11^9}{11^6} = \frac{11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11}{11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11} = \frac{11\cdot11\cdot11}{1} = 11^3.$

$11^9 : 11^6 = 11^{9-6} = 11^3.$

**Свойство 2:** Для любого числа $a$ ($a \neq 0$) и натуральных чисел $m$ и $n$ верно равенство $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$. Чтобы найти отношение степеней с одинаковыми основаниями, следует основание степеней оставить без изменений, а из показателя степени делимого вычесть показатель степени делителя и записать разность над основанием.

**Образец**

Найдите отношение степеней:

а) $2^8 : 2^5$; б) $\left(\frac{7}{15}\right)^{15} : \left(\frac{7}{15}\right)^8$; в) $(-7)^{10} : (-7)^3$; г) $32 : 2^4$.

*Решение:* а) $2^8 : 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$; б) $\left(\frac{7}{15}\right)^{15} : \left(\frac{7}{15}\right)^8 = \left(\frac{7}{15}\right)^{15-8} = \left(\frac{7}{15}\right)^7$;

в) $(-7)^{10} : (-7)^3 = (-7)^{10-3} = (-7)^7$; г) $32 : 2^4 = 2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2.$

При перестановке правой и левой сторон равенства $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$ получается $\boldsymbol{a^{m-n} = a^m : a^n}$.

**Образец**

Представьте степени в виде отношения степеней:

а) $13^{10-7}$; б) $(-10)^{9-5}$; в) $\left(\frac{9}{7}\right)^{4-3}$; г) $(0,(6))^{7-2}$.

*Решение:* а) $13^{10-7} = 13^{10} : 13^7$; б) $(-10)^{9-5} = (-10)^9 : (-10)^5$;

в) $\left(\frac{9}{7}\right)^{4-3} = \left(\frac{9}{7}\right)^4 : \left(\frac{9}{7}\right)^3$; г) $(0,(6))^{7-2} = (0,(6))^7 : (0,(6))^2$.

## Деятельность $a^0 = 1$

Найдите отношение степеней $a^3$ и $a^3$ двумя способами:

1. а) согласно свойству, по которому отношение равных чисел, отличных от нуля, равно 1;
   б) согласно делению степеней с одинаковыми основаниями.
2. Приравняйте полученные результаты.
3. Выскажите своё мнение о полученных результатах.

Отношение равных чисел равно единице: $a : a = 1$; при $a \neq 0$. Так как $1 = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ при $a \neq 0$, то принимается: $a^0 = 1$. Степень с показателем 0 равна 1.

## Образец

а) $13^0 = 1$; б) $(-10)^0 = 1$; в) $\left(\frac{9}{7}\right)^0 = 1$; г) $(0,(6))^0 = 1$.

## Упражнения

**1.** В приведённых примерах, исправляя ошибки, правильно запишите результаты и объясните:

а) $a^8 : a^7 = a^{15}$; б) $x^{16} : x^2 = a^8$; в) $b^{30} : b^5 \cdot b = b^8$; г) $m^{12-8} = m^{12} - m^8$;
д) $a^3 \cdot a^3 : a^2 \cdot a^5 = a^3$; е) $k^{44} \cdot k^2 = k^{22}$; ж) $n^{11} : n^5 = n^{10}$; з) $b^{13} - b^8 - b^2 = b^3$.

**2.** Дано выражение $a^k : a^m \cdot a$. Запишите это выражение в виде степени и вычислите значение степени при $a = 3$, $k = 2$, $m = 4$.

**3.** Запишите выражение $m^8 : m^2 : m^3$ в виде степени и вычислите его значение, учитывая, что а) $m = 3$; б) $m = 10$; в) $m = (-2)$; г) $m = \frac{1}{7}$.

**4.** Записав числа в виде степеней, заполните таблицу:

| | | |
|---|---|---|
| $(3,2)^{24} : (3,2)^4 =$ | $5^7 : 5^5 : 5^2 =$ | $(-0,16)^4 : (-0,16) =$ |
| $(a-b)^{15} : (a-b)^8 =$ | $7^{20} : 7^4 \cdot 7 =$ | $21^2 : 21 \cdot 21^5 =$ |
| $(x-2y)^{19} : (x-2y)^{10} =$ | $11^4 : 11 \cdot 11^9 =$ | $1,7 \cdot 1,7^8 : 1,7^6 \cdot 1,7 =$ |
| $\left(\frac{3}{4}\right)^{31} : \left(\frac{3}{4}\right)^8 : \left(\frac{3}{4}\right)^9 =$ | $x^{15} : x^7 \cdot x : x^3 =$ | $(1,(7))^{13} : (1,(7)^8 =$ |

**5.** Представьте отношение в виде степени:

а) $\left(\frac{1}{4}x\right)^{20} : \left(\frac{1}{4}x\right)^{12}$; б) $(-3m)^9 : (-3m)^4$; в) $(2a+b)^8 : (2a+b)^7$;

г) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{35} : \left(-1\frac{1}{5}\right)^{25}$; д) $(1,(54))^{11} : (1,(54))^{11}$; е) $(a-b)^{55} : (a-b)^{54}$.

**6.** Заменив дроби на знак деления, найдите отношение степеней:

а) $\dfrac{\left(2\frac{5}{7}\right)^9}{\left(2\frac{5}{7}\right)^7}$; б) $\dfrac{\left(-1\frac{1}{6}\right)^{18}}{\left(-1\frac{1}{6}\right)^{11}}$; в) $\dfrac{(-0,7)^{29}}{(-0,7)^{27}}$; г) $\dfrac{3^9\cdot 27}{3^5\cdot 81}$; д) $\dfrac{16\cdot 2^{19}}{2^{22}}$;

е) $\dfrac{7^{12}}{7^7\cdot 49}$; ж) $\dfrac{5^{17}\cdot 125}{5^7\cdot 625}$; з) $\dfrac{(0,(21))^{15}}{(0,(21))^{14}}\cdot\dfrac{\left(4\frac{5}{7}\right)^8}{\left(4\frac{5}{7}\right)^7}$; и) $\dfrac{(0,7)^9\cdot\frac{7}{10}}{(0,7)^7\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^2}$.

**7.** На основе приведённого примера представьте данные степени в виде произведения или частного:

а) $x^{10}$; б) $y^6$; в) $11^7$;
г) $4^{13}$; д) $9^{14}$; е) $5^{22}$.

$5^{22} = 5^{10}\cdot 5^3\cdot 5^5\cdot 5^4$;
$5^{22} = 5^{25} : 5^3$.

**8.** Вместо звёздочки впишите такую степень с основанием $c$, чтобы равенства были верными. Ответы обоснуйте посредством действия деления:

а) $c^2\cdot * = c^8$; б) $ccc\cdot * = c^{10}$; в) $cc^7\cdot * = c^{18}$;
г) $*\cdot c^{14} = c^{21}$; д) $*\cdot cc^4 = c^9$; е) $*\cdot c^{15}\cdot c^3 = c^{43}$.

**9.** Решите уравнения:

а) $x : 7^2 = 7^8$; б) $11^6 : y = 11^3$; в) $a : 45^9 = 45^{12}$.

**10.** Анализируя приведённую таблицу, найдите значение X:

| № | A | B | C | X |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 4 | −3 | −1,2 | $(A^3+B^2)\cdot C^2$ |
| **2** | 5 | 7 | −139 | $2^A - B^2 + C^0$ |
| **3** | $\frac{4}{5}$ | $-1\frac{1}{4}$ | 0 | $A^3(B^2+100^C)$ |

**11.** Найдите значение выражений:

а) $3x^0$ если, $x = 2,6$; б) $-8,5y^0$ если, $y=-1\dfrac{2}{3}$;

в) $10a^2b^0$ если, $a=-3$, $b=-12$; г) $18a^0d^3$ если, $a=-\dfrac{3}{5}$, $d=-\dfrac{1}{3}$.

**12.** Упростите выражения:

а) $x^4x^0$; б) $a^9 : a^0$; в) $\dfrac{m^0}{k^8}$; г) $n^0 - m^0$; д) $p^0 + c^0$.

**13.** Упростите выражения:

а) $7^{n+1} : 7^n$; б) $a^k : a^{k-1}$;
в) $11^{a+2} : 11^{a-1}$; г) $3^{m+4} : 3^{m-5}\cdot 3^{10}$;
д) $4^a : 4^{a-7} : a^0$; е) $m^{a+1} : m^{a-2}$.

$m^{a+1} : m^{a-2} =$
$= m^{a+1-(a-2)} =$
$= m^{a+1-a+2} = m^3$

**14.** В выражении $a^{n+1} : a^m$ вместо $m$ и $n$ впишите такие числа, чтобы степень частного была равна а) 8; б) 11; в) 7.

## 2.4. Возведение степени в степень

**Деятельность** $(a^m)^n$

1. Назовите основание и показатель степени $(a^3)^2$ и представьте её в виде произведения одинаковых множителей $(a^3)$.
2. Определите, сколько раз используется множитель $a^3$ в этом выражении.
3. Каждый множитель $a^3$ запишите в виде произведения.
4. Определите количество множителей $a$.
5. Полученное число запишите в виде степени с основанием $a$.
6. Выскажите своё мнение о полученном результате.

**Образец**

Запишите в виде степени выражение $\boldsymbol{(a^m)^n}$.

*Решение:* $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ раз} =$

$$= \underbrace{\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ раз}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ раз}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ раз}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ раз}\right)}_{n\ раз} = a^{mn}$$

**Следовательно, $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$.**

*Проанализируйте:* $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{mn}}$

Для возведения степени в степень следует основание оставить неизменным, а показатели степени умножить друг на друга и записать их произведение в показателе. Следовательно, возведение степени в степень означает умножение степеней с одинаковым основанием.

**Образец**

Найдите значение степени $(2^4)^3$.

*Решение:* $(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$. $\quad (2^4)^3 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

**Образец**

Возведите степень в степень.

а) $(3^7)^2$; б) $((-10)^9)^5$; в) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)^2$; г) $((0,(6))^7)^2$; д) $((-5)^5)^3$; е) $(-(-4)^3)^7$.

*Решение:* а) $(3^7)^2 = 3^{14}$; б) $((-10)^9)^5 = (-10)^{45}$; в) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^4$;

г) $((0,(6))^7)^2 = (0,(6))^{14}$; д) $((-5)^5)^3 = -5^{15}$; е) $(-(-4)^3)^7 = 4^{21}$.

## Упражнения

**1.** Исправьте ошибки в равенствах и обоснуйте свой ответ:

а) $(x^3)^2 = x^5$; б) $(a^9)^3 = x^{27}$; в) $(m^7)^5 = x^2$; г) $x^5 \cdot (x^{10})^0 = x^{15}$;
д) $(x^3)^3 : x^5 = x^1$; е) $(n^2)^4 \cdot (n^9)^2 = n^{25}$; ж) $(m^5)^2 = m^{25}$; з) $(a^{23})^2 = m^{46}$.

**2.** В приведённых равенствах вместо $x$ запишите такое число, чтобы получилось верное равенство. Обоснуйте свой ответ:

а) $(3^4)^x = 3^{12}$; б) $(a^x)^{10} = a^{40}$; в) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^2\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^{18}$;

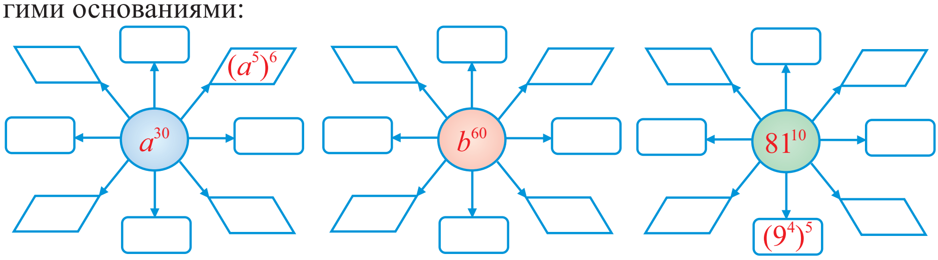
г) $(x^4)^{25} = 3^{100}$; д) $(8^3)^x : 8^5 = 8^{10}$; е) $5^x \cdot 5^x = 5^{26}$.

**3.** Степень $2^{20}$ запишите в виде степени с основанием а) $2^2$; б) $2^4$; в) $2^5$; г) $2^{10}$. Назовите, свойство которое вы использовали для этого.

**4.** Основываясь на таблицу, определите удобный способ вычисления степеней $3^6$; $3^{10}$; $3^{16}$.

| $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | ... | $3^?$ | $3^?$ | ? | ... | $3^{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | ... | ... | 6561 | ... | 59049 | | |

**5.** Покажите несколькими способами данные степени в виде степеней с другими основаниями:




**6.** Вместо точек запишите такие выражения, чтобы получилось верное равенство:

а) $(...)^2 \cdot (...)^3 = a^7$; б) $(...)^4 \cdot (...)^3 = k^{10}$; в) $(...)^2 \cdot (...)^3 = c^{13}$;
г) $(...)^5 \cdot (...)^4 = a^{23}$; д) $(...)^2 \cdot (...)^3 = k^7$; е) $(...)^2 \cdot (...)^3 = c^{11}$.

**7.** Самир, сравнивая выражения $4^{10}$ и $8^7$, пришёл к выводу, что число $8^7$ меньше. По-вашему, является ли его вывод верным? Если нет, объясните причину. Сравните значения нижеприведённых выражений:

а) $3^8$ и $27^3$; б) $8^9$ и $2^{28}$; в) $25^3$ и $125^2$; г) $36^4$ и $216^2$.

**8.** Напишите несколько делителей данных чисел:

а) $2^6$; б) $3^{11}$; в) $2^5 \cdot 3^4$; г) $10^{10}$.

**9.** Решите уравнения:

а) $x^5 = 32$; б) $x \cdot (7^2 \cdot 9) = 49 \cdot 3^6$; в) $2^4 \cdot 2^x = 2^{17}$.

## 2.5. Возведение произведения в степень

**Деятельность** $(a \cdot b)^n$

1. Степень $(a \cdot b)^3$ покажите в виде произведения.
2. Определите, сколько раз в этом выражении использовано произведение $(a \cdot b)$.
3. Сгруппируйте произведение одинаковых множителей.
4. Запишите в виде степени произведение одинаковых множителей.
5. Выскажите своё мнение о полученном результате.

**Образец**

Выражение $(a \cdot b)^4$ запишите в виде произведения степеней.

*Решение:* $(a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ (согласно сочетательному закону)
$(a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = a^4 \cdot b^4$. $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$.

*Проанализируйте:* $\mathbf{(abc)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$

Для возведения в степень произведения следует множители возвести в ту же степень и найти их произведение. $\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

**Образец**

Степень произведения запишите в виде произведения степеней:

а) $(abcd)^5$; б) $(4 \cdot 6)^2$; в) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2$; г) $(-2 \cdot 5)^3$.

*Решение:* а) $(abcd)^5 = a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot d^5$; б) $(4 \cdot 6)^2 = 4^2 \cdot 6^2 = 16 \cdot 36 = 576$;
в) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{25}{49} \cdot \frac{49}{25} = 1$; г) $(-2 \cdot 5)^3 = (-2)^3 \cdot 5^3 = -1000$.

*Проанализируйте:* $\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

При умножении степеней с одинаковыми показателями, надо найти произведение их оснований, а показатель оставить неизменным.

**Образец**

Произведение степеней запишите в виде степени произведения.

а) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$; б) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2$; в) $(-1{,}2)^4 \cdot 5^4$; г) $8^5 \cdot 2^3$.

*Решение:* а) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 = (abc)^5$; в) $(-1{,}2)^4 \cdot 5^4 = (-1{,}2 \cdot 5)^4 = (-6)^4 = 6^4$;
б) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2 = 1^2 = 1$; г) $8^5 \cdot 2^3 = (2^5)^3 \cdot 2^3 = (2^5 \cdot 2)^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$.

## Упражнения

**1.** Определите, верны или неверны приведённые равенства. Обоснуйте свой ответ:
а) $(xy)^5 = xy^5$; б) $(2mn)^3 = 8m^3n$; в) $(-p^3k)^2 = p^6k$.

**2.** Показав выражение $(2abc)^3$ в виде произведения степеней, учащиеся получили несколько результатов. Определите, кто из них дал верный ответ.

| Самир | Гюнай | Юсиф | Фарид | Мурад | Мелек |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^3abc$ | $2^3abc^3$ | $2abc^3$ | $8a^3b^3c^3$ | $2a^3b^3c^3$ | $8a^3bc^3$ |

**3.** Степень произведения покажите в виде произведения степеней:

а) $(ab)^7$; б) $(-3m)^4$; в) $(10xyz)^2$; г) $(-ac)^9$;
д) $(mpk)^{12}$; е) $(-7ab)^5$; ж) $(-0{,}5bd)^3$; з) $(-xn)^8$.

**4.** Обоснуйте нижеприведённые предложения:
а) квадраты противоположных чисел равны;
б) кубы противоположных чисел являются противоположными числами;
в) что вы можете сказать о чётных и нечётных степенях противоположных чисел?
г) модули противоположных чисел равны.

**5.** Анализируя, заполните таблицу и сделайте вывод:

| Длина стороны квадрата | Площадь квадрата | Как изменилась площадь? | Длина ребра куба | Объём куба | Как изменился объём? |
|---|---|---|---|---|---|
| *1)* $a$ | | | *3)* $a$ | | |
| $2a$ | | | $2a$ | | |
| $3a$ | | | $3a$ | | |
| *2)* 5 см | | | *4)* 2 см | | |
| 10 см | | | 8 см | | |
| 20 см | | | 12 см | | |

**6.** Возведите в степень данные выражения:

а) $(2x^2y^3)^2$; б) $(-3m^3np^4)^8$; в) $\left(\frac{1}{2}a^9b^2\right)^3\cdot(ab)^5$; г) $(-4{,}5pk^2d)^2\cdot(2pd)^2$.

**7.** Представьте в виде степени:

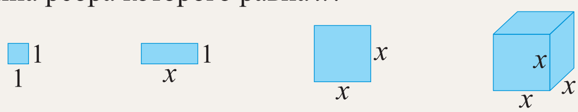
а) $a^5\cdot b^5\cdot k^5$; б) $\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\cdot(m)^{12}\cdot a^{12}$; в) $25x^2y^4$;
г) $-27b^6k^9$; д) $\frac{64}{169}r^8$; е) $81a^4b^8$;
ж) $(20+44)a^3$; з) $\frac{-125}{216}x^{18}$; и) $\frac{25}{64}x^{16}\cdot y^{12}$.

$$=\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\left(x^8\right)^2\cdot\left(y^6\right)^2=$$
$$=\left(\frac{5}{8}x^8y^6\right)^2.$$

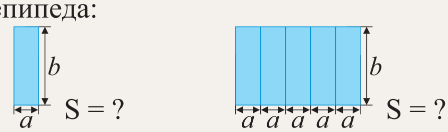
## 2.6. Одночлен и его стандартный вид

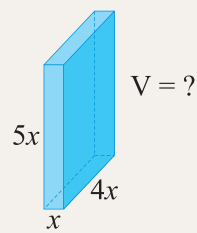
**Деятельность** — **Одночлен, степень, коэффициент**

**1.** Чему равна площадь квадрата, длина стороны которого равна 1 единице длины, площадь прямоугольника, длина сторон которого равна 1 и $x$ единицам длины, площадь квадрата, длина стороны которого равна x, объём куба, длина ребра которого равна $x$?




**2.** На основе рисунков запишите выражения для определения площади прямоугольников и объёма прямоугольного параллелепипеда:




**3.** Назовите в полученных выражениях числовые и буквенные множители. Сколько раз в каждом выражении участвовали числовой и буквенный множители?

Выражение, состоящее из произведения чисел и степеней переменных с натуральными показателями, называется одночленом. Например: 3; $-2ab$; $0{,}5x^2y^3$; $m^2$.

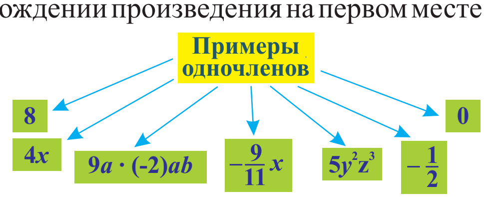
Математическое выражение, являющееся произведением числа и натуральных степеней различных переменных, называется стандартным видом одночлена. Буквы в одночленах стандартного вида принято записывать в алфавитном порядке: ***a b c d ... i j k l m n ... x y z***

Числовой множитель в одночлене стандартного вида называется **коэффициентом** одночлена. Сумма натуральных показателей степеней переменных называется степенью одночлена.

**Образец**

Найдите произведение: $-3a \cdot 2ab$.

*Решение:* Произведение состоит из двух выражений. В первом выражении $(-3a)$ числовым множителем является $-3$, буквенным множителем – $a$. Во втором выражении $(2ab)$ числовым множителем является 2, буквенные множители – $a$ и $b$. При нахождении произведения на первом месте записываются произведения коэффициентов, буквенные множители же записываются рядом с коэффициентами: $-3a \cdot 2ab = -6a^2b$.



Равные или отличающиеся только коэффициентами одночлены называются **подобными одночленами**. Над подобными одночленами можно производить действия сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления. При выполнении действий сложения и вычитания складываются или вычитаются коэффициенты одночлена, переменные же остаются неизменными и результат умножается на общее буквенное выражение. Произведение и натуральная степень одночленов тоже является одночленом.

Два одночлена, различающиеся только знаком, называются **противоположными одночленами**.

## Образец

1) $a^2b$, $3a^2b$, $-2a^2b$, $\frac{4}{7}a^2b$ подобные одночлены.

2) $12xy^5$ и $-12xy^5$ противоположные одночлены.

3) $6 + 7 = 13$ степень одночлена $\frac{-3}{17}x^6y^7$.

4) $4 + 3 + 1 = 8$ степень одночлена $8a^4b^3c$.

Если в одночлене нет переменной (буквенного выражения), то его степень считается равной нулю. Натуральная степень нуля равна нулю: $0^n = 0$ $(n \in N)$

**Одночлен** $-2a^2b\cdot(-3)ab^6\cdot c$ → Совершается действие умножения → **Стандартный вид** $6a^3b^7c$ → **Показатель степени** $3 + 7 + 1 = 11$

**Стандартный вид** $6a^3b^7c$ → **Коэффициент** 6; **Противоположность** $-6a^3b^7c$; **Подобие** $0{,}7a^3b^7c$

## Упражнения

**1.** Какие из нижеследующих выражений являются одночленами?

а) $2{,}5x^3y$; б) $a^2 + a$; в) $a^2 - b^4$; г) $-m$; д) $c^{10}$;

е) $-7xy^4$; ё) $a^8a$; ж) $-2\frac{7}{13}m^3m^2m$; з) 0,6; и) $\frac{10}{c}$;

к) $a(-0{,}5)$; л) $3(x+y)^2$; м) $-34$; н) 1; о) $\frac{2c}{d}$.

**2.** а) Напишите одночлен с коэффициентом 14, переменными $a$, $b$ и $c$, степенью 11. Покажите его в виде произведения двух одночленов.

б) Напишите одночлен нестандартного вида с коэффициентом $-15$, переменными $x$ и $y$, показателем степени 8. Представьте его в стандартном виде.

в) Запишите любой одночлен стандартного вида и ему противоположный.

**3.** Выполните умножение, опираясь на алгоритм приведения одночлена в стандартный вид: $6a \cdot 3ab \cdot \left(-\frac{5}{6}a^2b\right)$

1. На первом месте запишите произведение всех числовых множителей (коэффициентов) одночлена: $6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -15$.
2. Запишите в алфавитном порядке переменные (буквенные множители) одночлена $a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b$.
3. Запишите произведение переменных в виде степени: $a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = a^4b^2$.

**Общая запись:** $6a \cdot 3ab \cdot \left(-\frac{5}{6}a^2b\right) = 6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = -15a^4b^2$

Приведите в стандартный вид нижеследующие одночлены:

а) $4x^2 \cdot 3y^3$;   б) $0{,}2a \cdot \frac{1}{2}c^2 \cdot (-7b)$;   в) $(-a)^2 \cdot (-a)^3$;
г) $-\frac{2}{3}ab^2 \cdot (6ac)^2$;   д) $-1{,}2m^2n \cdot 0{,}3m$;   е) $-3bc^3 \cdot (-y^4) \cdot \frac{5}{9}b^2y$.

**4.** Приведите одночлены в стандартный вид, определите коэффициент и показатель степени.
а) $3mmdm \cdot 7md^2$;   б) $(-0{,}1ky^4)^2 \cdot 30y^2$;   в) $-1{,}8cab^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}ac\right)^2$;
г) $14yx^2yx \cdot \left(-\frac{5}{7}xy\right)$;   д) $(5ab)^3 \cdot (-0{,}2a^2b)^2$;   е) $12{,}5(-n)b \cdot (0{,}2bn^2)^3$.

**5.** Севиль представила одночлен $16a^4b^8$ в виде $(4a^2b^4)^2$, а Самир в виде $(2ab^2)^4$. Какое из написанных ими выражений верно? Обоснуйте свой ответ.

**6.** Покажите нижеприведённые одночлены в виде степени одночлена:
а) $64n^{12}d^{20} = (...)^2$;   б) $6\frac{1}{4}a^{18}b^6 = \left(\frac{5}{2}...\right)^2$;   в) $-\frac{1}{125}m^3n^3k^6 = (...)^3$;
г) $-32x^{10}y^{15} = (...)^5$;   д) $0{,}0081a^4b^8c^{12} = (...)^4$;   е) $0{,}008p^9k^{21} = (...)^3$.

**7.** Составьте такие одночлены с переменными $m$ и $n$, у которых:
а) коэффициенты одинаковые, а буквенные множители разные;
б) буквенные множители одинаковые, а коэффициенты разные.
В каком случае получились подобные одночлены?

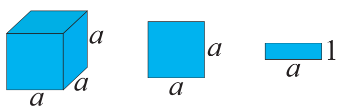
**8.** Наиль, Фарид, Юсиф, Анар записали одночлены подобные одночлену $7ab^5c^2$. Определите, чей результат является верным. Объясните, почему другие ответы не являются верными:

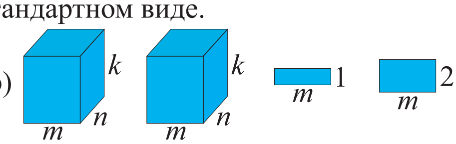
| **Одночлен** | **Ответ Наиля** | **Ответ Фарида** | **Ответ Юсифа** | **Ответ Анара** |
|---|---|---|---|---|
| $7ab^5c^2$ | $13ab^5c$ | $-9ab^5c^2$ | $1\frac{8}{11}ab^5c^2$ | $7a^5bc^2$ |

| Напишите одночлены, подобные нижеприведённым одночленам: | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{9}mn^2k^3$ | $-42x^6y$ | $2abc$ | $-56$ | $2{,}34t^7$ |
| | | | | |

**9.** Используя переменные $a$, $b$ и $c$, напишите 5 подобных одночленов. Найдите их сумму.

**10.** Найдите объёмы и площади нижеприведённых фигур. Запишите произведение полученных одночленов в стандартном виде.

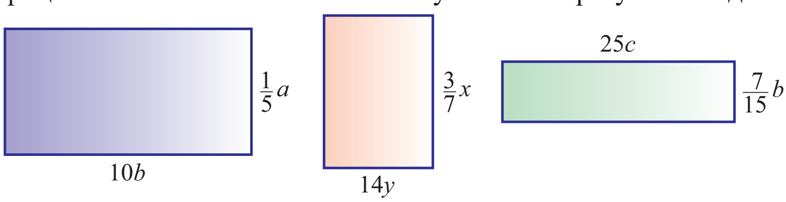
а) 


b) 

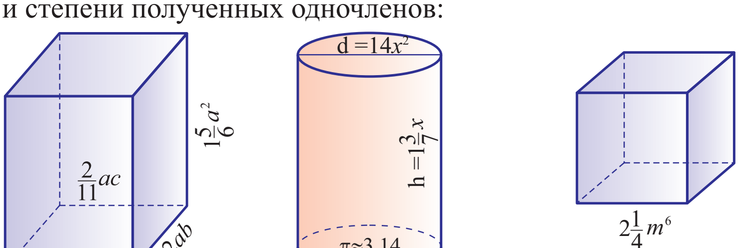

**11.** Вместо буквы М запишите такой одночлен, чтобы получилось верное равенство:

а) $M \cdot 5a^3b = 20a^7b^4c^2$; б) $-6c^4k^5 \cdot M = 3bc^9k^{10}$; в) $M \cdot (2nx^8)^2 = 6n^2x^{20}y$;
г) $(2kp^4)^3 \cdot M = 72k^5y^{15}$; д) $M \cdot M = 16x^4a^{12}$; е) $M \cdot M \cdot M = 27x^{12}y^{15}$.

**12.** Найдите площадь прямоугольника с данными сторонами. Определите коэффициент и показатель степени полученного в результате одночлена:




**13.** Найдите объёмы фигур с данными измерениями. Определите коэффициенты и степени полученных одночленов:




**14.** Запишите выражения в виде одночленов или суммы одночленов:

а) произведение семикратного значения числа $a$ с двукратным значением квадрата числа $b$;

б) сумму девятикратного значения куба числа $m$ и трёхкратного значения числа $n$;

в) двукратное значение суммы куба числа $x$ и квадрата числа $y$.

## 2.7. Возведение частного (дроби) в степень

**Деятельность** $(a:b)^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n$

1. Представьте степень $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ в виде произведения одинаковых множителей.
2. Определите, сколько раз в этом выражении используется множитель $\frac{x}{y}$.
3. Запишите произведение множителей числителя в виде степени.
4. Запишите произведение множителей знаменателя в виде степени.
5. Выскажите своё мнение о полученном результате.

**Образец**

Представьте выражение $\left(\frac{x}{y}\right)^5$ в виде частного степеней.

*Решение:* $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y} = \frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y} = \frac{x^5}{y^5}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$.

*Проанализируйте:* Выражение $\left(\frac{mn}{a}\right)^3$ запишите в виде частного степеней.

Чтобы возвести частное (дробь) в степень, следует возвести в эту степень делимое (числитель) и в эту же степень делитель (знаменатель), и найти их частное. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ или $(a:b)^n = a^n : b^n$.

**Образец**

Запишите степень частного в виде частного степеней с одинаковыми показателями. а) $\left(\frac{2abc}{3m}\right)^2$; б) $(-3pk : 4ab)^5$.

*Решение:* а) $\left(\frac{2abc}{3m}\right)^2 = \frac{2^2a^2b^2c^2}{3^2m^2} = \frac{4a^2b^2c^2}{9m^2}$; б) $(-3pk : 4\,ab)^5 = (-3^5p^5k^5) : (4^5a^5b^5)$.

*Проанализируйте:* $\boldsymbol{a^n : b^n = (a:b)^n}$

При делении степеней с одинаковыми показателями следует разделить основание делимого на основание делителя и записать над полученным частным показатель степени.

**Образец**

Запишите частное в виде степени. а) $8^5 : m^5$; б) $\frac{27a^3b^{12}}{64m^{15}}$.

*Решение:* а) $8^5 : m^5 = (8:m)^5$; б) $\frac{27a^3b^{12}}{64m^{15}} = \frac{3^3a^3(b^4)^3}{4^3(m^5)^3} = \left(\frac{3ab^4}{4m^5}\right)^3$.

## Упражнения

**1.** Определите, верно ли степени приведены к дробному виду. Исправьте ошибки и объясните:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b}$; б) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$; в) $\left(-\frac{m}{12}\right)^2 = -\frac{m^2}{144}$; г) $\left(\frac{a+b}{m}\right)^2 = -\frac{a^2+b^2}{m^2}$;

д) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^9}{b^9}$; е) $\left(\frac{7a}{5}\right)^2 = \frac{49a}{25}$; ж) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$; з) $\left(-\frac{11}{7k}\right)^{10} = \frac{11^{10}}{49k^{10}}$.

**2.** Представьте дроби в виде степени:

а) $\frac{a^5}{b^5}$; б) $\frac{81a^4}{16}$; в) $-\frac{1}{32}$; г) $\frac{(4a)^6}{(5b)^{12}}$; д) $\frac{x^8}{15^4}$; е) $\frac{-64^2}{27}$.

**3.** Напишите отношение таких выражений, чтобы его можно было представить в виде квадрата какой-либо дроби.

**4.** Напишите отношение таких выражений, чтобы его можно было представить в виде куба какой-либо дроби.

**5.** Напишите отношение таких выражений, чтобы его можно было представить в виде квадрата или куба какой-либо дроби.

$$\frac{64a^6}{b^{12}} = \left(\frac{8a^3}{b^6}\right)^{2} = \left(\frac{4a^2}{b^4}\right)^{3}$$

**6.** Записывая алгоритм последовательности действий, вычислите значение Z:

| № | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| а) | $\frac{2}{7}$ | 0,1 | $X^2 \cdot 0{,}49 + Y^3 \cdot 430$ |
| б) | $-\frac{2}{3}$ | –0,5 | $168 : X^3 - 150 : Y^2$ |
| в) | 2 | 24 | $X^4 \cdot 3^3 : 18 + Y^2$ |
| г) | –0,4 | 0,4 | $X^3 \cdot 0{,}5^2 + (-0{,}5)^2 \cdot Y^3$ |

**7.** Вычислите. Назовите действие, которое вы выполните первым:

а) $-1^3 + (-3)^3$; б) $20 - 6\cdot 2^3$; в) $4^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$; г) $-6^2 - (-2)^3$;

д) $2\cdot 3^4 - 3\cdot 2^3$; е) $0{,}5\cdot 3^4 - 0{,}4\cdot 2^4$; ё) $-7^3 + (-5)^3$; ж) $3\cdot 4^3 + 4\cdot 3^3$;

з) $8\cdot 0{,}5^3 + 15\cdot 0{,}2^3$; и) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 8{,}1^2$; к) $\frac{1}{640}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)^2$; л) $(7{,}9^3 - 3{,}039)^2$.

**8.** Решите уравнения.

а) $\frac{(a^5)^{12}\cdot(a^8)^7}{(a^{16})^8 : (a^2)^{10}} = 256$; б) $\frac{(x^{17})^{20} : (x^{42})^5 \cdot x}{(x^{35})^4 : (x^2)^5} = 1968$;

в) $\frac{(y^{51})^3 : (y^{16})^3}{(y^2)^{61} : (y^4)^{19} \cdot (y^{29})^2} = 1993$; г) $\frac{(m^9)^{22}\cdot(m^{32})^3}{(m^{45})^3\cdot(m^3)^{53} : m} = 1995$.

## 2.8. Выражения со степенью с натуральным показателем

**1.** Обоснуйте, какие свойства степени необходимо использовать, чтобы найти значение данных выражений:

а) $1{,}1^5 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^5$; б) $2{,}3^5 : \left(2\frac{3}{10}\right)^5$; в) $\left(c^4\right)^7 \cdot c^{12}$; г) $\left(a^{12}\right)^{80} : \left(\left(a^{10}\right)^{11}\right)^8$.

**2.** Запишите алгоритм для нахождения значения выражения и вычислите это значение:

а) $\dfrac{3^{12} \cdot \left(3^3\right)^2}{3^{11}}$; б) $\dfrac{6^2 \cdot \left(36^2\right)^5}{\left(6^2\right)^{11}}$;

в) $\dfrac{\left(5^7\right)^6 \cdot 125}{25^{20}}$; г) $\dfrac{\left(4^3\right)^7}{64^3 \cdot 8^4}$.

**1.** Выражение $64^3$ замените степенью $(2^6)^3$ или $2^{18}$;
**2.** Выражение $8^4$ замените степенью $(2^3)^4$ или $2^{12}$;
**3.** Найдите произведение результатов первой и второй команд;
**4.** Замените $(4^3)^7$ степенью 2;
**5.** Результат четвёртой команды разделите на результат третьей команды.

**3.** Вычислите:

а) $\dfrac{12^n + 12^n + 12^n + 12^n + 12^n + 12^n}{6^n + 6^n + 6^n + 6^n + 6^n}$; б) $\dfrac{49^m + 49^m + 49^m + 49^m + 49^m}{7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m} + 7^{2m}}$;

в) $\dfrac{\overbrace{64^n + 64^n + 64^n + \ldots + 64^n}^{50\ раз}}{\underbrace{8^{2n} + 8^{2n} + 8^{2n} + \ldots + 8^{2n}}_{30\ раз}}$; г) $\dfrac{\overbrace{5^{2n} + 5^{2n} + 5^{2n} + \ldots + 5^{2n}}^{k\ раз}}{\underbrace{25^n + 25^n + 25^n + \ldots + 25^n}_{m\ раз}}$.

**4.** Запишите в таблицу действия, которые вы произвели для нахождения значения данного выражения:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| а) | $-4^2 \cdot \frac{1}{24} + 1{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ | | | | |
| | I действие | II действие | III действие | IV действие | V действие |
| | | | | | |
| б) | $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 + (-3)^3 : 27 =$ | | | | |
| | I действие | II действие | III действие | IV действие | V действие |
| | | | | | |

**5.** Запишите данные выражения в виде степени с основанием $a$:

а) $a^n : a^2$; б) $\dfrac{a^n \cdot a^2}{a^3}$; в) $\dfrac{a^{2n} \cdot a^3}{a^n}$; г) $\dfrac{a^{3n+1} \cdot a^{2-n}}{a^{2n}}$; д) $a^{m+1} : a^m$; е) $\dfrac{\left(a^{3n}\right)^2 \cdot a^{5-2n}}{\left(a^2\right)^n}$.

**6.** Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\left(a^4\right)^6 b^{43}}{\left(a^2\right)^{13} \left(b^6\right)^7}$; если, $a = -0{,}7$ и $b = 0{,}5$;

б) $\left(\dfrac{7c^8}{9d^7}\right)^6 \cdot \dfrac{3^{12} d^{43}}{7^5 \left(c^{23}\right)^2}$. если, $c = \dfrac{-1}{3}$ и $d = -\dfrac{4}{7}$.

**7.** Какой цифрой должно оканчиваться натуральное число $a$, чтобы любая его степень с натуральным показателем заканчивалась на ту же цифру? Обоснуйте свой ответ примером.

## 2.9. Формула простого процентного роста


### Деятельность

Ахмед, вложив в банк на депозитный счет 10 000 манатов, забрал их с 20%-ным ростом спустя год. Определите сколько денег забрал Ахмед:

**1.** Найдите 20% от числа 10 000.
**2.** Прибавьте к полученной сумме 10 000.
**3.** Выскажите своё мнение о полученном результате.

Мамед, вложив в банк 10 000 манатов, забрал их спустя 2 года с 15%-ным ростом за каждый год. Вычислите, сколько денег забрал из банка Мамед:

**1.** Найдите 15% от числа 10 000.
**2.** Умножьте это число на 2.
**3.** Прибавьте к полученной сумме 10 000.
**4.** Выскажите своё мнение о полученном результате. Объясните, кто получил денег больше.

### Образец

За написанное произведение писатель получил гонорар в 50 000 манатов. Он вложил деньги в банк под 12% годового роста на вложенную сумму сроком на 3 года. Определите, сколько денег выдаст банк писателю в назначенное время.

*Решение:* Для решения задачи найдем 12% от 50 000 манатов:

$$50000\cdot\frac{12}{100}=6000 \text{ (манатов).}$$

Увеличим это число в 3 раза: 6000 · 3 = 18 000 (манатов). Полученную сумму прибавим к первоначальной сумме: 50 000 + 18 000 = 68 000 (манатов).

**Ответ:** 68 000 манатов.

### Деятельность

Запишите данный в образце алгоритм в виде выражения: $50000+50000\cdot\frac{12}{100}\cdot 3$.

Вынесите 50 000 за скобки в этом выражении: $50000\cdot\left(1+\frac{12\cdot 3}{100}\right)$. Итак, обозначив конечную сумму буквой S, получим нижеследующую формулу: $S=50000\left(1+\frac{12\cdot 3}{100}\right)$.

Запишите в общем виде формулу, полученную в деятельности:
Формула $S_n = S_0\left(1+\frac{rn}{100}\right)$ называется **формулой простого процентного роста**.
Здесь $\mathbf{S_n}$ – конечная сумма, $\mathbf{S_0}$ – начальная сумма, ***r*** – число, показывающее процентный рост на некоторое время, ***n*** – срок хранения суммы.

**Примечание:** Если конечная сумма ($S_n$) будет меньше первоначальной суммы ($S_0$), то по характеру уменьшения формула записывается в виде $S_n = S_0\left(1-\frac{rn}{100}\right)$.

## Образец

Севиль для оплаты определенной услуги положила на счет 500 манат. В связи с оплатой оказываемой услуги вложенная сумма ежемесячно уменьшалась на 10%. Сколько денег останется у Севиль на счету через 3 месяца?

*Решение:* $S_0 = 500$, $n = 3$, $r = 10$. Так как сумма уменьшается, воспользуемся формулой из примечания:

$$S_3 = 500\cdot\left(1-\frac{10\cdot 3}{100}\right) = 500\cdot\frac{7}{10} = 350.$$

**Ответ:** 350 манат.

## Упражнения

**1.** В формулах $S_n = S_0\left(1+\frac{rn}{100}\right)$ и $S_n = S_0\left(1-\frac{rn}{100}\right)$ замените $n$, $r$ и $S_0$ другими величинами.

**2.** Айтен утверждает, что 300 манатов, вложенные в банк с доходом в 30% годовых, через 5 лет достигнут 750 манатов. По-вашему, верно ли её утверждение? Обоснуйте своё мнение.

**3.** а) Под какую годовую процентную ставку следует Акифу вложить в банк сумму в 1000 манатов, чтобы спустя 8 лет получить 2 000 манатов?

б) Какая сумма, вложенная в банк с годовым процентным ростом в 18%, спустя год составит 7 316 манатов? Если эта же сумма будет вложена в банк с годовой ставкой в 20%, сколько денег можно получить спустя 2 года?

**4.** Дополните таблицу, используя формулу простого процентного роста:

| № | Банк | Годовой процентный рост | Вложенная сумма (манат) | Срок вложения (лет) | Конечная сумма (манат) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | I банк | | 3 000 | 2 | 3 840 |
| 2 | II банк | 25% | | 4 | 4 000 |
| 3 | III банк | 15,3% | 5 000 | | 7 295 |
| 4 | IV банк | 11,5% | 7 000 | 10 | |

По таблице ответьте на следующие вопросы. Во время вычисления используйте калькулятор:

а) В какую сумму превратятся вложенные в I банк 3 000 манатов через год?

б) Сколько денег выплатит III банк через 6 месяцев за вложенные 7 000 манатов?

в) Сколько денег должен будет выплатить II банк за 4 года при годовой процентной ставке в 20% за начальную сумму, указанную в таблице?

**5.** Для занятия бизнесом Сулейман взял в кредит 20 000 манатов на 5 лет из банка под 10% годовых. Сколько денег должен вернуть в банк Сулейман в назначенный срок?

**6.** **Практическая работа.** Наги решил купить в кредит мобильный телефон стоимостью 642 маната. Сделав первоначальный взнос в 200 манатов, он стал выплачивать оставшуюся сумму каждый месяц. Банковский работник выдал ему следующую таблицу оплаты:

| № | Дата оплаты | Начальный баланс (₼) | Сумма оплаты | Основная сумма (₼) | Разница (₼) | Конечный баланс (₼) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 17.10.2013 | 442.00 | 81.00 | 69.95 | 11.05 | 372.81 |
| **2** | 17.11.2013 | 372.81 | 81.00 | 71.68 | 9.32 | 301.88 |
| **3** | 17.12.2013 | 301.88 | 81.00 | 73.45 | 7.55 | 229.18 |
| **4** | 17.01.2014 | 229.18 | 81.00 | 75.27 | 5.73 | 154.67 |
| **5** | 17.02.2014 | 154.67 | 81.00 | 77.13 | 3.87 | 78.29 |
| **6** | 17.03.2014 | 78.29 | 76.47 | 74.51 | 1.96 | |
| **Итого** | | | 481.47 | 442.00 | 39.47 | |

Опираясь на таблицу, определите:

а) Сколько денег выплачивал Наги каждый месяц?

б) Определите приблизительно с помощью калькулятора, сколько процентов от основной суммы составило число, записанное в графе «Разница», во время оплаты 17 октября, 17 ноября и 17 марта.

в) Сколько денег осталось выплатить Наги в конце октября, начале ноября?

г) Сколько денег за телефон в итоге выплатил Наги в банк?

д) На сколько выплаченная Наги сумма больше суммы, выплаченной в случае наличной оплаты?

**7.** Самир взял из банка кредит на сумму 4500 манатов и, выплачивая каждый месяц по 800 манатов, погасил кредит за 6 месяцев. Составьте таблицу оплаты кредита Самира. Определите, сколько денег оплатил Самир и годовой процент банка.

**8.** В формулах $\mathbf{S_n = S_0 (1 + r\%\cdot n)}$ и $\mathbf{S_n = S_0 (1 - r\%\cdot n)}$ число $n$ показывает срок хранения вложенной суммы. $\left(r\% = \frac{r}{100}\right)$. Из этих равенств напишите формулу, по которой можно вычислить $n$. Найдите $n$, если:

а) $S_n = 500, \quad S_0 = 2500, \quad r\% = 10\% = 0{,}1;$

б) $S_n = 2500, \quad S_0 = 500, \quad r\% = 25\% = 0{,}25.$

**9.** Для оплаты оказанной ей услуги Лятифа положила на свой счёт 1000 манатов. По договору за оказание услуги, эта сумма каждый месяц уменьшается на 5%. Через сколько месяцев сумма на счету будет равна:

а) 800 манат; б) 700 манат; в) 400 манат; г) 100 манат?

## 2.10. Формула сложного процентного роста

### Деятельность

Клиент положил на счёт в банке 35 000 манатов сроком на 2 года. Сколько денег банк должен будет вернуть клиенту через 2 года, если банк каждый год увеличивает сумму предыдущего года на 3%?

**1.** Найдите 3% от суммы 35 000 манатов.
**2.** Сложите полученное число с 35 000.
**3.** Найдите 3% от полученной суммы.
**4.** Сложите это число с результатом второй операции.
**5.** Выскажите своё мнение о результате.

### Образец

Нусрат положил в банк 7 000 манатов. Годовой процентный рост банка составляет 11% от суммы предыдущего года. Какую сумму получит Нусрат через 2 года?

*Решение:* В первый год 7 000 манатов увеличились на 11%. Следовательно, в конце первого года сумма будет составлять $7000+7000\cdot\frac{11}{100}=7770$ (манатов). Во второй год 7 770 манатов увеличились на 11%. Следовательно, в конце второго года сумма увеличилась на 11% от суммы первого года: $7770+7770\cdot\frac{11}{100}=8624{,}7$ (манатов).

**Ответ:** 8 624,7 манатов.

### Деятельность

Запишем решение задачи, данной в образце, в виде выражения:

$7770+7770\cdot\frac{11}{100}$. Вынесем за скобку множитель 7770 этого выражения:

$$7770\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right) \qquad (*)$$

В последнем выражении запишем число 7770 следующим образом:

$$7770=70\cdot111=7000\cdot\frac{111}{100}=7000\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)$$

Полученный результат запишем в выражение (*) вместо числа 7770:

$$7770\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)=7000\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)=7000\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)^2$$

Таким образом, если конечную сумму обозначим знаком S, то получим следующее выражение: $S=7000\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)^2$

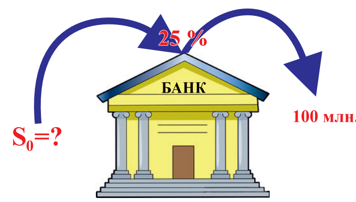
Формулу $S_n = S_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ называют **формулой сложного процентного роста**. Здесь $S_n$ – конечная сумма, $S_0$ – начальная сумма, $r$ – число, показывающее процентный рост на некоторое время, $n$ – срок хранения суммы.

## Упражнения

**1.** Исмаил утверждает, что 700 манатов, вложенные в банк с годовым процентным доходом в 10% от суммы предыдущего года, через 2 года составят 800 манатов. Верно ли его утверждение?

**2.** Архитектор решил гонорар в сумме 100 000 манатов, полученный за проект моста, вложить в два банка. Половину этой суммы он вложил на 3 года в государственный банк с годовым процентным ростом 7% от вложенной суммы, а вторую половину – на 2 года в коммерческий банк с годовым процентным ростом 10% от суммы предыдущего года. Какой банк дал больше дохода?

**3.** Определённая сумма, вложенная в банк с годовым процентным ростом 25% от суммы предыдущего года, через 3 года составила 100 млн манатов. Какой была первоначальная сумма, вложенная в банк?




**4.** Основываясь на таблицу, ответьте на следующие вопросы:

| № | Банк | Годовой процентный рост | Сумма (манат) | Срок | Тип формулы процентного роста |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | I банк | 15% | 3000 | 1 месяц | Простая |
| **2** | II банк | 11,5% | 3000 | 12 месяцев | Простая |
| **3** | III банк | 12,3% | 5000 | 2 года | Сложная |
| **4** | IV банк | 14% | 10000 | 3 года | Сложная |

Проведите вычисления с помощью калькулятора.

а) Сколько составит в конце срока сумма, вложенная в I и II банк на условиях простого процентного роста?

б) Сколько составит в конце срока сумма, вложенная в III и IV банк на условиях сложного процентного роста?

в) Какая сумма получится через два года при условии как простого, так и сложного процентного роста, если в банк с годовой ставкой 15% вложить сумму в 4 000 манатов? Какое из этих условий выгоднее?

г) Какую сумму составит через 3 года 5 000 манатов, вложенных в банк с годовым простым процентным ростом в 10%?

**5.** Составляя любую задачу, примените как формулу простого процентного роста, так и формулу сложного процентного роста.

**6. Практическая работа.** Проанализируйте и сравните условия кредита в представленной таблице. Составив соответствующие вопросы, ответьте на них. Какую сумму нужно будет вернуть в банк в конце срока, если взять из этих банков 3000 манатов под низкий процент на 1 год? При вычислениях применяйте калькулятор (смотрите образец).

| Условия кредита | 1-й банк | 2-й банк |
|---|---|---|
| Сумма кредита | 300–7000 AZN | 150–3000 AZN |
| Срок кредита | 12–18 месяцев | 3–24 месяцев |
| Процент кредита | Мин.: 26% (годовой)<br>Макс.: 32% (годовой) | Мин.: 28% (годовой)<br>Макс.: 30% (годовой) |
| Обеспечение кредита | 1 или 2 поручителя | Залог |
| Страхование | Может быть потребовано страхование жизни и страхование от индивидуальных несчастных случаев | Не требуется |
| Способ оплаты | В конце срока кредита | С предоплатой |
| Срок рассмотрения заявки | В течение двух рабочих дней | В течение двух рабочих дней |
| Минимальный возраст берущего кредит | 20 лет | 20 лет |
| Максимальный возраст берущего кредит | 62 года<br>(для женщин – 57 лет) | 62 года<br>(для женщин – 57 лет) |
| Минимальное требование к месячному доходу | 200 AZN | 120 AZN |

### Образец

**Задача:** какую сумму должен будет вернуть банку клиент, взявший в кредит 2000 манатов под 26% от первоначальной суммы сроком на 18 месяцев?

*Решение:* Согласно условию задачи: $S_0 = 2000$ манатов;

$n = 18$ месяцев $= \frac{18}{12} = 1,5$ года; $r = 26$. Так как процент расчитывается от первоначальной суммы, то согласно формуле простого процентного роста:

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{rn}{100}\right) = 2000\left(1 + \frac{26 \cdot 1,5}{100}\right) = 2780.$$

**Ответ:** 2 780 манатов.

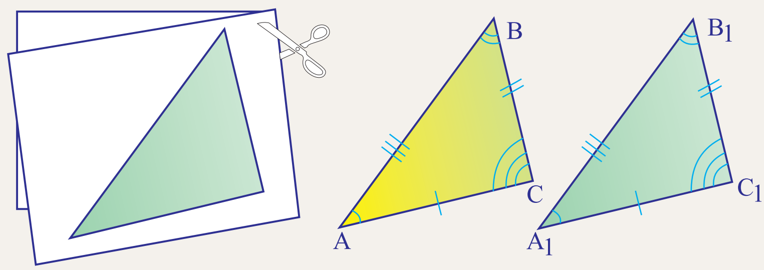
**7.** Азер взял 5 000 манатов в кредит из банка с годовым процентным ростом в 12,5% от первоначальной суммы. Какую сумму он должен вернуть банку через а) 6 месяцев; б) 15 месяцев?

**8.** Во время вычисления стало известно, что число автомобилей городского населения увеличивается каждый год на 15% по сравнению с предыдущим годом. Определите во сколько раз выросло число автомобилей в течение 5 лет.

## 2.11. Конгруэнтные треугольники

**Деятельность** $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

1. Согните посередине белый лист бумаги.
2. На одной из сторон начертите произвольный треугольник.
3. Разрежьте ножницами свёрнутый лист бумаги по контуру треугольника.




4. Сколько фигур получилось? Выскажите своё мнение о сторонах и углах полученных фигур. Что произойдёт, если наложить стороны фигур друг на друга? Можно ли сказать, что они равны?

Отрезки с равной длиной называются конгруэнтными отрезками, углы с равной градусной мерой называются конгруэнтными углами.

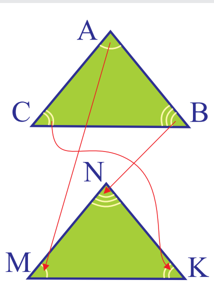
Если у двух треугольников соответствующие стороны и углы конгруэнтны, то такие треугольники называются **конгруэнтными**.

Конгруэнтность треугольников обозначается знаком «≅».

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

Итак, если, $AB \cong A_1B_1$; $AC \cong A_1C_1$; $BC \cong B_1C_1$ и $\angle A \cong \angle A_1$; $\angle B \cong \angle B_1$; $\angle C \cong \angle C_1$ то треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны.

В конгруэнтных треугольниках против соответственно конгруэнтных сторон лежат конгруэнтные углы и против соответственно конгруэнтных углов лежат конгруэнтные стороны.




Если треугольники $\Delta ABC \cong \Delta MNK$, то конгруэнтные стороны и конгруэнтные углы берутся в последовательности, соответственной их названиям в этих треугольниках.

$AB \cong MN$; $BC \cong NK$; $AC \cong MK$
$\angle A \cong \angle M$; $\angle B \cong \angle N$; $\angle C \cong \angle K$ – **верно.**

$AB \cong NK$; $BC \cong MK$; $AC \cong MN$
$\angle A \cong \angle N$; $\angle B \cong \angle K$; $\angle C \cong \angle M$ – **неверно.**

## Упражнения

**1.** Являются ли конгруэнтными отрезки AB и MN (рис. 1 a)? Обоснуйте свой ответ.

**2.** Являются ли конгруэнтными углы AOB и PKD (рис. 1 б)? Обоснуйте свой ответ.

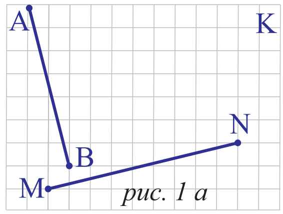


*рис. 1 a*

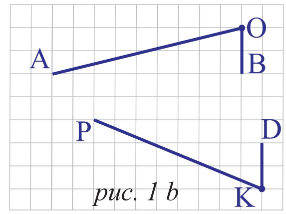


*рис. 1 b*

**3.** Вместо знака «?» напишите название треугольника, конгруэнтного данному треугольнику (рис. 2). Обоснуйте выбор последовательности написания букв.

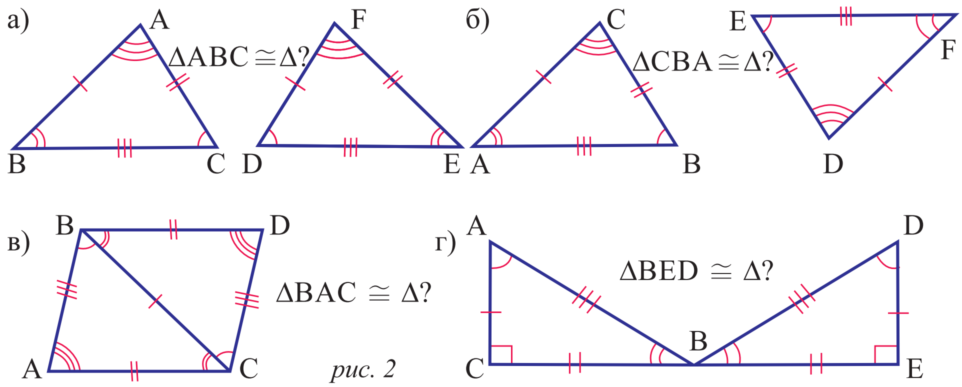


*рис. 2*

**4.** Треугольник ABC конгруэнтен треугольнику MON, изображённому на рисунке 3. Определите длину сторон треугольника ABC. Назовите конгруэнтные углы этих треугольников.

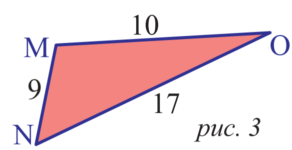


*рис. 3*

**5.** В тетради в клетку начертите треугольник ABC, конгруэнтный треугольнику PKF, изображённому на рисунке 4.

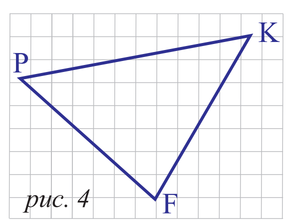


*рис. 4*

**6.** В тетради в клетку начертите произвольный четырёхугольник ABCD и конгруэнтный ему четырёхугольник MNPK. Начертите отрезки AC и MP и напишите название полученных конгруэнтных треугольников.

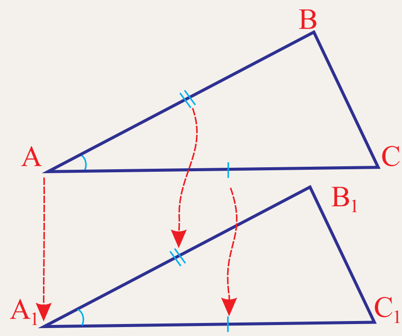
**7.** Начертите биссектрису OC угла AOB. Определите, какие из нижеприведённых углов являются конгруэнтными: а) $\angle AOC$ и $\angle BOC$; б) $\angle AOC$ и $\angle AOB$; в) $\angle AOB$ и $\angle COB$. Обоснуйте свой ответ.

**8.** Могут ли нижеприведённые треугольники быть конгруэнтными?
а) остроугольный и тупоугольный треугольники; б) прямоугольный и тупоугольный треугольники; в) равнобедренный и равносторонний треугольники. Обоснуйте свой ответ.

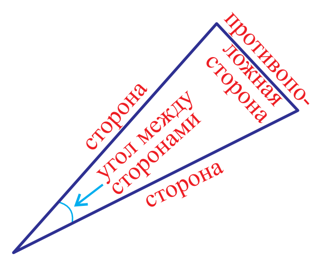
# 2.12. Первый признак конгруэнтности треугольников

## Деятельность

1. Вспомните правило построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.
2. Постройте треугольник ABC, где $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 30°$.
3. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1B_1 = 3$ см, $A_1C_1 = 5$ см, $\angle A_1 = 30°$.
4. Передвиньте треугольник ABC так, чтобы он совпал с треугольником $A_1B_1C_1$. С какой стороной совпала сторона BC?
5. Что вы можете сказать о треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$?




Для проверки конгруэнтности треугольников совсем необязательно проверять конгруэнтность всех 6-ти их основных элементов (три стороны и три угла). Для этого достаточно проверить конгруэнтность основных трёх элементов. Признаки конгруэнтности треугольников доказывают это.




*Признак конгруэнтности по двум сторонам треугольника и углу между ними (I признак):*

Если две стороны и угол между ними одного треугольника конгруэнтны соответствующим двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны. Первый признак также называют признаком СУС (сторона, угол, сторона).

## Образец

На сторонах угла MON проведены конгруэнтные отрезки OA и OB. Точка C, расположенная на биссектрисе OD $\angle AOB$, соединена с точками A и B (рис. 1). Докажите, что $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.

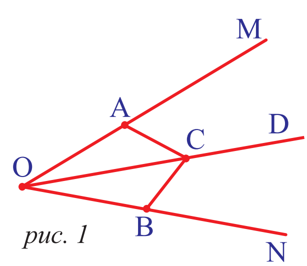



*рис. 1*

*Решение:* Рассмотрим данные на рисунке 1 треугольники AOC и BOC. Согласно условию $OA \cong OB$, OC – общая сторона обоих треугольников и $\angle AOC \cong \angle BOC$ (потому что OC – биссектриса). Тогда согласно I признаку конгруэнтности треугольников, $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.

## Упражнения

**1.** Можно ли считать данные на рисунках треугольники конгруэнтными? Приведите признак СУС и обоснуйте свой ответ.

а)

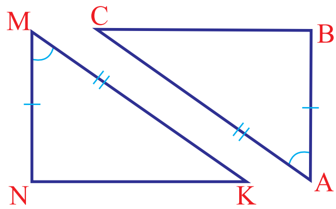



*рис. 2*

б)

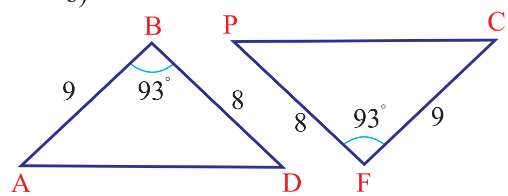



*рис. 3*

**2.** **Практическая работа.** В тетради в клетку начертите угол, конгруэнтный углу A (рис. 4). На одной стороне этого угла отметьте отрезок, конгруэнтный отрезку *b*, с началом в точке A, а на другой стороне – отрезок, конгруэнтный отрезку *c*, с началом в точке A. Конечные точки полученных отрезков обозначьте соответственно буквами B и C. Как по-вашему, будет ли конгруэнтен треугольник, начерченный каждым учеником класса, треугольнику ABC? Обоснуйте свой ответ.

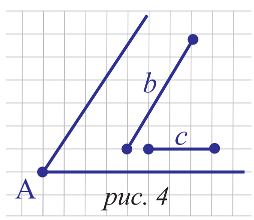



*рис. 4*

**3.** Известно, что $\Delta ABC \cong \Delta KLM \cong \Delta DEF$. Определив, длину соответственных сторон и градусную меру соответственных углов треугольников KLM и DEF, заполните таблицу.

| | | |
|---|---|---|
| **ΔABC** | **AB = 6 см; BC = 12 см; ∠B = 105°** | **AB = 7,5 мм; AC = 1,4 мм; ∠A = 53°** |
| **ΔKLM** | | |
| **ΔDEF** | | |

**4.** Основываясь на данные треугольники, можно ли сказать, что $\Delta ABC \cong \Delta KLM$? Если нет, то как следует изменить названия вершин треугольника KLM, чтобы можно было говорить о конгруэнтности этих треугольников? (рис. 5)

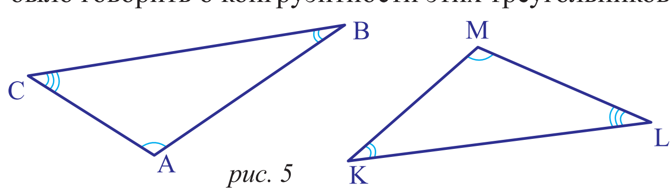



*рис. 5*

**5.** В треугольнике ABC продолжите стороны AB и AC от точки в противоположные этим сторонам направления на расстояния, равные длинам этих отрезков соответственно. Конечные точки полученных отрезков обозначьте соответственно точками D и E. Можно ли сказать, что треугольники ABC и AED конгруэнтны? Обоснуйте свой ответ.

**6.** $\Delta ABC$ – равнобедренный: $AB \cong AC$. Биссектриса, проведённая из точки A, пересекает сторону BC в точке D. Можно ли назвать треугольники ABD и ACD конгруэнтными? Обоснуйте свой ответ.

**7.** Дети хотят измерить ширину озера, расположенного недалеко от деревни. Для этого они измеряют расстояния AC и BC, а также угол, образованный между двумя этими линиями. Чтобы найти расстояние AB, что еще должны измерить дети? Длина какого отрезка на рисунке равна ширине озера? (рис. 6)

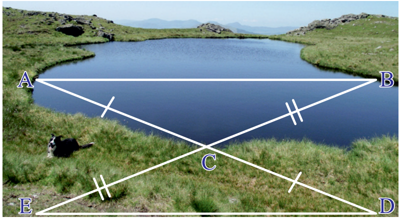


*рис. 6*

**8.** Чему будет равна ширина озера на рисунке 6, если EC = 20 м, CD = 1900 см, ED = 0,029 км, AC = 19000 мм, BC = 2000 см?

**9.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ На гранях куба укажите конгруэнтные треугольники. Обоснуйте, на основе какого признака эти треугольники являются конгруэнтными (рис. 7).

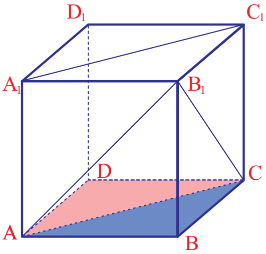


*рис. 7*

**10. Практическая работа.** Из бумаги вырежьте произвольный треугольник ABC и поверните его на 90° по часовой стрелке вокруг точки A. Что вы можете сказать о полученном треугольнике и треугольнике ABC?

**11.** Начертите диаметры AB и CD круга с центром O. Выскажите своё мнение о треугольниках AOC и BOD. Если сумма хорд BD и AC будет равна 18,4 см, то скольким миллиметрам будет равна длина каждой хорды?

**12. Ситуационная задача:** Как определить ширину туннеля (AB), прорытого в горе для проведения автомобильной дороги, построением на рисунке конгруэнтных треугольников (рис. 8)?

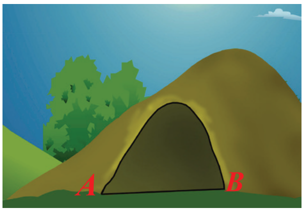


*рис. 8*

**13. Ситуационная задача:** Ситуационная задача: Фасад крыши дома представляет собой равнобедренный треугольник. Боковые стороны равны 4,2 м, угол при вершине – 120°. Боковая грань крыши – прямоугольник (рис. 9).

а) Сколько сантиметров составляет боковая сторона задней части крыши? Сколько градусов составляет угол между боковыми сторонами? Почему?

б) Длина крыши 8 м. Определите площадь боковых граней крыши.

в) Крышу дома необходимо покрыть черепицей размерами 20x30 см. Сколько черепиц потребуется для этого?


*рис. 9*

## 2.13. Второй признак конгруэнтности треугольников

### Деятельность

**1.** Начертите на прямой *a* отрезок AB длиной 2 см, а на прямой *m* отрезок MN той же длины (рис. 1).

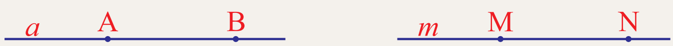



*рис. 1*

**2.** Постройте углы в 60° с вершинами в точках A и M (рис. 2).

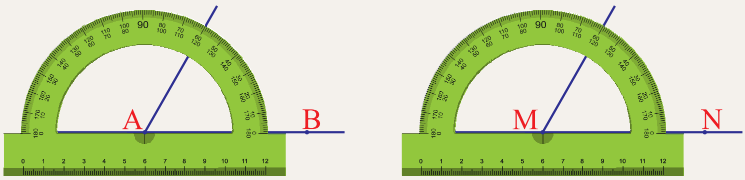



*рис. 2*

**3.** Постройте два угла в 45° с вершинами в точках B и N в одной полуплоскости с углами A и M (рис. 3).

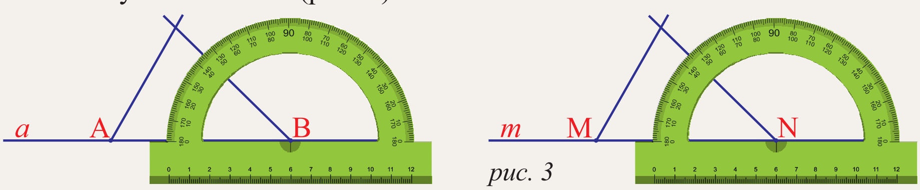



*рис. 3*

**4.** Обозначьте точку пересечения сторон углов A и B буквой C, а точку пересечения сторон углов M и N – буквой K.

**5.** Вырезав ножницами треугольник ABC наложите его на треугольник MNK (в результате перестановки) таким образом, чтобы вершина A совпала с вершиной M, вершина B – с вершиной N. В этом случае с какой вершиной совпадёт вершина C? Обоснуйте свой ответ (рис. 4).

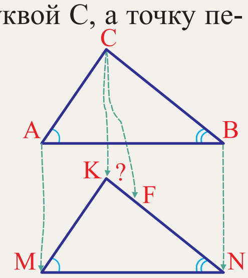



*рис. 4*

**6.** Предположите, что точка C совпадает с любой точкой F. Возможно ли это? Почему? Начертите отрезок MF и обоснуйте свой ответ.

*Признак конгруэнтности треугольников по одной стороне и двум прилежащим к ней углам (II признак):*

Если сторона и прилежащие к ней два угла одного треугольника конгруэнтны соответственно стороне и прилежащим к ней двум углам другого треугольника, то эти два треугольника конгруэнтны.

Второй признак называют еще УСУ (угол, сторона, угол).

## Образец

Даны треугольники ABC и CDA (рис. 5). $AO \cong OC$, $\angle OCD \cong \angle OAB$. Докажите, что $AB \cong CD$ и $\angle B \cong \angle D$.

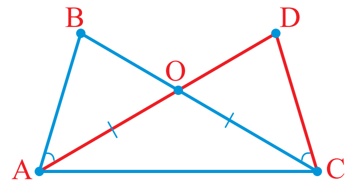



*рис. 5*

*Решение:* Известно, что в $\Delta AOB$ и $\Delta COD$ $AO = OC$ и $\angle OCD \cong \angle OAB$. Также известно, что $\angle AOB \cong \angle COD$, так как они вертикальные. Тогда по II признаку конгруэнтности треугольников $\Delta AOB$ и $\Delta COD$ конгруэнтны. Следовательно, соответствующие стороны и углы этих треугольников тоже конгруэнтны: $AB \cong CD$ и $\angle B \cong \angle D$.

Величина угла измеряется в градусах (°), минутах (′) и секундах (″):

$$1° = 60', \ 1' = 60'', \ 1' = \frac{1°}{60}, \ \ 1'' = \frac{1°}{3600}.$$

Например: $10°29'$ (десять градусов двадцать девять минут);

$78°25'43''$ (78 градусов 25 минут 43 секунды); $35{,}6°$.

Единицы измерения угла можно переводить из одной в другую.

## Образец

1) $16{,}3° = 16° + 0{,}3° = 16° + 0{,}3 \cdot 60' = 16° + 18' = 16°18'$.

2) $48°34'11'' = 48° + 34' + 11'' = 48° + 34 \cdot \frac{1°}{60} + 11 \cdot \frac{1°}{3600} \approx 48° + 0{,}57° + 0{,}003° =$
$= 48{,}573° \approx 48{,}6°$.

## Упражнения

**1.** Покажите углы, прилежащие и противоположные каждой стороне данного треугольника. Отметьте стороны, противоположные каждому углу. Сторона, противоположная какому углу, в соответствии с рисунком, будет самой длинной? Угол противоположный какой стороне будет наименьшим? (рис. 6)

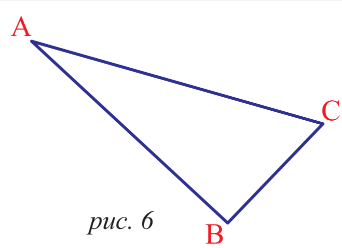



*рис. 6*

**2.** Известно, что $\Delta ABC \cong \Delta DEF \cong \Delta PMN$. Заполните таблицу:

| **ΔABC** | **AB = 12 см, ∠A = 47°, ∠B = 36°** | **AC = 4,4 мм, ∠A = 27°19′, ∠C = 45°** |
|---|---|---|
| **ΔDEF** | | |
| **ΔPMN** | | |

Определите градусную меру третьего угла этих треугольников.

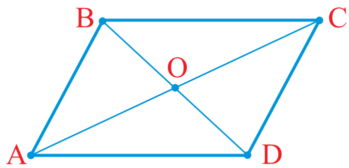



*рис. 7*

**3.** AO ≅ OC, ∠OCB ≅ ∠OAD (рис. 7). Докажите, что ΔCOB = ΔAOD.

**4.** На рисунке 7 AO ≅ OC, ∠OCD ≅ ∠OAB.
а) если CD = 10 см, то AB = ?
б) если OD = 2,7 см, то BD = ?

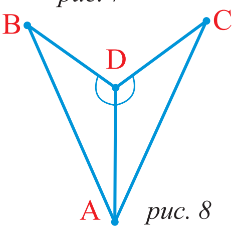



*рис. 8*

**5.** Луч AD – биссектриса ∠CAB (рис. 8). ∠ADB = ∠ADC. Докажите, что ΔADB ≅ ΔADC.

**6.** На сторонах угла A отмечены точки B и C, а на биссектрисе – точка D. ∠ADB ≅ ∠ADC. Докажите, что ΔADB ≅ ΔADC.

**7.** Отрезки AB и CD, равные по длине, пересекаются в точке O и AO ≅ OC. Докажите, что:
а) ΔBOC ≅ ΔDOA; б) ∠ABC ≅ ∠ ADC.

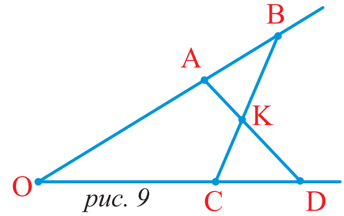



*рис. 9*

**8.** На рисунке 9 OA ≅ OC и OB ≅ OD.
Докажите, что: ) AD ≅ BC; б) ∠BCD ≅ ∠DAB.

**9.** На сторонах произвольного угла, начиная от вершины угла, были проведены два отрезка равной длины. От конечных точек этих отрезков к противоположной стороне угла были проведены перпендикуляры. Можно ли считать, что эти перпендикуляры конгруэнтны? (Рассмотрите острые, прямые и тупые углы.)

**10.** Прямая линия, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках B и C. Можно ли назвать ΔABC равнобедренным?

**11.** Медиана, проведённая из угла B треугольника ABC, пересекает основание AC в точке D и, продолжаясь от точки D в противоположную сторону до точки E, отделяет отрезки DE = BD. Найдите ∠BAE если ∠BAD = 56° и ∠BCD = 40°.

**12.** а) Градусную меру угла, данную в виде десятичной дроби, выразите в виде градусов, минут и секунд: 73,4°; 66,2°; 125,1°; 41,93°; 12,5°.
б) Величину угла, данную в градусах, минутах и секундах, приблизительно выразите в градусной мере: $12°36'$; $44°16'25''$; $54°30''$; $135°56'10''$; $49°49''$.

**13.** Выполните действия:

| | | |
|---|---|---|
| а) $7°15' + 16°30'$; | б) $46°25' – 17°59''$; | в) $150°21'12'' + 51°16'51''$; |
| г) $42° – 25°10''$; | д) $175°13' – 101°43''$; | е) $98°15'' – 53°45'$; |
| ё) $23°36' \cdot 2$; | ж) $24{,}5° – 6°7' + 32{,}1°$; | з) $77°19' – 56{,}4°$. |

**14.** Углы треугольника ABC равны 15,8° и $44°53'$. Найдите третий угол.

**15.** В треугольнике ABC проведена высота BD и ∠ABD = ∠CBD. Произвольная точка M высоты BD соединяется с точками A и C. Докажите, что отрезки AM и MC конгруэнтны.

## 2.14. Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник, две стороны которого конгруэнтны, называется **равнобедренным треугольником**. В равнобедренном треугольнике конгруэнтные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона – основанием треугольника (рис. 1).

Равносторонний треугольник – частный вид равнобедренного треугольника.

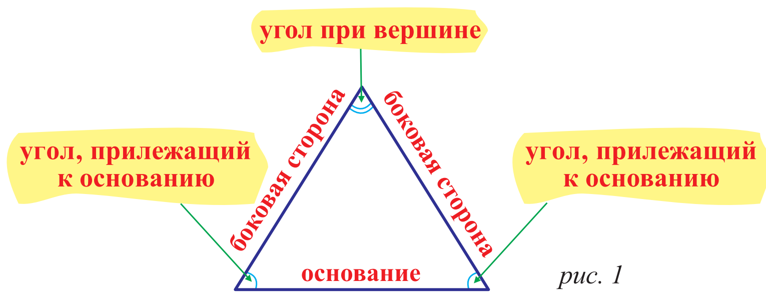



*рис. 1*

### Деятельность

Свойства равнобедренного треугольника:

**1.** Начертите равнобедренный треугольник ABC, AB = BC (рис. 2). Укажите его угол при вершине и углы, прилежащие к основанию.

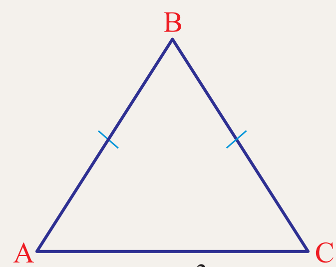



*рис. 2*

**2.** Начертите биссектрису BD угла при вершине. Назовите полученные углы. Что вы можете сказать об этих углах? (рис. 3)

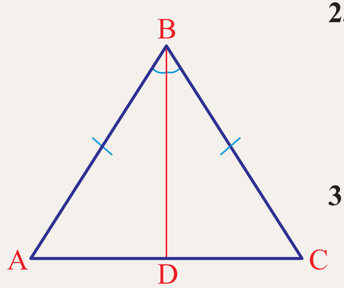



*рис. 3*

**3.** Можно ли утверждать, что треугольники ABD и CBD равны? Какой, по-вашему, признак равенства треугольников выполняется для этих треугольников? Выскажите свои мысли об углах A и C (рис. 3).

### Теорема Свойство углов, прилежащих к основанию равнобедренного треугольника

***Углы, прилежащие к основанию равнобедренного треугольника, конгруэнтны.***

**Условие теоремы:** $\Delta ABC$ равнобедренный. AB = BC (рис. 3).

**Утверждение теоремы:** $\angle A \cong \angle C$.

*Докажите самостоятельно.*

Начертите биссектрису BD $\Delta ABC$. Используйте признак СУС равенства треугольников.

## Деятельность

Свойства равнобедренного треугольника:

**1.** ABC – равнобедренный треугольник: AB = BC (рис. 4).

**2.** Начертите медиану BD. Что вы можете сказать о треугольниках ABD и CBD? О конгруэтности каких сторон и углов этих треугольников можно утверждать? Почему?

**3.** Можно ли утверждать, что углы ABD и DBC конгруэтны? В этом случае чем еще является медиана BD в треугольнике?

**4.** Можно ли утверждать, что углы ADB и BDC смежные и конгруэтные углы? В этом случае чем еще является медиана BD?

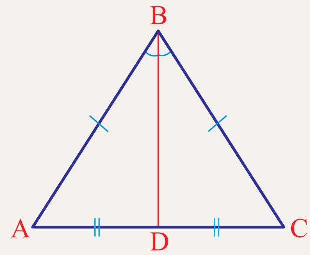


*рис. 4*

## Теорема Свойство медианы, проведённой к основанию равнобедренного треугольника

***Медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также его биссектрисой и высотой.***

**Условие теоремы:** ΔABC – равнобедренный. AB = BC. BD – медиана (рис. 4).

**Доказательство теоремы:** Медиана BD делит треугольник ABC на два треугольника ABD и CBD. В силу равнобедренности треугольника ABC AB ≅ BC и ∠BAD ≅ ∠BCD, по определению медианы AD ≅ DC. Значит, по I признаку конгруэнтности треугольников ∠ABD ≅ ∠CBD, то есть BD – биссектриса (вспомни определение биссектрисы). В то же время в силу конгруэнтности треугольников и свойств смежных углов ∠ABD ≅ ∠CBD = 90°; что означает BD является высотой (вспомни определение высоты треугольника).

Итак, показали, что медиана проведённая к основанию равнобедренного треугольника является также биссектрисой и высотой. **Теорема доказана.**

## Упражнения

**1.** Треугольник MNK – равнобедренный (рис. 5). Укажите его конгруэнтные стороны и углы.

**2.** Проведена биссектриса равнобедренного треугольника (рисунок 6). Укажите полученные конгруэнтные отрезки и конгруэнтные углы.

**3.** Назовите треугольник на рисунке (рис. 7), укажите его основание, боковые стороны, угол при вершине и углы, прилежащие к основанию.

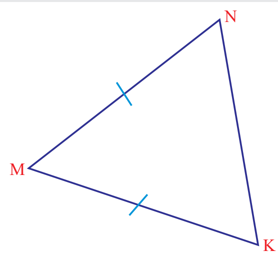


*рис. 5*

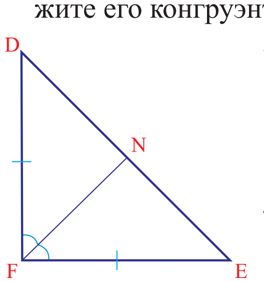


*рис. 6*

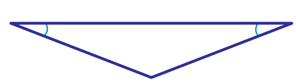


*рис. 7*

**4.** В тетради в клетку начертите равнобедренный треугольник и биссектрису угла при вершине. Назовите треугольник. Укажите конгруэнтные углы и стороны (рис. 8).

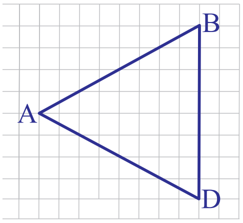



*рис. 8*

**5.** а) Проведена биссектриса CK к основанию AB равнобедренного треугольника ABC. Определите длину отрезков AK и BK, если известно, что длина AB: 1) 12 см; 2) 25 мм; 3) 14,4 см.

б) Проведена биссектриса CK к основанию AB равнобедренного треугольника ABC. Определите длину основания AB, если известно, что длина BK: 1) 3,4 см; 2) 5 мм; 3) 4,45 см.

**6.** Определите условие и утверждение в теореме о свойстве углов, прилежащих к основанию равнобедренного треугольника. Поменяв их местами, назовите обратную теорему.

**7.** Проведена биссектриса MC треугольника MNK. Известно, что $\angle N \cong \angle K$ (рис. 9). Докажите, что $MN \cong MK$.

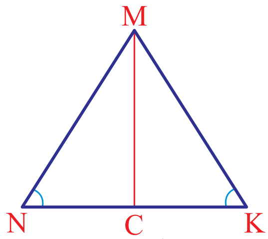



*рис. 9*

**8.** Какова будет градусная мера углов, прилежащих к основанию равнобедренного треугольника, если величина угла при вершине равна: а) 30°, б) 120°, в) 90°.

**9.** а) Может ли градусная мера одного из углов, прилежащих к основанию равнобедренного треугольника равняться: 1) 89°; 2) 120°; 3) 90°? Обоснуйте свой ответ.

б) Определите градусную меру угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что градусная мера одного из углов, прилежащих к основанию треугольника, равна: 1) 30°; 2) 28°; 3) 79°.

**10.** Самир утверждает, что острые углы равнобедренного прямоугольного треугольника равны 45°. Верно ли его утверждение?

**11.** Основываясь на данные рисунки, определите углы треугольников (рис. 10).

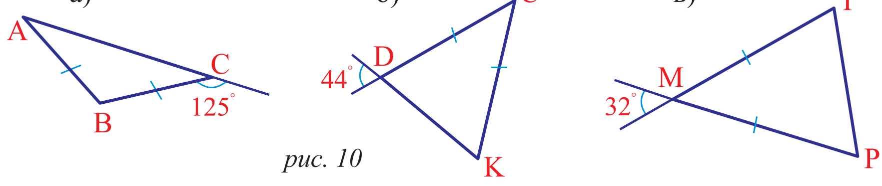



*рис. 10*

**12.** В равнобедренном треугольнике MNK $MN \cong NK$, длина боковой стороны – 11 см, ND – биссектриса и MD = 3,5 см. Найдите периметр треугольника MNK.

**13.** Известно, что в треугольнике ABC, периметр которого равен 48 см, $AB \cong BC$. Найдите длину медианы AK, если периметр треугольника ABK равен 36 см.

**14.** Сеймур утверждает, что равнобедренный треугольник SCP с углом при вершине в 60° также является равносторонним. Как по-вашему, он прав? Обоснуйте свой ответ (рис. 11).

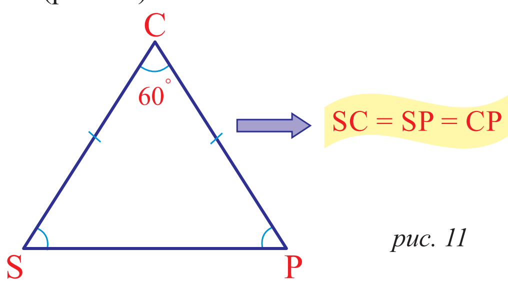



*рис. 11*

**15.** **Практическая работа.** Учащиеся класса делятся на три группы.

**I группа:** Проводит из вершины A равнобедренного треугольника ABC (рис. 12) биссектрису, медиану и высоту до его основания. Объясняет их расположение.

**II группа:** Проводит из вершины B равнобедренного треугольника ABC биссектрису, медиану и высоту. Объясняет их расположение.

**III группа:** Проводит из вершины C равнобедренного треугольника ABC биссектрису, медиану и высоту. Объясняет их расположение.

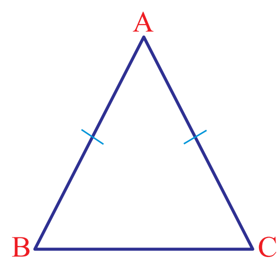



*рис. 12*

**16.** Можно ли утверждать, что треугольник ABC является равнобедренным, если а) $\angle A = 90°$, $\angle B = 45°$; б) $\angle B = 36°$, $\angle C = 72°$; в) $\angle A = 80°$, $\angle C = 50°$. Обоснуйте свой ответ.

**17.** Если один из углов равнобедренного треугольника будет равен а) 58°; б) 20°; в) 80°, то определите градусную меру других углов. Сколько здесь может быть возможных вариантов?

**18.** Опираясь на рисунки, определите углы треугольников (рис. 13).

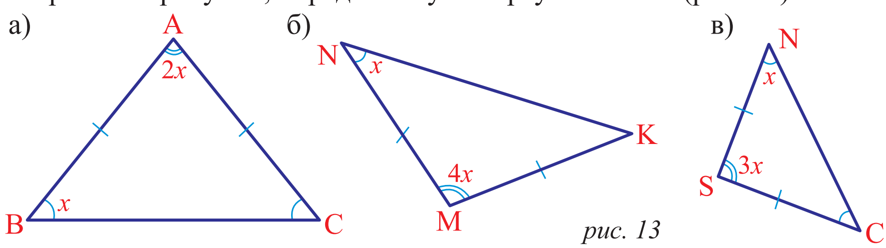



*рис. 13*

**19.** Проведите биссектрису угла, прилежащего к основанию треугольника ABC, угол при вершине которого равен 36°. Определите углы полученных новых треугольников.

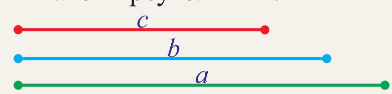
## 2.15. Построение треугольника по трём сторонам

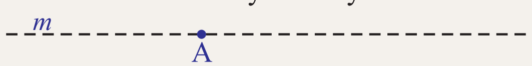
**Деятельность** **Циркуль, линейка**

Постройте треугольник со сторонами *a*, *b* и *c*.

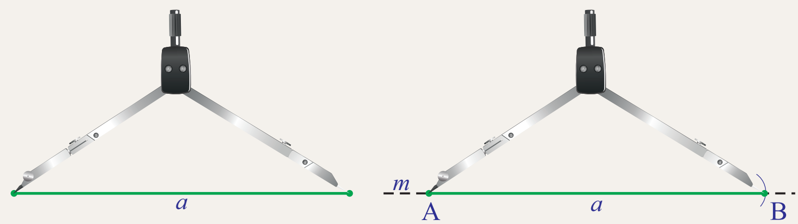
**1.** Что вы можете сказать о треугольнике со сторонами, длина которых равна длине данных отрезков? Можно ли построить такой треугольник?

**2.** Начертите произвольную прямую *m*. Отметьте на ней любую точку A.

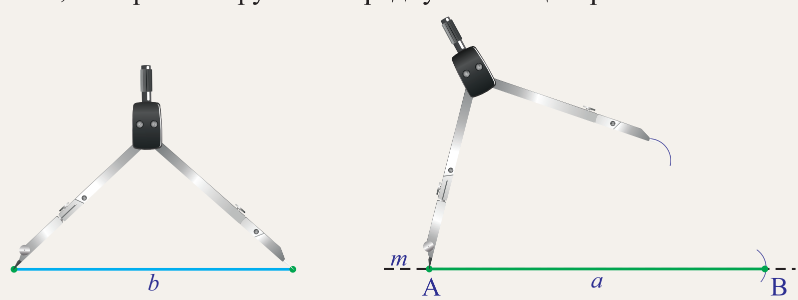


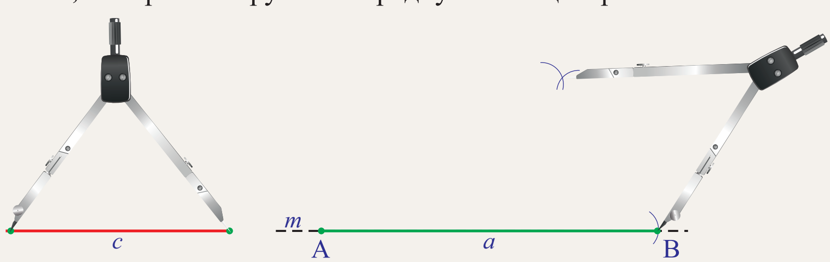

**3.** Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между концами его ножек равнялось *a*. Начертите окружность радиусом *a* с центром в точке A, отметьте точку пересечения окружности с прямой *m* и обозначьте эту точку буквой B.



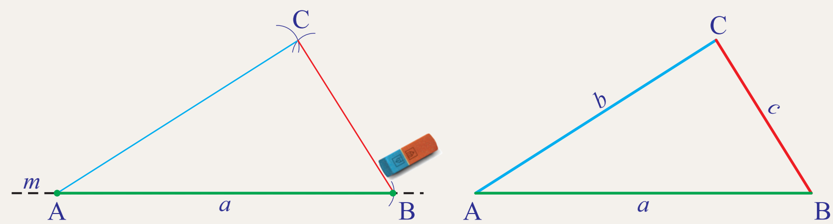

**4.** Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между концами его ножек равнялось *b;* начертите окружность радиусом *b* с центром в точке A.




**5.** Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между концами его ножек равнялось *c;* начертите окружность радиусом *c* с центром в точке B.



**6.** Точку пересечения окружностей обозначьте буквой С. Точку С соедините с точками А и В. Сотрите лишние линии. Полученный в результате построения треугольник АВС – требуемый треугольник.




## Упражнения

**1.** Напишите алгоритмы построений, данных в пунктах а) и б) на рисунке 1. Постройте эти треугольники, при условии, что $a = 3$ см и $b = 2$ см. Определите вид полученных треугольников.


*рис. 1*

**2.** Постройте треугольники со сторонами, длины которых равны а) 4 см, 5 см, 7 см; б) 3 см, 4 см, 5 см; в) 4 см, 4 см, 5 см. Определите вид каждого треугольника.

**3.** Постройте треугольник со сторонами, длины которых равны длинам отрезков $a$, $b$ и $c$ (рис. 2). Будут ли конгруэнтными треугольники, построенные каждым учащимся класса? Почему? Обоснуйте свой ответ.

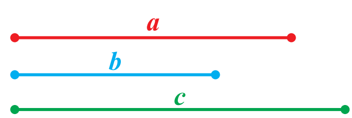



*рис. 2*

**4.** Строя треугольники со сторонами, длина которых 2,8 см, 4,1 см и 4,9 см, Наиль и Самир сначала начертили наибольшую сторону треугольника на горизонтальной прямой. Однако треугольник, построенный Самиром, оказался в верхней полуплоскости от прямой, а треугольник, построенный Наилем, – в нижней полуплоскости. Как вы считает, почему так получилось? Что можно сказать об этих треугольниках? Кто из учеников выполнил построение верно?

**5.** Постройте треугольник со сторонами а) 0,024 м, $\frac{3}{50}$ м, 4,7 см;

б) 3,2 см, 30 мм и 0,4 дм.

## 2.16. Третий признак конгруэнтности треугольников

### Деятельность

**1.** Постройте треугольник ABC со сторонами AB = 3 см, BC = 5 см, AC = 6 см.

**2.** Постройте треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами $A_1B_1$ = 3 см, $B_1C_1$ = 5 см, $A_1C_1$ = 6 см.

**3.** Расположите полученные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ как показано на рис. 2. Соедините точки B и $B_1$. Определите вид полученных треугольников $ABB_1$ и $CBB_1$. Что вы можете сказать о сторонах AB и $A_1B_1$? А о сторонах BC и $B_1C_1$?

**4.** Какими являются углы $\angle ABB_1$ и $\angle AB_1B$? Конгруэнтны ли углы $\angle CBB_1$ и $\angle BB_1C$?

**5.** Можно ли говорить о равенстве углов ABC и $A_1B_1C_1$? Почему?

**6.** Конгруэнтны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$? Если конгруэнтны, то по какому признаку?

**7.** Если принять во внимание конгруэнтность сторон AC и $A_1B_1$, как можно выразить конгруэнтность треугольников ABC и $A_1B_1C_1$?

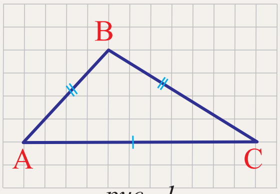
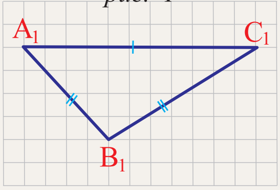



*рис. 1*



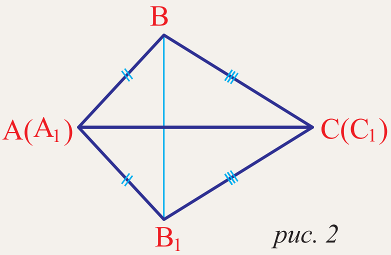




*рис. 2*

### Теорема Конгруэнтность треугольников по трём сторонам (ССС)

***Если три стороны треугольника конгруэнтны соответствующим сторонам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.***

Этот признак называется ССС (сторона, сторона, сторона).

**Условие теоремы:** $\Delta ABD$ и $\Delta MNC$, $AB \cong MC$, $AD \cong NC$, $BD \cong MN$

**Утверждение теоремы:** $\Delta ABD \cong \Delta CMN$ (рис. 3)

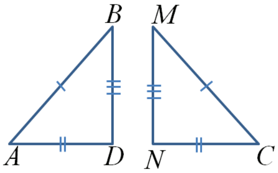



*рис. 3*

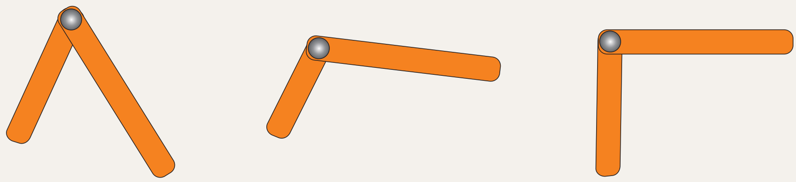
**Доказательство теоремы:** По условию теоремы $AB \cong MC$, $AD \cong NC$. Соединим треугольники ABD и MNC при условии наложения стороны BD на сторону MN. В том случае, если получится равнобедренный $\Delta ABC$, тогда $\angle A \cong \angle$___. Тогда по ___ признаку конгруэнтности треугольников $\Delta ABD \cong \Delta MNC$. (Другие случаи расположения треугольников ABD и MNC рассмотрите самостоятельно.) **Теорема доказана.**

(Докажите теорему по II признаку конгруэнтности треугольников.)

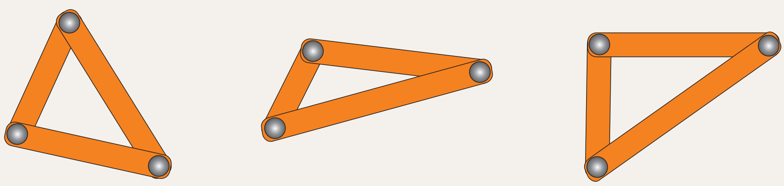
## Деятельность

**Доска, гвоздь, молоток**

**1.** Концы двух досок, наложив друг на друга, прикрепите гвоздём к неподвижной доске. Другие концы досок, оставив подвижными, двигайте в разные положения:



**2.** Объясните, почему концы этих досок подвижны. Что можно сделать, чтобы они оставались неподвижными? Что вы понимаете под свойством жёсткости треугольника? Как это свойство используется в быту?



## Упражнения

**1.** Перечислите конгруэнтные элементы треугольников, данных на рис. 4. Конгруэнтны ли эти треугольники? По какому признаку?

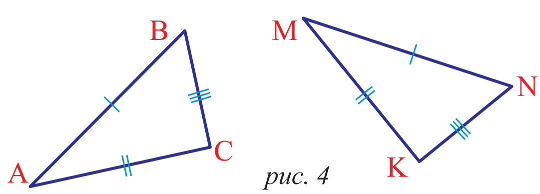


*рис. 4*

**2.** Длина сторон треугольников ABC и MOK показана на рисунке 5. Конгруэнтны ли эти треугольники? Почему?

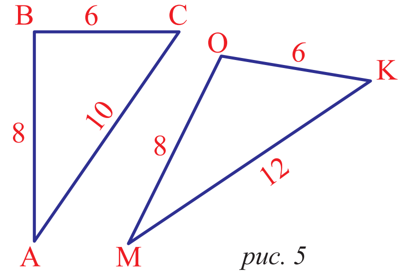



*рис. 5*

**3.** **Практическая работа.** В тетради в клетку начертите треугольник ABC, стороны которого конгруэнтны отрезкам $a$, $b$ и $c$ (рис. 6). Согнув листок пополам, вырежьте треугольник ножницами. Сколько получилось треугольников? Учащиеся делятся на 3 группы.

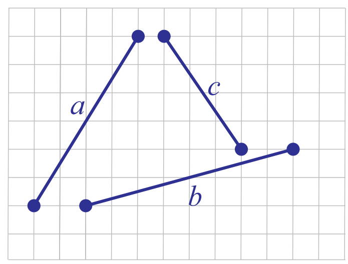



*рис. 6*

**I группа** размещает на столе полученные треугольники таким образом, чтобы стороны, длина которых равна $a$, совпали, а другие стороны расположились в разных полуплоскостях от $a$.

**II группа** на столе размещает треугольники таким образом, чтобы стороны, длина которых равна $b$, совпали, а другие стороны расположились в разных полуплоскостях от $b$.

**III группа** на столе размещает треугольники таким образом, чтобы стороны, длина которых равна $c$, совпали, а другие стороны расположились в разных полуплоскостях от $c$.

Каждая группа обосновывает конгруэнтность полученных треугольников.

**4.** Назовите конгруэнтные треугольники, данные на рисунке (рис. 7).

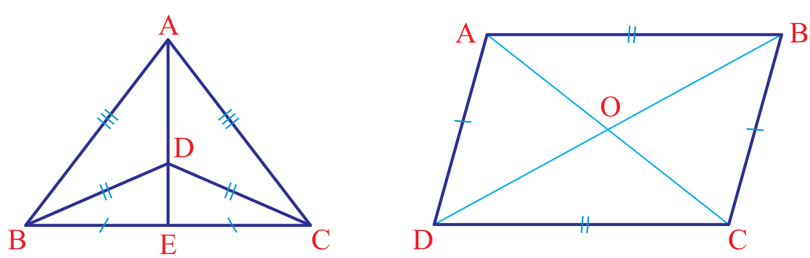



*рис. 7*

**5.** В треугольнике ABC AB = 11 см, BC = 8 см, AC = 9 см и в треугольнике MNK MN = 9 см, NK = 11 см, MK = 8 см. Укажите конгруэнтные углы этих треугольников.

**6.** Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, являющейся серединой отрезка AB. Докажите, что $\Delta AOC \cong \Delta BOD$, если $\angle CBO \cong \angle DAO$ (рис. 8).

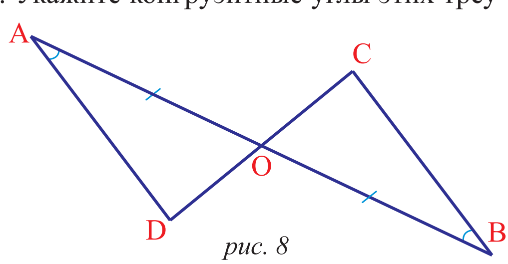



*рис. 8*

**7.** Дополните таблицу, если $\Delta ABC \cong \Delta KPM \cong \Delta DEF$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **ΔABC** | AB = 10 см<br>AC = 6 см<br>BC = 11 см | | |
| **ΔKPM** | | MK = 5 мм<br>KP = 9 мм<br>PM = 8 мм | |
| **ΔDEF** | | | EF = 17 мм<br>DF = 1,7 дм<br>DE = 0,20 дм |

**8.** **Практическая работа.** Возьмите 4 равные по длине доски. Гвоздями скрепите их так, как показано на рисунке (рис. 9). Конец A полученного инструмента прикрепите к пятой доске. Конец D оставьте свободным. Этот инструмент используется для деления угла пополам. По-вашему, как это возможно сделать? Начертите произвольный угол. С помощью сконструированного вами инструмента поделите его пополам.

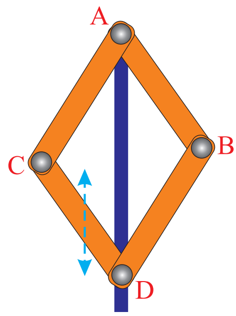


*рис. 9*

**9.** На рисунке 10 дано: $BM \cong CM$, $BD \cong CD$.
Докажите, что: а) $\Delta BDM \cong \Delta CDM$;
б) отрезок MD – биссектриса угла BMC.

**10.** На рисунке 11 дано: $BN \cong CM$ и $BM \cong CN$. Можно ли утверждать, что $AB = AC$? Обоснуйте свой ответ.

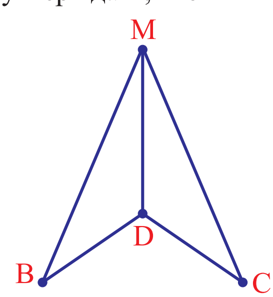


*рис. 10*

**11.** Равнобедренные треугольники ABD и BDC имеют общее основание BD. Отрезок AC пересекает BD в точке O. Докажите, что $\angle ABC \cong \angle ADC$ (рис. 12).

**12.** На рисунке 13 дано: $MK \cong NP$ и $KN \cong MP$. Определите $\angle KMP$, если $\angle KNP = 67°$.

**13.** На рисунке 14 отрезки AM и CP – биссектрисы. $AD \cong BC$ и $AB \cong CD$. Найдите градусную меру $\angle BDC$ и длину DM, если $\angle ABD = 25°$ и $BP = 3$ см.

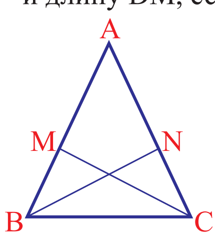


*рис. 11*

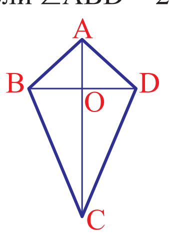


*рис. 12*

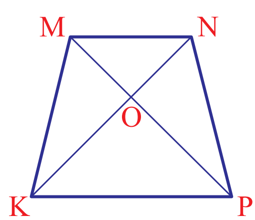


*рис. 13*

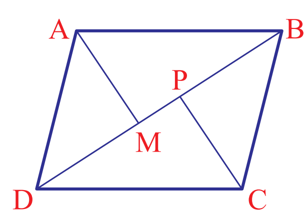


*рис. 14*

## Проверьте себя

**1.** Напишите данные произведения в виде степени:

а) $(x+3)(x+3)(x+3)(x+3)$;
б) $(xy)(xy)(xy)(xy)(xy)$;
в) $(a-b+c)(a-b+c)(a-b+c)$.

**2.** Определите последнюю цифру значений данных степеней:

а) $1256^{25}$; б) $999^{16}$;
в) $1000^{100}$; г) $25^{1256}$; д) $18^{99}$.

**3.** Вычислите значение выражений:

а) $25^3 \cdot 25^6 : 25^2$;
б) $(-3)^{18} : (-3)^9 \cdot (-3)^5$;
в) $17^6 \cdot 17^{35} : 17^9 \cdot 17^{25}$.

**4.** Упростите выражения:

а) $4^{k+1} \cdot 4^{k-2} : 4^{2k}$;
б) $a^{m+1} : a^{-m-3} \cdot a^{11-m}$.

**5.** Определите знак $a^n$, при $a > 0$ и при $a < 0$.

**6.** Упростите выражения:

а) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 : 16^2$;
б) $49^4 : (-343)^2 : 21^2$.

**7.** Известно, что треугольники ABD и CNM, периметр каждого из которых составляет 0,559 дм, равны. Определите длину стороны CM, если AB = 13,8 мм, BD = 2,03 см.

**8.** Упростите выражения:

а) $16x^2y \cdot \dfrac{1}{8}x^3y^4$;
б) $(2ab^3)^2 \cdot (-3a^2b)^3$;
в) $11{,}3p^3k^8 \cdot 0{,}6\,pk^5$;
г) $\left(1{,}8m^4n\right)^2 \cdot \dfrac{2}{3}mn^2$.

Выпишите коэффициент и степень одночлена.

**9.** Даны треугольники $\Delta ABC \cong \Delta PNK$. Если AB = 5 см, NK = 9 см, $\angle B = 25°$, то $\angle N = ?$, $PN = ?$, $BC = ?$

**10.** Вычислите:

а) $\dfrac{2^7 \cdot 3^{12}}{9^6 \cdot 4^3}$; б) $\dfrac{36^5 \cdot 6^7}{216 \cdot \left(6^4\right)^2}$; в) $\dfrac{49 \cdot 7^3 \cdot 25^3}{125^2 \cdot 343}$.

**11.** Акиф, вложив 4000 манатов в банк с годовым процентным ростом 12% от первоначальной суммы, забрал свои деньги через 5 лет. Сколько денег вернул банк Акифу?

**12.** Постройте треугольник со сторонами 1,6 см, 3,4 см и 3,1 см.

**13.** Определённая сумма денег, вложенная в банк с годовым приростом 20% от суммы каждого предыдущего года, через 2 года составила 36 000 манатов. Какова была вложенная сумма?

**14.** Один из углов равнобедренного треугольника равен 42°. Найдите его другие углы.

**15.** Выполните действия:

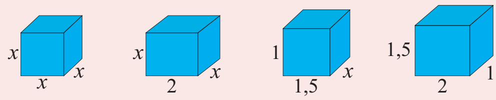
а) $11°25' + 53°40'$;
б) $28°53' - 13°46''$;
в) $105°12'23'' + 73°16'49''$;
г) $108° - 70°19''$;
д) $63°13' - 41°43''$;
е) $58°28'' - 58°5'$;
ж) $13°23' \cdot 6$;
з) $16{,}2° + 5°7' - 12{,}1°$;
и) $67°39' - 51{,}6°$.

# ГЛАВА III. МНОГОЧЛЕН. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

## 3.1. Многочлен и его стандартный вид

**Деятельность** | **Многочлен, стандартный вид, алгебраическая сумма**

1. Определите объём куба и прямоугольного параллелепипеда и запишите сумму полученных одночленов.




2. Сколько слагаемых в полученном выражении? Как называется каждое слагаемое? Назовите степень каждого из них.
3. Как бы вы назвали сумму нескольких одночленов?

**Образец**

Запишите сумму одночленов $7{,}2ab$; $3a^2$; $-11b^3c$; $8a\cdot 4b$. Определите число одночленов в сумме. Укажите, какой из них не показан в стандартном виде.

*Решение:* $7{,}2ab + 3a^2 + (-11b^3c) + 8a\cdot 4b$.

В полученной сумме участвует 4 одночлена. Из них один одночлен, $8a\cdot 4b$, не в стандартном виде.

Алгебраическая сумма одночленов называется **многочленом**. Под **алгебраической суммой** понимается сумма, при получении которой учитываются знаки слагаемых, т.е. члены с положительным знаком складываются, с отрицательным знаком – вычитаются. Например: $a + 2b + (-3c)$

Одночлены, составляющие многочлен, называются **членами этого многочлена**. Одночлен – это многочлен, состоящий из одного члена. Многочлен с двумя членами называется **двучленом**, с тремя членами – **трёхчленом**.

**Деятельность**

Исследуйте каждый член многочлена $9b^5 - 2b\cdot 5b^4 + 5b^2 - 11b + 0{,}25b\cdot(-12)b + 15$.

**1.** Сколько членов участвует в этом многочлене? Перечислите их.
**2.** Обратите члены, приведенные в нестандартном виде, в стандартный вид.
**3.** Приведите подобные одночлены (т.е. найдите их сумму или разность).

**Многочлен**

$$9b^5 + (-10b^5) + 5b^2 + (-11b) + (-3b^2) + 15 \longrightarrow -b^5 + 2b^2 - 11b + 15$$

**Подобные одночлены** **Подобные одночлены** **Многочлен стандартного вида**

Многочлен, все слагаемые которого являются одночленами стандартного вида, не имеющий подобных членов, называется **многочленом стандартного вида**. Чтобы привести многочлен к стандартному виду необходимо сделать приведение подобных слагаемых.

Степень одночлена с наибольшим показателем, входящего в многочлен стандартного вида, называется степенью многочлена.

Одночлен нулевой степени, входящий в многочлен, называется **свободным членом**.

## Образец

Приведите многочлен $x^6 + 3xyx + x^2y + 4yx^2 - 7xxy - 6yyx + y^3y - 19$ в стандартный вид и определите его степень и свободный член.

*Решение:* Запишем члены многочлена в стандартном виде и сделаем приведение подобных слагаемых:

$$x^6 + 3xyx + x^2y + 4yx^2 - 7xxy - 6yyx + y^3y - 19 = x^6 + \underline{3x^2y} + \underline{x^2y} + \underline{4x^2y} - \underline{7x^2y} - 6xy^2 + y^4 - 19 = x^6 + y^4 + x^2y - 6xy^2 - 19$$

Многочлен $x^6 + y^4 + x^2y - 6xy^2 - 19$ является многочленом стандартного вида. Соответственно степени одночленов в этом многочлене – 6; 4; 3; 3; 0. Среди них одночленом с наибольшей степенью является $x^6$. Следовательно, степень многочлена – 6. Свободный член этого многочлена –19.

## Упражнения

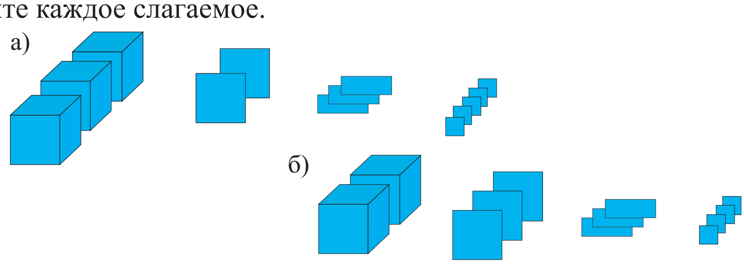
**1.** Запишите в таблицу члены данных многочленов так, как указано в образце, и укажите степень многочлена.

а) $2x + 5y - 12$; б) $-6x^4 + y^3 - 5y + 11$; в) $14a^5b + ab^2 - a^2b + 8a - 7b$;

г) $8{,}2mnk - 1{,}02m^2n + 11a - 9$; д) $\frac{1}{2}a - 0{,}6b - 3\frac{7}{9}c + 12ab - c + 7{,}2$.

| Многочлен | I член | II член | III член | IV член | Свободный член | Степень |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^6y - 11x^3y + 0{,}5xy^2 + x - 9$ | $4x^6y$ | $-11x^3y$ | $0{,}5xy^2$ | $x$ | $-9$ | 7 |

**2.** Изображены куб с ребром $a$ см, прямоугольник со сторонами 1 см и $a$ см, квадрат со стороной 1 см. Определите объём куба, площадь прямоугольника и квадрата. Полученные одночлены запишите в виде алгебраической суммы. Назовите каждое слагаемое.



**3.** Напишите члены и степень данных многочленов:

а) $3x^5 + 2x^3 - 4$;  б) $2x^4 - 3x + 2$;  в) $x^5 + x^4 - 2x^2 - 1$;
г) $2m^6 + 7$;  д) $4xy^6 + xy^2 - x^2 + y^8$;  е) $a^3 - bc - 7$.

**4.** Приведя подобные слагаемые, запишите многочлен в стандартном виде:

а) $10x - 6xy + 3xy$;  б) $4x^4 - 5x + 9x^2 - 7x^4 + 6x$;
в) $6ab - 11ab + 3a^2$;  г) $5a^3 + a^2 - 12 + 2a^2 + a^3 - a - 30$.

**5.** Определите многочлен, равный выражению $3a^2 + b$:

а) $4a^2 - 4b - a^2 + 17b - b$;  б) $12a^3 - 9b - 9a^2 + 6b + b$;
в) $-0,7a^2 - 7b - 2,3a^2 + 8b$;  г) $1,8a^2 - 4,2b + 1,2a^2 + 5b + 0,2b$.

**6.** Приведите многочлены в стандартный вид. В каком из них есть свободный член, отличный от нуля? Напишите степень каждого многочлена.

а) $-4p^4 + 21p^3 + 4p^4 - 8p^2 + 7p^2$;
б) $2aa^2 + a^2 - 6a^2 + a^3 - a$;
в) $8xx^5 + 3xx^4 - 5x^2x^3 - 6xx^2$;
г) $5a \cdot 4b^2 - 0,8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1$.

**7.** Определите степень многочлена:

а) $4a^6 - 2a^7 + a - 1$;  б) $5p^3 - p - 2$;
в) $1 - 3x$;  г) $4xy + xy^2 - 5x^2 + y$;
д) $8x^4y + 5x^2y^3 - 11$;  е) $xy + yz + xz - 1$.

**8.** Сделайте приведение подобных слагаемых и вычислите значение многочленов при данных значениях переменных.

а) $2a^3 + 3ab - b^2 - 6a^3 - 7ab + 2b^2$,  $a = 2$; $b = -6$
б) $mn - 6mn^2 - 8mn - 6mn^2$,  $m = 0,5$; $n = -2$
в) $10xy^2 - 12x^2y + 9xy^2, x = \dfrac{1}{3}, y = 9$

**9.** Выберите некоторые из предложенных одночленов и
а) составьте многочлен стандартного вида,
б) многочлен с подобными членами,
в) используя все предложенные одночлены составьте два многочлена стандартного вида:
$4a, -3ab, 7a^2, -8a^2, 9ab, 5a$

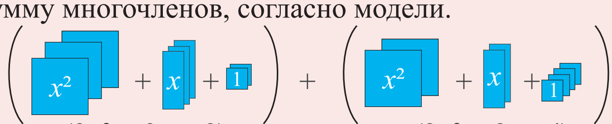
**10.** Запишите предложенные выражения в виде многочленов:

а) $\overline{cba}$;  б) $\overline{abc} - \overline{ab}$;  в) $\overline{a0c} + \overline{ac}$;
г) $\overline{cab} + \overline{ca}$;  д) $\overline{abc} + \overline{bca}$;  е) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

# 3.2. Сложение многочленов

**Деятельность** | **Сумма многочленов**

**1.** Найдите сумму многочленов, согласно модели.

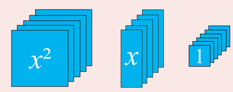



$(3x^2 + 3x + 2)$ + $(2x^2 + 2x + 4)$

**2.** Раскрывая скобки, приведите подобные члены. Назовите члены полученного многочлена.

**3.** Запишите многочлены в столбик и сложите их.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 2 \\ +\; 2x^2 + 2x + 4 \\ \hline 5x^2 + 5x + 6 \end{array}$$




$(5x^2 + 5x + 6)$

При нахождении суммы многочленов раскрываются скобки (если есть), приводятся подобные слагаемые. При сложении многочленов в столбик подобные слагаемые записываются друг под другом.

## Упражнения

**1.** а) Напишите сумму многочленов $4x^3 - 5x - 7$ и $x^3 - 8x$, и приведите полученный многочлен в стандартный вид.

б) Напишите сумму многочленов $x^3 - 8x$ и $4x^3 - 5x - 7$, и приведите полученный многочлен в стандартный вид.

Выскажите своё мнение о полученных результатах. Какое свойство сложения здесь применяется?

**2.** Смоделируйте и найдите сумму данных многочленов:

а) $(2x + 3) + (3x - 9)$; б) $(2x^2 + 6x + 2) + (x^2 + x - 3)$;

в) $(2x^3 + 6x - 2) + (x^3 - 1)$; г) $(a^3 + 5a^2 - 10) + (a^3 - 17)$.

**3.** Запишите данные многочлены в столбик и найдите их сумму:

а) $(4a + 5b - c) + (8a - 6b + c)$; б) $(3a^2 + 8a - 4) + (3 + 8a - 5a^2)$;

в) $(b^3 - 3b^2 + 4b) + (b + 2b^2 + b^3)$; г) $(0{,}1x^2 + 0{,}02y^2) + (0{,}17x^2 - 0{,}08y^2)$.

**4.** а) Определите P + Q, если $P = 5a^2 + b$; $Q = -4a^2 - b$.

б) Определите степень многочлена A + B + C,

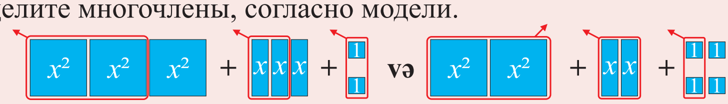
если $A = a^2 - b^2 + ab$; $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$; $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$.

**5.** Сеймур говорит, что сумма пяти последовательных натуральных чисел без остатка делится на 5. Проверьте, верно ли он говорит? Верна ли мысль, что сумма четырёх последовательных натуральных чисел делится на 4? На какое число будет делиться сумма четырёх последовательных нечётных чисел? Свойство ещё каких чисел отвечает такому закону?

## 3.3. Вычитание многочленов

### Деятельность

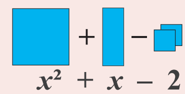
**1.** Определите многочлены, согласно модели.




**2.** Напишите модель в виде разности многочленов.

$$(3x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + 2x + 4)$$

**3.** Раскройте скобки. Как в этом случае изменятся знаки одночленов, стоящих в скобках, перед которыми стоит знак минуса? После раскрытия скобок приведите подобные члены.




**4.** Чтобы найти разность $(3x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + 2x + 4)$, следует, поменяв знаки членов вычитаемого на противоположные, показать многочлены в виде суммы. Найдите сумму, записав многочлены в столбик:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \mathbf{3x^2 + \quad 3x + \quad 2} \\ \mathbf{(-2x^2) + (-2x) + (-4)} \end{array} \\ \hline \mathbf{x^2 + \quad x - \quad 2} \end{array}$$

Чтобы найти разность двух многочленов следует к уменьшаемому прибавить вычитаемое с противоположным знаком.

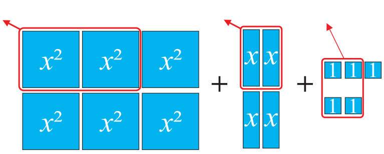
### Упражнения

**1.** а) Напишите разность многочленов $8a^3 - 12a + 3$ и $2a^3 - 8a$ и приведите полученный многочлен в стандартный вид.

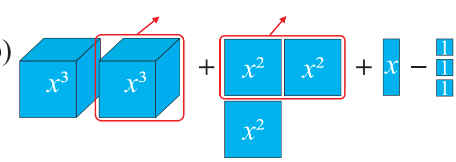
б) Напишите разность многочленов $2a^3 - 8a$ и $8a^3 - 12a + 3$ и приведите полученный многочлен в стандартный вид.

**2.** Напишите согласно модели уменьшаемый и вычитаемый многочлен и найдите разность:

а)




b)




**3.** Заданное вычитание осуществите, построив модель посредством геометрических фигур:

а) $(7m + 3) - (3m + 1)$; б) $(5x^2 + 10) - (5x^2 + 8)$; в) $(3a^3 + 2a + 4) - (a^3 + 2)$.

**4.** Вычислите:

а) $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 6x^2 + 4x - 8 \\ 2x^2 - 2x + 4 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 6x^3 + 4x^2 - 8x \quad\quad \\ -2x^2 \quad\quad\quad + 4 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

**5.** В таблице указана сумма денег в банке на счету у Самира, Наги, Юсифа и Назира. Согласно таблице, определите:

| Счёт в банке | |
|---|---|
| **Имя** | **Баланс** |
| Самир | $6x + 7$ |
| Наги | $7x - 10$ |
| Юсиф | $12x + 3$ |
| Назир | $4x + 27$ |

а) Разность каких двух счетов равна $(5x + 13)$?
б) Разность каких двух счетов равна $(8x - 24)$?
в) Разность каких двух счетов равна $(3x - 37)$?
г) Если $x = 100$ \$, вычислите баланс каждого и определите сколько денег у каждого на счету в манатах (1 \$ = 0,78 ₼).

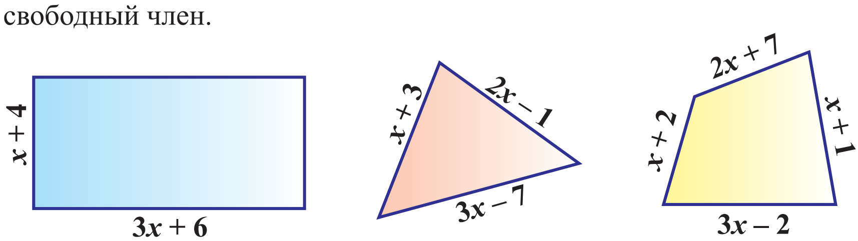
**6.** Джавид вставил в рамку картину «Хыналыг» народного художника Марал Рахманзаде и повесил на стену. Площадь внутреннего прямоугольника – $(x^2 + 7)$ квадратных сантиметров. Вместе с рамкой площадь всей картины равна $(2x^2 + 3)$ квадратных сантиметров. Определите площадь рамки.

**7.** Составьте два таких многочлена, чтобы их разность была равна многочлену $(3a^2 - 5a + 4)$.

**8.** Определите многочлен A и найдите его степень, используя правила нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого и вычитаемого.

а) $A + (12y^2 + 6y - 1) = -10y + 9$;  б) $(-6x^2 + 7x - 11) - A = 2x^2 + 2x - 1$;
в) $A - (6a^2 - 5ab + b^3) = 4b^3 - 11ab$;  г) $(25x^5 - 13x^3 + 7) + A = 15x^5 - 13x^2$.

**9.** Вычислите периметры данных фигур. В полученных многочленах отметьте свободный член.




**10.** Выполните действия над данными многочленами:

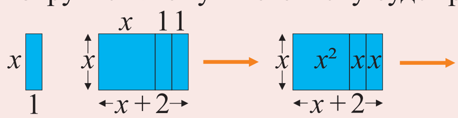
а) $(4a + 5b - 6c) + (3a - 7b + 2c) - (2a - b + 7c)$;
б) $(3x^3 - 7x + 21) - (-x^3 - 2x^2 - 3x) + (4x^3 - 21)$;
в) $(9ax^3 - 5ax^2 + 6ax) - (-3ax^3 - 6ax^2 - 7ax) - (5ax^3 + ax)$;
г) $(a^3 - 0{,}12b^3) + (0{,}39a^3 - b^3 - 9) + (0{,}01a^3 - 1{,}88b^3 + 11)$.

**11.** Упростите выражения а) A + B – C; б) A – B + C; в) B – A + C;
г) C – B – A при условии $A = 2\frac{3}{5}b - \frac{3}{4}b^3$;  $B = \frac{1}{4}b^3 - 1\frac{3}{5}b$;  $C = 1\frac{1}{4}b^3 + 6\frac{3}{5}b$.

## 3.4. Умножение одночлена на многочлен

### Деятельность

**1.** Пусть дан прямоугольник с шириной $x$, длиной $x + 2$. Опираясь на модель, проанализируйте какому многочлену будет равна его площадь.




$\rightarrow x^2 + x + x = x^2 + 2x$

**2.** С другой стороны, площадь этого прямоугольника вычисляется формулой S = $x(x + 2)$. Приравняйте полученные эти два выражения. Какое равенство вы получите?

**3.** Постарайтесь объяснить нижеприведённое равенство. Какое действие здесь произведено? Какое свойство умножения применено?

$$x(x + 2) = x \cdot x + x \cdot 2 = x^2 + 2x$$

Чтобы умножить одночлен на многочлен, следует умножить одночлен на каждый член многочлена и записать полученные произведения в виде алгебраической суммы.

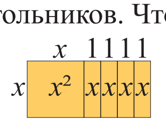
### Образец

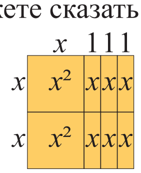
Найдите произведение одночлена $-3a^2$ и трёхчлена $(4a^3 - a + 1)$.

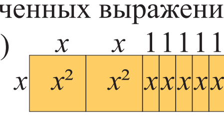
*Решение:* $-3a^2(4a^3 - a + 1) = -3a^2 \cdot 4a^3 - (-3a^2 \cdot a) + (-3a^2 \cdot 1) = -12a^5 + 3a^3 - 3a^2$.

### Упражнения

**1.** Опираясь на модель, вычислите 2-мя способами площадь данных прямоугольников. Что вы можете сказать о полученных выражениях?

а) 


б) 


в) 


**2.** Найдите произведение, построив модель:

а) $2x(x + 4)$; б) $x(3x + 1)$; в) $3x(x + 2)$.

**3.** Находя произведения, используйте стрелки, указывающие направление умножения, и назовите степень и свободный член полученного многочлена.

а) $5(2x + 7)$; б) $3m(m + 9)$; в) $(b - 11) \cdot 8b$;

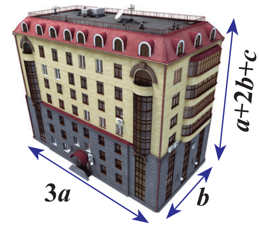
г) $x(-3x + 6)$; д) $2x(5x^2 - 3x)$; е) $(10c^5 + 2c^3) \cdot (-2c^2)$;

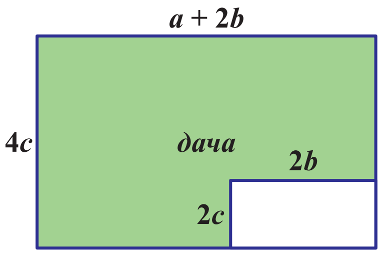
ж) $6(a^2 - 2a + 6)$; з) $-10x^5(-4x^3 - 3x^2 + 5)$; и) $n^2(7n^3 + 11n^2 - 1)$;

й) $2ab(4a^2b^3 + 5ab^3 - 2{,}1ab)$; к) $-3x^2y^3(-1{,}1 - 2xy^2 + 0{,}5x - 2{,}3y^3)$.

Назовите, какое свойство умножения было здесь использовано.

**4.** Длина здания, построенного в форме прямоугольного параллелепипеда, равна $3a$, ширина $b$, высота $(a + 2b + c)$. Каким многочленом выражается объём здания?




**5.** На плане дан чертёж дачи Намика. Определите площадь дачи на плане, при условии $a = 8$ см, $b = 5$ см, $c = 3$ см. Найдите настоящие размеры дачного участка при масштабе 1 : 200.

**6.** Опираясь на образец, найдите произведение одночлена на многочлен путём умножения в столбик:

а) $\begin{array}{r} 2x^2 \\ \times \\ \hline 5x^3 + 3x^2 - 5x - 3 \end{array}$

б) $\begin{array}{r} -7a^3b \\ \times \\ \hline -2a^5 - 6a^3b - 5a - 3b \end{array}$

$\begin{array}{r} -4x^2 \\ \times \\ 2x^3 + x - 5 \\ \hline -8x^5 - 4x^3 + 20x^2 \end{array}$

**7.** Упростите выражения:

а) $\left(6m^2 - 4m + 9n\right)\left(-\frac{1}{6}m^2\right)$;  б) $-0{,}5x^2(2x^2 + 6x - 7)$;

в) $2a(a - b) - a(a - 2b)$;  г) $-x(x^2 - 7) + x^2(x - 3)$;

д) $(1 + 3a - a^4) \cdot 5a$;  е) $3a^4x\,(a^2 - 2ax + x^3 - 1)$;

ж) $\frac{2}{7}x\left(1{,}4x^2 - 3{,}5y\right)$;  з) $\frac{1}{2}ab\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{4}{5}b^2\right)$;

и) $-\frac{1}{3}c^2\left(1{,}2d^2 - 6c\right)$;  к) $-\frac{2}{5}a^2y^5\left(5ay^2 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{5}{6}a^3\right)$.

**8.** Решите уравнения:

а) $5x + 3(x - 1) = 6x + 11$;  б) $3x - 5(2 - x) = 54$;

в) $8(y - 7) - 3(2y + 9) = 15$;  г) $0{,}6 - 0{,}5(y - 1) = y + 0{,}5$;

д) $6 + (2 - 4x) + 5 = 3(1 - 3x)$;  е) $0{,}15(x - 4) = 9{,}9 - 0{,}3(x - 1)$.

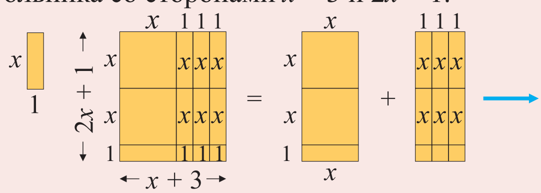
**9.** При каком значении переменной: а) значение выражения $2(3 - 5c)$ меньше на 1 единицу значения выражения $4(1 - c)$? б) значение выражения $-3(2x + 1)$ больше на 20 единиц значения выражения $(8x + 5)$? в) значение выражения $(5x + 7)$ меньше в 3 раза значения выражения $(61 - 10x)$? г) значение выражения $8 - y$ больше в 2 раза значения выражения $(7 + y)$?

**10.** Периметр треугольника 44 см. Одна из его сторон меньше второй на 4 см, но больше третьей по длине в 2 раза. Определите длину сторон треугольника.

# 3.5. Умножение многочлена на многочлен

## Деятельность

**1.** Проанализируйте нижеследующую модель для нахождения площади прямоугольника со сторонами $x + 3$ и $2x + 1$.




$x(2x + 1) + 3(2x + 1)$

**2.** С другой стороны, площадь данного прямоугольника вычисляется по формуле: $S = (x + 3)(2x + 1)$. Что вы можете сказать о выражениях $(x + 3)(2x + 1)$ и $x(2x + 1) + 3(2x + 1)$?

**3.** Вычислите произведение двучленов $x + 3$ и $2x + 1$, производя умножение в направлении, указываемом стрелками.

$$(x + 3)(2x + 1) = x \cdot 2x + x \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 2x^2 + 7x + 3$$

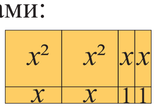
**4.** Вычислите произведение двучленов $x + 3$ и $2x + 1$, записав их в столбик. Сперва $x$, затем 3 умножьте на каждый член двучлена $(2x + 1)$, полученные произведения сложите.

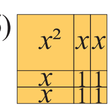
$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \times\quad 2x + 1 \\ \hline 2x^2 + x \quad\; \\ +\quad 6x + 3 \\ \hline 2x^2 + 7x + 3 \end{array}$$

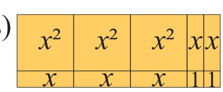
Чтобы умножить многочлен на многочлен, следует каждый член одного многочлена умножить на каждый член второго многочлена и записать алгебраическую сумму полученных произведений.

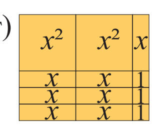
## Упражнения

**1.** Запишите выражения площадей данных прямоугольников разными способами:

а) 

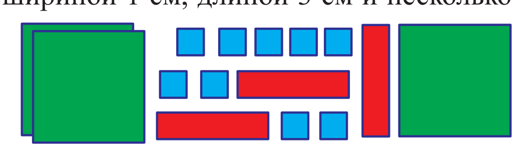

б) 


в) 

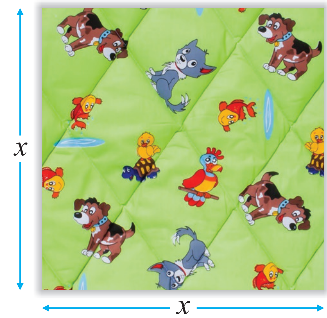

г) 


**2.** Постройте модель для нахождения произведений данных двучленов.
а) $(x + 3)(x + 3)$; б) $(x + 1)(x + 4)$; в) $(2x + 1)(x + 3)$; г) $(3x + 1)(x + 2)$;
д) $(x + 4)(2x + 3)$; е) $(3x + 1)(x + 1)$; ж) $(x + 2)(3x + 2)$; з) $(x + 1)(x + 5)$.

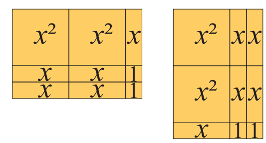
**3.** **Практическая работа.** **Оборудование:** *цветная бумага, ножницы, линейка и карандаш.* Вырежьте несколько зелёных квадратов со стороной 3 см; несколько красных прямоугольников шириной 1 см, длиной 3 см и несколько синих квадратов со стороной 1 см. используя эти фигуры, постройте модель произведения любых двух двучленов.



**4.** Детское одеяло, длина стороны которого $x$ см, имеет форму квадрата. Ширина одеяла, предназначенного для взрослого человека, больше ширины детского одеяла на 30 см, а длина – на 40 см. Начертите квадрат, изображающий детское одеяло, и увеличивая его стороны соответственно на 30 см и 40 см, изобразите одеяло, предназначенное для взрослого человека. Как в этом случае изменится площадь одеяла? Выразите площадь одеяла, предназначенного для взрослых, в виде произведения двучленов.




**5.** Самир утверждает, что модели, данные на рисунке, изображают произведение одинаковых двучленов. Анар же считает, что его мнение ошибочно. По-вашему, кто из них прав? Какое свойство умножения отражает изображение на рисунке?




**6.** Найдите произведение многочленов путём умножения в столбик:

а) $(x^2 + 2)(x - 3)$;
б) $(3x^2 - 5x)(2 - x)$;
в) $(c - 4)(c + 4)$;
г) $(5x^2 - 6y^2)(6x^2 - 5y^2)$;
д) $(a^2 + 2b)(2a + b^2)$;
е) $(x^2 + 2x + 1)(x + 3)$;
ж) $(-p + q)(-1 - q)$.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x \\ \times \quad x + 5 \\ \hline 2x^5 + 10x^4 \qquad\quad \\ + \qquad\quad 3x^4 + 15x^3 \\ \hline 2x^5 + 13x^4 + 15x^3 \end{array}$$

**7.** При нахождении произведения многочленов, используйте умножение одночлена на многочлен:

а) $(2x^2 + 7x - 3)(x + 3)$;
б) $(x^3 - 11xy + 5y)(xy - x)$;
в) $(a - b - c + k)(1 - ac)$;
г) $(9m^2 - 5mn + n^2)(3m - n)$;
д) $\left(\dfrac{3}{4}ab - 2b^2 + \dfrac{1}{2}\right)(a + 6b)$.

$(3a^2 - 3a + 5)(a - 7) =$
$= 3a^2 \cdot (a - 7) - 3a \cdot (a - 7) +$
$+ 5 \cdot (a - 7) = 3a^3 - 21a^2 - 3a^2 +$
$+ 21a + 5a - 35 = 3a^3 - 24a^2 +$
$+ 26a - 35$

**8.** Проводя вычисления, Севиндж определила, что при $x = 2\dfrac{1}{7}$ значение выражения $(5x - 1)(x + 3) - (x - 2)(5x - 4)$ равно 49. Как можно простейшим способом проверить верность её результата?

**9.** Упростите данные выражения:

а) $(x + 3)(x - 3) + (4 - x)x - 3x$; б) $x(1 - 2x) - (x - 3)(x + 3) + 3x^2$;
в) $x^2(3 - x) - (2 - x^2)(x + 1) - 4x^2$; г) $(x + 2)(x + 2) - x(5 - x) - 2x^2$.

Определите, при каком значении $x$ значение этих выражений будет равно $a$.

# 3.6. Разложение многочлена на множители

## Деятельность

Разложение многочлена на множители:

1. Какой множитель одинаковый в одночленах $ab$ и $2b$, являющихся слагаемыми в многочлене $ab - 2b + 3a - 6$? Есть ли общий множитель в одночленах $3a$ и $6$? Сгруппировав, запишите эти одночлены в скобках.
2. Записав данный многочлен в виде $(ab - 2b) + (3a - 6)$, объясните, какое действие вы произвели. В каждой скобке одинаковый множитель вынесите за скобку. В этом случае, какой вид примет данное выражение?
3. Из каких множителей состоят слагаемые в выражении $b(a - 2) + 3(a - 2)$? Какой множитель одинаковый?
4. Если множитель $(a - 2)$ вынести за скобки, какое выражение вы запишите внутри скобок?
5. Из произведения каких двучленов состоит полученное выражение? Как вы назовёте эту операцию? Обоснуйте свой ответ.

Представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называется разложением многочлена на множители.

## Образец

Разложите на множители многочлен $ac + bd - bc - ad$.

*Решение:* В данном многочлене сгруппируем одночлены с одинаковыми (общими) множителями: $ac + bd - bc - ad = ac - bc + bd - ad$

Общий множитель вынесем за скобку: общим множителем выражения $ac - bc$ является множитель $c$, а в выражении $bd - ad$ – это множитель $d$ *(для получения в скобке выражения $(a - b)$ за скобки выносится множитель "- d")*.

$c(a - b) - d(a - b)$. В этом выражении общим множителем является двучлен $(a - b)$. Если его вынести за скобку, то получим $(a - b)(c - d)$.

Итак, способом группировки мы разложили многочлен на множители:

$ac + bd - bc - ad = ac - bc + bd - ad = c(a - b) - d(a - b) = (a - b)(c - d)$.

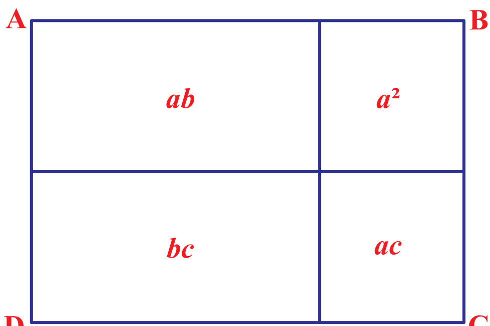
Способ, показанный в образце – это разложение многочлена на множители способом группировки.

## Упражнения

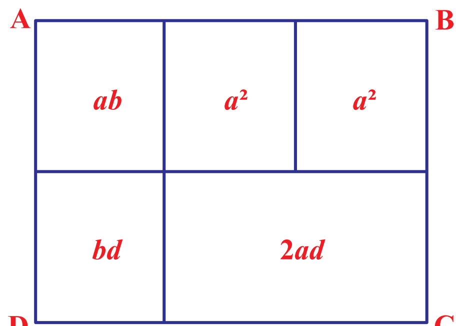
1. Кямаля несколько многочленов разложила так, как показано ниже. Выполнив произведение двучленов, определите верно или неверно произведено разложение многочленов на множители.

| Многочлен | Разложение на множители | Верно | Неверно |
|---|---|---|---|
| $x(b + c) + 4b + 4c$ | $(x + 4)(b + c)$ | | |
| $2c - 2d + p(c - d)$ | $(2 - c)(p - d)$ | | |
| $mx + my + 6x + 6y$ | $(m + 6)(x + y)$ | | |

**2.** Запишите многочлен, выражающий площадь прямоугольника ABCD. Опираясь на рисунок, определите, произведению каких двучленов равен этот многочлен.




а)




б)

**3.** Постройте модель прямоугольника, соответствующего данному многочлену. Определите, какими двучленами выражаются стороны прямоугольника.

а) $ab + ac + 2b + 2c$; б) $x^2 + 2xy + y^2$; в) $8y + cz + 8z + cy$.

**4.** В таблице дан один из множителей многочлена. Найдите второй множитель в виде двучлена.

| Многочлен | I множитель | II множитель |
|---|---|---|
| $ax + 6(b + x) + ab$ | $a + 6$ | ? |
| $mn - mk + xk - xn$ | ? | $m - x$ |
| $ax - 2bx + ay - 2by$ | $x + y$ | ? |
| $1 - bx - x + b$ | $1 - x$ | ? |

**5.** Разложите многочлен на множители:

а) $x^3 + x^2 + x + 1$; б) $a^2 - ab - 8a + 8b$;
в) $y^5 - y^3 - y^2 + 1$; г) $ab - 5b + b^2 - 5a$;
д) $a^4 + 2a^3 - a - 2$; е) $7x - xy + 7y - x^2$;
ж) $b^6 - 3b^4 - 2b^2 + 6$; з) $kn - mn - n^2 + mk$.

$3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy =$
$= 3x^3 - 6x^2y^2 + xy - 2y^3 =$
$= 3x^2(x - 2y^2) + y(x - 2y^2) =$
$= (x - 2y^2)(3x^2 + y)$

**6.** Самир в трёхчлене $a^2 + 7a + 12$ представил одночлен $7a$ в виде суммы одночленов $3a$ и $4a$, а затем разложил этот многочлен на множители способом группировки. Как по-вашему, зачем Самир сделал это? Намик же одночлен $7a$ показал в виде суммы одночленов $2a$ и $5a$, но не смог разложить многочлен на множители. Почему? Обоснуйте свой ответ.

**7.** Чтобы разложить трёхчлен $x^2 + 6x + 5$ на множители, осуществите следующий алгоритм:

I. Найдите два натуральных числа, произведение которых равно 5, а сумма 6.
II. Одночлен $6x$ представьте в виде суммы таких двух одночленов, чтобы их коэффициенты были числами, найденными в результате первой команды.
III. Разложите многочлен на множители способом группировки.
IV. Найдите произведение двучленов и убедитесь в верности вашего результата.

**8.** Используя алгоритм, данный в предыдущем задании, разложите многочлен на множители:

а) $a^2 - 5a + 4$; б) $a^2 - 6a - 16$; в) $x^2 + 9xy + 8y^2$;
г) $a^2 + 7ab + 6b^2$; д) $y^2 - 9xy + 8x^2$; е) $m^2 - 5mn + 4n^2$.

**9.** Гюльнар в трёхчлене $2am + 2an - 3bn - 3bm$ произвела группировку $(2am + 2an) - (3bn + 3bm)$ и разложила многочлен на множители. Али же в этом многочлене произвёл группировку $(2am - 3bm) + (2an - 3bn)$ и разложил на множители. Кто из детей произвёл группировку верно? Выскажите свои мысли о полученных ими результатах.

**10.** Разложите выражения на множители и вычислите значение выражения при заданном значении переменной:

а) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$, $x = -3$, $a = 4$;
б) $m^2 - mn - 3m + 3n$, $m = 0{,}5$, $n = 0{,}25$;
в) $a^2 + ab - 11a - 11b$, $a = 6{,}6$, $b = 0{,}4$;
г) $a^2 - ab - 2a + 2b$, $a = \frac{7}{20}$, $b = 0{,}15$.

**11.** Вычислите:

а) $139 \cdot 18 + 139 \cdot 21 + 261 \cdot 21 + 261 \cdot 18$;
б) $125 \cdot 48 - 31 \cdot 82 - 31 \cdot 43 + 125 \cdot 83$;
в) $44{,}7 \cdot 13 - 2 \cdot 44{,}7 + 13 \cdot 5{,}3 - 2 \cdot 5{,}3$;
г) $3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} + 4{,}2 \cdot \frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{4}{5} + 2{,}8 \cdot \frac{2}{3}$.

**12.** Если произведение нескольких множителей равно 0, то что можно сказать об этих множителях? Как по-вашему, каждый ли множитель равен нулю? Если ни один множитель не равен нулю, можно ли сказать, что произведение равно нулю?

**13.** Решите уравнения применяя условие равенства нулю произведения:

а) $x(x - 8) + 2(x - 8) = 0$; б) $y(y - 12) + y - 12 = 0$;
в) $a + 4 - a(a + 4) = 0$; г) $(x^2 - 5x) + x - 5 = 0$;
д) $(x^2 + 7x) - 4x - 28 = 0$; е) $5x^2 - 10x + (x - 2) = 0$.

**14.** Вместо точек запишите такой одночлен, чтобы равенство было верным:

а) $6a^3 - 15a^2b - 14ab + \ldots = (2a - 5b)(\ldots - \ldots)$;
б) $12x^3 + 42x^2y - \ldots - 35y^3 = (\ldots + \ldots)(6x^2 - 5y^2)$;
в) $24m^4 - 18m^3 - 4mn^3 + \ldots = (\ldots - \ldots)(\ldots - \ldots)$;
г) $36y^5 - 54y^4 + 10y - \ldots = (\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots)$.

**15.** Разложите данные выражения на множители:

а) $x(x + 2) - (y + 1)(y - 1)$;
б) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$.

## 3.7. Перпендикуляр и наклонная

Даны прямая $a$ и точка А, не лежащая на ней. Прямая, проходящая через точку А, пересекающая прямую $a$ и образующая с прямой $a$ угол в 90°, называется перпендикуляром, проведенным к прямой $a$. Точка пересечения этих прямых называется **основанием перпендикуляра**. Перпендикулярность обозначается символом ⊥. В соответствии с рисунком 1 $AH \perp a$. Расстояние от точки А до основания перпендикуляра (точки Н) называется **расстоянием** от точки А до прямой $a$.

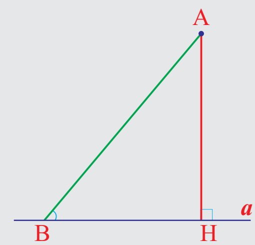


*рис. 1*

Отрезок, соединяющий точку А с любой точкой В на прямой $a$, отличной от точки Н, называется **наклонной**, проведенной из точки А к прямой $a$. Точка В называется **основанием** наклонной АВ.

Отрезок, соединяющий основание наклонной с основанием перпендикуляра, называется **проекцией** наклонной на прямой $a$, **отрезок ВН является проекцией наклонной АВ на прямой $a$**.

Любая наклонная, проведенная из точки А к прямой $a$ больше перпендикуляра, проведенного из этой же точки А к этой же прямой $a$: AB>AH

### Упражнения

**1.** Начертите прямую $m$ и отметьте точку M, не лежащую на ней. От точки M до прямой $m$ проведите перпендикуляр и наклонные. Какой из этих отрезков является расстоянием от точки M до прямой $m$?

**2.** Основываясь на рисунок 2, покажите нижеследующее:
   а) наклонные;
   б) основания наклонных;
   в) перпендикуляр;
   г) основание перпендикуляра;
   д) проекции наклонных;
   е) расстояние от точки А до прямой $a$.

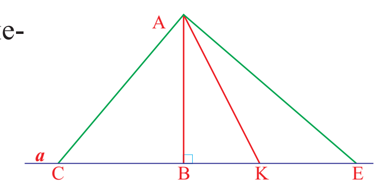


*рис. 2*

**3.** Начертите а) остроугольный, б) прямоугольный, в) тупоугольный треугольники. Укажите расстояние от вершины каждого угла этого треугольника до противоположной стороны.

**4.** Ширина прямоугольника 3 см 4 мм, длина – в 3 раза больше. Найдите расстояние от вершин прямоугольника до противоположных сторон.

**5.** Измерения прямоугольного параллелепипеда – 12 см, 15 см и 16,2 см. Определите расстояние от его вершин до рёбер.

**6.** От точки, не лежащей на прямой, до прямой проведены 2 конгруэнтные наклонные, образующие с прямой угол в 60°. Определите расстояние между основаниями наклонных, если длина наклонной – 8 см.

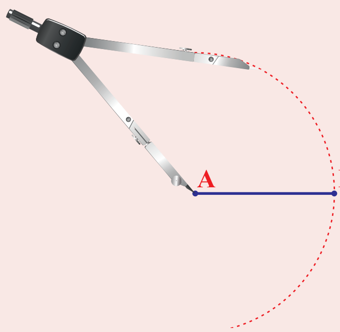
## 3.8. Деление отрезка пополам

**Деятельность** **Циркуль, линейка**

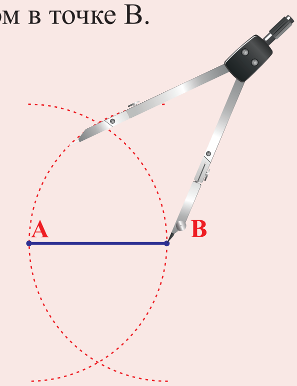
**Нахождение серединной точки отрезка:**


**1.** Проведите отрезок AB длиной 4 см.

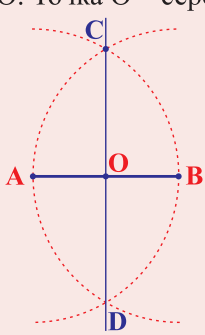
**2.** Раскройте циркуль на длину отрезка AB. Начертите окружность радиусом, равным отрезку AB, с центром в точке A. (Необходимая часть указана на рисунке)




**3.** Не меняя расстояние между концами циркуля, начертите окружность с центром в точке B.

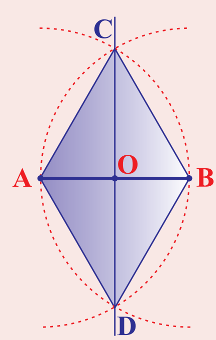



**4.** С помощью линейки проведите прямую через точки пересечения окружностей (точки C и D). Точку пересечения этой прямой с отрезком AB отметьте точкой O. Точка O – серединная точка отрезка AB и делит его пополам.





**5.** Как вы обоснуете равенство отрезков OA и OB? Выскажите своё мнение.




**6.** Что вы можете сказать о виде треугольников ADC и BDC? Конгруэнтны ли эти треугольники? Является ли отрезок CO биссектрисой треугольника ABC? Можем ли мы назвать отрезок CO медианой треугольника ABC? Почему? Если CO – медиана, является ли точка O серединой отрезка AB?

## Упражнения

**1.** Начертите вертикальный отрезок MN произвольной длины. Найдите его середину.

**2.** Постройте отрезок, равный сумме (разности) длин заданных отрезков *a* и *b,* и разделите его пополам.

**3.** **Практическая работа.** Учащиеся класса делятся на 3 группы. Первая группа с помощью циркуля находит серединные точки сторон треугольника ABC, вторая группа – четырёхугольника ABCD, третья группа – квадрата MNPK, данных на рисунке 1, и последовательно соединяет полученные точки. Каждая группа закрашивает полученную фигуру.

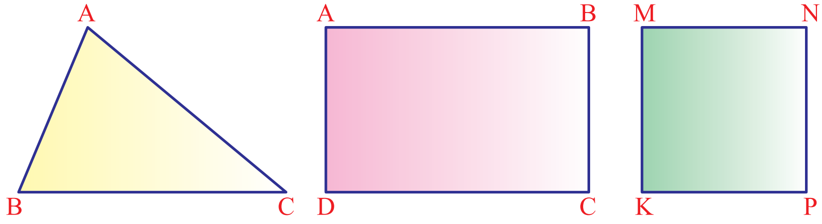


*рис. 1*

**4.** Начертите тупоугольный треугольник MNK. С помощью циркуля, определив его серединные точки, постройте его медианы.

**5.** Разделите отрезок длиной 9,6 см на четыре равные части. На сколько частей следует поделить отрезок в первую очередь? После деления, измерив длину полученных отрезков, уточните верность вашего построения.

**6.** Как можно поделить данный отрезок на 3 равные части? Используя циркуль, разделите отрезок AB = 12 см на три равные части.

**7.** Начертите на листе в клетку правильную шестиугольную фигуру (рис. 2). Каждый раз деля её стороны пополам, соединяйте полученные точки. Такое построение повторите 5 раз. Раскрасьте полученный рисунок. Нарисовав другую фигуру, постройте другую композицию.

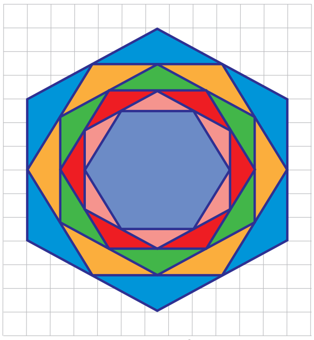


*рис. 2*

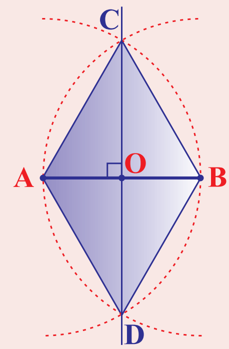
**8.** Данные:
а) отрезок AB;
б) треугольник ABC;
в) прямоугольник ABCD
разделите на 2, 4, 8, 16 равных частей.

## 3.9. Серединный перпендикуляр отрезка

### Деятельность

1. Начертите отрезок АВ произвольной длины. 

2. На прошлом уроке вы узнали, как строить серединную точку отрезка. Постройте серединную точку отрезка АВ.
3. Что можно сказать о треугольниках ADC и BDC? Является ли отрезок CO биссектрисой треугольника ABC? Можете ли вы сказать, что отрезок CO является высотой треугольника ABC? Почему? Если CO – высота, то что можно сказать о прямой CD и отрезке AB? Верно ли, что CD ⊥ AB?




### Упражнения

**1.** Дополните алгоритм построения прямой, перпендикулярной прямой *m*, и проходящей через точку K, отмеченную на этой прямой, и осуществите его.

I. Иглу циркуля установите на точку K и от точки K с разных сторон отложите равные отрезки на прямой *m* (рис. 1).

*рис. 1*

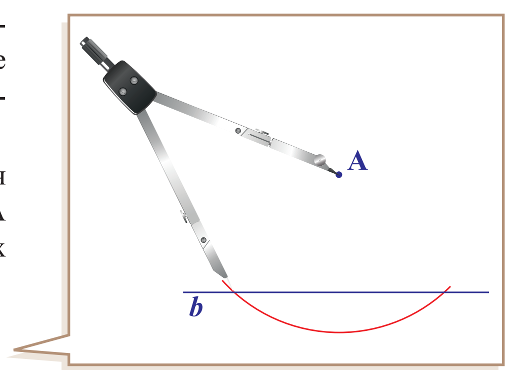
II. Конечные точки отрезков обозначьте буквами M и N.

III. ...

**2.** Через точки A, B и C на прямой *a* проведите прямые, перпендикулярные прямой *a*. Точность построения проверьте угольником. Выскажите своё мнение о взаимоотношении полученных прямых.

**3.** Начертите прямую *b* и отметьте точку A, не лежащую на ней. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную прямой *b*.

**Примечание.** С помощью циркуля начертите круг с центром в точке A и пересекающий прямую *b* в двух точках.

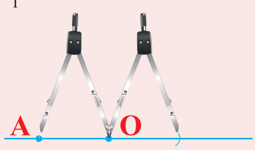


# 3.10. Центральная симметрия

## Деятельность

**1.** В тетради отметьте точки A и O. Соедините эти точки прямой.


**2.** Раскройте циркуль на длину отрезка OA, от точки O отложите на прямой отрезок $OA_1 = OA$.





**3.** Что можно сказать об отрезках OA и $OA_1$? Выскажите своё мнение о точке O. Как расположены точки A и $A_1$ относительно точки O?

Точка $A_1$, лежащая на прямой, проходящей через точки O и A, и удовлетворяющая условию $OA_1 = OA$, называется точкой, симметричной точке A относительно точки O.

Точка O называется **центром симметрии** и считается точкой, симметричной самой себе.

## Деятельность

**1.** В приведённых на рисунке фигурах постройте точку, симметричную точке A относительно центра O (рис. 1).

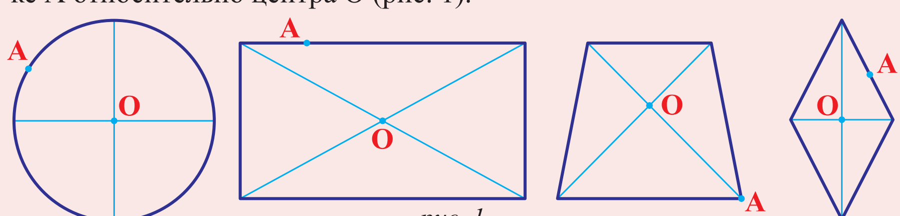



*рис. 1*

**2.** Что вы можете сказать о месте точки, симметричной точке A относительно точки O, в каждой фигуре? В какой фигуре точка, симметричная точке A относительно точки O, не относится к фигуре?

Если точка, симметричная любой точке фигуры относительно точки O, принадлежит этой же фигуре, то фигура называется **центральносимметричной** относительно точки O.

Симметрия часто встречается в искусстве, архитектуре, технике и быту. Большинство узоров на коврах, обоях, материях – это центральносимметричные фигуры.

## Образец

Постройте фигуру, симметричную фигуре, изображенной на рисунке 2, относительно точки O.

*Решение:* Для того, чтобы построить фигуру, симметричную фигуре ABCD относительно точки O, достаточно построить точки, симметричные вершинам заданной фигуры относительно точки O (рис. 3).

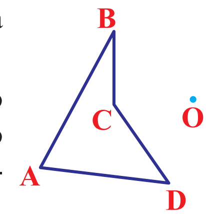



*рис. 2*

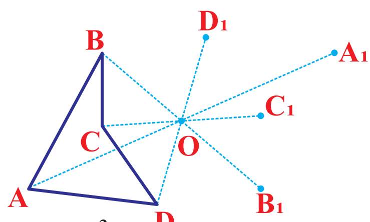



*рис. 3*

Последовательно соединим точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$

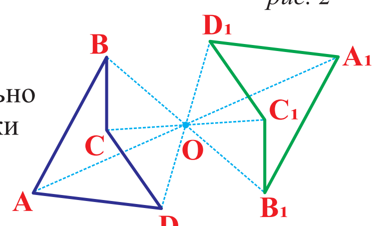



*рис. 4*

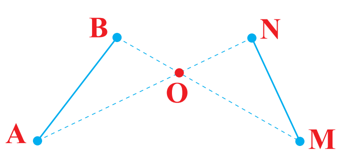
Полученная фигура является симметричной фигуре ABCD относительно точки O.

## Упражнения

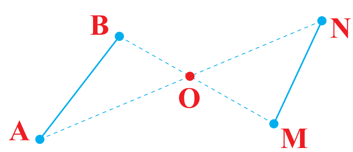
**1.** Приблизительно определите, какие точки на прямой *a* являются симметричными относительно точки O (рис. 5). Проведя необходимые измерения, проверьте верность вашего предположения.


*рис. 5*

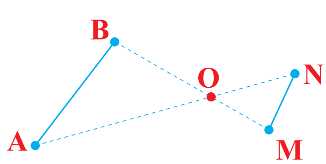
**2.** Ученики построили отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O. Но у каждого из них получились разные отрезки. Проанализируйте, какое из построений, сделанных детьми, верное и постройте отрезок MN, симметричный AB.



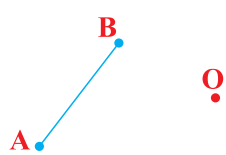

**Построение Сабины**




**Построение Мляк**




**Построение Эльгиза**




**Твоё построение**

**3.** Постройте точки, симметричные относительно точки A точкам, данным на рисунке 6. Последовательно соедините эти точки линией. Что можно сказать о полученной фигуре?

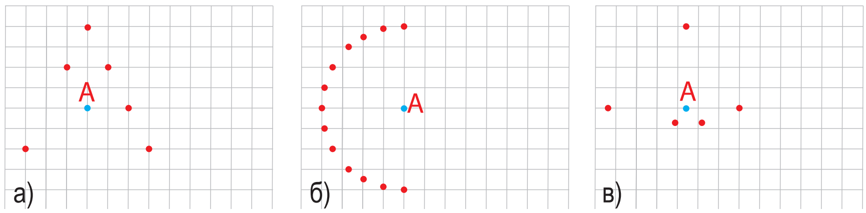



*рис. 6*

**4.** Прямая *c* пересекает отрезок AB в точке O и OA ≠ OB. Являются ли точки A и B симметричными относительно точки O? Почему?

**5.** Имеют ли центр симметрии фигуры а) луч; б) прямая; в) две пересекающиеся прямые; г) квадрат; д) треугольник? Укажите их центр симметрии.

**6.** Постройте фигуры, симметричные данным фигурам относительно точки O (рис. 7 а, б).

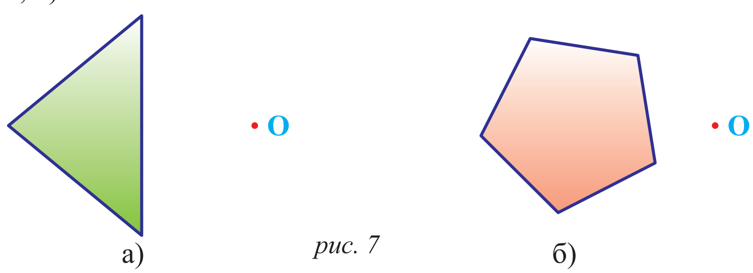



*рис. 7*

**7.** Постройте фигуры, симметричные данным фигурам относительно точки O (рис. 8 а, б, в).

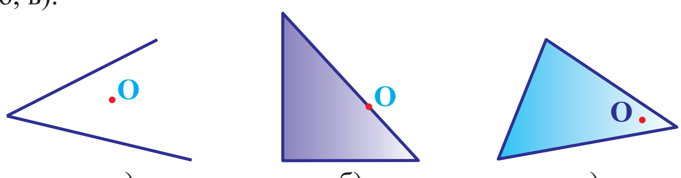



*рис. 8*

**8.** Постройте ΔMNP, симметричный тупоугольному треугольнику ABC относительно точки пересечения его высот.

**9.** Отрезки AB и $A_1B_1$ являются симметричными относительно какой-либо точки O. В этой симметрии определите место точки, симметричной точке P (рис. 9).

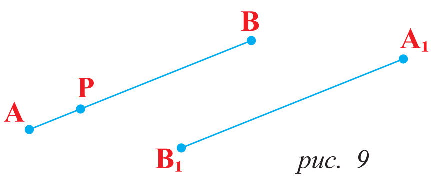



*рис. 9*

# 3.11. Тождество. Тождественные преобразования

## Деятельность

Докажите верность равенства $(a-8)(b+3)-1 = ab-8b+3a-25$.

**3.** Найдите произведение двучленов с левой стороны равенства. Полученный многочлен приведите в стандартный вид. Какой многочлен вы получили?

**4.** Вынесите за скобки общий множитель выражения $ab-8b$ с правой стороны равенства. Какое преобразование необходимо произвести в выражении $3a-25$ для разложения его на множители? Можно ли вместо одночлена $-25$ записать $-24-1$?

**5.** Есть ли общий множитель в полученных двучленах $(ab-8b)$ и $(3a-24)$? Для чего необходимо добавить в эти выражения число $-1$?

**6.** Удалось ли доказать верность равенства? Выскажите своё мнение о равенстве.

Равенство, содержащее переменную, верное при любых допустимых значениях переменной, называется **тождеством**.

Для того, чтобы доказать тождество, следует выражение с левой стороны преобразовать в выражение с правой стороны или выражение с правой стороны преобразовать в выражение с левой стороны, или показать, что выражения с обеих сторон тождественны равны одному и тому же выражению.

Преобразование одного выражения в тождественно равное ему выражение называется тождественным преобразованием. При любых допустимых значениях переменной выражения с соответственно равными значениями называются тождественно равными выражениями.

## Образец

Докажите тождество $(x+5)(x-4)+12 = (x-1)(x+2)-6$.

*Решение:* Чтобы доказать тождество, следует показать, что обе стороны равенства тождественны одному и тому же выражению:

$$\underbrace{(x+5)(x-4)+12}_{\text{Левая сторона}} = \underbrace{(x-1)(x+2)-6}_{\text{Правая сторона}}$$

**Левая сторона:** $(x+5)(x-4)+12 = x^2-4x+5x-20+12 = x^2+x-8$

**Правая сторона:** $(x-1)(x+2)-6 = x^2+2x-x-2-6 = x^2+x-8+x^2+2x-x-2-6 = x^2+x-8$

Поскольку обе стороны равны одному и тому же выражению, данное равенство является тождеством.

## Упражнения

**1.** Керим утверждает, что равенство $21c(a-b) = -21c(b-a)$ является тождеством. Как по-вашему, прав ли он? Почему? Как вы можете это объяснить, не раскрывая скобок?

**2.** а) Свойства перестановки и группировки слагаемых запишите в виде буквенных выражений. Докажите их тождественность.

б) Свойства перестановки и группировки множителей запишите в виде буквенных выражений. Тождественны ли они?

в) Какое свойство выражает равенство $a(b + c) = ab + bc$? Можно ли сказать, что это равенство является тождеством?
Выскажите своё мнение о равенствах $a + 0 = 0 + a$; $a \cdot 1 = a$; $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; $a + (-a) = 0$ .

**3.** Обоснуйте, являются ли данные равенства тождествами:

а) $2a + 4b = 2(a + 4b)$; б) $x = x + 1$;
в) $a + b - c = a - c + b$; г) $(m - n)(k - p) = (n - m)(p - k)$.

**4.** Среди данных выражений выберите равные и запишите их в виде тождества:

| | | |
|---|---|---|
| $ab - am - bm + m^2$ | $a^2 - 2ab + b^2$ | $a^2 - b^2$ |
| $-(m - n)$ | $n - m$ | $m^2 - n^2$ |
| $(a - b)(a + b)$ | $n^2 - m^2$ | $(n - m)(n - m)$ |
| $(a - m)(b - m)$ | $(a - b)(a - b)$ | |

**5.** Докажите тождества.

а) $(m - 2k)(m + k) = m^2 - km - 2k^2$; б) $b(b - 4c) + 5bc = b(b + c)$;
в) $a(a + 11) + a(a^2 - 11) = a^2(a + 1)$; г) $(3 - p)(p + 2) - 1 = (p + 8)(9 - p) - 67$.

**6.** Какой одночлен следует добавить в правую или левую стороны равенства, чтобы оно превратилось в тождество? Обоснуйте свой ответ.

а) $(a + 5)(a - 12) = a^2 - 60...$; б) $y^2 - 2... = (y + 1)(y - 1)$;
в) $(m - 7)(m + 10) = m^2 + 2m - 70...$; г) $x^2 - 12x + 30... = (x - 7)(x - 5)$.

**7.** Данные выражения равны какому-то постоянному числу. Не делая каких-либо преобразований, примерно определите это постоянное число. Затем, тождественно преобразуя выражения, проверьте верность вашего предположения.

а) $(a - 3)(a^2 - 8a + 5) - (a - 8)(a^2 - 3a + 5)$;
б) $(x^2 - 3x + 2)(2x + 5) - (2x^2 + 7x + 17)(x - 4)$;
в) $(b^2 + 4b - 5)(b - 2) + (3 - b)(b^2 + 5b + 2)$.

**8.** а) Напишите такой трёхчлен, чтобы его можно было записать в виде произведения двучленов.
б) Используя переменные $a$ и $b$, запишите квадрат любого двучлена и преобразуйте его в многочлен.
в) используя переменные $x$ и $y$, запишите куб любого двучлена и преобразуйте его в многочлен.

**9.** Докажите тождества:

а) $a(b + c)^2 + b(a + c)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(a + c)(b + c)$.
б) $(a + b + c)(ab + ac + bc) - abc = (a + b)(a + c)(b + c)$.
в) Докажите, что нижеприведённые тождества верны при $a + b + c = 0$:
$a(a + b)(a + c) = abc$, $b(b + a)(b + c) = abc$, $c(c + a)(c + b) = abc$.

# 3.12. Линейное уравнение с одной переменной

## Деятельность

1. В уравнении $6x - 12 = 18 + 4x$ прибавьте 12 с каждой стороны.
2. Какое равенство вы получили? Вычтите с каждой стороны равенства одночлен $4x$.
3. Определите $x$ из полученного равенства.
4. Как можно решить это уравнение по-другому? Если одночлены перенести на одну сторону равенства, как изменится знак одночлена? Обоснуйте свой ответ.

Уравнение, имеющее вид $ax = b$, называется стандартным линейным уравнением с одной переменной. Здесь $a \neq 0$. Корень этого уравнения $x = b : a$.

**1.** К обеим частям уровнения можно прибавить или отнять одно и то же выражение.

**2.** Каждую сторону уравнения можно умножить или разделить на любое число, отличное от нуля.

Уравнение, которое можно тождественными преобразованиями привести к стандартному линейному уравнению, называется линейным уравнением. Например: $ax + b = cx + d$ – линейное уравнение.

Условия существования решений стандартного линейного уравнения:
1) при $a \neq 0$ существует единственное решение $x = b : a$.
2) при $a = 0$; $b \neq 0$, решений нет: $x = \varnothing$;
3) при $a = 0$; $b = 0$, существует бесконечное множество решений.

## Упражнения

**1.** Решите уравнения:
а) $13 - 100x = 0$; б) $7x - 4 = x - 16$; в) $13 - 5x = 8 - 2x$;
г) $4y + 15 = 6y + 17$; д) $5x + (3x - 7) = 9$; е) $3y - (5 - y) = 11$;
ж) $13 - (5x + 11) = 6x$; з) $(7x + 1) - (6x + 3) = 5$; и) $(5x + 2) - (4x + 7) = 8$.

**2.** Приняв во внимание знак перед скобками, решите уравнения:
а) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$; б) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$;
в) $1{,}6 - (x - 2{,}8) = (0{,}2x + 1{,}5) - 0{,}7$; г) $5(5x - 1) - 2{,}7x + 0{,}2x = 6{,}5 - 0{,}5x$;
д) $(0{,}5x + 1{,}2) - (3{,}6x - 4{,}5) = (4{,}8x - 0{,}3) + (10{,}5x + 0{,}6)$.

**3.** Решите уравнения:
а) $5(x - 3) - 2(x - 7) + 7(2x + 6) = 7$;
б) $11(y - 4) + 10(5 - 3y) - 3(4 - 3y) = -6$;
в) $5(8z - 1) - 7(4z + 1) + 8(7 - 4z) = 9$;
г) $10(3x - 2) - 3(5x + 2) + 5(11 - 4x) = 25$.

**4.** Определите, что данные равенства являются линейными уравнениями с одной переменной, и найдите корень уравнения:
а) $\frac{11}{7} = \frac{2-x}{5}$; б) $\frac{3x}{5} = \frac{6+x}{3}$; в) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; г) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 14$.

**5.** Решите уравнения:

а) $\frac{x-4}{5}=9+\frac{2+4x}{9}$;  б) $2-\frac{3x-7}{4}+\frac{x+17}{5}=0$;

в) $\frac{8-y}{6}+\frac{5-4y}{3}=\frac{y+6}{2}$;  г) $\frac{4x+7}{5}+\frac{3x-2}{2}-\frac{5x-2}{2}=32$;

д) $\frac{9x-5}{2}-\frac{3+5x}{3}-\frac{8x-2}{4}=2$;  е) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}=\frac{3x-4}{3}$.

**6.** Данные выражения запишите в виде уравнений и решите:

а) если число $a$ уменьшить на 26%, получится число 7,4;

б) если число $m$ увеличить на 20 %, получим число 9,6;

в) произведение чисел 3,25 и $x$ в 2 раза больше суммы чисел 1 и x;

г) сумма чисел $\frac{7}{12}$ и $2y$ в 3 раза меньше одной четвёртой $25y$.

## Образец

**1)** Решите уравнение $|x| = 9$ .

*Решение:* Модуль числа (абсолютное значение) – 0 или положительное число. Есть два числа с модулем, равным 9: –9 и 9. Тогда $x = 9$ и $x = –9$.

**Ответ:** 9 и –9.

**2)** Сколько корней в уравнении $|2x + 5| = 0$?

*Решение:* Модуль только числа 0 равен нулю.

Следовательно, $2x + 5 = 0$, $2x = –5$, $x = –2,5$.

**Ответ:** Уравнение имеет один корень.

**3)** Решите уравнение $|8 – 3x| + 16 = 0$.

*Решение:* Для решения уравнения прибавляем –16 к каждой стороне равенства (или число 16 на левой стороне равенства, поменяв его знак, переносим в правую сторону). $|8 – 3x| + 16 –16 = 0 – 16$. Если проведём сокращения, то получим: $|8 – 3x| = –16$. Поскольку нет числа с модулем, равным отрицательному числу, у этого уравнения нет корня.

**Ответ:** $\varnothing$.

**7.** Найдите корень уравнений с переменной в модуле:

а) $|x| = 5$;  б) $|2a| = –7$;  в) $|x – 3| = 0,3$;  г) $|3x + 17| = 0$;

д) $2|m| = 12$;  е) $0,25|x – 8| = 5$;  ж) $16 + |x| = 11$;  з) $|x| – \frac{1}{4} = 2,75$.

**8.** Не решая данные уравнения, определите сколько у них корней. Решив уравнения, определите верны или неверны ваши предположения:

а) $|10x – 9| = 14$;  б) $|–3x + 21| + 4 = 4$;  в) $\frac{|x+11|}{5}=-2$;

г) $\frac{|1-x|}{4}=\frac{1}{2}$;  д) $\frac{7}{8}=|a-7|$;  е) $1-\frac{|7x-1|}{6}=0$.

**9.** Используя определение модуля, решите уравнения:

а) $|x – 3| = 2$;  б) $|3x – 7| = 0,3$;  в) $|0,6x + 1| = 4$;

г) $|x + 3| = – 1$;  д) $|–x + 100| = 10$;  е) $|3,4 – x| = 2$;

ж) $\left|\frac{x-19}{8}\right|=1$;  з) $|8,5-0,4a|=1\frac{1}{2}$.

## 3.13. Абсолютная погрешность

При решении практических задач иногда используются приближённые значения величин. С приближённым значением чисел вы познакомились при округлении чисел, при измерении величин приборами. Теперь проанализируем погрешность разницы между приближённым и истинным значением величины.

### Деятельность

1. Возьмите железную и деревянную линейки. Измерьте длину книги «Математика 7» обеими линейками. Запишите полученные числа. Сравните результаты. Получили ли вы одинаковые результаты при двух измерениях?
2. Приняв за точную длину 24 см, найдите модуль разности между приближенным и точным результатом. По-вашему, как можно назвать полученный результат?

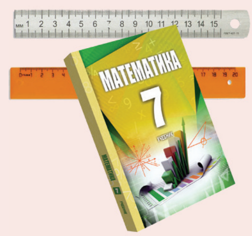



*рис. 1*

### Образец

**1.** Длина доски ($l$), согласно рисунку, находится между 3,6 см и 3,7 см. Следовательно, можно записать $l \approx 36{,}5 + 0{,}5 = 37$ (мм) или $l \approx 36{,}5 - 0{,}5 = 36$ (мм), т.е. длина доски дана с точностью до 0,5 мм.

**2.** Здесь погрешность, допущенная во время измерения $|37 - 36{,}5| = 0{,}5$ (мм) или $|36 - 36{,}5| = 0{,}5$ (мм).


$l \approx 36{,}5+0{,}5$ мм

*рис. 2*

Модуль разности между истинным значением величины и её приближённым значением называется **абсолютной погрешностью приближеного значения**.

**Абсолютная погрешность = |точное значение – приближённое значение|**

Абсолютная погрешность показывает, насколько полученное в результате измерения приближённое значение отличается от истинного значения величины.

Если $a \approx b$, то для точного значения величины выполняется следующее двойное неравенство $|a - b| < a < a + b$ *(здесь $a > 0$)*.

### Образец

Округлите число 5,019 до разряда сотых и десятых. Во время округления вычислите допущенную абсолютную погрешность.

*Решение:* $5{,}0\underline{1}9 \approx 5{,}02$ (округление до сотых). В этом случае число увеличилось на 0,001, т.е. абсолютная погрешность была: $|5{,}\underline{0}19 - 5{,}02| = 0{,}001$. $5{,}019 \approx 5$ (округление до десятых). В этом случае число уменьшилось на 0,019, т.е. абсолютная погрешность была $|5{,}019 - 5| = 0{,}019$.

## Упражнения

**1.** Не округляя, вычислите полученные погрешности и дополните таблицу:

| Заданное число | Округленное число | Действие | Погрешность |
|---|---|---|---|
| 54.763 | 54.76 | | |
| 54.766 | 54.77 | 6 > 5, добавляется 1 | + 0.004 |
| 54.765 | 54.76 | | |
| 54.7652 | 54.77 | | |
| 54.7699 | 54.77 | 99 > 50, отбрасывается | – 0,0001 |

**2.** На числовой оси:

а) между числами $6\frac{1}{2}$ и $7\frac{1}{2}$ любое число считается приближённо равным 7-ми. Чему равна в этом случае самая большая абсолютная погрешность? (рис. 3)

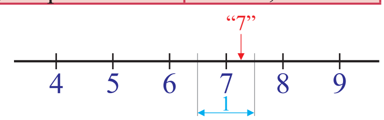



*рис. 3*

б) между числами 7 и 9 любое число, считается приближённо равным 8-ми. Чему равна в этом случае абсолютная погрешность? (рис. 4)

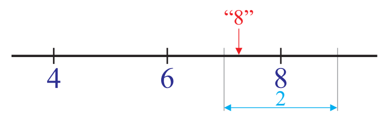



*рис. 4*

**3.** Известно, что длина забора с точностью до 0,1 м равна 12,5 м. Между какими числами расположено число, указывающее на длину забора?

**4.** Ширина и длина прямоугольника с точностью до 1 см равны соответственно 6 м и 8 м. Между какими числами расположены числа, соответствующие ширине и длине прямоугольника? Между какими числами расположено число, соответствующее площади прямоугольника?

**5.** Размеры прямоугольного параллелепипеда с точностью до 2 см составляют 23 см, 24 см и 27 см. Между какими числами располагается число, соответствующее его объему?

**6.** Измеряя термометром, определили, что температура воздуха равна 18,6° С. Каждое деление шкалы термометра равно 0,2°. Какова точная температура воздуха, если измерение проводилось с точностью до 0,1?

**7.** Али число 25,925 округлил до десятых, сотых и единиц и для каждого случая вычислил абсолютную погрешность приближённого значения. Предположите, в каком случае значение абсолютной погрешности наибольшее. Проведя вычисления, проверьте верность вашего предположения.

**8.** Дробь $\frac{2}{3}$ представьте в виде десятичной дроби. Округлите эту дробь до десятых, сотых и тысячных. Для каждого случая вычислите абсолютную погрешность приближённого значения.

**9.** При измерении длины стола допустимая абсолютная погрешность равна 1 см, при измерении расстояния между городами допустимая абсолютная погрешность – 1 м = 100 см. По-вашему, какое измерение наиболее точное? Почему? Обоснуйте свой ответ.

**10.** Самед утверждает, что дробь $\frac{5}{9}$ равна с точностью до 0,001 значению 0,556, Эльмир же утверждает, что она равна 0,555. По-вашему, кто из них прав?

**11.** **Практическая работа.** Разместите линейку рядом со спиралью так, как показано на рисунке (рис. 5а), и повесьте на один конец спирали предмет любого веса. Посмотрите на положение конца спирали с 3-х позиций (рис. 5б) и объясните, каким числам на линейке они соответствуют. Назовите позицию наблюдения, которая указывает на наиболее точный показатель.

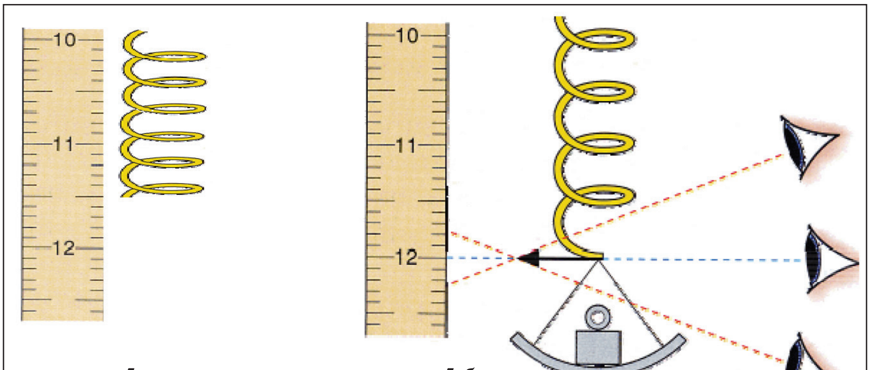



*рис. 5 а* *рис.5 б*

**12.** На рисунке 6 показаны способы измерения с помощью линейки и угольников высоты конуса, длины ножниц и диаметра шара. Используя эти способы, определите точные размеры этих фигур. Абсолютную погрешность измерения примите за 0,1 мм.

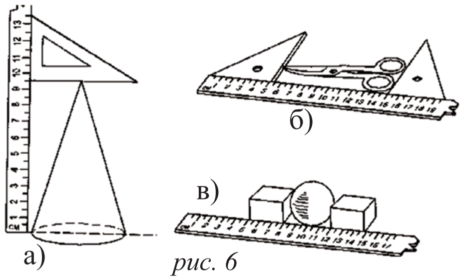



*рис. 6*

**13.** **Практическая работа.** Штангенциркуль – измерительный прибор с более высокой точностью измерения. С его помощью можно измерить внутренние и внешние линейные размеры детали, глубину отверстия или выступа. Используя штангенциркуль, найдите линейные размеры какой-либо детали. Абсолютная погрешность измерения показана на инструменте (нониус).

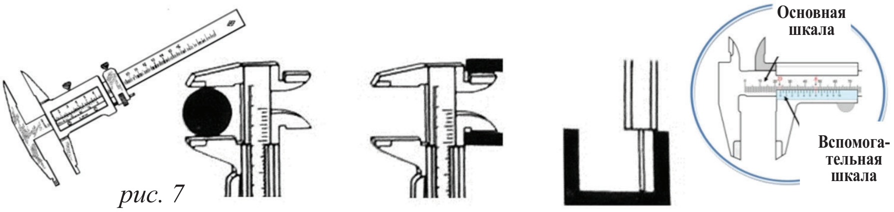



*рис. 7*

## 3.14. Относительная погрешность

### Деятельность

**Анализ степени абсолютной погрешности:**

1. Округлите число 6,087 с точностью до десятых. Определите абсолютную погрешность.
2. Найдите с помощью калькулятора отношение значения абсолютной погрешности к точному значению числа.
3. Чтобы выразить полученное число в процентах, умножьте его на 100%.
4. Сколько процентов составляет отношение значения абсолютной погрешности к точному значению? Как по-вашему, это много или мало? Обоснуйте свой ответ.

### Образец

Измеренная с точностью до 0,01 мм толщина человеческого волоса составляет 0,15 мм. Измеренное с точностью до 500 км расстояние от Земли до Луны составляет 384 000 км. Какое измерение более точное?

*Решение:* Выразим в процентах отношение абсолютной погрешности толщины человеческого волоса к толщине человеческого волоса:

$$\frac{0,01}{0,15}=\frac{1}{15}=0,0666...\approx 0,067=6,7\%.$$

Выразим в процентах отношение абсолютной погрешности расстояния от Земли до Луны к расстоянию от Земли до Луны:

$$\frac{500}{348000}=\frac{1}{768}\approx 0,0013...\approx 0,0013=0,13\%.$$

Поскольку $0,13\% < 6,7\%$, расстояние от Земли до Луны было измерено более точно.

Отношение абсолютной погрешности к модулю точного значения величины называется **относительной погрешностью приближения**.

Нахождение относительной погрешности помогает в определении величины погрешности, т.е. помогает оценить степень точности измерения. Относительная погрешность в основном выражается в процентах.

$$\text{Относительная погрешность}=\frac{\text{Абсолютная погрешность}}{|\text{Точное значение}|}$$

$$\text{Относительная погрешность (в процентах)}=\frac{\text{Абсолютная погрешность}}{|\text{Точное значение}|}\cdot 100\ \%$$

### Упражнения

1. Округлите число 8,345 до единиц. Определите абсолютную и относительную погрешности.
2. Какое из выражений 2,45≈2,4 и 2,45≈2,5, полученных при округлении числа 2,45 до десятых, будет верным ответом? Вычислите относительную погрешность каждого равенства и обоснуйте свой ответ.

**3.** На весах взвесили масло с точностью до 5 г и сахар с точностью до 3 г. Оцените в процентах относительную погрешность массы продуктов и определите качество измерений (рис. 1).


*рис. 1*

**4.** Покажите числа в виде десятичной дроби. Округлите полученные дроби до сотых. Вычисляя абсолютную и относительную погрешности, заполните таблицу (результаты округлите до десятых).

| **Число** | **Десятичная дробь (округлённая)** | **Абсолютная погрешность** | **Относительная погрешность** |
|---|---|---|---|
| $4\frac{3}{8}$ | | | |
| $7\frac{1}{9}$ | | | |
| $10\frac{3}{16}$ | | | |

**5.** **Практическая работа.** Измерьте разными линейками длину вашей ручки. Запишите приближённые значения. Вычислите абсолютную и относительную погрешности.

**6.** Сеймур определил, что длина доски с точностью до 1 мм равна 269 мм, Талех же определил, что длина другой доски с точностью до 1 см равна 189 см. Какой из мальчиков более точно выполнил своё задание? Почему?

**7.** Приближённое значение – 4,89, относительная погрешность – 1%. Определите абсолютную погрешность приближённого значения.

**8.** Дополните таблицу.

| **Высота дома** | **Результаты измерений** | **Абсолютная погрешность** | **Относительная погрешность** | **Наиболее точное измерение** |
|---|---|---|---|---|
| **Дом Нармин** | 12 м | 0,1 м | | |
| **Дом Угура** | 5 м | | 3% | |
| **Дом Нигяр** | 8 м | 0,02 м | | |
| **Дом Инаята** | 7 м | 10 см | | |

## Проверьте себя

**1.** Приведите многочлены в стандартный вид и назовите их степень:

а) $-3xy + 9xy - 12xy$;

б) $8x^3 - 11x + 8x^3 - 10x^3 + 16x$;

в) $15a^5 + a^3 - 12 + 2a^5 - a^3 - 30$.

**2.** Найдите сумму и разность данных многочленов:

а) $(-3ab + 6b - 3c)$ и $(7ab - 6b + 2c)$;

б) $(8x^2 + 11x - 1)$ и $(3 + 5x - 5x^2)$.

**3.** Начертите равносторонний треугольник ABC. С помощью циркуля и линейки постройте середины его сторон и соедините их.

**4.** С помощью циркуля и линейки проведите через точку A, лежащую на прямой $a$, прямую $b$, перпендикулярную данной прямой.

**5.** Из точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены перпендикуляр и наклонная. Определите вид полученного треугольника.

**6.** Найдите произведение и назовите степень полученных многочленов:

а) $-2x^4y\,(x^2 - 2xy + y^3 - 6)$;

б) $(x + 8)(x - 7)$;

в) $(x + y - 2)(x^3 + 4)$.

**7.** Разложите многочлен на множители:

а) $a^3 - a^2 + a - 1$;

б) $x^2 - xy - 9x + 9y$;

в) $m^2 - 8m + 12$.

**8.** Решите уравнения:

а) $m(m - 5) + 8(m - 5) = 0$;

б) $y(y + 2) + y + 2 = 0$.

**9.** На одной из сторон треугольника ABC отметьте точку K. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки K.

**10.** Докажите тождество:

а) $a(b - x) + x(a + b) = b(a + x)$;

б) $16 - (a+3)(a+2) = 4 - (6+a)(a-1)$.

**11.** Решите уравнения:

а) $(2x + 1)^2 = 13 + 4x^2$;

б) $(3x - 1)^2 - 9x^2 = -35$;

в) $4(x - 4)(x + 8) =$
$= (3x + 2)(x - 5) + (x - 1)(x + 1)$;

г) $\dfrac{|x-5|}{6} = 8$.

**12.** Округлите число 6,789 до десятых. Вычислите абсолютную и относительную погрешности полученного округлённого значения.

**13.** Какое из следующих измерений было выполнено с большей точностью?

а) На весах с погрешностью в 100 кг (весы для взвешивания тяжелых грузов) масса одного вагона равна 50 т;

б) На весах с погрешностью в 0,01 г масса одной порции лекарства составила 5 гр.

**14.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{5x-4}{5} + \dfrac{2-7x}{3} = \dfrac{x-3}{2}$;

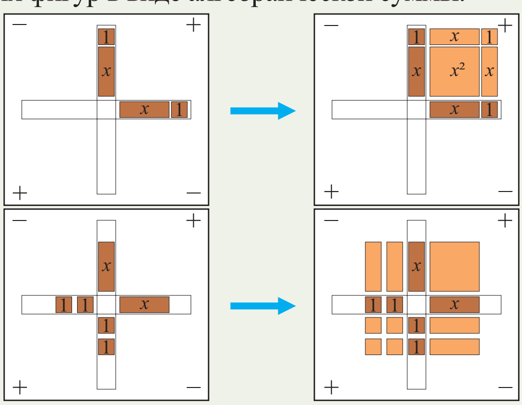
б) $0,75 - \dfrac{7+3x}{4} = \dfrac{10x-3}{3}$.

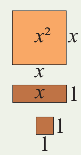
# ГЛАВА IV. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

## 4.1. Квадрат суммы и разности двух выражений

### Деятельность

С помощью геометрических фигур постройте модель произведения $(x+1)(x+1)$. Изобразите две пересекающиеся линии так, как показано на рисунке. Покажите, как это сделано на рисунке, первый множитель на горизонтальной линии, второй множитель на вертикальной линии квадратом со стороной в 1 единицу длины и прямоугольником со сторонами 1 и $x$ единицами длины. Расположите члены с положительным знаком в положительном направлении (справа и сверху от пересечения), а члены с отрицательным знаком в отрицательном направлении (слева и снизу пересечения). Знаки (+, –), расположенные в углах модели, указывают на знаки членов многочлена, полученного при умножении. Внутри модели постройте прямоугольники и квадраты со сторонами 1 и $x$. Напишите площадь полученных фигур в виде алгебраической суммы.




$S = x^2$ кв.ед.

$S = x$ кв.ед.

$S = 1$ кв.ед.

Можно ли, согласно I модели, сделать запись

$(x + 1)(x + 1) =$
$= (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$?

Верна ли, согласно II модели, запись

$(x – 2)(x – 2) =$
$= (x – 2)^2 = x^2 – 4x + 4$?

### Деятельность

**1.** Для того, чтобы преобразовать выражения $(x + 1)^2$ и $(x – 2)^2$ в многочлен, запишите их в виде произведения двучленов и найдите произведение:

$$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$
$$(x – 2)^2 = (x – 2)(x – 2) = x^2 – 2x – 2x + 4 = x^2 – 4x + 4$$

**2.** Определите, какие закономерности были использованы для получения трёхчленов.

**Квадрат суммы двух выражений.** Квадрат суммы двух выражений равен сумме квадратов этих выражений плюс удвоенное произведение первого выражения на второе. $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$

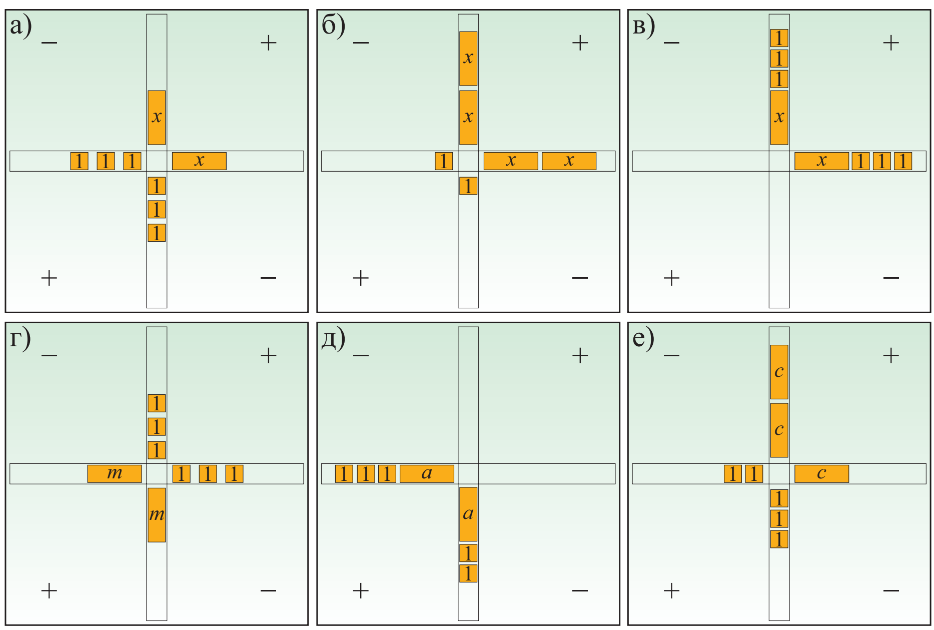
**Квадрат разности двух выражений.** Квадрат разности двух выражений равен сумме квадратов этих выражений минус удвоенное произведение первого выражения на второе. $\boldsymbol{(a – b)^2 = a^2 + b^2 – 2ab}$

## Образец

1. $(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$;
2. $(3-b)^2 = 3^2 + b^2 - 2\cdot 3\cdot b = 9 + b^2 - 6b$;
3. $(2m+3n)^2 = (2m)^2 + (3n)^2 + 2\cdot 2m\cdot 3n = 4m^2 + 9n^2 + 12mn$;
4. $\left(1\frac{1}{4} - 0{,}1a\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2 + (0{,}1a)^2 - 2\cdot 1\frac{1}{4}\cdot 0{,}1a = 1\frac{9}{16} + 0{,}01a^2 - \frac{1}{4}a.$

## Упражнения

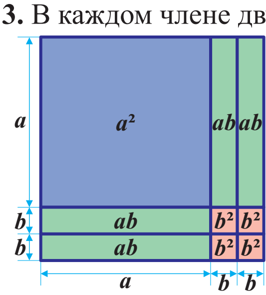
**1.** Определите, квадраты каких двучленов изображены на данных моделях. Согласно модели найдите их квадрат.




**2.** Преобразуйте в многочлен квадрат данных двучленов:

а) $(x+4)^2$; б) $(4-3a)^2$; в) $(1-3x)^2$; г) $(a+5)^2$; д) $(b-5)^2$.

**3.** В каждом члене двучлена присутствует переменная: $(a+2b)^2$. В этом случае можно построить модель, приведённую ниже.




$(a+2b)^2 = (a+2b)(a+2b) = a^2 + 4b^2 + 4ab$

Изобразите приведённые ниже квадраты двучленов так, как дано в образце, и преобразуйте в трёхчлен:

а) $(m+n)^2$; б) $(2a+c)^2$; в) $(x+3y)^2$;
г) $(2a+3b)^2$; д) $(4m+n)^2$; е) $(2x+2y)^2$.

**4.** Вместо точек запишите необходимые выражения:

а) $(a - ...)^2 = ...^2 - 2\,...\,b + b^2$; б) $(m - ...)^2 = m^2 - 20m + ...^2$;

в) $(5 + ...)^2 = ... + ... + a^2$; г) $71^2 = 4900 + ... + 1$;

**5.** Записывая квадрат двучленов в виде произведения двучленов, осуществите умножение способом умножения в столбик:

а) $(5y - 3x)^2$; б) $(0{,}3a - 4x)^2$;

в) $(10c + 0{,}1b)^2$; г) $(7p - k)^2$;

д) $(12 + 8k)^2$; е) $\left(\frac{1}{3}x - 3y\right)^2$;

ж) $(0{,}6 + 2x)^2$; з) $(4a + b)^2$;

и $(12a - 0{,}3c)^2$; к) $(0{,}2m + 5n)^2$.

$$\mathbf{(5x + 2)^2 = (5x + 2)(5x + 2)}$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \mathbf{5x + 2} \\ \mathbf{5x + 2} \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} \mathbf{25x^2 + 10x} \qquad \\ \mathbf{10x + 4} \end{array} \\ \hline \mathbf{25x^2 + 20x + 4} \end{array}$$

**6.** Во время перемены Эльдар, Закир и Магомед пили вместе чай. Обсуждая тему, которую они прошли на уроке математики, Закир сказал друзьям, что он с лёгкостью может вычислить в уме квадрат двузначного или трёхзначного числа. Для проверки ребята предложили ему найти квадрат 49-ти. Подумав несколько секунд, Закир сказал, что ответ будет 2401. По-вашему, какой способ использовал Закир? Используя этот метод, постарайтесь устно вычислить квадрат нижеприведённых чисел.

а) $(100 + 1)^2$; б) $(100 - 1)^2$; в) $61^2$; г) $199^2$; д) $999^2$; е) $703^2$;

ж) $9{,}9^2$; з) $10{,}2^2$; и) $305^2$; й) $1001^2$; к) $599^2$; л) $9{,}98^2$.

**7.** Салим выражения $(3 - a)^2$; $(-5 + 2k)^2$ и $(-11 - 3x)^2$, а Эльгиз выражения $(a - 3)^2$; $(2k - 5)^2$ и $(11 + 3x)^2$ преобразовали в многочлены и для каждого выражения получили одинаковый ответ. Как вы думаете, почему? Обоснуйте свой ответ.

**8.** а) В выражении $(x - y)^2$ измените знаки $x$ и $y$ так, чтобы полученное выражение было равно выражению $(x - y)^2$.

б) В выражении $(x + y)^2$ измените знаки $x$ и $y$ так, чтобы полученное выражение было равно выражению $(x + y)^2$.

**9.** а) Первый член двучлена равен $x^2$, а второй член равен 10. Преобразуйте квадрат их суммы и квадрат их разности в многочлен.

б) Первый член двучлена равен 7, а второй член равен $y^3$, преобразуйте квадрат их суммы и квадрат их разности в трёхчлен.

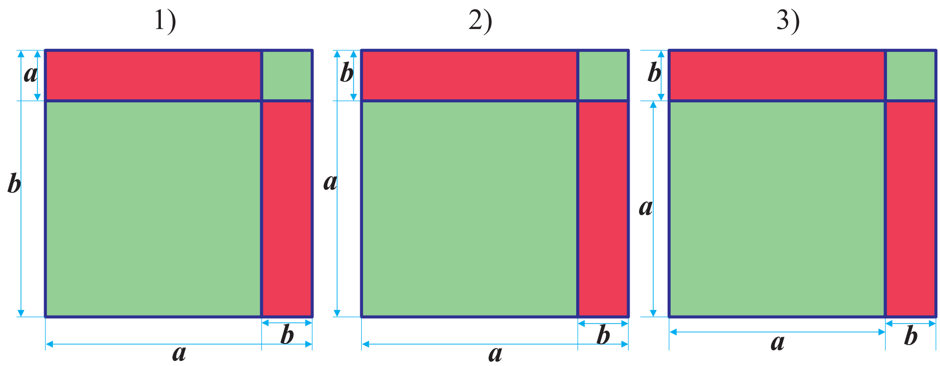
в) Какой одночлен следует прибавить к первому выражению, чтобы выражение $(2a + b^4)^2$ преобразовать в выражение $(2a - b^4)^2$?

**10.** Данные выражения запишите в виде многочлена:

а) $(x^2-3x)^2$; б) $(c^2-0{,}7c^3)^2$; в) $\left(1\frac{1}{2}a^5+8a^2\right)^2$;

г) $\left(\frac{1}{2}x^3+6x\right)^2$; д) $(2y^3-0{,}5y^2)^2$; е) $\left(\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}\right)^2$.

**11.** Самир, используя квадрат и прямоугольники, смоделировал выражение $(a-b)^2$. По-вашему, какая из нижеприведённых – его модель?




Смоделируйте выражения $(m-n)^2$; $(x-2y)^2$; $(2x-y)^2$ таким же способом.

**12.** Упростите выражения:

а) $(12m-1)^2-1$; б) $121-(11-7x)^2$; в) $a^2+49-(a-7)^2$;
г) $(2a+6b)^2-24ab$; д) $a^2b^2-(ab-9)^2$; е) $a^4-81-(a^2+9)^2$.

**13.** Упростите выражения:

а) $(x-3)^2+x(x+9)$; б) $(b-4)^2+(b-1)(2-b)$;
в) $(2a+5)^2-5(4a+5)$; г) $9b(b-1)-(3b+2)^2$.

**14.** Решите уравнения:

а) $(x-6)^2-x(x+8)=2$; б) $(x-5)^2-x^2=3$; в) $9x^2-1-(3x-2)^2=0$;
г) $16y(2-y)+(4y-5)^2=0$; д) $x+(5x+2)^2=25(1+x^2)$.

**15.** Докажите тождество:

а) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$; б) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;
в) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; г) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.

**16.** При каком значении $x$:

а) квадрат выражения $(x+1)$ больше квадрата выражения $(x-3)$ на 120 единиц?

б) квадрат выражения $(2x+10)$ больше квадрата выражения $(x-5)$ в 4 раза?

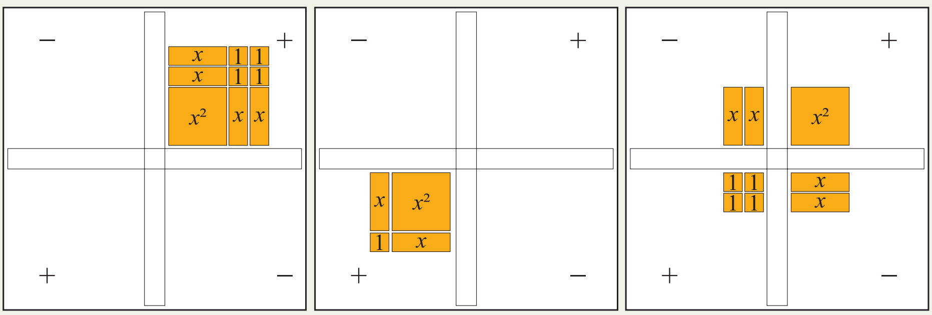
**17.** Используя правило нахождения куба числа, преобразуйте куб приведённых выражений в многочлен:

а) $(a+1)^3$; б) $(a-2)^3$; в) $(2x+y)^3$; г) $(2a-3)^3$.

## 4.2. Разложение на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности двух выражений

### Деятельность

**1.** Проанализируйте, квадрат какого двучлена изображён на моделях.




**2.** Опираясь на модель, запишите трёхчлены в виде квадрата двучленов.

**3.** Записав многочлен $x^2 + 4x + 4$ в виде $x^2 + 2x + 2x + 4$, разложите его на множители способом группировки.

**4.** Определите, раскрытием квадрата какого двучлена является запись $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$. Как можно таким же способом разложить на множители многочлен $x^2 - 6x + 9$? Обоснуйте свой ответ.

Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений используется не только для возведения в квадрат двучленов. С помощью этих формул можно разложить на множители трёхчлен:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2} \qquad \boldsymbol{a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2}$$

Из равенств следует, что трёхчлен $a^2 + b^2 + 2ab$ можно представить в виде произведения $(a + b)(a + b)$, трёхчлен $a^2 + b^2 - 2ab$ – в виде произведения $(a - b)(a - b)$.

### Образец

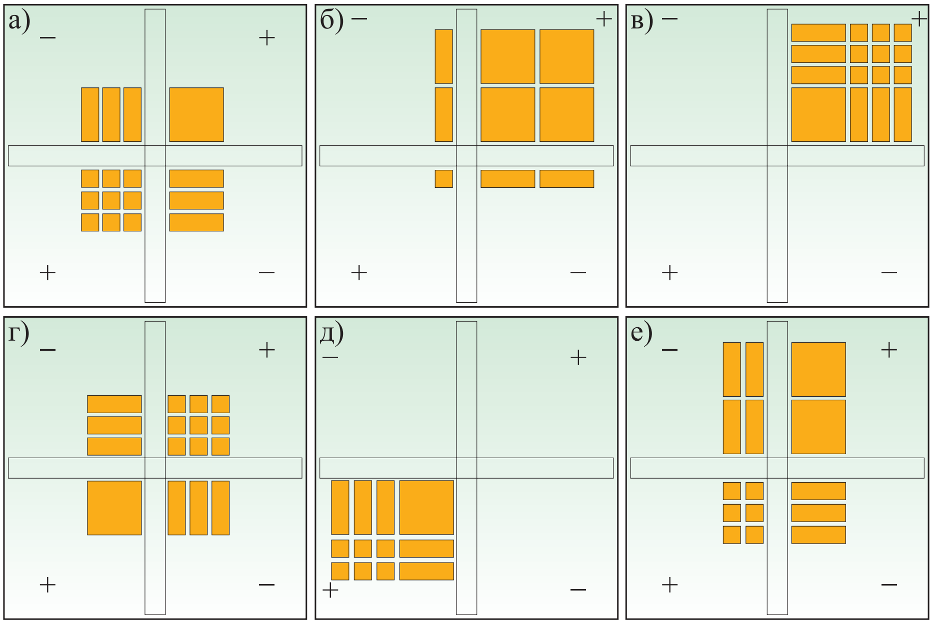
Разложите на множители трёхчлен $a^2 - 20ab^2 + 100b^4$.

*Решение:* Первое слагаемое – квадрат $a$, третье же слагаемое – квадрат $10b^2$. Второй одночлен равен удвоенному произведению $a$ и $10b^2$. Тогда согласно формуле квадрата разности двух выражений:

$$a^2 - 20ab^2 + 100b^4 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 10b^2 + (10b^2)^2 = (a - 10b^2)^2 = (a - 10b^2)(a - 10b^2)$$

## Упражнения

**1.** Определив многочлен (произведение), изображённый в моделях, и составляющие его множители, запишите равенства:




**2.** Построив модель данных многочленов, разложите их на множители:

а) $x^2 + 8x + 16$;  б) $x^2 - 8x + 16$;  в) $4x^2 - 12x + 9$;  г) $4x^2 + 12x + 9$.

**3.** Дополните таблицу:

| **Многочлен** | **Первый член** | **Второй член** | **Удвоенное произведение первого и второго члена** | **Произведение** |
|---|---|---|---|---|
| $p^2 - 2pq + q^2$ | | | | $(p - q)(p - q)$ |
| $64 + 16x + x^2$ | 8 | | | |
| $1 - 2z + z^2$ | | | | |
| $a^2 + 36 + 12a$ | | | | |
| $\frac{1}{5}xp + \frac{1}{25}p^2 + \frac{1}{4}x^2$ | | | $2 \cdot \frac{1}{5}p \cdot \frac{1}{2}x$ | |
| $0{,}25m^2 - 2my + 4y^2$ | | $2y$ | | |

**4.** Представьте второе слагаемое в виде суммы двух одинаковых одночленов и разложите многочлен на множители способом группировки:

а) $81a^2 + 18ab + b^2$;  б) $100x^2y^2 - 20xy + 1$;  в) $49x^2 + 28xy + 4y^2$;

г) $25a^2 - 70ab + 49b^2$;  д) $9c^2 + 24cd + 16d^2$;  е) $16 - 8a^2b^2 + a^4b^4$.

**5.** Вместо точек впишите такой одночлен, чтобы полученный трёхчлен можно было записать в виде квадрата двучлена.

а) $\ldots + 49 + 56a$; б) $36 - 12x + \ldots$ ; в) $0{,}01b^2 + \ldots + 100c^2$;

г) $25a^2 + \ \ldots\ + \frac{1}{4}b^2$; д) $\ldots - 6ab + \frac{1}{9}b^2$; е) $\frac{1}{16}y^2 - 2xy + \ldots$ .

**6.** Чтобы преобразовать выражение $(a + b + c)^2$ в многочлен, Нигяр построила модель. Но на листок, на котором была построена модель, попала клякса (рис. 1). Сможете ли вы дополнить модель, построенную Нигяр? Какой ещё способ можно использовать, чтобы преобразовать это выражение в многочлен?

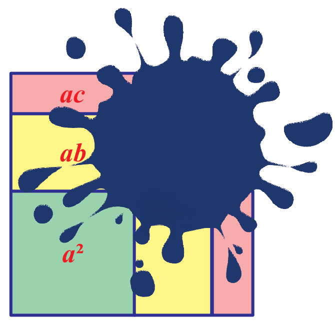



*рис. 1*

**7.** Возможно ли приведённые ниже выражения выразить в виде квадрата двучлена? Если невозможно, то почему? Какой одночлен нужно прибавить к этим выражениям, чтобы их преобразовать в квадрат двучлена?

а) $25a^2 - 15ab + 9b^2$; б) $\frac{1}{4}y^2 - 6xy + 9x^2$; в) $\frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{15}xc + \frac{1}{25}x^2$.

**8.** Вместо фигур напишите такой одночлен, чтобы получилось тождество.

а) $(5x + \blacktriangleright)^2 = \blacktriangledown + 70xy + \blacksquare$ ; б) $(9a - \blacktriangleright)^2 = \blacktriangledown - \bullet + 100b^2$;

в) $(\blacktriangleright + 10a)^2 = \blacktriangledown - 60an + \blacksquare$ ; г) $(\blacktriangleright - \blacksquare)^2 = 25m^2 + 80mn + \bullet$.

**9.** Самед утверждает, что наименьшим значением, которое может принять трёхчлен $x^2 + 6x + 10$, является 1. Как по-вашему, что послужило ему поводом для такого заключения? Выделив из данного трёхчлена квадрат двучлена, определите наименьшее и наибольшее значение нижеприведённых трёхчленов.

**Образец:** $a^2 + 14a + 10 = a^2 + 14a + 49 - 39 = (a + 7)^2 - 39$.
Наименьшее значение: $-39$

а) $a^2 - 16a + 69$; б) $125 + 22x + x^2$; в) $-50 - 14b - b^2$;

г) $4y^2 - 4y + 6$; д) $a^2 + b^2 - 2ab + 2$; е) $9x^2 + 4 - 12xy + 4y^2$.

**10.** Вычислите, используя формулу квадрата двучлена:

а) $15^2 + 2 \cdot 15 \cdot 11 + 11^2$; б) $71^2 - 2 \cdot 71 \cdot 25 + 625$;

в) $101^2 - 202 \cdot 81 + 81^2$; г) $2 \cdot 55 + 25 + 121$;

д) $67^2 + 2 \cdot 67 \cdot 45 + 2015$; е) $- 3600 - 2 \cdot 720 - 144$.

**11.** Аждар написал равенство $16 - 36 = 25 - 45$ и прибавил к каждой его стороне 20,25.

$16 - 36 + 20{,}25 = 25 - 45 + 20{,}25$

$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4{,}5 + 4{,}5^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4{,}5 + 4{,}5^2$.

Каждую сторону этого равенства он записал в виде квадрата двучлена:

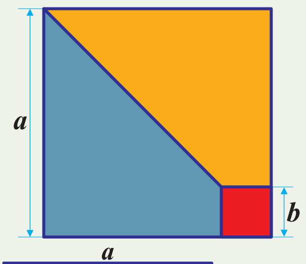
$(4 - 4{,}5)^2 = (5 - 4{,}5)^2$.

Думая, что если квадраты чисел равны, то сами числа также равны, он написал: $4 - 4{,}5 = 5 - 4{,}5$ и $4 = 5$. По-вашему, в чём он ошибся?

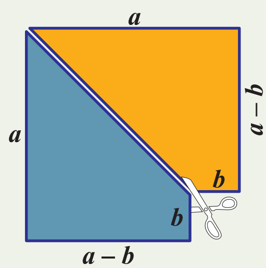
## 4.3. Разность квадратов двух выражений

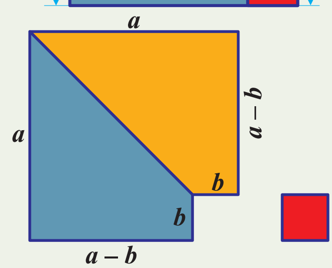
### Деятельность

1. Даны два квадрата со сторонами *a* и *b*. Изобразите их на тетрадном листе. Соединив две противоположные вершины квадрата со стороной a, начертите его диагональ (*a* и *b* произвольные положительные числа) .
2. Разность площадей этих квадратов будет $a^2 - b^2$. Вырежьте маленький квадрат ножницами и отделите.

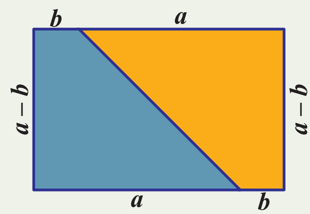



3. Полученную фигуру разрежьте по диагональной линии.




4. Вырезанные фигуры соедините так, как показано ниже. Определите площадь полученного прямоугольника.
5. Какой результат вы получили?




**Формула разности квадратов двух выражений.** Разность квадратов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на их разность. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Поменяем местами её правую и левую стороны: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Произведение суммы двух выражений на их разность равна разности квадратов этих выражений.

### Образец

**1)** Разложите на множители двучлен $25 - a^2$.

*Решение:* поскольку $25 = 5^2$, запишем данный двучлен в виде разности квадратов двух выражений и разложим на множители:

$$25 - a^2 = 5^2 - a^2 = (5 + a)(5 - a).$$

**2)** Произведение $(2a + 3b)(2a - 3b)$ преобразуйте в многочлен.

*Решение:* Как видно из выражения, требуется произведение суммы двух выражений на их разность преобразовать в многочлен. Согласно формуле разности квадратов: $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$.

## Упражнения

**1.** Данные выражения запишите в виде квадрата одночлена:

| $4a^2$ | $9x^2b^2$ | $16m^4$ | $81a^6x^4$ | $0{,}64n^8$ | $1{,}21x^2p^4$ | $0{,}01a^8b^2$ | $\frac{9}{64}m^2n^4$ | $1\frac{11}{25}a^{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $(4m^2)^2$ | | | | | | |

**2.** В данной на рисунке 1 фигуре произведите такие перемещения, чтобы полученная фигура была моделью двучлена $a^2 - b^2$.

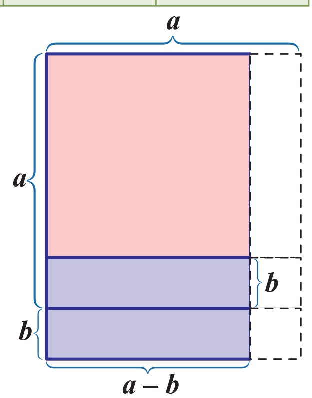



*рис. 1*

**3.** Найдя произведение двучленов, преобразуйте его в многочлен:

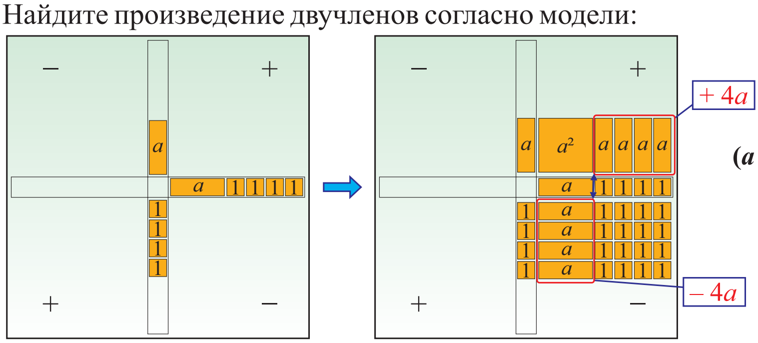
а) $(x - y)(x + y)$; б) $(a + 3)(a - 3)$;

в) $(p + q)(p - q)$; г) $(n - 3m)(3m + n)$;

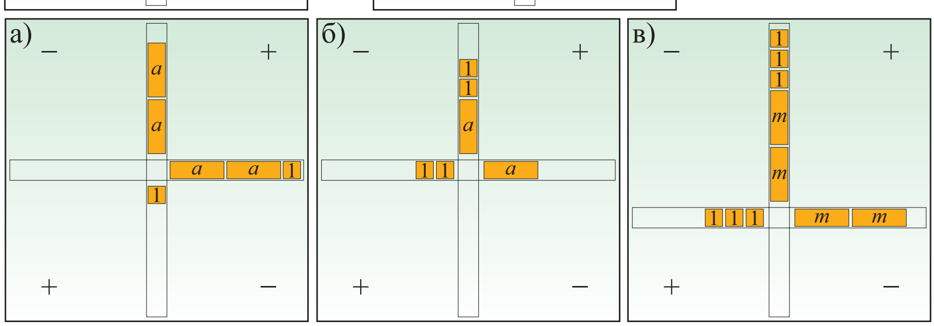
д) $(7 + 4y)(4y - 7)$; е) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)$;

ж) $(8c + 9d)(8c - 9d)$; з) $\left(10x + 1\frac{2}{7}\right)\left(10x - 1\frac{2}{7}\right)$.

**4.** Найдите произведение двучленов согласно модели:




$(a + 4)(a - 4) =$
$= a^2 - 4^2 =$
$= a^2 - 16$




**5.** Запишите произведение в виде многочлена:

а) $(x^2 - 7)(x^2 + 7)$; б) $(a^4 - b^3)(a^4 + b^3)$; в) $(c^5 + k^7)(c^5 - k^7)$;

г) $(9x - b^2)(9x + b^2)$; д) $(0{,}7a^3 + b)(0{,}7a^3 - b)$; е) $(5c^8 + 3k)(5c^8 - 3k)$;

ж) $(10p^2 - 0{,}3q^2)(10p^2 + 0{,}3q^2)$; з) $(1{,}4a^5 + 0{,}1b^4)(1{,}4a^5 - 0{,}1b^4)$.

**6.** Вместо фигур запишите такой одночлен, чтобы получилось тождество.

а) $(3a + ▼)(■ - 6b) = 9a^2 - ▶$; б) $(■ - 3x)(■ + 3x) = 25m^2 - ▶$;

в) $(1{,}1a + ■)(▶ - ▼) = ● - 1{,}44n^4$; г) $m^4 - 324n^8 = (▼ - ▶)(▼ + ▼)$.

**7.** Запишите в виде многочлена:

а) $\left(\frac{5}{7}m^3 + \frac{1}{4}n^2\right)\left(\frac{5}{7}m^3 - \frac{1}{4}n^2\right)$; б) $\left(1\frac{1}{9}a^5 + 1\frac{1}{2}n^7\right)\left(1\frac{1}{9}a^5 - 1\frac{1}{2}n^7\right)$;

в) $\left(\frac{4}{13} + \frac{1}{7}n^4\right)\left(\frac{4}{13} - \frac{1}{7}n^4\right)$; г) $\left(\frac{10}{17} - 0{,}02n^7\right)\left(\frac{10}{17} + 0{,}02n^7\right)$.

**8.** Вычислите значения выражений, указав произведение данных множителей в виде суммы и разности двух одинаковых чисел:

а) $99 \cdot 101$; б) $37 \cdot 43$;
в) $52 \cdot 48$; г) $201 \cdot 199$;
д) $1{,}05 \cdot 0{,}95$; е) $2{,}03 \cdot 1{,}97$;
ж) $17{,}3 \cdot 16{,}7$; з) $1002 \cdot 998$;
и) $29{,}8 \cdot 30{,}2$; й) $699 \cdot 701$;
к) $103 \cdot 97$; л) $305 \cdot 295$.

**$50{,}2 \cdot 49{,}8 =$**
**$= (50 + 0{,}2)\cdot(50 - 0{,}2) =$**
**$= 50^2 - 0{,}2^2 =$**
**$= 2500 - 0{,}04 = 2499{,}96$**

**9.** Данные выражения упростите, используя формулы сокращённого умножения:

а) $(-y + x)(y + x)$; б) $(x + y)(-x - y)$;
в) $(-a + b)(b - a)$; г) $(x - y)(y - x)$;
д) $(-b - c)(b - c)$; е) $(-a - b)(-a - b)$.

**10.** Запишите выражения в виде многочленов:

а) $(-5xy + a)(5xy + a)$; б) $(-10p^4 + 9)(9 - 10p^4)$;
в) $(-3 - 2a^2b)(3 - 2a^2b)$; г) $(0{,}2x + 10y)(10y - 0{,}2x)$;
д) $(17a^3 - 9x)(-17a^3 - 9x)$; е) $(1{,}1y - 0{,}3)(0{,}3 + 1{,}1y)$;
ж) $(7 - 6x)(7 + 6x)$; з) $\left(\frac{1}{3} - 2y\right)\left(\frac{1}{3} + 2y\right)$;
и) $\left(4 - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}b + 4\right)$; й) $\left(4a + 1\frac{1}{7}\right)\left(1\frac{1}{7} - 4a\right)$.

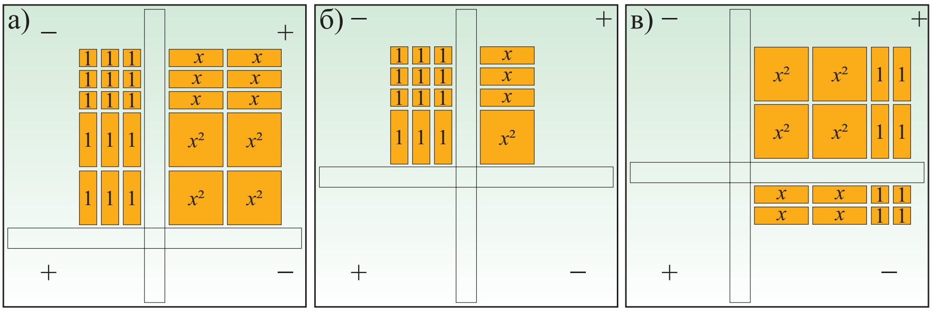
**11.** а) При каком условии выражение $a^2 - b^2$ будет иметь наименьшее значение? Какому числу должен быть равен для этого одночлен $a^2$?

б) При каком условии выражение $a^2 - b^2$ будет иметь наибольшее значение? Какому числу должен быть равен для этого одночлен $b^2$?

**12.** Шабнам утверждает, что наименьшим значением выражения $(13a - 0{,}3)(0{,}3 + 13a)$ является число $-0{,}09$. По-вашему, она права? Обоснуйте ответ. Определите наименьшее и наибольшее значения данных ниже выражений:

а) $(5a - 0{,}2)(0{,}2 + 5a)$; б) $(7a - 15)(15 + 7a)$; в) $(1{,}2 - 7y)(7y + 1{,}2)$.

**13.** Произведения каких двучленов смоделированы на рисунке?




**14.** Разложите многочлены на множители:

а) $16a^2 - 4b^2$; б) $64 - 81k^2$; в) $m^2n^2 - 25$; г) $x^2 - 1\frac{7}{9}$;

д) $y^2 - 0{,}04$; е) $0{,}64 - 0{,}49x^2$; ж) $\frac{16}{25}n^2 - 625$; з) $1{,}69x^2 - 3\frac{1}{16}$.

**15.** Разложите многочлены на множители:

а) $36a^2 - b^2$; б) $16m^2 - 9n^2$; в) $k^2 - a^2b^2$;
г) $-x^2 + 25n^2$; д) $64x^2 - 121y^2$; е) $4a^2b^2 - 1$;
ж) $81a^2 - 49$; з) $-49m^2 + 144b^2$; и) $p^2 - a^2b^2$;
й) $0{,}01n^2 - 9m^2$; к) $0{,}09x^2 - 0{,}49y^2$; л) $a^2x^2 - 1{,}21m^4$.

**16.** Применяя формулу разности квадратов, проведите вычисления в устной форме. Проверьте ответы.

а) $63^2 - 53^2$; б) $126^2 - 125^2$; в) $0{,}899^2 - 0{,}111^2$;

г) $47^2 - 67^2$; д) $41{,}7^2 - 41{,}6^2$; е) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

**17.** Найдите значения дробей:

а) $\frac{36}{13^2 - 11^2}$; б) $\frac{26^2 - 12^2}{54^2 - 16^2}$; в) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$; г) $\frac{67^2 - 17^2}{83^2 - 77^2}$.

**18.** Упростите выражения:

а) $(0{,}8x + 15)(0{,}8x - 15) + 0{,}36x^2$; б) $(3a - 1)(3a + 1) - 17a^2$;
в) $5b^2 + (3 - 2b)(3 + 2b)$; г) $100x^2 - (5x - 4)(4 + 5x)$;
д) $2x^2 - (x - 1)(x + 1)$; е) $6x^2 - (x - 0{,}5)(x + 0{,}5)$.

**19.** Произведите умножение:

а) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; б) $(2x + y)(4x^2 + y^2)(2x - y)$;
в) $(m^3 + b)(m^3 - \mathrm{b})(m^6 + b^2)$; г) $(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$.

**20.** Какое из нижеприведённых предложений верно?

а) Чтобы произведение было равно нулю, хотя бы один из множителей должен быть равен нулю;

б) Чтобы произведение было равно нулю, оба множителя должны быть равны нулю;
в) Чтобы произведение было равно нулю, ни один из множителей не должен быть равен нулю.

**21.** Решите уравнения:

$a^2 - 1\frac{9}{16} = 0$

$a^2 - \frac{25}{16} = 0$

$\left(a - \frac{5}{4}\right)\left(a + \frac{5}{4}\right) = 0$

$a - \frac{5}{4} = 0; \quad a + \frac{5}{4} = 0$

$a = \frac{5}{4}; \quad a = -\frac{5}{4}$ **Ответ:** $1\frac{1}{4}; \; -1\frac{1}{4}$.

а) $(a - 8)(a + 12) = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$;
в) $m^2 - 0{,}25 = 0$; г) $\frac{1}{9} - y^2 = 0$;
д) $9x^2 - 64 = 0$; е) $x^2 - \frac{9}{25} = 0$;
ж) $b^2 + 36 = 0$; з) $81a^2 + 1 = 0$;
и) $4x^2 - 9 = 0$; к) $\frac{49}{81}m^2 - 1 = 0$.

**22.** Исмаил утверждает, что «если число $m$ – любое простое число большее 3, тогда двучлен $m^2 - 1$ полностью делится на 12». По-вашему, это предложение верно?
а) Верность предложения, проверьте, подставив вместо $m$ любое простое число;
б) разложите двучлен $m^2 - 1$ на множители. Выясните, почему полученное произведение делится на 4. Как можно обосновать деление этого произведения на 3? Назовите полученный результат.

**23. Работа в группах:** Осуществите нижеследующий алгоритм.
1. Запишите три любых последовательных целых числа;
2. Найдите их произведение;
3. Найдите сумму полученного числа со средним числом;
4. Вычислите куб среднего числа;
5. Сравните результаты 3 и 4 команд;
6. Сделайте вывод.

Замените второе число из этих трёх последовательных чисел буквой $a$ и постройте алгебраическое выражение. Сократите полученное выражение. К какому выводу вы пришли?

**24.** Упростите выражения:
а) $5a(a - 8) - 3(a + 2)(a - 2)$; б) $(1 - 2b)(1 + 2b) + 4b(b - 2)$;
в) $(3x - y)(3x + y) - (x - y)(x + y)$; г) $(11a + 3b)(11a - 3b) - (11a - 3b)(3b - 11a)$.

**25.** Используя формулу разности квадратов, разложите выражения на множители:
а) $(x + 3)^2 - 4^2$; б) $(4a - 1)^2 - 25$;
в) $81 - (2x - 5)^2$; г) $9y^2 - (1 + 7y)^2$;
д) $49x^2 - (2 + 3x)^2$; е) $(a + 11)^2 - 121$;
ж) $(a + b)^2 - (b - a)^2$; з) $(m + n)^2 - (m - n)^2$;
и) $(2x - 5)^2 - (5 + 2x)^2$; к) $(4c - x)^2 - (2c + 3x)^2$.

$\mathbf{(a - 2b)^2 - (2b + a)^2 =}$
$\mathbf{= ((a - 2b) - (2b + a)) \cdot}$
$\mathbf{\cdot ((a - 2b) + (2b + a)) =}$
$\mathbf{= (a - 2b - 2b - a) \cdot}$
$\mathbf{\cdot (a - \underline{2b} + \underline{2b} + a) =}$
$\mathbf{= -4b \cdot 2a = -8ab.}$

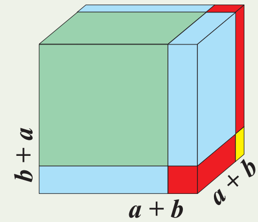
## 4.4. Куб суммы и куб разности двух выражений

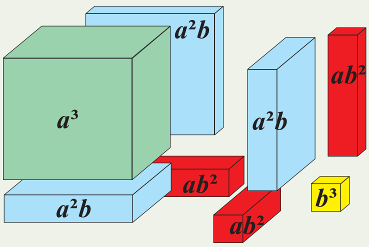
### Деятельность

**1.** Дан куб с длиной ребра $a + b$.

**2.** Объём куба: $V = (a + b)^3$.

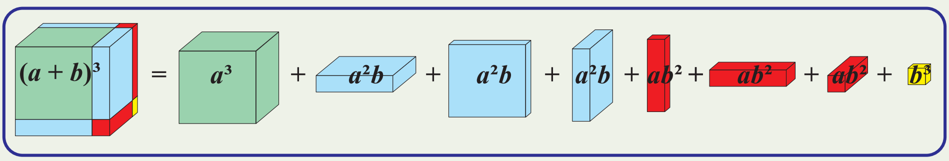
**3.** Куб разделим на кубы с длиной ребра $a$ или $b$ и на прямоугольные параллелепипеды так, как показано на рисунке. Назовите, какой фигурой является каждая часть.




**4.** Найдя объём каждой фигуры, запишите их сумму. Какое выражение вы получили?

**5.** Приравняйте объём всего куба и сумму объёмов его частей. Запишите полученное алгебраическое выражение.




Формула **куба суммы двух выражений**.

Куб суммы двух выражений равен: куб первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, плюс куб второго выражения:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

### Деятельность

**1.** Выражение $(a + b)^3$ запишите в виде произведения трёх одинаковых двучленов.

**2.** Преобразуйте произведение первого и второго двучлена в многочлен.

$$\times\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\times\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline ? \end{array}$$

**3.** Полученный многочлен запишите в стандартном виде и умножьте его на третий двучлен.

**4.** Запишите результат в виде формулы.

**5.** Выражение $(a - b)^3$ запишите в виде произведения трёх одинаковых двучленов.

**6.** Произведение первого и второго двучленов запишите в виде многочлена.

**7.** Полученный многочлен запишите в стандартном виде и умножьте его на третий двучлен.

**8.** Результат запишите в виде формулы.

$$\times\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\times\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline ? \end{array}$$

Формула **куба разности двух выражений**.

Куб разности двух выражений равен: кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

## Образец

**1)** $(x+3y)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 3y + 3\cdot x\cdot(3y)^2 + (3y)^3 = x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$.

**2)** $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)^3 = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot\frac{1}{2}b + 3\cdot 2a\cdot(\frac{1}{2}b)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^3 =$

$$= 8a^3 - 6a^2b + 1,5ab^2 - \frac{1}{8}b^3.$$

## Упражнения

**1.** Объясните запись $(\mathrm{I}-\mathrm{II})^3 = \mathrm{I}^3 - 3\cdot\mathrm{I}^2\cdot\mathrm{II} + 3\cdot\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}^2 - \mathrm{II}^3$. Что произойдёт, если поменять местами с левой стороны I и II? Какое изменение необходимо произвести для этого в данных равенствах?

**2.** Запишите выражения в виде многочлена:
а) $(x+y)^3$; б) $(m-n)^3$; в) $(x+2)^3$; г) $\left(\frac{2}{3}a+3b\right)^3$;
д) $(m+0,2)^3$; е) $(5-x)^3$; ж) $(2p-1)^3$; з) $\left(k+\frac{1}{3}\right)^3$.

**3.** Записав данные выражения в виде произведения, преобразуйте в многочлен способом умножения в столбик:
а) $(5a-2b)^3$; б) $(m+4n)^3$; в) $(1-ab)^3$; г) $(3x+1)^3$.

**4.** Чтобы вычислить куб данных чисел, представьте основание степени в виде суммы и примените формулу куба суммы:
а) $35^3$; б) $12,1^3$; в) $52^3$; г) $43^3$; д) $20,01^3$.

**5.** Используя приближенное равенство $(1\pm a)^3 \approx 1 \pm 3a$ $(0 < a < 1)$, найдите приближенное значение нижеприведённых кубов. Вычислив абсолютные погрешности, сделайте выводы.
а) $(1+0,01)^3$; б)$1,04^3$; в) $0,99^3$; г) $1,1^3$; д) $0,996^3$.

**6.** Вместо X и Y запишите такой одночлен, чтобы получилось тождество.
а) $(a^3+\mathrm{X})^3 = a^9 + 3a^7b + 3a^5b^2 + \mathrm{Y}$;
б) $(3a^2-\mathrm{X})^3 = 27a^6 - 54a^5 + 36a^4 - 8a^3$;
в) $(\mathrm{X}+2a^3)^3 = 8a^9 + 24a^6b + 24a^3b^2 + 8b^3$;
г) $(a^2-\mathrm{X})^3 = a^6 - 9a^5 + 27a^4 - \mathrm{Y}$;
д) $(a^3+\mathrm{X})^3 = a^9 + 3a^7b^4 + 3a^5b^8 + \mathrm{Y}$.

**7.** Запишите выражения в виде многочлена:

а) $(x^2 - y^4)^3$; б) $-(a^5 + b^7)^3$; в) $(3x^2 - 7y^2)^3$;

г) $-(4m^4 + n^5)^3$; д) $\left(\frac{2}{3}a + b^8\right)^3$; е) $\left(1\frac{2}{2}a^6 - 2\frac{1}{2}b^2\right)^3$;

ж) $\left(ab^3 - \frac{3}{4}\right)^3$; з) $-\left(\frac{1}{5}m + \frac{3}{2}n\right)^3$; и) $(0{,}5xy^2 - 0{,}2x^2y)^3$.

**8.** Выражение $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$ преобразуйте в многочлен, используя полученное тождество, найдите значение выражения $a^3 + \frac{1}{a^3}$ при условии $a + \frac{1}{a} = 5$. Объясните, как вы это сделали.

**9.** Используя программу Microsoft Excel, дополните таблицу.

| № | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,324 | 1,23 | = (A2 + B2)^3 |
| 2 | 8,92 | 4,001 | = (A3 + B3)^3 |
| 3 | 7,152 | 0,992 | = (A1 + B5)^3 |
| 4 | 78 | 156 | = (A4 + B1)^3 |
| 5 | 19,8 | 243 | = (A5 + B4)^3 |

В программе Microsoft Excel возведение в степень обозначается значком ^.
$(1{,}2 + 3{,}1)^3 \rightarrow$ = (1.2 + 3.1)^3

**10.** Упростите выражения:

а) $(a + b)^3 - (a - b)^3$; б) $(3m - n)^3 - (n + 3m)^3$;

в) $(x + y)^3 - 3xy(x + y)$; г) $3ab(a + b) - (a + b)^3$;

д) $(a - b)^3 + 3ab(a - b)$; е) $(m - n)^3 - (m - n)(m^2 + mn + n^2)$.

**11.** а) Если $a + b = 9$, $ab = 8$, то какими натуральными числами могут быть выражены $a$ и $b$. Является ли значение выражения $a^3 - b^3$ натуральным числом?

б) Если $a - b = 9$, $ab = 10$, то какими натуральными числами могут быть выражены $a$ и $b$. Найдите значение выражения $a^3 + b^3$.

в) Дано $a - b = 52$, $ab = 1260$, $a$ и $b$ – натуральные числа. Используя тождественность $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$, найдите значение выражения $2(a^3 - b^3)$.

**12.** Упростите выражения:

а) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)^3$; б) $\left(\frac{5}{7}x - 1\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}x + 1\frac{1}{4}\right)^3$;

в) $5 \cdot (2x + y)^3 - 2 \cdot (3y - x)^3$; г) $6 \cdot \left(\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^3$.

**13.** Преобразуйте выражения в многочлен:

а) $(3ab^2 + a^3b^2)^3$; б) $(m^4n^5 - 3mn)^3$; в) $\left(\frac{2}{5}x^4y^3 + \frac{1}{2}xy^7\right)^3$;

г) $(7abc^3 - 3a^2bc)^3$; д) $(0{,}1x^6y^2c^{10} - 0{,}2)^3$; е) $(ab^5c^4 + 1{,}2abc)^3$.

## 4.5. Разложение на множители суммы кубов двух выражений

### Деятельность

1. В тождестве $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ вынесите за скобки общий множитель выделенных одночленов и полученное выражение перенесите в правую сторону равенства. Какое тождество вы получили?
$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$
2. В правой стороне тождества множитель $(a + b)$ вынесите за пределы скобок. Какое выражение вы получили?
$$a^3 + b^3 = (a + b)\,((a + b)^2 - 3ab)$$
3. Упростите вторую скобку. Какое выражение вы получили? На какие множители разложилось выражение $a^3 + b^3$? Постарайтесь высказать своё мнение о выражении во вторых скобках с правой стороны тождества.

Трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$ называется полным квадратом двучлена $(a - b)$, трёхчлен $a^2 + 2ab + b^2$ – полным квадратом двучлена $(a + b)$. Трёхчлен $a^2 - ab + b^2$ называется **неполным квадратом** двучлена $(a - b)$. Так же трёхчлен $a^2 + ab + b^2$ – **неполный квадрат** $(a + b)$.

Формула **суммы кубов двух выражений**.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений с неполным квадратом их разности:
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

### Образец

**1)** Выражение $8a^3 + 27b^3$ разложите на множители.

*Решение:* $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)((2a)^2 - 2a \cdot 3b + (3b)^2) =$
$$= (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2).$$

**2)** Преобразуйте произведение $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ в многочлен.

*Решение:* Как видно из выражения, первый множитель – $(x + 4y)$, второй множитель же неполный квадрат двучлена $(x - 4y)$. Тогда по формуле суммы кубов запишем: $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2) = x^3 + (4y)^3 = x^3 + 64y^3$.

### Упражнения

**1.** Дополните таблицу. Объясните, как изменяются степень и коэффициент.

| **Одночлен** | $3ab^6$ | $-2m^4n^2$ | $1{,}1x^7yz^4$ | $\frac{3}{5}abc^9$ | $1\frac{3}{5}xp^4$ | $-\frac{4}{7}m^8n^{11}$ | $11m^5n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Куб одночлена** | $27a^3b^{18}$ | | | | | | |
| **Степени** | 7 и 21 | | | | | | |
| **Коэффициенты** | 3 и 27 | | | | | | |

**2.** Напишите полный и неполный квадрат данных выражений. Объясните их разницу:

а) $a + b$; б) $n - 2m$; в) $\frac{1}{2}x + y$; г) $0{,}1b - a$;

д) $3a + b$; е) $7mn - 2m$; ж) $\frac{2}{9}x + 1{,}5y$; з) $1{,}3ab - 1$.

Какой одночлен следует прибавить к полному квадрату каждого выражения, чтобы получился неполный квадрат.

**3.** Выполните умножение в столбик:

а) $(2p + 3)(4p^2 - 6p + 9)$;
б) $(3n + m^2)(9n^2 - 3m^2n + m^4)$;
в) $(1 + 4b)(1 - 4b + 16b^2)$;
г) $(3a + d^8)(9a^2 - 3ad^8 + d^{16})$;
д) $(5mn + 1)(25m^2n^2 - 5mn + 1)$.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 25a^2 & -\,10a & +\,4 & \\
\times & & 5a & +\,2 & \\
\hline
125a^3 & +\,\cancel{50a^2} & & & \\
+ & -\,\cancel{50a^2} & -\,\cancel{20a} & & \\
 & & \cancel{20a} & +\,8 & \\
\hline
125a^3 & & + & 8 &
\end{array}
$$

Какой вы можете сделать вывод на основе полученных многочленов? Каким наиболее удобным способом можно найти произведение данных многочленов?

**4.** Преобразуйте данные произведения в многочлен наиболее удобным способом:

а) $(-a - b)(a^2 - ab + b^2)$; б) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$;
в) $(-a - b)(-a^2 + ab - b^2)$; г) $(-a - b)\,((a + b)^2 - 3ab)$.

**5.** Данные выражения преобразуйте в многочлен на основе формулы суммы кубов:

а) $(x^3 + y^5)(x^6 - x^3y^5 + y^{10})$; б) $(3d^2 + 2c)(9d^4 - 6cd^2 + 4c^2)$;
в) $(25 - 5y^6 + y^{12})(5 + y^6)$; г) $(9r^8 - 12r^4s^5 + 16s^{10})(3r^4 + 4s^5)$.

**6.** Применяя формулы сокращённого умножения, вычислите:

а) $\dfrac{31^3 + 19^3}{50} - 31 \cdot 19$; б) $\dfrac{127^3 + 67^3}{194} - 127 \cdot 67$;

в) $\dfrac{39^3 + 41^3}{80} - \left(39^2 + 41^2\right)$; г) $\dfrac{48^3 + 52^3}{100} - \left(48^2 + 52^2\right)$.

**7.** Вместо буквы А запишите такой одночлен, чтобы данные равенства стали тождествами.

а) $(2x + \mathrm{A})(4x^2 - 2x\mathrm{A} + \mathrm{A}^2) = 8x^3 + 27y^3$;
б) $(-\mathrm{A} - 3c)(\mathrm{A}^2 - 3c\mathrm{A} + 9c^2) = -27c^3 - 8d^9$.

**8.** Решите уравнения:

а) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$;
б) $6(y + 1)^2 + 2(y + 1)(y^2 - y + 1) - 2(y + 1)^3 = -22$;
в) $(a + 2)^3 - a(3a + 1)^2 + (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) = 53$;
г) $5x(x + 3)^2 - 5(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 30(x + 2)(x - 2) = 75$.

**9.** Разложите двучлены на множители:

а) $x^3 + y^3$; б) $m^3 + n^3$; в) $8a^3 + 1$; г) $27x^3 + y^3$;

д) $\frac{1}{64}a^3 + 0,008$; е) $64m^3 + 27n^3$; ж) $-a^3b^3 - b^6$; з) $125 + k^6$;

и) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{64}{125}y^3$; й) $p^3q^3r^3 + 125p^9$; к) $0,027 + 64a^3$; л) $343 + x^{12}$.

**10.** Севиль утверждает, что выражение $75^3 + 44^3$ делится на 7. Как вы можете доказать, что она права? Сможете ли также доказать, что выражения а) $97^3 + 93^3$ делится на 19, б) $215^3 + 94^3$ делится на 3?

**11.** Докажите, что при любом целом значении $q$ значения данных выражений нацело делятся на $a$:

а) $(11- q)^3 + q^3$, $a = 11$; б) $(4 - 2q)^3 + 8q^3$, $a = 4$;

в) $8q^3 + (17 - 2q)^3$, $a = 17$; г) $3q^3 + 3(4 - q)^3$, $a =12$.

**12.** Сравните значения данных числовых выражений:

а) $25^3 + 11^3$ и $(25 + 11)^3$; б) $\frac{29^3 + 31^3}{60}$ и 904.

**13.** Найдите значение выражения $a^3 + b^3$, если

а) $a + b = 6$ и $ab = 8,75$; б) $a + b = -2$ и $ab = -8$.

**14.** Какими выражениями следует заменить буквы A, B, C и D, чтобы нижеприведённые равенства стали тождествами?

а) $(2x + \mathrm{A})(\mathrm{B} + 9y^2) = \mathrm{C}^3 + \mathrm{D}^3$; б) $(3m + \mathrm{A})(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = n^6 + \mathrm{D}$.

**15.** Вычислите значение выражений при данных значениях переменной:

а) $2a^3 + 9a - 2(a + 1)(a^2 - a + 1)$, $a = 11,7$;

б) $b(b + 2)(b - 2) - (b + 3)(b^2 - 3b + 9)$, $b = 2,5$;

в) $3(c - 1)^2 + (c + 2)(c^2 - 2c + 4) - (c + 1)^3$, $c = -3$.

**16.** Данные выражения запишите в виде произведения:

а) $(x + 1)^3 + x^3$; б) $(a - b)^3 + b^3$; в) $1000 + (a -b)^3$;

г) $8x^3 + (x - y)^3$; д) $(y - 2)^3 + 27$; е) $27m^3 + (m + n)^3$.

**17.** Вычислите удобным способом значения выражений:

а) $51^3 + 3 \cdot 51^2 \cdot 49 + 3 \cdot 51 \cdot 49^2 + 49^3$;

б) $2,56^3 + 3 \cdot 2,56^2 \cdot 5,44 + 3 \cdot 2,56 \cdot 5,44^2 + 5,44^3$;

в) $\left(2\frac{1}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^2\cdot 7\frac{3}{4} + \left(7\frac{3}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(7\frac{3}{4}\right)^2\cdot 2\frac{1}{4}$;

г) $(-0,78)^3 + 2,22\cdot (-0,78)^2 + (-2,34)\cdot 0,74^2 + 0,74^3$.

**18.** При делении некоторого натурального числа на 4, в остатке получим 1, а при делении другого числа – в остатке 3. Если разделить сумму кубов этих чисел на 4, сколько останется в остатке?

## 4.6. Разложение на множители разности кубов двух выражений

### Деятельность

**1.** Вынесите за скобки общий множитель одночленов тождества

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

и перенесите в правую сторону равенства полученное выражение. Какое тождество вы получили? $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

**2.** Вынесите за скобки множитель $(a - b)$ в правой стороне тождества. Какое выражение вы получили? $a^3 - b^3 = (a - b)\,((a - b)^2 + 3ab)$

**3.** Упростите вторую скобку. На какие множители разложилось выражение $a^3 - b^3$?

**Формула разности кубов двух выражений.**

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений с неполным квадратом их суммы:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

### Образец

**1)** Разложите на множители выражение $0{,}125a^3 - 64b^3$.

*Решение:* $0{,}125a^3 - 64b^3 = (0{,}5a)^3 - (4b)^3 = (0{,}5a - 4b)((0{,}5a)^2 + 0{,}5a \cdot 4b + (4b)^2) =$
$= (0{,}5a - 4b)(0{,}25a^2 + 2ab + 16b^2)$.

**2)** Произведение $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ преобразуйте в многочлен.

*Решение:* Как видно из выражения, первый множитель – $(2x - 3y)$, второй множитель же неполный квадрат двучлена $(2x + 3y)$. Тогда по формуле суммы кубов запишем: $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = (2x)^3 - (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3$.

### Упражнения

**1.** Определите ошибки, сделанные в нижеприведённых тождествах:

а) $(a + 2b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
б) $(2x - 3y)^2 = 2x^2 + 12xy + 3y^2$;
в) $(m + n^3)^3 = m^3 + 2mn^3 + 3mn^6 - n^9$;
г) $27a^6 + 8b^9 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$.

**2.** Выполните умножение:

а) $(b - 1)(b^2 + b + 1)$; б) $(4m - 3n^2)\,(16m^2 + 12mn^2 + 9n^4)$;
в) $(3 - d)(9 + 3d + d^2)$; г) $(0{,}64x^{12} + 0{,}48x^6y^7 + 0{,}36y^{14})\,(0{,}8x^6 - 0{,}6y^7)$;
д) $(-7p + 5k)(25k^2 + 35pk + 49p^2)$; е) $\left(\frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{6}x^3y^4 + \frac{1}{3}y^8\right)\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}y^4\right)$.

**3.** Найдите значение выражения $a^3 - b^3$ при условии, что
а) $a - b = 4$; $ab = -1{,}75$; б) $a - b = -5$; $ab = -6$.

**4.** Вместо букв A, B, C и D запишите такой многочлен, чтобы данное равенство стало тождеством.
а) $(A - 4x)(25y^2 + B) = C^3 - D^3$; б) $(5p - A)(B + C) = D^3 - 8c^{12}$.

**5.** Разложите на множители выражения:
а) $a^3 - 64$; б) $27c^3 - 1000$; в) $27p^3 - 8k^3$; г) $-125a^6 + 1$;
д) $216 - 0{,}001q^3$; е) $-x^9 + 64y^6$; ж) $343a^{12} - b^9$; з) $a^3b^6b^9 - d^6$.

**6.** Обоснуйте деление нацело.
а) выражения $68^3 - 24^3$ на 11; б) выражения $68^3 - 24^3$ на 53.

**7.** Используя формулы сокращённого умножения, вычислите значение нижеприведённых выражений:
а) $\dfrac{93^3 - 57^3}{36} + 93 \cdot 57$; б) $\dfrac{79^3 - 51^3}{28} - \left(79^2 + 51^2\right)$.

**8.** Запишите приведённые выражения в виде произведения:
а) $(a + 7)^3 - 64$; б) $(9b + 5)^3 - 27$; в) $c^6(c - 6)^3 - 125c^9$;
г) $(2x + y)^3 - (2x - y)^3$; д) $(4x + 5y)^3 - (4x - 5y)^3$; е) $x^6y^9 - 64x^3$.

**9.** Используя формулу куб разности, вычислите:
а) $101^3 - 3 \cdot 101^2 \cdot 88 + 3 \cdot 101 \cdot 88^2 - 88^3$;
б) $9{,}6^3 - 3 \cdot 9{,}6^2 \cdot 2{,}4 + 3 \cdot 9{,}6 \cdot 2{,}4^2 - 2{,}4^3$;
в) $3 \cdot \left(17\dfrac{5}{6}\right)^2 \cdot 8\dfrac{1}{3} + \left(8\dfrac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(8\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot 17\dfrac{5}{6} - \left(17\dfrac{5}{6}\right)^3$;
г) $8{,}9^3 - 16{,}5 \cdot 8{,}9^2 + 26{,}7 \cdot 30{,}25 - 5{,}5^3$.

**10.** Преобразуйте произведение $(x^2 - 10x + 6)(2x + b)$ в многочлен стандартного вида. При каком значении $b$:
а) в многочлене не будет участвовать множитель $x^2$?
б) коэффициенты $x^2$ и x будут равны?

**11.** Преобразуйте произведение $(x^2 + x - 1)(x - a)$ в многочлен стандартного вида. При каком значении $a$:
а) в многочлене не будет участвовать множитель $x^2$?
б) не будет участвовать множитель $x$ ?

**12.** Докажите, что число, равное разности $111111 - 222$, есть квадрат какого-то натурального числа. Определите это число.

## 4.7. Преобразование выражений

На предыдущих уроках вы познакомились с несколькими способами разложения многочлена на множители: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, формулы сокращённого умножения. Иногда для разложения многочлена на множители используют все возможные способы. Решим несколько примеров на разложение многочлена на множители с применением разных способов.

### Деятельность

Разложите на множители многочлен $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$.

*Решение:* **Подготовка стратегии решения:**

Поскольку $a^4 = (a^2)^2$ и $x^4 = (x^2)^2$, то сгруппировав первое и четвёртое слагаемое, мы можем разложить на множители как $a^4 - x^4 = (a^2)^2 - (x^2)^2 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$ . Отметим, что, так как $a^2 - x^2 = (a - x)\ (a + x)$, получим следующее равенство: $a^4 - x^4 = (a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$.

Сгруппировав второе и третье слагаемое, вынесем общий множитель за скобки: $ax^2 - a^2x = ax\ (x - a) = -ax(a - x)$.

Итак, в результате проведённых преобразований в каждой из двух групп мы получили множитель $(a - x)$.

**Реализация стратегии решения:**

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = a^4 - x^4 + ax^2 - a^2x = (a^2)^2 - (x^2)^2 + ax\ (x - a) =$$
$$= (a - x)(a + x)(a^2 + x^2) - ax(a - x) =$$
$$= (a - x)((a + x)(a^2 + x^2) - ax)$$

Выражение во вторых скобках запишите в виде многочлена стандартного вида:

$$(a + x)(a^2 + x^2) - ax = a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax.$$

В результате получим следующее выражение:

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = (a - x)(\ a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax).$$

### Деятельность

**Пример:** Разложите многочлен $x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3$ на множители.

*Решение:*

**Подготовка стратегии решения:**

Заметим, что участвующее в многочлене слагаемое $2xy^2$ есть удвоенное произведение одночленов $x$ и $y^2$. Если бы в нашем примере были слагаемые $x^2$ и $y^4$, то мы смогли бы применить формулу квадрата суммы. Но здесь эти слагаемые не участвуют.

Проанализировав данный многочлен, мы видим, что общим множителем во втором, четвёртом и пятом слагаемых является $y$. Если вынести его за скобки, то в скобках получим раскрытую запись квадрата суммы одночленов $x$ и $y$:

$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = y(x^2 + 2xy + y^2).$$

Запишем многочлен в скобках в виде квадрата двучлена и полностью разложим на множители:

$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = y(x^2 + 2xy + y^2) = y(x + y)^2 = y(x + y)(x + y).$$

Оставшиеся первое и третье слагаемые имеют общий множитель $x$. Вынесем его за скобки: $x^4 + xy^3 = x(x^3 + y^3)$.
Во второй скобке применим формулу суммы кубов:

$$x^4 + xy^3 = x(x^3 + y^3) = x(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Итак, в каждой из двух групп получили множитель $(x + y)$. Его можно вынести за скобки.

**Реализация стратегии решения:**

$$x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3 = x^2y + 2xy^2 + y^3 + x^4 + xy^3 =$$
$$= y(x + y)^2 + x(x^3 + y^3) = y(x + y)(x + y) +$$
$$+ x(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)\,[y(x + y) + x(x^2 - xy + y^2)].$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$y(x + y) + x(x^2 - xy + y^2) = xy + y^2 + x^3 - x^2y + xy^2.$$

В результате получим: $x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3 = (x + y)(xy + y^2 + x^3 - x^2y + xy^2)$.

## Деятельность

**Пример:** Разложите на множители двучлен $x^4 + 4$.

*Решение:*

**Подготовка стратегии решения:**

Как видно, данное выражение можно записать, как $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$. Нет формулы разложения суммы квадратов на множители. Но если в этом выражении будет слагаемое $4x^2$, его можно будет записать в виде квадрата суммы. Поэтому к данному выражению прибавим и отнимем одночлен $4x^2$:

$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$ .

Это выражение можно разложить на множители по формуле разности квадратов.

**Реализация стратегии решения:**

Как мы и планировали, к данному выражению прибавим и отнимем одночлен $4x^2$, применим формулу разности квадратов:

$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$.

Итак, $x^4 + 4 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$.

## Деятельность

**Пример:** Разложите на множители многочлен $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

*Решение:*

**Подготовка стратегии решения:**

Если вынесем за скобки множитель 6, предварительно прибавив к сумме последних трёх слагаемых $x$, то обнаружим «скрытое» выражение $(x + 1)^2$. Так как к выражению прибавлен $x$, то его нужно и вычесть. В этом случае следует вынести за скобки $x$ в группе $x^3 - x$:

$x^3 - x = x(x^2 - 1)$. Разность квадратов в скобках разложим на множители:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Итак, в каждой группе создан множитель $(x + 1)$. Его можно вынести за скобки.

**Реализация стратегии решения:**

Как мы и планировали, к приведённому выражению прибавим и отнимем одночлен $x$:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 + x - x = x^3 - x + 6x^2 + 12x + 6 = x(x^2 - 1) + 6(x^2 + 2x + 1) =$$
$$= x(x - 1)(x + 1) + 6(x + 1)^2 = (x + 1)[x(x - 1) + 6(x + 1)].$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$x(x - 1) + 6(x + 1) = x^2 - x + 6x + 6 = x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$$
$$= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

Итак, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

Чтобы разложить многочлен на множители, недостаточно точно знать формулы сокращённого умножения, здесь надо уметь увидеть общий множитель и успешно проводить группировку. Во время проведения таких преобразований, формируются особые способности видеть, определять «скрытые» выражения, распознавать формулы. Для разложения многочлена на множители следует придерживаться следующих рекомендаций:

1. Если все члены многочлена имеют общий множитель, то этот множитель вынесите за скобки;
2. В приведённых многочленах ищите признаки формул сокращённого умножения: квадрат числа, куб числа, удвоенное или утроенное произведение чисел;
3. Группируя слагаемые с общим множителем, вынесите этот множитель за скобки;
4. Если какая-либо группировка результатов не даст, постарайтесь сгруппировать слагаемые другим способом;
5. Прибавьте и отнимите недостающее слагаемое для любой формулы и группировки, при необходимости любое слагаемое разложите на несколько слагаемых;
6. Если разложение на множители не получилось каким-либо одним способом, то используйте другой способ. В результате, решение проблемы, на которую вы потратили много усилий, принесет вам радость и чувство удовлетворения.

## Упражнения

**1.** Разложите многочлен на множители:

а) $4x^4 + x^5$; б) $ab - ac + 2b - 2c$; в) $9m^2 - 16n^2$; г) $25a^2 - 30ab + 9b^2$.

Назовите способ разложения на множители, которым вы воспользовались.

**2.** а) По-вашему, какой из рекомендуемых в теме способов наиболее удобен?

б) Разложите многочлен $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$ на множители. Какие способы вы использовали для разложения этого многочлена на множители?

**3.** Разложите многочлены на множители и объясните, какие способы вы использовали:

а) $5a^2b - 5b^2$; б) $7ab^2 - 7ac^2$; в) $2a^4c - 16b^4c$;
г) $4c^3d - 9cd^3$; д) $-64m^2n - 27n$; е) $9mn^6 - 117m$;
ж) $6x^2y^2 - 24x^2z^2$; з) $2x^2y - 16y$; и) $7p^6q - 7q^7$.

**4.** Преобразуйте многочлен в произведение. Объясните, в каком из примеров вы применили вынесение общего множителя за скобки, в каком – формулу сокращённого умножения и в каком оба способа, и почему вы решили применить этот способ.

а) $3x^2y + 6xy^2 + 3y^3$; б) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$; в) $a^2 - b^2 - a + b$;
г) $5a^2 - 10ab + 5b^2$; д) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$; е) $c + d + c^2 - d^2$;
ж) $7xy^2 + 28xy + 28x$; з) $9 - m^2 + 4mn - 4n^2$; и) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$;
й) $2z - 4zt + 2zt^2$; к) $4p^2 - 20pq + 25q^2 - 36$; л) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$.

**5.** Решите уравнения, применяя условие равенства нулю произведения:

а) $x(x - 4) = 0$; б) $6m^4 - 54m^2 = 0$; в) $a^4 - a^3 - a^2 + a = 0$;
г) $y^2 + 8y = 0$; д) $100b^2 - 4b^4 = 0$; е) $p^3 - 5p^2 - 9p + 45 = 0$;
ж) $z^2 - 11z = 0$; з) $a^3 - 2a^2 + a = 0$; и) $n^3 - 12 + 3n^2 - 4n = 0$.

**6.** Преобразуйте выражения (третий столбец) так, чтобы можно было найти их значение по предложенным данным.

| Сумма или разность переменных | Произведение переменных | Выражение |
|---|---|---|
| $a + b = 2$ | $ab = 5$ | $a^2 + b^2$ |
| $c - d = 7$ | $cd = -3$ | $cd^2 - c^2d$ |
| $m + n = -9$ | $mn = 10$ | $m^3n + 2m^2n^2 + mn^3$ |
| $p + q = -6$ | $pq = -11$ | $pq^3 + p^3q$ |
| $r + s = -7$ | $rs = 20$ | $r^3s^2 + r^2s^3$ |
| $x - y = 21$ | $xy = 4$ | $x^3 - y^3$ |

**7.** Чтобы найти значение выражения $7a^2b + 5ab^2$ при $a = \frac{2}{7}$, $b = -\frac{7}{5}$, Севиндж подставила значения $a$ и $b$. Салим же сперва разложил выражение на множители и, записав в полученном выражении значения переменных, нашёл значение выражения. По-вашему, кто из них получил значение более удобным способом? Какому из способов вы отдали бы предпочтение при определении значений нижеприведенных выражений?

а) $x^4 - x^3 + 11x - 11$ если, $x = 11$;

б) $(5m - 3n)^2 - (4m - 2n)^2$ если, $m = \frac{2}{9}$, $n = \frac{3}{5}$;

в) $(3c - 4d)^2 - (2d - 3c)^2$ если, $c = 0,75$, $d = -1,25$;

г) $y^3 - 2y^2z - 4yz + 8z^2$ если, $y = 5,5$, $z = 0,25$;

д) $p^3 + p^2q - pq^2 - q^3$ если, $p = 1,3$, $q = 0,8$.

**8.** Выполните вычисление, упростив выражения. Объясните, каким способом вы упростили каждое выражение.

а) $15,4^2 - 7,6^2 + 23 \cdot 2,2$;   б) $46,8^2 - 12 \cdot 51,6 - 34,8^2$;

в) $43 \cdot 8,4 + 27,3^2 - 15,7^2$;   г) $18 \cdot 62,4 - 35,2^2 + 17,2^2$;

д) $\dfrac{3^{12} + 3^{14}}{3^{12} + 3^{14} + 3^{15}}$;   е) $\dfrac{2^{16} - 2^{18} + 2^{19}}{16^4 - 16^6}$;   ж) $\dfrac{36^2 + 36^3}{6^4 - 6^5 + 6^6 - 6^7}$.

**9.** Докажите, что:

а) прибавив к произведению двух последовательных натуральных чисел большее из них, получим квадрат большего числа;

б) разность кубов двух последовательных целых чисел на 3 не делится;

в) при делении квадрата нечётного числа на 8 в остатке остаётся 1.

Доказательство каждого предложения обоснуйте на примерах.

**10.** Выполняя представленный ниже алгоритм, разложите многочлен $3a^2 + 6a - 9$ на множители.

1. Из каждого одночлена вынесите за скобки общий множитель 3;
2. К полученному в скобках выражению прибавьте и отнимите 1. Объясните, почему вы так сделали;
3. Напишите квадрат двучлена в полученном в скобках выражении;
4. Примените разность квадратов в выражении, полученном в результате III шага;
5. Определите, какие множители вы получили.

**11.** Напишите алгоритм для преобразования многочленов в произведение методом выделения полного квадрата. Преобразовав произведение в многочлен, проверьте верность вашего ответа.

а) $a^2 + 4a - 5$;   б) $b^2 - 10b + 9$;   в) $2x^2 + 16x - 40$;

г) $x^2 + 1,5x - 1$;   д) $y^2 - 2,5y - 6$;   е) $a^2 - 3,5a + 1,5$.

# 4.8. Углы, образующиеся при пересечении двух прямых третьей

## Деятельность — Накрест лежащие, односторонние и соответственные углы

Углы, образованные в результате пересечения двух прямых третьей.

**1.** Начертите произвольные прямые $a$ и $b$ и пересекающую их прямую $c$.

**2.** Укажите смежные и вертикальные углы, полученные в результате пересечения прямых $a$ и $c$. Назовите их свойства.

$\angle 1 + \angle 2 = ?$ $\quad \angle 3 + \angle 2 = ?$ $\quad \angle 1 = ?$

**3.** Укажите смежные и вертикальные углы, полученные в результате пересечения прямых $b$ и $c$.

$\angle 8 + \angle 7 = ?$ $\quad \angle 6 + \angle 7 = ?$ $\quad \angle 7 = ?$

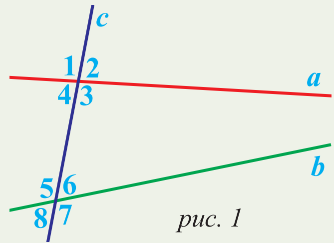


*рис. 1*

Углы, оброзававшиеся между произвольными прямыми $a$ и $b$ и пересекающей их прямой $c$, именуются следующим образом (рис. 1):

**Внутренние накрест лежащие углы:** $\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 5$.

**Внешние накрест лежащие углы:** $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

**Внутренние односторонние углы:** $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$.

**Внешние односторонние углы:** $\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 1$ и $\angle 8$.

**Соответственные углы:** $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$.

Здесь прямая $c$ называется **секущей** прямых $a$ и $b$.

## Упражнения

**1.** Из углов, данных на рисунке 2, укажите:
а) внутренние накрест лежащие углы;
б) внешние накрест лежащие углы;
в) внутренние односторонние углы;
г) внешние односторонние углы;
д) соответственные углы.
Обоснуйте, почему эти углы так названы.

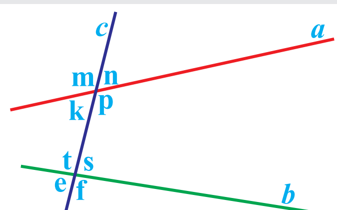


*рис. 2*

**2.** В треугольнике MNK на стороне MN дана точка A, на стороне MK – точка B. Начертите прямую AB. Выпишите внутренние накрест лежащие, внутренние односторонние, соответственные, внешние накрест лежащие и внешние односторонние углы, образованные в результате пересечения прямых MN и MK секущей AB (рис. 3).

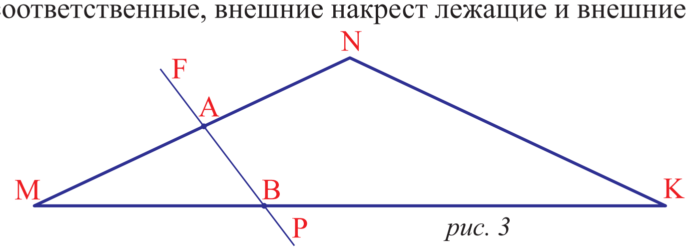


*рис. 3*

**3.** Если из данных на рисунке 1 внутренних накрест лежащих углов $\angle 4 = \angle 6$, постарайтесь доказать нижеследующее.
а) и другие накрест лежащие углы равны;
б) соответственные углы равны;
в) сумма внутренних односторонних углов равна $180°$.

**4.** Если для внутренних односторонних углов образованных между двумя прямыми и секущей, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ (рис. 1), то докажите нижеследующее:
а) $\angle 2 + \angle 7 = 180°$;
б) внутренние накрест лежащие углы равны;
в) соответственные углы равны.

**5.** Если какая-либо пара соответственных углов, образованных в результате пересечения двух прямых секущей, равны, то верны ли следующие утверждения:
а) соответственные углы другой пары тоже равны;
б) внутренние накрест лежащие углы равны;
в) сумма градусных мер внутренних односторонних углов равна $180°$.

**6.** Прямые AB и MN пересекаются. Укажите внутренние накрест лежащие углы, внешние накрест лежащие углы, внутренние односторонние углы, которые образовались в результате пересечения прямых AN и BM а) секущей MN, б) секущей AB.

**7.** Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 4). Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$.

**8.** Пять прямых попарно пересекаются (рис. 5). Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ при условии, что сумма всех внешних углов полученного пятиугольника составляет $1260°$.

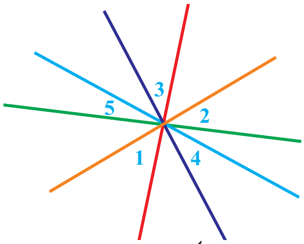


*рис. 4*

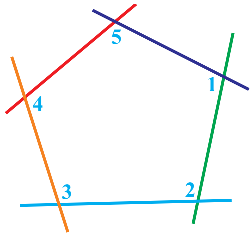


*рис. 5*

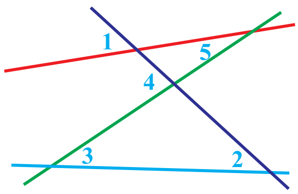


*рис. 6*

**9.** Четыре прямые пересекаются так, как показано на рисунке 6. При условии $\angle 2 + \angle 3 = 88°$ найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$.

**10.** Пересекающиеся прямые $a$, $b$ и $c$ образуют треугольник. Чему будет равна сумма градусных мер всех углов, образованных между этими прямыми? В каком случае эти прямые, если даже будут попарно пересекаться, не образуют треугольник?

## 4.9. Признаки параллельности прямых

### Деятельность

1. Начертите параллельные прямые $a$ и $b$ и пересекающую их прямую $c$.
2. Охарактеризуйте углы, образованные в результате пересечения параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $c$ (рис. 1).

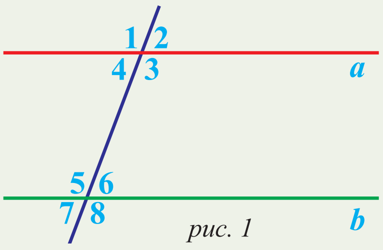


*рис. 1*

3. Измерьте транспортиром $\angle 1$ и $\angle 5$. Какой результат вы получили? Как называются эти углы?
4. Измерьте транспортиром $\angle 4$ и $\angle 6$. Какой результат вы получили? Как называются эти углы?
5. Измерьте транспортиром $\angle 2$ и $\angle 8$. Назовите результат. Как называются эти углы? Что вы можете сказать о сумме градусных величин $\angle 2$ и $\angle 8$?
6. Определите градусную меру $\angle 1$ и $\angle 8$. Какой результат вы получили?
7. Выскажите своё мнение об углах, образованных в результате пересечения прямых $a$ и $b$ секущей $c$.

### Теорема Признак параллельности прямых

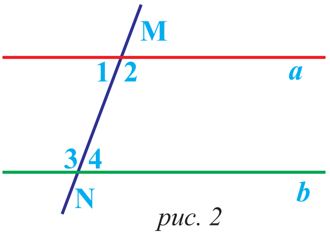


*рис. 2*

***Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.***

**Условие теоремы:** Две прямые $a$ и $b$ пересекаются третьей прямой MN и образовавшиеся накрест лежащие внутренние углы равны: $\angle 1 = \angle 4$.

**Утверждение теоремы:** прямые $a$ и $b$ параллельны: $a \parallel b$ (рисунок 2).

**Доказательство теоремы:** Как известно, на плоскости две прямые либо пересекаются, либо параллельны друг другу. Предположим, что прямые $a$ и $b$ пересекаются в любой точке A (рис. 3) и AMN – треугольник. Секущая MN делит плоскость на две полуплоскости. Треугольник AMN расположен в одной из полуплоскостей. На другой полуплоскости построим треугольник BMN, равный треугольнику AMN. Согласно условию, $\angle BMN = \angle ANM$ и $\angle BNM = \angle AMN$. Тогда сторона BM расположена на прямой $a$, сторона BN – на прямой $b$. Следовательно, точка B – вторая точка пересечения прямых $a$ и $b$. Поскольку две прямые не могут пересекаться в двух точках, наше предположение неверно. Следовательно, прямые $a$ и $b$ – параллельные: $a \parallel b$.

**Теорема доказана.**

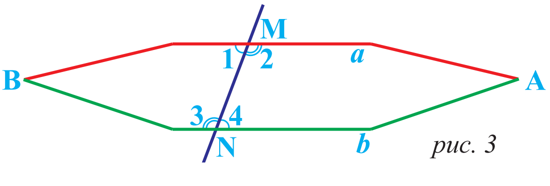


*рис. 3*

## Теорема Признак параллельности прямых

***Если сумма двух внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то эти две прямые параллельны.***

**Условие теоремы:** $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ (рис. 1).
**Утверждение теоремы:** $a \parallel b$.

*Докажите самостоятельно.*

Докажите, основываясь на равенстве внутренних накрест лежащих углов.

## Теорема Признак параллельности прямых

***Если образующиеся при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны.***

**Условие теоремы:** $\angle 1 = \angle 5$ (рис. 1).
**Утверждение теоремы:** $a \parallel b$.

*Докажите самостоятельно.*

Докажите, основываясь на равенстве внутренних накрест лежащих углов.

## Деятельность

1. Начертите произвольную прямую $a$ и отметьте на ней точки A и B.
2. Постройте прямую $b$, проходящую через точку A перпендикулярно прямой $a$.
3. Постройте прямую $c$, проходящую через точку B перпендикулярно прямой $a$.
4. Определите взаиморасположение прямых $b$ и $c$.
5. Докажите взаиморасположение прямых $b$ и $c$, характеризуя углы, образованные между прямыми $b$ и $c$ и секущей $a$.

***Результат:*** **Две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны друг другу.**

## Упражнения

**1.** На рисунке 4 прямые $a$ и $b$ пресекаются с прямой $c$. Докажите, что $a \parallel b$, если:

а) $\angle 1 = \angle 8$,
б) $\angle 2 = 43°$, $\angle 8 = 137°$,
в) $\angle 4 = 55°$, и $\angle 1$ на 70° больше чем $\angle 6$ (рис. 4).

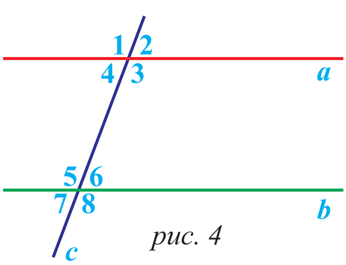


*рис. 4*

**2.** Прямая AB пересекает прямую MN в точке A, а прямую CD – в точке B. Можно ли утверждать, что прямые MN и CD параллельны при условии, что:

а) $\angle MAB = 45°$, $\angle CBA = 135°$,

б) $\angle MAB = 60°$, $\angle CBA = 60°$,

в) $\angle MAB = 90°$, $\angle CBA = 90°$.

**3.** Можно ли, опираясь на рисунок 5, доказать, что прямые *a* и *b* являются параллельными? Почему?

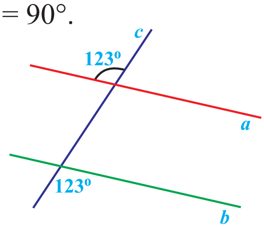



*рис. 5 а*

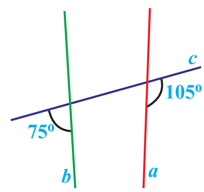



*рис. 5 б*

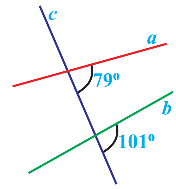



*рис. 5 в*

**4.** На рисунке 6 прямые *a*, *b* и *c* пересекаются с прямой *d*. Если $\angle 1 = 132°$, $\angle 2 = 48°$, $\angle 3 = 58°$, какие из прямых будут параллельными? Почему? Обоснуйте свой ответ.

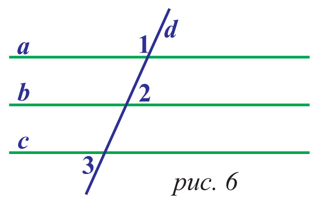



*рис. 6*

**5.** На рисунке 7 известно, что AB = AC и CE = DE. О параллельности каких прямых можно утверждать? Почему? Обоснуйте свой ответ.

**6.** В треугольнике ABC $\angle ACB = 38°$ и $\angle BAC = 71°$. Постройте биссектрису CK угла, смежного с углом ACB. Можно ли утверждать, что CK и AB параллельны?

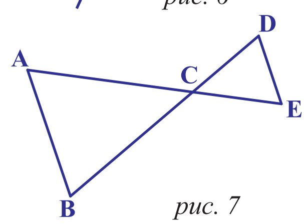



*рис. 7*

**7. Ситуационная задача:** Ограждение

| Форма грядки | Хватит ли 32 м материала на ограждение грядки? (Напишите «да» или «нет». Объясните свой ответ.) |
|---|---|
| Грядка A | |
| Грядка B | |
| Грядка C | |
| Грядка D | |

Садовник решил провести ограждение нескольких участков A, B, C и D (рис. 8) с саженцами роз. С этой целью он закупил 32 м материала для ограды. Заполните таблицу по данным рисунков:

**Замечание.** 4 верных ответа оцениваются 2 баллами, 3 верных – 1 бал, в остальных случаях – 0 баллов.

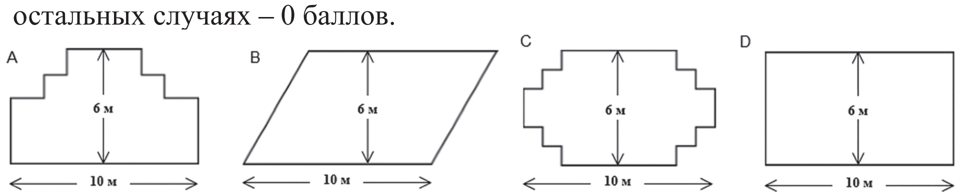


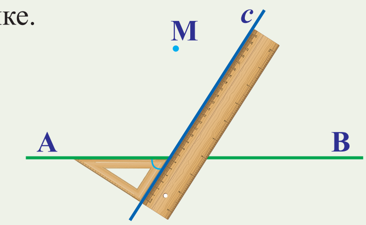

*рис. 8*

## 4.10. Аксиома параллельности. Свойства параллельных прямых

### Деятельность

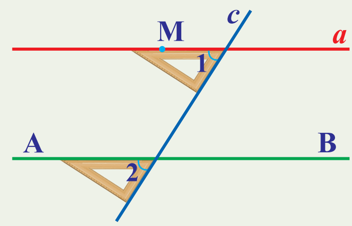
**1.** Начертите прямую AB и пересекающую ее прямую *c*. Отметьте точку M, не лежащую на этих прямых.


**2.** Расположите угольник и линейку так, как показано на рисунке.




**3.** Передвиньте угольник по прямой *c* таким образом, чтобы точка M располагалась относительно линейки, как показано на рисунке. Начертите прямую *a*, проходящую через точку M.

**4.** Как можно обосновать параллельность прямых AB и *a*? Как называются углы 1 и 2, показанные на рисунке? Равны ли они?




***Аксиома параллельности:*** **Через точку, не лежащую на прямой, можно провести одну и только одну прямую параллельную этой прямой.**

### Теорема. Свойство углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

***Внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны.***

**Условие теоремы:** AB ∥ CD и AC секущая.

**Утверждение теоремы:** $\angle BAC = \angle ACD$.

**Доказательство:** Предположим обратное. Допустим, что $\angle BAC \neq \angle ACD$ (рис. 1). Возьмём такую точку M, чтобы $\angle MAC = \angle ACD$ (согласно аксиоме откладывания углов).

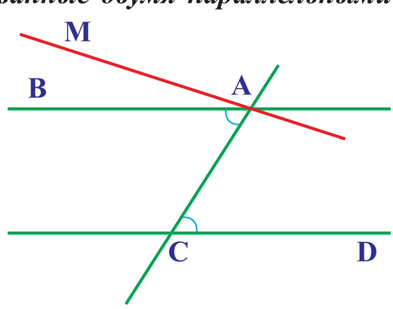



*рис. 1*

Тогда по свойству параллельности прямых AM ∥ CD. Но согласно условию AB ∥ CD. Следовательно, из точки A к прямой CD проведены две разные параллельные прямые. А это невозможно по аксиоме параллельности. Итак, обратное предположение неверно. При условии AB ∥ CD внутренние накрест лежащие углы равны. **Теорема доказана.**

**Теорема** Свойство углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

***Сумма внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, равна 180°.***

**Условие теоремы:** AB || CD и AC – секущая (рис. 2).
**Утверждение теоремы:** ∠BAC + ∠MCA = 180°.

*Докажите самостоятельно.*

Докажите на основе равенства внутренних накрест лежащих углов.

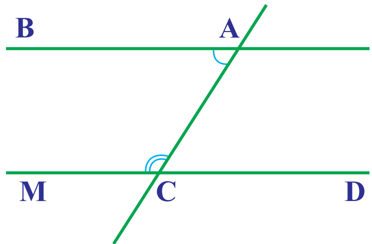


*рис. 2*

**Теорема** Свойство углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

***Соответственные углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны.***

**Условие теоремы:** AB||CD и AC – секущая (рис. 3).
**Утверждение теоремы:** ∠BAC = ∠MCK.

*Докажите самостоятельно.*

Докажите на основе равенства внутренних накрест лежащих углов.

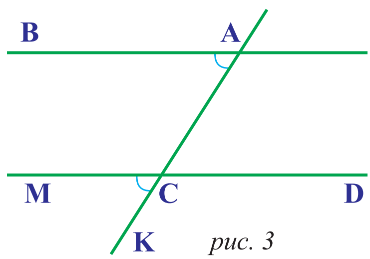


*рис. 3*

***Результат:*** **Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой параллельной прямой.**

Если $a \parallel b$ и $c \perp a$, $c$ – секущая (рис. 4).

Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, значит $c \perp a$ . Почему? Обоснуйте.

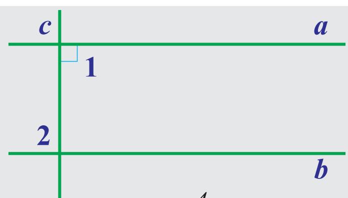


*рис. 4*

**Теорема** Свойство прямых, параллельных одной прямой

***Две прямые, параллельные одной прямой, параллельны друг другу.***

**Условие теоремы** $a \parallel c$ и $b \parallel c$.
**Утверждение теоремы:** $a \parallel b$ (рис. 5 а).
**Доказательство теоремы:** Предположим обратное. Предположим, что прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке A (рис. 5 б). Тогда выходит, что к прямой $c$ из точки A, не лежащей на этой прямой, проведены две параллельные прямые. Но это невозможно. Следовательно, $a \parallel b$.
**Теорема доказана.**

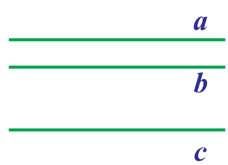


*рис. 5 а*

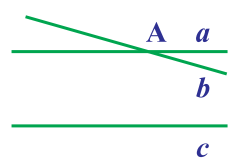


*рис. 5 b*

## Упражнения

**1.** Начертите произвольную прямую $a$ и отметьте точку А, не лежащую на этой прямой. Начертите прямую $b$, проходящую через точку А и являющуюся параллельной прямой $a$.

**2.** Через вершину С треугольника АВС проведите прямую, параллельную стороне АВ. Сколько прямых, параллельных АВ, можно провести через точку С? Почему?

**3.** Прямые $a$ и $b$ параллельны. Прямая $m$ пересекает прямую $a$. Определите взаиморасположение прямой $m$ и прямой $b$. Обоснуйте свой ответ.

**4.** Департамент транспортных услуг хочет расширить автобусные услуги. Чтобы выявить дороги с некрутыми поворотами, на разных перекрёстках должны быть определены углы между дорогами. На рисунке вы видите пересечение двух параллельных дорог третьей дорогой. Между дорогами образовалось восемь углов и известно, что один из углов составляет 130°. Как Департамент транспортных услуг, не проводя дальнейших измерений, может определить величину других углов?

**5.** Даны прямые $a$, $b$ и $c$: Известно, что $a \parallel b$ и $c$ – секущая (рис. 6). Определите нижеприведённое:

а) $\angle 6 = ?$ если, $\angle 4 = 50°$;

б) $\angle 5 = ?$ $\angle 7 = ?$ если, $\angle 1 = 172°$;

в) $\angle 8 = ?$ если, $\angle 5 - \angle 2 = 44°$;

г) $\angle 3 = ?$ и $\angle 7 = ?$ если, $\angle 3 = 5 \cdot \angle 7$.

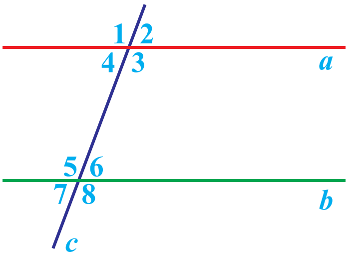



*рис. 6*

**6.** Если сумма двух накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, составляет 150°, чему будет равен каждый из углов? Чему будет равна величина углов, смежных этим углам?

**7.** Начертите две произвольные параллельные прямые и пересекающую их прямую. Один из углов измерьте транспортиром. Определите другие углы. Обоснуйте, согласно какому свойству вы находили градусную меру каждого угла.

**8.** Даны прямые $a$, $b$, $c$ и $d$. Найдите $\angle 6$, если $\angle 1 = 103°$, $\angle 7 = 77°$ $\angle 3 = 65°$ (рис.7). Определите взаиморасположение прямых $a$, $b$, $c$ и $d$.

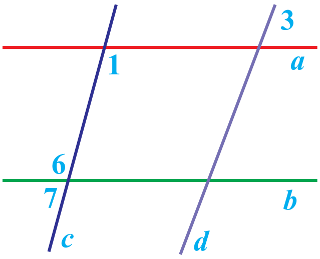



*рис. 7*

**9.** Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC (рис. 8). Проанализируйте нижеследующее:

а) если $\angle BCA = 53°$, то $\angle DAC = ?$

б) если $\angle ABC = 71°$, то $\angle DAB = ?$

в) если $\angle ABC = 71°$, $\angle DAC = 30°$, то $\angle CAB = ?$

г) если $\angle CAB = 65°$, $\angle ABC = 45°$, то $\angle DAC = ?$

д) определите углы треугольника ABC если $\angle EAB = 69°$, $\angle DAC = 54°$.

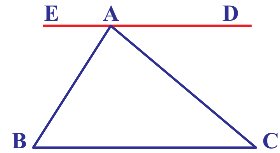


*рис. 8*

**10.** Дан параллелограмм ABCD (рис. 9). Определите другие углы параллелограмма, если $\angle A = 88°$. Обоснуйте свой ответ.

*рис. 9*

**11.** Прямые *a* и *b* параллельные, а прямая *c* – секущая. Согласно данным на рисунке 10, определите углы, образованные между этими прямыми.

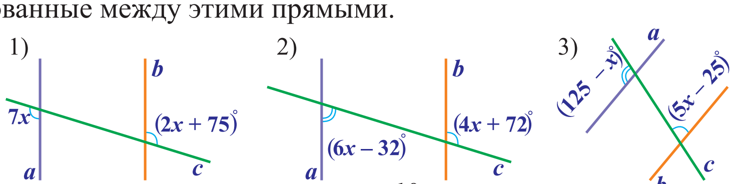


*рис. 10*

**12.** На рисунке 11 дано несколько прямых, проведённых через точку B, не лежащую на прямой *a* (рис. 11). Если $\angle ABO = 86{,}8°$, $\angle KBO = 63{,}5°$, $\angle OBC = 111{,}4°$, $\angle MOB = 93{,}2°$, то какая из этих прямых будет параллельной прямой *a*?

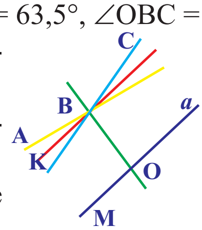


*рис. 11*

**13.** Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся пополам в точке пересечения. Докажите что AC || BD.

**14.** Если в трапеции MNKL $\angle M = 135°$ и $\angle L = 45°$, укажите ее параллельные и непараллельные стороны.

**15.** Данные на рисунке 12 прямые *a* и *b* параллельные. Найдите *x*.

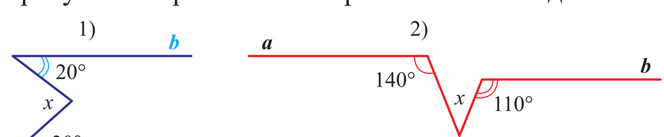


*рис. 12*

**16.** Укажите пары параллельных прямых данных на рисунке фигур и докажите их параллельность.

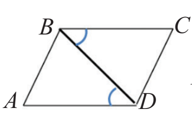


*рис. 13*

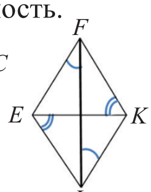


*рис.14*

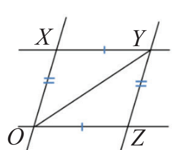


*рис. 15*

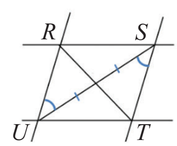


*рис. 16*

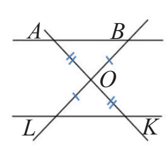
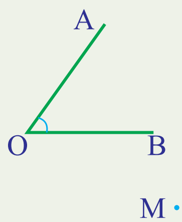


*рис. 17*

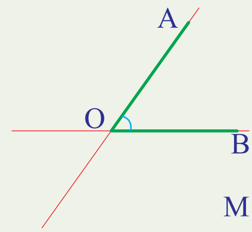
# 4.11. Углы с соответственно параллельными сторонами

## Деятельность

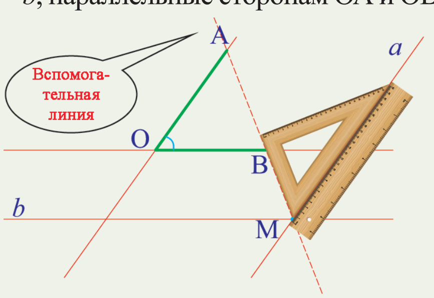
**1.** Начертите угол AOB, отличный от развернутого. Отметьте любую точку M, не принадлежащую этому углу.



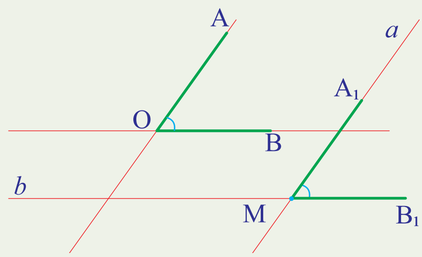

**2.** Начертите прямые AO и BO, на которых лежат стороны OA и OB.




**3.** С помощью угольника и линейки проведите через точку M прямые *a* и *b*, параллельные сторонам OA и OB.




**4.** Отметьте угол $A_1MB_1$ с вершиной в точке M и со сторонами, лежащими на прямых *a* и *b*.




**5.** Что вы можете сказать об углах AOB и $A_1MB_1$? Как называются эти углы? Измерьте транспортиром углы AOB и $A_1MB_1$. Какой результат вы получили? (рис. 1)

**6.** Какими являются углы AOB и $A_1MC$, смежный с углом $A_1MB_1$? (рис. 1). Что можете сказать о сумме этих углов?

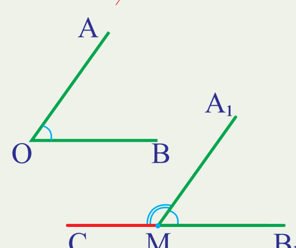


*рис. 1*

## Теорема Углы с соответственно параллельными сторонами

***Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180°.***

**Условие теоремы:** $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$, $OA \parallel O_1A_1$; $OB \parallel O_1B_1$

**Утверждение теоремы:** $\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$ (рис. 2 а) или $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 2 б)

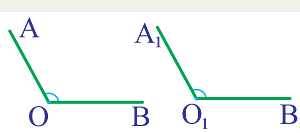


*рис. 2 а*

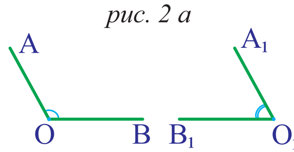


*рис. 2 б*

*Докажите самостоятельно.*

Если углы с соответственно параллельными сторонами оба являются острыми либо оба являются тупыми, то такие углы конгруэнтны.

Если один из углов с соответственно параллельными сторонами является острым, а второй тупым, то сумма этих углов равна 180°.

Если каждый из углов с соответственно параллельными сторонами прямой, то сумма этих углов равна 180°.

## Упражнения

**1.** а) Начертите развёрнутый угол AOC. Постройте угол BOD, стороны которого соответственно параллельны сторонам OA и OC. Что можно сказать об углах AOC и BOD? Обоснуйте свой ответ.

б) Начертите прямой угол MNK. Определите вид угла PSR, стороны которого соответственно параллельны сторонам MN и NK.

**2.** Начертите угол ABC в 60°. Постройте угол MNK, стороны которого соответственно параллельны сторонам этого угла. Какова градусная мера угла MNK? Почему?

**3.** Самир утверждает, что если градусная мера углов AOB и MCD равна, следовательно, соответственные стороны этих углов параллельны. Верно ли его утверждение? Можно ли утверждать, что соответственные стороны двух углов параллельны, если сумма градусных мер этих углов составляет 180°?

**4.** Стороны данных на рисунке 3 углов AOB, CED и MKP параллельны. Найдите градусную меру этих углов:

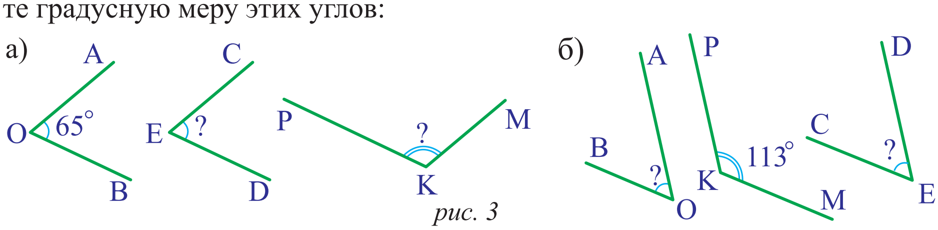



*рис. 3*

**5.** Даны углы ABC и DMK: BA || MD и BC || MK . Определите градусную меру этих углов:

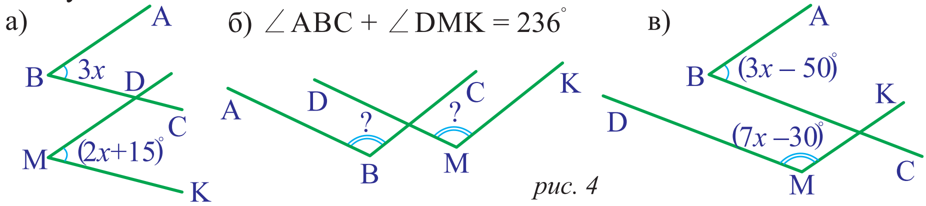



*рис. 4*

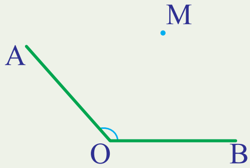
**6.** а) Один из углов с соответственно параллельными сторонами составляет 20% от другого угла. Найдите градусную меру этих углов.

б) Отношение углов с соответственно параллельными сторонами 3:6. Найдите разность квадратов градусных мер этих углов.

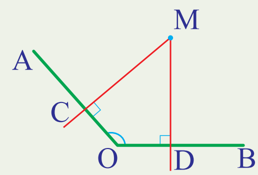
## 4.12. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

### Деятельность

**1.** Начертите угол AOB, градусная мера которого меньше 180°. Отметьте произвольную точку M, не лежащую на сторонах этого угла.

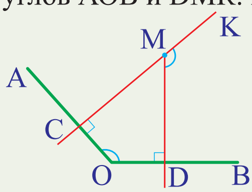



**2.** Из точки M проведите к сторонам OA и OB перпендикулярные прямые.




**3.** С помощью транспортира определите градусную меру $\angle AOB$ и $\angle CMD$? Чему равна сумма их градусных мер?

**4.** Луч MC продолжите до прямой. Сравните градусную меру полученных углов AOB и DMK. Какой получили результат?




**5.** Обобщите свои мысли об углах AOB, CMD или AOB, DMK. Каким стало взаиморасположение соответственных сторон этих углов? К какому выводу о градусной мере углов вы пришли в каждом случае?

### Теорема Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

***Углы с соответственными перпендикулярными сторонами либо конгруэнтны, либо их сумма составляет 180°.***

**Условие теоремы:** $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$, $OA \perp O_1A_1$; $OB \perp O_1B_1$.

**Утверждение теоремы:** $\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$ или $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

**Доказательство теоремы:**

Допустим, что даны углы <AOB и $\angle A_1O_1B_1$. Если AOB развёрнутый или тупой угол, то и угол $A_1O_1B_1$ будет развёрнутым или тупым углом. Т.е. в этом случае $\boldsymbol{\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1}$. Допустим, что $\boldsymbol{\angle AOB < 180°}$ (отличный от 90º). В этом случае возможны 2 случая.

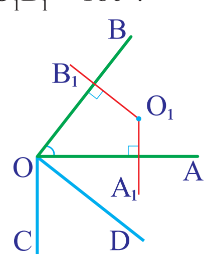



*рис. 1*

**I случай:** $\boldsymbol{\angle AOB < 90°}$ (рис. 1). Начертим луч OC так, чтобы $OA \perp OC$, а точки B и C располагались по разные стороны от прямой OA. Затем начертим луч OD так, чтобы $OD \perp OB$, а точки C и D располагались с одной стороны от прямой OA. Поскольку $\angle AOB = 90° - \angle AOD$ и $\angle COD = 90° - \angle AOD$, то $\angle AOB \cong \angle COD$. Поскольку углы COD и $A_1O_1B_1$ с соответственно параллельными сторонами (объясните, почему они параллельные), эти углы либо конгруэнтны, либо их сумма составляет 180º.

**II случай: $\angle$AOB > 90°** (рис. 2). Начертим луч OC так, чтобы $\angle$AOB и $\angle$AOC были смежными углами. $\angle$AOC – острый угол и его стороны соответственно перпендикулярны сторонам $\angle A_1O_1B_1$. Следовательно, или $\angle$AOC + $\angle A_1O_1B_1$ = 180°, или $\angle AOC \cong \angle A_1O_1B_1$.
Тогда, как и в первом случае, $\boldsymbol{\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1}$ или $\boldsymbol{\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180^\circ}$.
**Теорема доказана.**

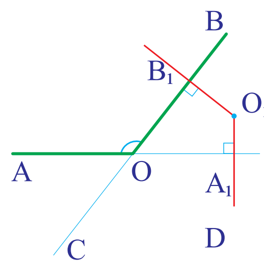


*рис. 2*

## Упражнения

**1.** а) Начертите развёрнутый угол AOC. Постройте угол BOD, стороны которого соответственно перпендикулярны сторонам OA и OC. Что можно сказать об углах AOC и BOD? Обоснуйте свой ответ.
б) Начертите прямой угол ABC. Определите вид угла MNK, стороны которого соответственно перпендикулярны сторонам BA и BC.

**2.** Начертите угол MOK в 105°. Постройте угол AOB, стороны которого перпендикулярны сторонам этого угла. Найдите градусную меру угла AOB и определите его вид.

**3.** Даны углы AOB и CED с соответственно перпендикулярными сторонами.
а) Если $\angle$AOB = 56°, то $\angle$CED = ?
б) Если $\angle$AOB : $\angle$CED = 2:7, то $\angle$AOB = ? $\angle$CED = ?
в) Если $\angle$AOB = 3·$\angle$CED, то $\angle$AOB = ? $\angle$CED = ?
г) Если $\angle$AOB = $20x + 44^\circ$, $\angle$CED = $10x + 46^\circ$, то $\angle$AOB = ? $\angle$CED = ?

**4.** Начертите произвольный угол AOB и отметьте точку M на стороне OA. Постройте угол CMD с вершиной в точке M и сторонами соответственно перпендикулярными сторонам угла AOB.

**5.** Даны углы ABC и DMK: BA ⊥ MD и BC ⊥ MK. Определите градусную меру этих углов (рис. 3).

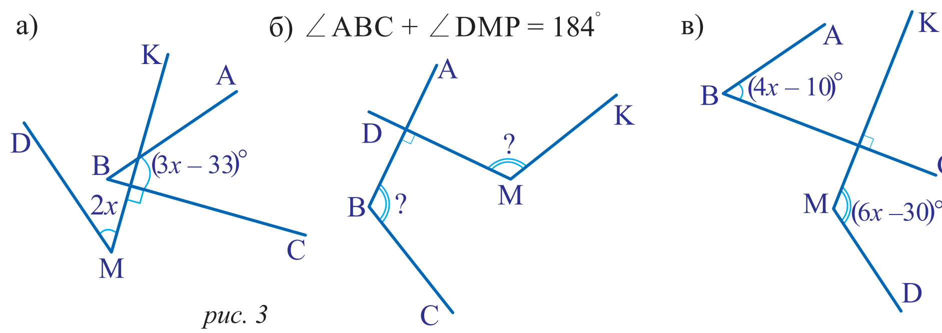


*рис. 3*

## Проверьте себя

**1.** Преобразуйте данные квадраты двучленов в многочлен:
а) $(m-4)^2$; б) $(7+2b)^2$;
в) $(-3a-0{,}4)^2$; г) $\left(\frac{3}{4}n+1\frac{1}{2}\right)^2$;
д) $(3a^4-1{,}2b^2)^2$; е) $(m^2n^3+k^3)^2$;
ж) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$; з) $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2$.

**2.** Используя формулу квадратов двучленов, вычислите квадраты чисел:
а) $3{,}9^2$; б) $100{,}1^2$; в) $2999^2$.

**3.** Упростите выражения:
а) $(5a^2-2b)^2+20a^2b$;
б) $x^4-121-(x^4+11)^2$;
в) $16m(m-1)-(4m-1)^2$.

**4.** При каком значении $x$ квадрат двучлена $(4x-1)$ будет на 10 единиц больше квадрата двучлена $(2x-3)$, умноженного на 4?

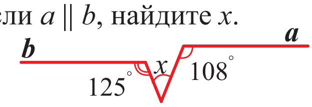
**5.** Разложите многочлены на множители:
а) $16a^2+56ab+49b^2$;
б) $-c^2-4cd-4d^2$;
в) $x^2-9x+14$.

**6.** На какие выражения надо умножить двучлен $(3a-b)$, чтобы получить нижеследующие многочлены?
а) $9a^2-b^2$; б) $9a^2-3ab$;
в) $-9a^2+6ab-b^2$;
г) $9a^2-6ab+b^2$;
д) $27a^3-b^3$; е) $b^4-3ab^3$;
ж) $3ax+3ay-bx-by$.

**7.** Вместо точек запишите необходимые выражения:
а) $\ldots^2-\ldots=(2a-\ldots)(2a+7)$;
б) $(n+\ldots)^2=\ldots+\ldots+16$;
в) $(\ldots-2n)^2=k^2-\ldots+\ldots$;
г) $(\ldots+\ldots)^2=1+\ldots+49x^2$.

**8.** Прямая $c$ пересекает параллельные прямые $a$ и $b$. Определите градусную меру углов, образованных между этими прямыми, если:
а) сумма внутренних накрест лежащих углов равна 156°;
б) сумма соответственных углов равна 240°;
в) разность внешних односторонних углов равна 40°.

**9.** Если $a \parallel b$, найдите $x$.




**10.** Найдите значения дробей:
а) $\frac{48^2-45^2}{74^2-19^2}$; б) $\frac{88^2-53^2}{20^2-15^2}$;
в) $\frac{89^2-61^2}{89^2-2\cdot 89\cdot 61+61^2}$.

**11.** Решите уравнения:
а) $121a^2-25=0$; б) $1\frac{9}{16}-x^2=0$;
в) $(1-2b)(1+2b)+4b(b-2)=49$;
г) $(x-2)^3+(x+2)^3=2(x-3)(x^2+3x+9)$.

**12.** Дано: $a-b=25$, $ab=144$, $a$ и $b$ – натуральные числа. Найдите значение выражения $(a^3-b^3)$.

**13.** Если разность двух углов с соответственно параллельными сторонами равна 48°, то найдите разность квадратов этих углов.

**14.** При условии, что один из углов, с соответственно перпендикулярными сторонами, равен $\frac{2}{3}$ части другого угла, найдите неполный квадрат суммы градусных мер этих углов.

# ГЛАВА V. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ. СТОРОНЫ И УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

## 5.1. Способы задания функции

**Деятельность** — **Формула, таблица, график**

**1.** Что вы подразумеваете, когда говорите о постоянной или переменной величине? Какой величиной является температура воздуха? Какой величиной вы назовёте отношение длины окружности к её диаметру: постоянной или переменной? Как вы обоснуете свой ответ?

**2.** Укажите переменные в равенстве, заданном в виде $y = 2x + 1$. Определите значение у при $x = 1$. А чему будет равно значение $y$ при $x = -3$? Назовите, какая из этих двух переменных независимая, а какая зависимая. На какой вид задания функции указывает равенство $y = 2x + 1$? Выскажите своё мнение.

**3.** Изменение температуры воздуха в течение недели показано в виде таблицы.

| *Дни недели* | **Понедельник** | **Вторник** | **Среда** | **Четверг** | **Пятница** | **Суббота** | **Воскресенье** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Средняя температура*** | 25°C | 22°C | 23°C | 24°C | 20°C | 21°C | 17°C |

Какова была средняя температура воздуха в течение недели? Определите по таблице среднюю температуру воздуха в пятницу.

**4.** Зависимость температуры воздуха от времени суток более наглядно дана в виде чертежа (рис. 1).

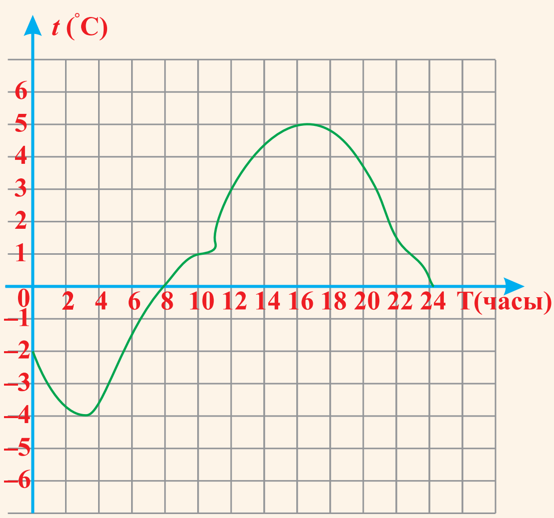



*рис. 1*

Определите по чертежу:

а) Какая температура была в 8 часов?

б) Как изменялась температура в течение дня?

в) Определите самую высокую и самую низкую температуру.

Можно ли эту зависимость температуры и времени назвать функцией?

**5.** Какими способами заданы функции в вышеприведённых примерах? По-вашему, какой из приведённых способов удобнее? Почему? Обоснуйте свой ответ.

**«Функция»** – одно из основных понятий математики. Для её задания используют постоянные и переменные величины. Величина, принимающая разные числовые значения, называется переменной величиной, величина, принимающая только одно числовое значение, называется постоянной величиной. Например, температура воздуха, скорость автомобиля, уровень воды в море – переменные величины. Число времён года, отношение длины окружности к её диаметру – постоянные величины. Часто одно значение какой-либо величины служит основанием для получения по определённым правилам какого-либо значения другой величины. Тогда вторая переменная величина зависит от первой величины. Первую переменную называют **свободной** (независимой), вторую – **зависимой** переменной.

Независимая переменная называется **аргументом**, зависимая переменная – его **функцией**.

**Определение:** Соответствие (правило), при котором каждому элементу $x$ из множества $X$ сопоставляется единственный элемент $y$ из множества $У$ называется функцией и записывается как $y = f(x)$. Элемент $y$ называется образом элемента $x$.

Множество значений, которые может получить аргумент, называется **областью определения функции**. Множество образов всех элементов области определения функции называется **множеством ее значений**.

В общем виде функция изображается, как $y = f(x)$. Здесь $x$ – аргумент, $f(x)$ – функция. Если Х и У – числовые множества, то функция $f$ называется числовой функцией.

**Способы задания функции**

**Аналитический способ** **Табличный способ** **Графический способ**

1. Функция может быть задана **аналитическим способом (формулой)**.
   Например, $y(x) = x^2 + 1$ или $y = x^2 + 1$.
   При $x = 3$ получается $y(3) = 3^2 + 1 = 10$. При $y = 2$ будет $x = 1$ или $x = –1$.
2. Функция может быть задана **табличным** способом. Например:

| $x$ | –3 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 5 | 2,5 | 2 | 5 | 7 |

   На основе таблицы мы можем сказать, что при $x = –3$, $y = 2$. При $x = 1$, $y = 2$. Эта таблица – таблица значений некой функции для целых значений $x$ –3; –1; 0; 1; 2; 3.
3. Функция может быть представлена в виде **графика**. Для наглядного изображения функциональной зависимости используется график.

   Отметьте в системе координат пары координат, данных в вышеприведенной таблице, и последовательно соедините их линией.
   На основе графика, например, можно сказать, что если $x = 1$, то $y = 2$ (рис. 2).

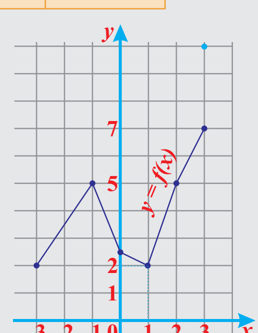


*рис. 2*

## Упражнения

**1.** Прочитайте данные выражения, укажите аргумент (независимую переменную) и функцию (зависимую переменную):

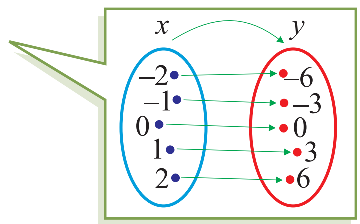
а) $s(t) = 90t$; б) $p(x) = 17{,}8x$; в) $C(R) = 2\pi R$;

г) $y(x) = \frac{3}{5}x + 2$; д) $t(s) = \frac{s}{60}$; е) $f(x) = 2 - 5x^2$.

**2.** Вычислите значение $y$ при следующих значениях переменной $x$: $-2; -1; 0; 1; 2$.

а) $y = 8x$; б) $y = -2x$; $y = 3x$

в) $y = -x - 3$; г) $y = 10x + 8$.




**3.** Функция задана формулой $y(x) = 2x - 1$.

а) Вычислите значение $y$ при значениях $x$: $10$; $-4{,}5$; $15$; $-21$. Соответствие между значениями $x$ и $y$ покажите стрелками.

б) Какое значение примет переменная $x$ при следующих значениях $y$: $-19$; $205$; $-3\frac{1}{2}$?

**4.** Ниже дано соответствие между значениями $x$ и $y$ (рис. 3 *а*, *б*). Представьте это соответствие в виде формулы.

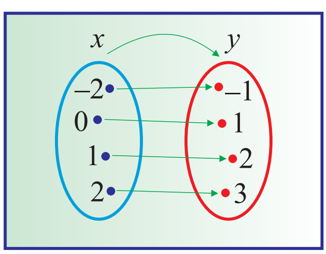



*рис. 3 а*

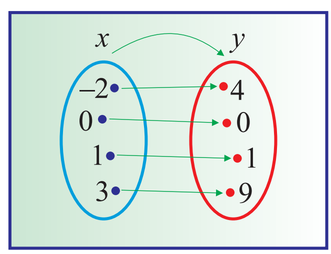



*рис. 3 б*

**5.** Функция задана формулой $f(x) = \frac{1}{3}(2x+1)$.

а) Что означают записи $f(3)$, $f(-12)$, $f(2, 1)$? Какие значения следует записать вместо $x$ в данной формуле $f(x)$, чтобы вычислить их?

б) На основе равенств $f(x) = 0$; $f(x) = 2{,}4$; $f(x) = -0{,}9$ найдите $x$.

**6.** Функция задана формулой $p(x) = 2 - 5x^2$. Среди приведённых ниже равенств найдите верные.

а) $p(-2) = -18$; б) $p\left(-\frac{1}{5}\right) = 1\frac{4}{5}$; в) $p(4) = 78$; г) $p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

**7.** Нижеприведённая таблица показывает зависимость p атмосферного давления от высоты над уровнем моря h.

| **h, км** | **0** | **0,5** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **10** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **p, мм ртутного столба** | 760,0 | 716,0 | 674,0 | 596,1 | 525,7 | 462,2 | 404,8 | 198,1 | 40,9 |

а) Определите атмосферное давление на высоте 1 км, 3 км, 5 км, 10 км.

б) На какой высоте атмосферное давление будет равно 760,0 мм рт. ст., 674,0 мм рт. ст., 40,9 мм рт. ст.?

**8.** Дополните таблицу и, отмечая в прямоугольной системе координат полученные пары координат, постройте график, последовательно соединив полученные точки. Какую фигуру вы получили? Что можно сказать о зависимости между координатами точек?

| $x$ | | | | 4 | 0 | –2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{2}x+3$ | 5 | 7 | –3 | | | |

**9.** На рисунке 4 дан график изменения продолжительности дня в зависимости от времени года. На оси ординат отмечена продолжительность дня на 1 число каждого месяца, а на оси абсцисс – порядковый номер каждого месяца.

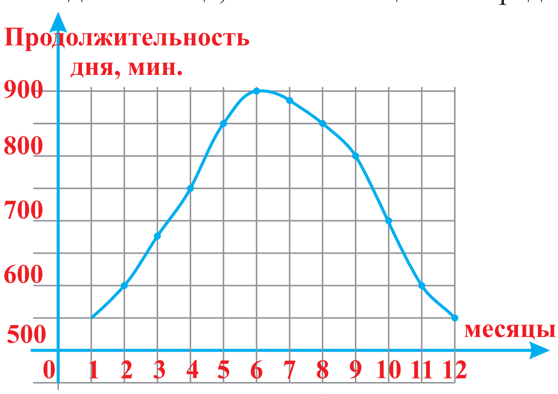


*рис. 4*

а) 1 числа какого месяца продолжительность дня была 10 часов, 700 мин., 850 мин.?

б) В какое время года продолжительность дня была больше 700 мин., меньше 10 часов?

в) Сколько часов составляла продолжительность дня 1 января, марта, мая, июля, октября?

**10.** Дан график функции $y(x)$ (рис. 5). Определите по графику:

а) Значения y(0), y(2), y(4), y(–1).

б) При каком значении x функция получит значения 1, 2, 0?

в) Назовите несколько значений $x$, при которых значения $y$ имели положительный знак.

г) Назовите несколько значений $x$, при которых значения $y$ имели отрицательный знак.

д) Назовите несколько значений $x$, при которых значения $y$ были бы равны нулю.

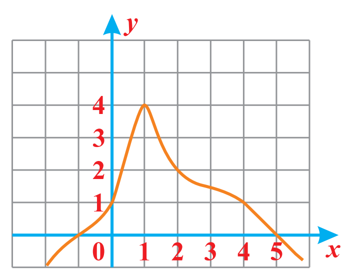


*рис. 5*

е) Какие из точек (2; 0); (4; 1); (0; 1); (0; –1); (–1; 0) относятся к данному графику? Почему?

## 5.2. Линейная функция и её график

**Деятельность** $y = kx + b$

1. Какие значения может принять $x$ в функции, заданной формулой $y = -3x + 2$? Что можно сказать о значениях, которые примет $y$?
2. Определите значения $y$ при заданных значениях $x$ и запишите в таблицу.
3. Постройте прямоугольную систему координат. Отметьте в системе координат точки, соответствующие координатам, данным в таблице. Полученные точки последовательно соедините линией. Какую фигуру вы получили? Достаточно ли знать координаты только двух точек, чтобы построить этот график? Почему? Обоснуйте свой ответ.

**Образец**

**1.** Построим график функции $y = 2x + 1$.
**2.** Определите $y$, задав несколько значений $x$.
Разместите в таблице значения аргумента ($x$) и функции ($y$).

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| –2 | –3 |
| –1 | –1 |
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |

Отметим в прямоугольной системе координат точки, соответствующие заданной паре координат. Полученные точки последовательно соединим. Полученный график – прямая. Эта прямая образует с положительным направлением оси $Ox$ острый угол (рис. 1).

**Примечание.** Поскольку через две точки можно провести только одну прямую, при составлении таблицы достаточно задать два значения $x$.

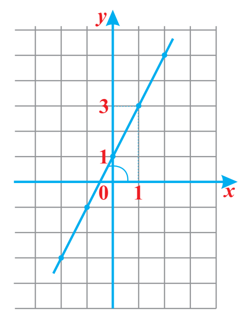


*рис. 1*

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где $k$ и $b$ – заданные числа, называется **линейной функцией**. При $b = 0$, $y = kx$, это – формула прямо пропорциональной зависимости. При $k = 0$, $y = b$, такая функция называется постоянной функцией.

Графиком линейной функции является прямая линия. Здесь $k$ называется **угловым коэффициентом**.

При $k < 0$ *прямая линия с положительным направлением оси OX образует тупой угол, при* $k > 0$ *острый угол.*

График функции $y = kx + b$ *располагается в:*

1) I, II и III четвертях, если $k > 0$, $b > 0$;
2) I, III и IV четвертях, если $k > 0$, $b < 0$;
3) I, II и IV четвертях, если $k < 0$, $b > 0$;
4) II, III и IV четвертях, если $k < 0$, $b < 0$.

График функции $y = kx + b$ проходит через точку $(0; b)$. Прямая $y = b$ проходящая через точку $(0; b)$, является прямой, параллельной оси $OX$; прямая $x=a$, проходящая через точку $(a; 0)$, является прямой, параллельной оси $OY$.

Если вместо $x$ взять любое число, умножить его на заданное число $k$ и сложить полученный результат с заданным числом $b$, получаем определённое число. Следовательно, областью определения линейной функции является всё множество чисел.

Поскольку для произвольного числа $x$ значение выражения $kx + b$ будет произвольным числом, то множеством значений функции $y = kx + b$ будет всё множество чисел.

## Упражнения

**1.** (Устно). Какие из функций, заданных нижеприведёнными формулами, являются линейными функциями? Почему? Определите в каждой линейной функции $k$ и $b$:

а) $y=-x-2$; б) $y=x^2+6$; в) $y=\frac{x}{4}$;

г) $y=10$; д) $y=\frac{5}{x}+7$; е) $y=-\frac{x}{3}+8$.

**2.** Отметив в прямоугольной системе координат точки, соответствующие координатам, данным в таблице, последовательно соедините их линиями. Какой фигурой является полученный график? Какими формулами можно задать функции, соответствующие этим графикам? Определите значение $k$.

| $x$ | –2 | 0 | 2 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

| $x$ | –2 | 0 | 2 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 3 | 5 |

| $x$ | –2 | –2 | –2 | –2 | –2 | –2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | –2 | 0 | 2 | 3 | 4 | 7 |

**3.** а) Какую фигуру образуют точки с абсциссой 6 в прямоугольной системе координат? Какой формулой можно выразить полученную в этом случае прямую?

б) Какую фигуру образуют точки, относящиеся к графику постоянной функции $y=-3$?

в) Напишите несколько постоянных функций и постройте их графики. Определите взаиморасположение этих графиков с осями OX и OY.

**4.** Составьте таблицу со значениями, соответствующими функциям, заданным формулами, и постройте график. Какая фигура является графиком этих функций? Координаты скольких точек достаточно знать, чтобы построить график линейной функции? Почему?

а) $y=2x-1$; б) $y=-2x+1$; в) $y=3x-4$;

г) $y=0{,}5x-2$; д) $y=\frac{1}{4}x-3$; е) $y=\frac{1}{2}x+3$.

**5.** Угур и Инаят построили график функции, заданной формулой $y(x)=2x+3$. В изображенной Угуром прямоугольной системе координат на осях абсцисс и ординат за единичный отрезок был принят отрезок длиной в одну клетку, в изображенной же Инаятом системе координат за единичный отрезок был принят отрезок длиной в две клетки. Чем будут отличаться построенные ими графики? Следуя их примеру, вместе с соседом по парте, постройте графики, определите нижеследующее и обсудите полученные результаты:

а) $y(0)=?$ $y(1)=?$ $y(-3)=?$

б) при каком значении $x$ : $y(x)=1$; $y(x)=4$; $y(x)=0$; $y(x)=-1$?

в) В какой точке функция $y(x)$ пересекает ось OX? А в какой точке она пересекает ось OY?

**6.** Постройте график функции $y = x + 2$. На основании графика определите, расположены или нет на графике точки M(0; 2), N(1; 3), A(–1; 1), B(–4,7; –2,7), $C\left(-2\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Как можно определить, относятся или нет эти точки к графику функции $y = x + 2$ не построив графика?

**7.** Не сделав построения, определите через какие из точек $A\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$, B(1; –2), $C\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, D(2;3) проходит график функции $y = 2x - \frac{1}{3}$.

**8.** Постройте график функции $y = -0{,}5x - 2$ и покажите на нём такие значения $x$, чтобы при этих значениях у принимал положительное или отрицательное значение. На этой прямой укажите несколько точек (если есть): а) с положительной абсциссой и отрицательной ординатой; б) с отрицательной абсциссой и положительной ординатой; в) с отрицательными абсциссой и ординатой; г) с положительными абсциссой и ординатой. Укажите, в каких четвертях системы координат расположен график.

**9.** На основе графика, данного на рисунке 2, составьте таблицу значений переменных $x$ и $y$ и определите формулу функции. Какой угол образуется между графиком и положительным направлением оси OX в каждом случае?

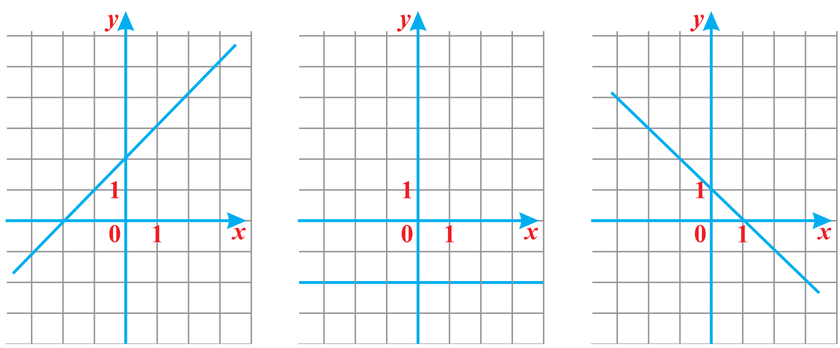



*рис. 2*

**10.** Фарид в заданных промежутках прямоугольной системы координат построил графики постоянных функций и получил некую фигуру. Он определил, что периметр этой фигуры составляет 20 см. Начертите и вы фигуру, которую начертил Фарид, и определите, правильно ли он вычислил периметр.

1) Если переменная $x$ расположена между –3 и 3, а $y = -2$;
2) если переменная $y$ расположена между –2 и 2, а $x = 3$;
3) если переменная $x$ расположена между –3 и 3, а $y = 2$;
4) если переменная $y$ расположена между –2 и 2, а $x = -3$.

**11.** Определите, какую фигуру образуют прямые $y = 0$; $y = 3$; $x = 0$; $x = 2$. Где располагается точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$? Вычислите площадь этой фигуры.

**12.** Исследуя график линейной функции, Джалал определил нижеследующие положения. Выразите своё отношение к его мыслям. Обоснуйте, какой его ответ является верным, а какой – нет.

а) график функции $y = 9x + 1$ пересекает ось ординат в точке (0;1);

б) график функции $y = -5x - 7$ образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс и не пересекает ось ординат;

в) графики функций $y = \frac{3x-4}{2}$ и $y = 1{,}5x - 2$ накладываются друг другу;

г) графики функций $y = \frac{7x+12}{10}$ и $y = \frac{6-4x}{5}$ пересекают ось OY в одной и той же точке.

**13.** Найдите значение углового коэффициента $k$ если известно, что график функции $y = kx + 2$ проходит через точки а) M(–2; 4), б) N(5; 2).

**14.** Определите значение $b$ если известно, что график функции $y = -3x + b$ проходит через точки а) A(–7; –12), б) B(3; –7).

**15.** В одной и той же прямоугольной системе координат постройте графики функций $y = 10 - 2x$ и $y = 2x + 2$. Назовите вид углов, образованных между каждым графиком и положительным направлением оси OX. Определите абсциссу и ординату точки пересечения этих графиков.

**16.** Определите координаты точек пересечения данных на рисунке 3 графиков с осями координат. Найдите площади полученных треугольников.

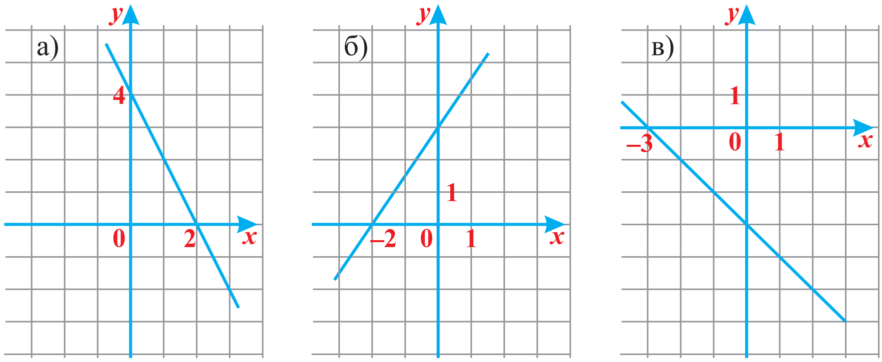



*рис. 3*

**17.** Постройте график функции $y = 13 - x$ и определите координаты точки пересечения этого графика с осями координат. Вычислите площадь полученного прямоугольного треугольника.

# 5.3. График прямо пропорциональной зависимости

## Деятельность $y = kx$

**1.** Какие величины являются прямо пропорциональными? Какой формулой задаётся прямо пропорциональная зависимость?
**2.** Как будет выглядеть формула $y = kx + b$, если в ней принять $b = 0$? Какую зависимость обозначает эта формула?
**3.** Постройте в прямоугольной системе координат график функции $y = 3x$. Чему будет равен $y$ при $x = 0$? Координатами какой точки является пара (0; 0)? Что означает равенство $\frac{y}{x} = 3$?
**4.** Постройте график функции $y = -3x$. На основе равенства $\frac{y}{x} = -3$ можете ли вы обосновать расположение на графике точек A(–2; 6), B(12; –36), C(–100; 300)?
**5.** Назовите, в каких четвертях располагаются графики функций $y = 3x$ и $y = -3x$. Какая существует связь между четвертями, в которых располагаются графики, и угловым коэффициентом $k$? Определите вид угла, образованного каждой из двух прямых с положительным направлением оси OX. Выскажите свои мысли.

Зависимость, данная формулой $y = kx$ $(k \neq 0)$, называется прямо пропорциональной зависимостью. Графиком прямо пропорциональной зависимости является прямая, проходящая через начало системы координат O(0;0). При $k > 0$ график прямо пропорциональной зависимости располагается в I и III четвертях, при $k < 0$ – во II и IV четвертях.

## Упражнения

**1.** (Устно). Какие из функций, заданных нижеприведёнными формулами, являются прямо пропорциональной зависимостью? Почему? Назовите знак $k$ в прямо пропорциональной зависимости.
а) $y = -x$; б) $y = x^3$; в) $y = \frac{x}{12}$; г) $y = 10 + x$; д) $y = \frac{1}{x}$; е) $y = -\frac{x}{7}$.

**2.** Определите угловой коэффициент $k$ в данных формулах: а) $y = -2x$ б) $y = \frac{2}{5}x$; в) $y = 5x$. Вместо $x$ и $y$ запишите такие числа, чтобы их отношение было равно $k$.

**3.** Какая точка, независимо от значения $k$, всегда располагается на графике функции $y = kx$? Координаты скольких точек достаточно знать, чтобы построить график прямо пропорциональной зависимости? По-вашему, какую из двух точек лучше выбрать?

**4.** Постройте графики функций $y = 4x$ и $y = \frac{1}{4}x$ в прямоугольной системе координат. Располагаются ли полученные графики в одной и той же четверти? Почему? В этой же системе координат постройте график функции $y = -4x$. В каких четвертях будет располагаться график?

**5.** Определите k, если график функции $y = kx$ проходит через точку: а) M(5; 12); б) N $\left(-4;\ \frac{1}{2}\right)$. Под каким углом расположены эти прямые к оси абсцисс?

**6.** Определите знак $k$ на основе данных графиков (рис. 1) и обоснуйте свой ответ. Напишите формулы этих функций.

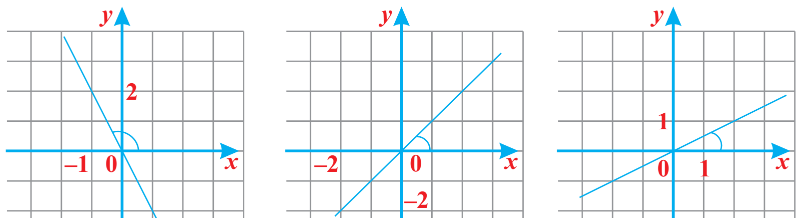



*рис. 1*

**7.** Какую прямую образуют точки с абсциссой, равной «0»? Можете ли вы назвать прямую, которую образуют точки с ординатой, равной «0»? Задайте эти прямые формулой.

**8.** К графику какой прямо пропорциональной зависимости относятся данные точки: A(–1; 7), B(4; –28), C$\left(-\frac{1}{2};\ 3{,}5\right)$, D(5,1; –35,7)? Объясните, как вы это определили.

**9.** Согласно соответствию, данному на рисунке 2, напишите угловой коэффициент графика, формулу прямо пропорциональной зависимости. Определите, в каких четвертях располагается график.

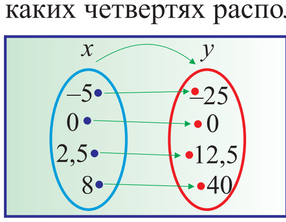
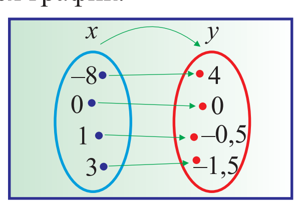



*рис. 2*




**10.** а) В каком случае график прямо пропорциональной зависимости $y = kx$ образует с положительным направлением оси абсцисс: 1) острый угол; 2) тупой угол?

б) График какой прямой по отношению к оси ординат является: а) параллельным; б) перпендикулярным? Приведите примеры таких прямых.

**11.** Определите знак $k$ и $b$ для линейных функций, изображённых на рисунке 3.

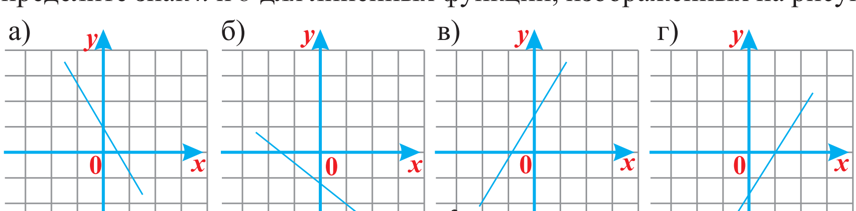



*рис. 3*

# 5.4. Взаимное расположение графиков линейных функций

## Деятельность

1. Вспомните, что вы изучали о взаимном расположении прямых на плоскости. Как называются прямые, не имеющие какой-либо общей точки, имеющие одну общую точку или бесконечное число общих точек.
2. Постройте в одной и той же прямоугольной системе координат графики функций $y = 2x$, $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$. Определите их взаимное расположение и объясните, почему они располагаются именно так. Вспомните признак параллельности прямых.
3. Постройте в одной и той же прямоугольной системе координат графики функций $y = -x + 2$ и $y = 3x + 2$. Определите их взаимное расположение и объясните, почему они располагаются именно так. Назовите угловые коэффициенты $k$.
4. Постройте в одной и той же прямоугольной системе координат графики функций $y = 0{,}5x - 2$, $y = \dfrac{x-4}{2}$. Определите их взаимное расположение и объясните, почему они располагаются именно так.

Возможны 3 положения прямых, заданных формулами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

**1.** При $k_1 \neq k_2$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.

**2.** При $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают.

**3.** При $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ являются параллельными.

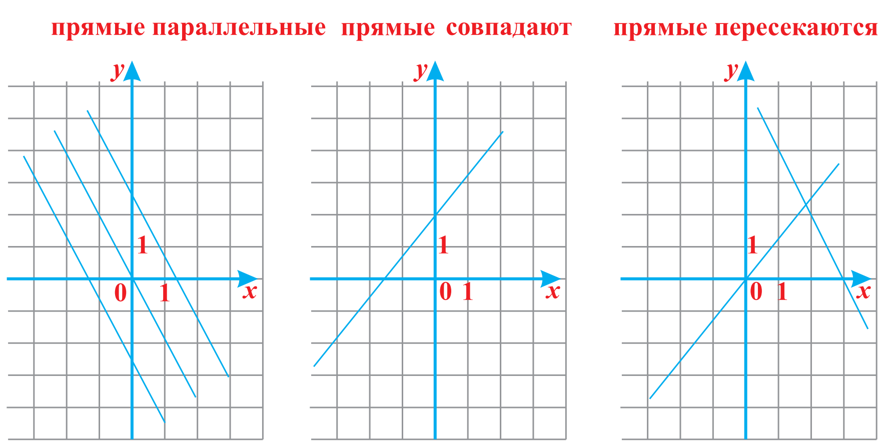



*рис. 1*

## Упражнения

**1.** Определите взаимное расположение графиков функций.

а) $y = 4x$ и $y = 4x + 5$; б) $y = x + 9$ и $y = -3x + 1$;

в) $y = 10x + 1$ и $y = -10x - 1$; г) $y = x - 11$ и $y = \dfrac{2x-22}{2}$.

**2.** Джавид утверждает, что графики данных ниже функций параллельны. Как по-вашему, прав ли Джавид?

а) $y = \dfrac{15}{3}x + 6$ и $y = 5x + 6$; б) $y = \dfrac{10}{25}x - 1$ и $y = \dfrac{12}{30}x + \dfrac{3}{4}$;

в) $y = x + 7$ и $y = 7 + x$; г) $y = \dfrac{7}{9}x + 6$ и $y = \dfrac{9}{7}x + 6$.

**3.** Есть ли ошибка в построении заданных графиков (рис. 1)? Как, по-вашему, должны быть расположены эти графики? Ответ обоснуйте, построив правильный график.

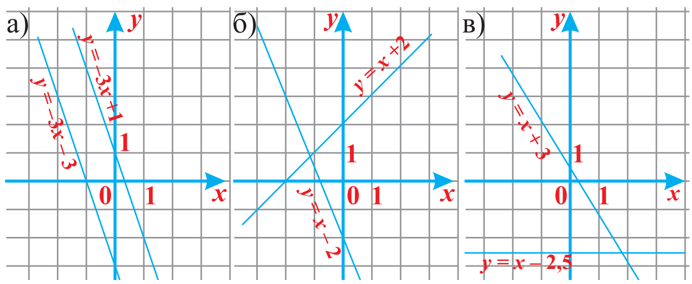



*рис. 2*

**4.** Постройте графики нижеприведённых функций в одной и той же прямоугольной системе координат и определите их взаимное расположение. Сравните угловой коэффициент k для каждого случая.

а) $y = -2x + 7$ и $y = 0{,}5x - 5{,}5$; б) $y = x + 7$ и $y = x - 5$;

в) $y = 1 - 2x$ и $y = x - 3$; г) $y = -x + 5$ и $y = 0{,}2 - x$.

Как располагаются прямые с различными угловыми коэффициентами? Что вы можете сказать о взаимном расположении прямых с одинаковыми угловыми коэффициентами?

**5.** Вместо звёздочки в приведённых равенствах впишите такое число, чтобы графики полученных функций:

1) были параллельными; 2) пересекались; 3) совпадали (если это возможно).

а) $y = *x$ и $y = *x + 5$; б) $y = *x + 19$ и $y = -*x + 9$;

в) $y = *x + 0{,}1$ и $y = -*x + 0{,}1$; г) $y = *x - 1{,}5$ и $y = x - 1{,}5$;

д) $y = \dfrac{5}{*} + 6$ и $y = *x - 6$; е) $y = *x - 7$ и $y = \dfrac{*}{3}x + \dfrac{1}{4}$.

**6.** Постройте графики данных функций. Определите координаты точек пересечения прямых:

а) $y = 5x - 7$ и $y = 5 + 2x$; б) $y = -x - 6$ и $y = 3 + x$;

в) $y = x - 4$ и $y = 1 - 2x$; г) $y = 7x$ и $y = 5 + 3x$.

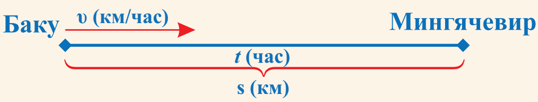
# 5.5. Расстояние, время, скорость

## Деятельность

$s = \upsilon t$

**1.** Поезд движется со скоростью $\upsilon$ км/ч из Баку в Мингячевир. Сколько километров пути проедет поезд за $t$ часов?

**2.** Расстояние от Баку до Мингячевира обозначьте $s$ (км). Какой формулой можно определить длину пути, пройденного поездом? Напишите формулу.




**3.** Вычислите с помощью этой формулы расстояние $s$ при $t$ = 0,5 часа; $t$ = 2 часа; $t$ = 2,5 часа.

**4.** Как меняются значения $s$ и $t$ во время движения? Какая из этих величин, по-вашему, является зависимой, а какая независимой?

Значение переменной s находится в прямо пропорциональной зависимости от значений переменных $t$ и $\upsilon$.
Зависимость переменной $s$ от переменной $t$ (или $\upsilon$) считается **функциональной зависимостью** и обозначается, как $s(t)$ (чтение: эс тэ). $s(t) = \upsilon \cdot t$

## Упражнения

**1.** На рисунке 1 изображён график движения автобуса и автомобиля. Используя рисунок, ответьте на вопросы.

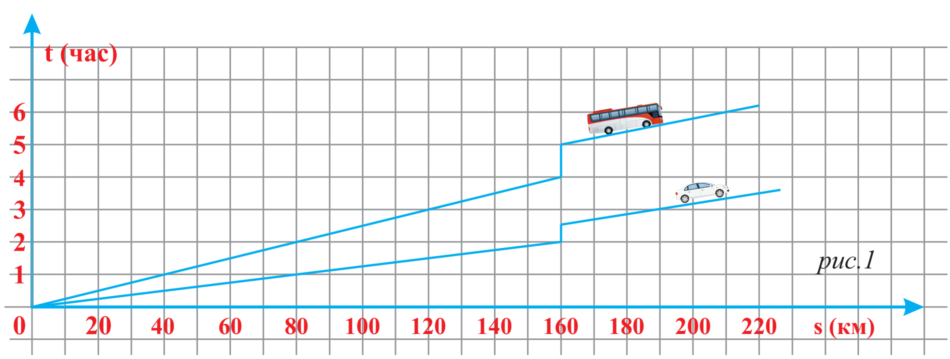



*рис.1*

а) Сколько километров проехал автобус за первые 3 часа? А сколько километров проехал автомобиль?

б) Сколько километров пути проехали обе машины до остановки?

в) Сколько часов были в пути обе машины до остановки?

г) Какова была скорость каждой машины до остановки?
д) Сколько простояла на остановке каждая машина?
е) Какова была скорость автобуса и автомобиля после остановки?

**2.** Пешеход движется равномерно прямолинейно со скоростью 3 км/ч. Выразите через $t$ расстояние $s$, пройденное пешеходом. Постройте график зависимости расстояния от времени. По графику определите путь, пройденный пешеходом за 0,5 часов, 1 час, 1 час 30 минут.

**3.** Автомобили A и B начали движение одновременно навстречу друг к другу. По данному графику движения (рис. 2) определите:
а) Сколько времени прошло от начала движения автомобилей до их встречи?
б) Какое расстояние прошёл каждый автомобиль до встречи?
в) Сколько километров составляло расстояние между автомобилями до начала движения?
г) Какова скорость каждого автомобиля?

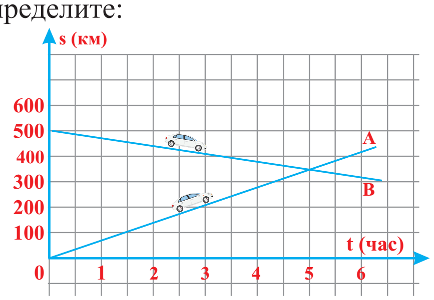


*рис. 2*

**4.** На рисунке 3 дан график движения пешехода по прямой линии от пункта A до пункта B. Используя график, определите нижеследующее:

*рис. 3*

а) Каково расстояние между пунктом A и пунктом B?
б) С какой средней скоростью движется пешеход?
в) На каком расстоянии от пункта B отдыхал пешеход?
г) Сколько времени он отдыхал?
д) Через какое время после остановки пешеход дошёл до пункта B?

В частях AC, CD и BD расстояние $s(t)$ дайте формулой.

**5. Ситуационная задача:** Гора Фудзи
Каждый год с 1 июля до 27-го августа включительно разрешено восхождение на священную для Японии гору Фудзи. За этот период времени гору посещают приблизительно 200 000 человек.
***1 вопрос:*** Сколько человек в среднем посещают гору Фудзи за день?
***2 вопрос:*** Протяжённость дорожки, ведущей к горе Фудзи составляет 9 км. Посетители, пройдя 18 км, должны вернуться к 20.00. Один из пешеходов утверждает, что он по этой дорожке поднимается со скоростью 1,5 км/ч., возвращается в 2 раза быстрее, и у него ещё остаётся время на питание и отдых. Определите самое позднее время отправки в путь этого пешехода, чтобы его возвращение было не позже 20.00.
***3 вопрос:*** При восхождении пешеход берёт с собой шагомер и выясняет что он прошёл 22 500 шагов. Определите среднюю длину шага при подъёме на гору. Ответ запишите в сантиметрах.

# 5.6. Измерение температуры

## Деятельность

*Цельсий (° C), Фаренгейт (° F)*

1. Какими приборами измеряется температура? Расскажите, что вы знаете об использовании этих приборов.
2. Какова температура замерзания и кипения воды?
3. Какая температура тела человека считается нормальной? Если при измерении температуры человека, термометр показывает 39°C, насколько это выше нормальной температуры?
4. Как измеряется температура воздуха?

Температура, в основном, измеряется в градусах Цельсия (°C), иногда Фаренгейта (°F). Связь между температурами по Цельсию и Фаренгейту изображена на рисунке 1. Между двумя этими величинами измерения есть связь: чтобы перевести градусы Цельсия в градусы Фаренгейта используется формула $F=\frac{9}{5}\cdot C+32$, чтобы перевести градусы Фаренгейта в градусы Цельсия – формула $C=\frac{5}{9}\cdot(F-32)$.

*В Англии и США для измерения температуры используется шкала Фаренгейта. Принято* $0°C=32°F$, $100°C=212°F$. *Каждое деление шкалы Фаренгейта берётся за* $1°F=\frac{1}{180}$. *Здесь* 180°F = 212°F – 32°F *(разница между температурой кипения и температурой замерзания воды). Шкала Фаренгейта была предложена в 1724 году немецким физиком Даниелем Габриелем Фаренгейтом.*

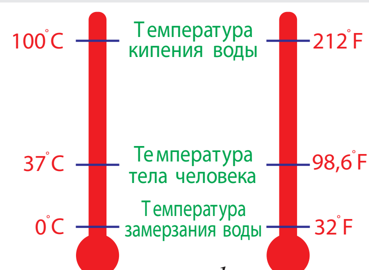



*рис. 1*

## Образец

**1)** Переведите 25°C в градусы Фаренгейта.

*Решение:* Используем формулу $F=\frac{9}{5}\cdot C+32$ для перевода Цельсия в Фаренгейт: берётся C = 25, $F=\frac{9}{5}\cdot 25+32=77$. **Ответ:** 77°F.

**2)** Переведите 68ºF в Цельсий.

*Решение:* Используем формулу $C=\frac{5}{9}\cdot(F-32)$ для перевода Фаренгейта в Цельсий: берётся F = 68, $C=\frac{5}{9}\cdot(68-32)=20$. **Ответ:** 20°C.

## Упражнения

**1.** Используя формулы проверьте верность равенств 0° C = 32°F; 37°C = 98,6°F и 100°C = 212°F.

**2.** С помощью термометра найдите температуру класса или комнаты по Фаренгейту.

**3.** Определите значение по Фаренгейту нижеприведённых градусных мер:

а) 60°С; б) 15°С; в) 50°С; г) 85°С; д) 30°С; е) 55°С;
ж) 63°С; з) 5°С; и) 53°С; й) 47°С; к) 122°С; л) 18°С.

**4.** Определите значение по Цельсию нижеприведённых градусных мер:

а) 41°F; б) 113°F; в) 59°F; г) 149°F; д) 239°F; е) 194°F;
ё) 95°F; ж) 104°F; з) 80°F; и) 34°F; й) 87°F; к) 100°F.

**5.** В нижеприведённой таблице показана температура воздуха в некоторых городах и районах Азербайджана в январе. Дополните таблицу.

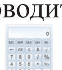
| **Название городов и районов** | **Баку** | **Гянджа** | **Сумгаит** | **Мингячевир** | **Шеки** | **Агдам** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **°С** | 14° | | 20° | | 16° | |
| **°F** | | 64,4° | | 75,2° | | 62,6° |

**6.** Намик любит плавать на спине в открытом бассейне при температуре воды от 20 до 30°С. Если температура воды будет 120°F, будет ли плавать в бассейне Намик? Какая должна быть максимальная и минимальная температура воды по Фаренгейту, чтобы Намик смог плавать в бассейне?

**7.** На основе исследований по глобальному потеплению учёные прогнозируют, что в ближайшие 60–70 лет средняя температура может увеличиться на 4°F и 9°F. Это значит, что в январе, например, вместо средней температуры 65°F температура будет колебаться от 69°F до 74°F. Сколько градусов Цельсия составляет согласно прогнозу средняя температура в январе?

**8.** **Практическая работа.** Учащиеся класса делятся на три группы. Каждая группа клеит на листы рисунки любимых видов спорта, взятые из журналов или интернета. Под рисунком записывают в градусах Цельсия температуру воздуха, соответствующую выбранному виду спорта. Каждая группа передаёт свою работу другой группе и даёт задание перевести градусы Цельсия в градусы Фаренгейта. Затем каждая группа проверяет верность ответа, соответствующего их рисунку.

**9.** С помощью калькулятора перевод Цельсия в Фаренгейт или Фаренгейта в Цельсий проводится следующим образом:

1) 60°С = ?  9 ÷ 5 x 60 + 32 = 140

2) 140°F =?  140 – 32 = 108 x 5 ÷ 9 = 60

Вычислив с помощью калькулятора, дополните равенства:

а) 32°С = ? F; б) 70°С = ? F; в) 99°F = ? С; г) 159°F = ? С.

# 5.7. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

**Деятельность** $\boldsymbol{ax + by = c}$

1. Прибавьте к каждой стороне равенства, заданного формулой $y = -3x + 2$, одночлен $3x$. Какое равенство вы получили? Сколько переменных участвует в этом равенстве?
2. Как вы назовёте уравнение $3x + y = 2$? Если в этом уравнении $x = 0$, то какое значение получит $y$? А если $y = -4$, то чему будет равна переменная $x$?

Уравнение типа $ax + by = c$, в котором $a$, $b$ и $c$ – являются заданными числами а, $x$ и $y$ – переменными называется **линейным уравнением** с двумя переменными. Например, в уравнении $2x - 3y = 5$; $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$.
**Корнем уравнения** с двумя переменными называется такая пара их значений, которая обращает это уравнение в верное равенство. Уравнения, имеющие одинаковое множество решений, называются равносильными уравнениями.
***Свойство 1.*** Если в уравнении к каждой стороне равенства прибавить или вычесть одно и то же число, получится равносильное уравнение.
***Свойство 2.*** Если в уравнении каждую сторону равенства умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, получится равносильное ему уравнение.

**Образец**

**1)** В уравнении $5x - 2y = 8$ переменную $y$ выразите через $x$.
*Решение:* Из каждой стороны равенства вычтем $5x$:
$5x - 2y - 5x = 8 - 5x$.
Каждую сторону равенства $-2y = 8 - 5x$ поделим на $(-2)$: $y = -4 + 2{,}5x$. Это равенство и есть выражение $y$ через $x$.
Согласно свойствам 1 и 2, уравнения $5x - 2y = 8$ и $y = -4 + 2{,}5x$ равносильные.

**2)** В уравнении $5x - 2y = 8$ переменную $x$ выразите через $y$.
*Решение:* к каждой стороне равенства прибавьте $2y$:
$5x - 2y + 2y = 8 + 2y$.
Каждую сторону равенства $5x = 8 + 2y$ разделим на 5:
$x = \frac{8+2y}{5}$ или $x = \frac{8}{5} + \frac{2y}{5}$ – это равенство есть выражение $x$ через $y$.
Согласно свойствам 1 и 2, уравнения $5x - 2y = 8$ и $x = \frac{8}{5} + \frac{2y}{5}$ равносильные.

**3)** Какая пара чисел является корнем уравнения $5x - 2y = 8$?
*Решение:* Если в уравнении $5x - 2y = 8$ принять $x = 1$, то $5 \cdot 1 - 2y = 8$ и $y = -1{,}5$.
Следовательно, пара $(1; -1{,}5)$ – корень уравнения $5x - 2y = 8$.
Поскольку каждому значению $x$ соответствует какое-то значение $y$, то любая пара $(x; y)$, преобразующая уравнение в верное равенство, является корнем уравнения.

## Деятельность

1. Если в уравнении $ax + by = c$ принять $a = 0$, то какой вид оно приобретёт? В полученном уравнении примите $b = 3$ и $c = 6$. Определите $y$ и постройте график.
2. Если в уравнении $ax + by = c$ принять $b = 0$, то какой вид оно приобретёт? В полученном уравнении примите $a = -2$ и $c = 4$. Определите $x$ и постройте график.
3. Если в уравнении $ax + by = c$ принят $a = 0$ и $b = 0$, то какой вид оно приобретёт? В каком случае равенство $0 = c$ будет верным? Например, что означает равенство $0 = 5$? Обоснуйте свой ответ.
4. В уравнении $ax + by = c$ выразите $y$ через $x$. Какой вид примет линейная функция при $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$? Постройте её график.

Прямая, образованная в координатной плоскости множеством точек, с координатами, являющимися корнями уравнения $ax + by = c$, называется **графиком** этого уравнения.

В линейном уравнении с двумя переменными $ax + by = c$:
а) если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, то его графиком является прямая;
б) если $a = b = 0$, $c \neq 0$, то уравнение не имеет корня. В этом случае его множеством решений является пустое множество;
в) если $a = b = c = 0$, то в силу того, что координаты любой точки на координатной плоскости являются корнем уравнения, его график – множество всех точек плоскости.

## Упражнения

**1.** В уравнении $ax + by = c$ переменные $x$ и $y$ замените переменными $m$ и $n$. Какое уравнение вы получите? Является ли полученное в этом случае уравнение линейным уравнением с двумя переменными? Имеет ли значение, если обозначить переменные другими буквами?

**2.** а) Являются ли данные уравнения линейными уравнениями с двумя переменными?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3x - y = 11$ | $xy + x = -8$ | $m - n = 9$ | $2 = 3x + 10y$ |
| $x^2 - 7y = 5$ | $a + 8b = 0$ | $s + 3t = -92$ | $8x^2 - 4y = 5$ |
| $12x + 6y = 19$ | $a^3 - 5y = 10$ | $0,6x - 2,4y = -3$ | $9a - 18 = 7$ |

Объясните причину, почему некоторые из уравнений не являются линейными уравнениями с двумя переменными.
б) В выбранных вами из таблицы линейных уравнениях с двумя переменными укажите коэффициенты $a$, $b$ и $c$.

**3.** В таблице даны значения переменных $x$ и $y$.

| $x$ | –5 | –4 | –3 | –1 | 0 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | 4 | –3 | –5 | –3 | 0 |

Какая из этих пар является корнем уравнения: а) $2x + y = -5$; б) $x + 3y = -5$?

**4.** Какая из пар: (3;–10); (–3; 12); (0,1; 11); (1; 2); (2; 1) является корнем уравнения $10x + y = 12$?

**5.** Составьте какое-нибудь любое линейное уравнение с двумя переменными с корнями:

а) $x = 3;\quad y = 1{,}5;$ б) $x = 0{,}7;\quad y = -5$ .

**6.** Джамиль, выразив $x$ через $y$ в уравнении $4x - 5y = 20$, получил выражение $x = \dfrac{20+5y}{4}$, а Самир получил равенство $x = 1{,}25y + 5$. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ.

**7.** В уравнении $3u + v = 4$ выразите: а) переменную $u$ через $v$; б) переменную $v$ через $u$. В обоих случаях определите значение $v$ при $u = 2$.

**8.** В данных уравнениях выразите переменную $y$ через $x$. Найдите какой-нибудь корень каждого уравнения.

а) $4x + 2y = 7;$ б) $-5x + y = -12;$ в) $x + 15y = -30;$ г) $3y - 14x = 21.$

**9.** Определите корень уравнения $x + 2y = 18$, состоящий из двух одинаковых чисел.

**10.** Если одним из корней уравнения $ax + 2y = 8$ будет пара (2; 1), то определите коэффициент $a$. Найдите значение $y$ в этом же уравнении при $x = 5$.

**11.** Относятся ли к графику уравнения $3x + 4y = 12$ нижеприведённые точки?

а) A(1; 3); б) B(0,4; 0); в) C(0; 3); г) D(3; 1); д) E(–6; 7,5).

**12.** Могут ли координаты одной точки быть корнем нескольких уравнений? В этом случае как будут располагаться графики этих уравнений?

а) Проходят ли графики 3-х уравнений $3x - y = -5;$ $-x + 10y = 21;$ $11x + 21y = 31$ через точку A(–1; 2)? Почему?

б) Существует ли точка, относящаяся к графикам всех трёх уравнений: $0{,}2x + 3y = 15{,}2;$ $-x + 4y = 19;$ $5x - 3y = -10$? Если да, то определите эту точку.

**13.** Постройте графики нижеприведённых уравнений:

а) $2x - y = 6;$ б) $x + 6y = 0;$ в) $1{,}6x = -6{,}4;$
г) $1{,}5x + 2y = 3;$ д) $0{,}5x - y = 1;$ е) $5{,}4y = 10{,}8.$

**14.** Постройте графики нижеприведённых уравнений:

а) $x - y - 2 = 0;$ б) $2(x - y) + 3y = 4;$
в) $2x = y + 4;$ г) $(x + y) - (x - y) = 4.$

**15.** Если известно, что график уравнения $24x - 15y = 42$ проходит через точку $A(3; 2a)$, то найдите $y$.

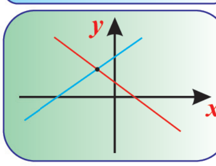
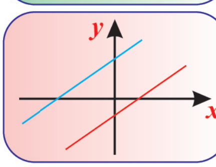
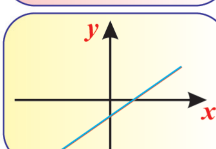
## 5.8. Система линейных уравнений с двумя переменными и её решение графическим способом

**Деятельность** — *Графический способ*

1. Напишите несколько пар чисел, являющихся корнем уравнения $x + y = 3$. Являются ли корнем уравнения пары чисел (0; 3); (3; 0); (1; 2); (2; 1)?
2. Напишите несколько пар чисел, являющихся корнем уравнения $x - y = 1$. Какая из пар чисел (0; 3); (3; 0); (1; 2); (2; 1) также является корнем уравнения $x - y = 1$? Выскажите своё мнение.
3. Постройте график уравнений $x + y = 3$ и $x - y = 1$. Определите координаты точки их пересечения. Какая пара чисел оказалась координатами этой точки? Выскажите своё мнение об этой паре чисел.

Уравнения, выраженные в виде $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, называются **системой линейных уравнений с двумя переменными**. Здесь $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – коэффициенты, а $x$ и $y$ – переменные.

Значение пары чисел ($x$; $y$), обращающих оба уравнения системы в верное числовое равенство, называется корнем этой системы. Под решением системы понимается нахождение её корня или доказательство его отсутствия. Поскольку на плоскости две прямые могут находиться в трёх положениях по отношению друг к другу, графики уравнений системы линейных уравнений с двумя переменными также могут находиться в трёх положениях по отношению друг к другу: прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

| Соотношение коэффициентов | Объяснение | Число корней | Взаиморасположение графиков |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ | Графики уравнений системы пересекаются в одной точке. | У системы уравнений есть только один корень. |  |
| $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ | Графики уравнений системы параллельны. | У системы уравнений нет корня. |  |
| $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ | Графики уравнений системы **совпадают.** | У системы уравнений есть бесконечное множество корней. |  |

## Образец

**1)** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ графическим способом.

*Решение:* В каждом уравнении системы выразим $y$ через $x$.

Построим графики полученных уравнений $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 5 - x \end{cases}$.

1) $y = 2x - 4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | –4 |
| 2 | 0 |

2) $y = 5 - x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 5 | 0 |

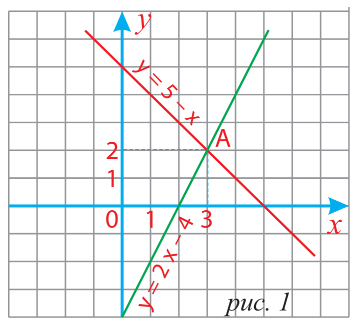



*рис. 1*

Как видно из рисунка 1, графики уравнений $y = 2x - 4$ и $y = 5 - x$ пересекаются в точке A(3; 2). Следовательно, корнем системы уравнений является пара (3; 2).

**Ответ:** (3; 2).

Представленная в образце система линейных уравнений с двумя переменными была решена **графическим способом**. Но не всегда решение системы уравнений графическим способом бывает удобным. Потому что иногда сложно точно определить координаты точки пересечения графиков.

## Упражнения

**1.** Преобразует ли точка A (1; 3) оба уравнения системы уравнений $\begin{cases} 3x - 4y = -9 \\ 2y + 5x = 17 \end{cases}$ в верное равенство? Какие координаты будут у точки, относящейся к графикам обоих этих уравнений? Обоснуйте свой ответ.

**2.** Являются ли пары чисел а) $x = 3$; $y = 1$; б) $x = 2$, $y = 2$ решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$? Объясните, как вы это проверили.

**3.** Как Хадиджа может проверить, корнем какой системы уравнений:

а) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 3x + 4y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 13x - y = 0, \\ 5x - y = -4 \end{cases}$

являются пары чисел (–3; 4), (–2; –6), (–4; 3)?

**4.** Являются ли пары чисел $u = 3$, $v = -1$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3u - v = 8, \\ 7u - 2u = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} v + 2u = 5, \\ u + 2v = 1 \end{cases}$ ?

**5.** Составьте систему линейных уравнений с двумя переменными, решением которой являются пары чисел а) $x = 5, y = -1$; б) $m = 0, n = 10$.

**6.** Определите корень системы уравнений по графикам, приведённым на рисунке 2.

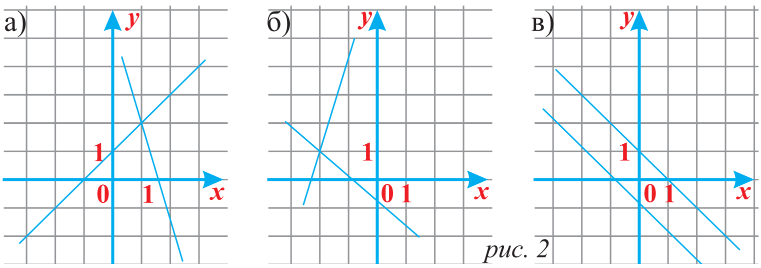



*рис. 2*

**7.** Подберите пары чисел, удовлетворяющие уравнению $y = 2x - 3$ и $x + y = 3$. Проверьте верность вашего ответа, подставив числа вместо переменных х и у. Постройте графики этих уравнений и определите координаты точки их пересечения. Совпала ли полученная вами пара чисел с выбранными вами числами?

**8.** Представленные системы уравнений решите графическим способом:

а) $\begin{cases} y = 4x, \\ y - x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -3x, \\ y - x = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 2x, \\ x - y = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = 3x, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$

**9.** Отметьте и соедините точки пересечения с осями OX и OY графиков каждого уравнения, входящего в систему. По графику найдите координаты точек пересечения полученных прямых.

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 3y = 6, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

**10.** Прежде, чем построить график системы уравнений, определите количество её корней. Построив график, убедитесь в верности вашего ответа.

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 3y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 0, \\ -3x + 4y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3x + 10y = -12. \end{cases}$

**11.** Определите без построений количество корней системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4y - x = 12, \\ 3y + x = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1,5x = 1, \\ -3x + 2y = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x = 11 - 2y, \\ 6x = 22 - 4y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 3y - x = 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y = -0,5x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x + 2y = 8, \\ x + 4y = 10. \end{cases}$

**12.** Составьте такое линейное уравнение с двумя переменными, чтобы одним из его корней были координаты точки пересечения графика уравнения $4x + y = 7$ с осью O$x$.

**13.** Составьте такое линейное уравнение с двумя переменными, чтобы одним из его корней были координаты точки пересечения графика уравнения $5x - 7y = 14$ с осью O$y$.

**14.** Составьте такое линейное уравнение с двумя переменными, чтобы это уравнение с уравнением $-x - y = 4$ образовало систему:
а) с одним корнем; б) с бесконечным множеством корней; в) не имеющую корней.

**15.** Составьте такие линейные уравнения с двумя переменными, чтобы их графики:
а) были параллельными; б) пересекались;
в) совпадали.

**16.** При каком значении $a$ у системы уравнений нет корня?

а) $\begin{cases} ax - y = 2, \\ 3x - 2y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x + 8y = 12, \\ 6x - ay = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + ay = -6, \\ 9x - 18y = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9y - 3x = 0, \\ ax - 8y = -10. \end{cases}$

**17.** При каком значении $k$ у системы уравнений бесконечное множество корней?

а) $\begin{cases} 5x + 3y = 2, \\ 10x - ky = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x + \dfrac{1}{7}y = 3, \\ kx + \dfrac{1}{28}y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12x + ky = 15, \\ 4x + 8y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9y + kx = 2, \\ 0,5x + 7,2y = 1,6. \end{cases}$

**18.** При каком значении $b$ у системы уравнений только один корень?

а) $\begin{cases} bx + 8y = 12, \\ 18x - 3y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{7}{15}x + \dfrac{4}{5}y = 12, \\ bx + \dfrac{3}{8}y = 1,2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + ay = -6, \\ 9x - 18y = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 24y + 8x = -3, \\ 3x + 2by = 6. \end{cases}$

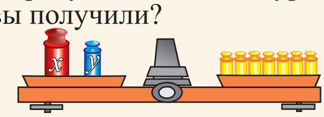
**19.** При каких значениях $a$ и $b$ прямые $ax + y = b$ и $3x - 7y = 4$:
а) параллельны; б) совпадают; в) пересекаются?

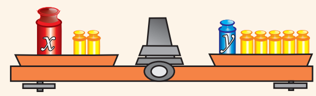
**20.** При каком значении $m$ система уравнений: $\begin{cases} 7x + my = 5, \\ 28mx + y = 10 \end{cases}$
а) не имеет корня; б) имеет бесконечное множество корней;
в) имеет только один корень?

## 5.9. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

### Деятельность

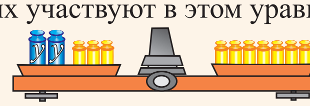
**1.** Примите за единицу массы  = $x$,  = $y$,  = 1 и на основе весов, данных на рисунке, напишите уравнения с двумя переменными. Какие уравнения вы получили?





**2.** Возьмите гири  с обеих чаш вторых весов. Какое уравнение вы получите в этом случае?

**3.** В первых весах замените гирю  на  и  гири. Какое уравнение вы получите? Сколько переменных участвуют в этом уравнении?



**4.** Возьмите с обеих чаш последних весов гири . Запишите полученное уравнение. Определите здесь значение переменной $y$.

**5.** Полученное значение переменной $y$ запишите в первом или втором уравнениях вместо $y$. Определите $x$ из полученного уравнения. Ответ запишите в виде пары $(x; y)$.

**6.** Объясните, как получили результат. Как можно назвать этот способ?

При решении системы линейных уравнений с двумя переменными часто используют **способ подстановки**. Способ подстановки осуществляется в следующей последовательности:

**1.** В одном из уравнений одна из переменных выражается через другую.
**2.** Выражение заменяемой переменной подставляется во второе уравнение.
**3.** Решая полученное линейное уравнение с одной переменной, находим значение переменной.
**4.** Полученное значение переменной подставляем в первом уравнении на (в уравнении, где одна переменная выражена через другую переменную), и находится значение второй переменной.
**5.** Ответ записывается в виде пары.

### Образец

**1)** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ способом подстановки.

*Решение:* В первом уравнении выразим переменную $y$ через $x$: $y = 6 - 3x$. Это выражение запишем вместо $y$ во втором уравнении: $2x + 3(6 - 3x) = 11$.
Решая уравнение, найдем $x$: $2x + 18 - 9x = 11$, т.е. $x = 1$.
Подставив полученное значение переменной $x$ в выражение $y = 6 - 3x$, находим $y$: $y = 6 - 3 \cdot 1 = 3$. Таким образом, $x = 1$ и $y = 3$. **Ответ:** (1; 3).
**Проверка:** Верность равенств можно проверить, подставив пару (1; 3) в оба уравнения: $3 \cdot 1 + 3 = 6$ и $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$.

## Образец

**2)** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+4y=3, \\ 2x-3y=19 \end{cases}$ способом подстановки.

*Решение:* В первом уравнении переменную $x$ выразим через $y$. Между полученными системами уравнений ставится знак импликации $\Leftrightarrow$ (каждая полученная система уравнений равносильна предыдущей).

$$\begin{cases} 3x+4y=3, \\ 2x-3y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3-4y, \\ 2x-3y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-4y}{3}, \\ 2\cdot\dfrac{3-4y}{3}-3y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-4y}{3}, \\ 6-8y-9y=57 \end{cases} \Leftrightarrow$$

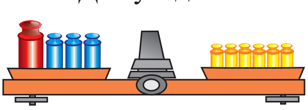
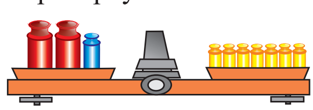
$$\begin{cases} x=\dfrac{3-4\cdot(-3)}{3}, \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=-3. \end{cases}$$

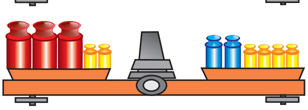
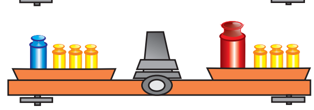
**Ответ:** (5; –3).

## Упражнения

**1.** В приведённых линейных уравнениях с двумя переменными выразите: 1) переменную $x$ через $y$; 2) переменную $y$ через $x$.
а) $5x-y=12$; б) $x+7y=-9$; в) $8x-15y=10$; г) $5y-3x=3$.
Объясните, какую переменную удобнее заменить в каждом уравнении. Обоснуйте свой ответ.

**2.** На основе рисунка запишите линейные уравнения с двумя переменными. Записав их в виде системы, решите графическим способом и способом подстановки. Для убедительности сделайте проверку.

а)  

б)  

Решите системы уравнений способом подстановки (№ 3-8):

**3.** а) $\begin{cases} x=2+y, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+y=4, \\ x=3+2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=11-2x, \\ 5x-4y=8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-2y=11, \\ y=2x-5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y=2-4x, \\ 8x=5-3y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-5y=8, \\ x=-y. \end{cases}$

**4.** а) $\begin{cases} a+5b=7, \\ 3a-2b=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u-3v=17, \\ u-2v=-13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} p+12q=11, \\ 5p-3q=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y-2x=4, \\ 7x-y=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2m=n+0,5, \\ 3m-5n=12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 25-x=-4y, \\ 3x-2y=30. \end{cases}$

**5.** а) $\begin{cases} 3(x-y)+5x=2(3x-2), \\ 4x-2(x+y)=4-3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10+5(x-5y)=6(x-4y), \\ 2x+3(y+5)=-5-2(y-2x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2-5(0,2y-2x)=3(3x+2)+2y, \\ 4(x-2y)-(2x+y)=2-2(2x+y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(y-2x)-(5y+2)=5(1-x), \\ 7-6(x+y)=2(3-2x)+y. \end{cases}$

**6.** а) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=5, \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=0,5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{8}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2}+\dfrac{y}{5}=-4, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{5y}{4}=-3, \\ \dfrac{5x}{6}+\dfrac{7y}{8}=6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{2m}{5}+\dfrac{n}{3}=1, \\ \dfrac{m}{10}-\dfrac{7n}{6}=4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{6x}{5}+\dfrac{y}{15}=2,3, \\ \dfrac{x}{10}-\dfrac{2y}{3}=1,2. \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\upsilon}{4}-\dfrac{u}{5}=6, \\ \dfrac{u}{15}+\dfrac{\upsilon}{12}=0. \end{cases}$ Решая системы уравнений, первоначально следует избавиться от дроби. Для этого следует обе стороны первого уравнения умножить на 20, а стороны второго уравнения – на 60 (почему?):

$\begin{cases} 5\upsilon-4u=120, \\ 4u+5\upsilon=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\upsilon-4u=120, \\ u=-\dfrac{5\upsilon}{4}. \end{cases}$

Затем, применяя способ подстановки, решение системы уравнений доводится до конца. **Ответ:** (–15; 12)

**7.** а) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8, \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{9}-\dfrac{x-y}{3}=2, \\ \dfrac{2x-y}{6}-\dfrac{3x+2y}{3}=-20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{7m-2n}{2}+2m=6, \\ \dfrac{5n-8m}{3}-n=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(2a-b)-1=b-2, \\ \dfrac{1}{4}(3a-7)=\dfrac{1}{5}(2b-3)+1. \end{cases}$

**8.** а) $\begin{cases} 2x+y-8=0, \\ 3x+4y-7=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y-2=0, \\ 5y-x-6=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{7y-x}{3}=-2, \\ \dfrac{x+14y}{3}=4,5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{7x-y}{2}=-3, \\ \dfrac{-8x+5y}{2}=3,5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{y-3x}{2}=1-\dfrac{7x+3y}{5}, \\ \dfrac{x+5y}{3}=1+\dfrac{x+3y}{4}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{2a-5b}{7}-1=\dfrac{2a+2b}{3}, \\ \dfrac{a-3b}{4}+2=\dfrac{7a-8b}{5}. \end{cases}$

**9.** Пара решения системы уравнений $\begin{cases} (2-m)x+4my-6=0, \\ 3mx+(4m-1)y+2=0 \end{cases}$ располагается на оси абсцисс. Определите $m$ и корень системы уравнений.

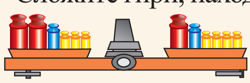
# 5.10. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения

## Деятельность

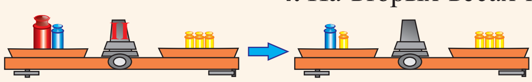
**1.** Примите  $= x$,  $= y$,  $= 1$ и на основе положения весов, данных на рисунке, запишите линейные уравнения с двумя переменными. Какие уравнения вы получили?

**2.** На вторых весах поменяйте местами правую и левую чаши. Какое уравнение вы получите в этом случае?

**3.** Сложите гири, находящиеся на чашах весов I и III с одиноковой стороны. С обоих чаш весов снимите одинаковые гири. Чему равно значение $x$?



**4.** На вторых весах положите вместо  гири, соответствующие $x$. Какому числу стала равна переменная $y$? Запишите ответ $(x; y)$.



При решении системы линейных уравнений с двумя переменными используют также **способ сложения**. **Способ сложения** проводится в следующей последовательности:

1. Если в системе уравнений коэффициенты любой одинаковой переменной являются противоположными числами, то уравнения складываются сторона к стороне, и одна переменная уничтожается.
2. Если в уравнениях нет одинаковых переменных, коэффициенты которых являются противоположными числами, то уравнения умножаются на число, отличное от нуля таким образом, чтобы коэффициенты одной из переменных стали противоположными числами. Уравнения новой полученной системы уравнений складываются сторона к стороне.
3. Решая полученное линейное уравнение с одной переменной, находим значение переменной.
4. Найденное значение переменной подставляется вместо этой же переменной в одно из уравнений системы уравнений и находится значение второй переменной.
5. Ответ записывается в виде пары.

## Образец

**1)** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=6, \\ 2x-y=11 \end{cases}$ способом сложения.

*Решение:* В первом уравнении коэффициент $y$ равен 2, во втором уравнении же – 1. Следовательно, если каждую сторону второго уравнения умножить на 2, то в полученном уравнении коэффициент $y$ будет равен –2.

$$\begin{cases} 3x+2y=6, \\ 2x-y=11 \end{cases} \text{(Умножим каждую сторону на 2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=6, \\ 4x-2y=22 \end{cases} \text{(Складывается сторона к стороне)} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=28, \\ 4x-2y=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4, \\ 4\cdot 4-2y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-3 \end{cases}$$

**Ответ:** (4; –3).

## Образец

**2)** Решите систему уравнений $\begin{cases}4a+3b=17,\\5a-2b=4\end{cases}$ способом сложения.

*Решение:* Каждую сторону первого уравнения умножим на 2, каждую сторону второго уравнения на 3 (или первое уравнение можно умножить на 5, второе уравнение на –4).

$\begin{cases}4a+3b=17, & \text{(Умножим каждую сторону на 2)}\\5a-2b=4 & \text{(Умножим каждую сторону на 3)}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a+6b=34,\\15a-6b=12\end{cases}$ (Складывается сторона к стороне)

$\begin{cases}23a=46,\\5a-2b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2,\\5\cdot 2-2b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2,\\b=3\end{cases}$

**Ответ:** $(a;\ b) = (2;\ 3)$.

## Упражнения

**1.** Умножая каждую сторону данных линейных уравнений с двумя переменными на: 1) 3; 2) –5; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0,7, напишите равносильное ему уравнение.

а) $3x - 4y = 18$; б) $8x + 0{,}4y = -1$; в) $-11x - 1{,}9y = 0$; г) $5y+\frac{7}{15}x=-7$.

Объясните, почему эти уравнения равносильны.

**2.** Данные системы линейных уравнений с двумя переменными решите графическим способом и способом сложения. Получили ли вы в результате одинаковые пары чисел? Почему?

а) $\begin{cases}x+y=11,\\2x-y=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x-2y=1,\\3x+2y=7;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y=6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x+4y=8,\\x+2y=4.\end{cases}$

**3.** Решите системы уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases}2x+y=11,\\2x-y=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x-2y=6,\\7x+2y=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}4x+7y=40,\\-4x+9y=24;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+3y=17,\\2y-x=13;\end{cases}$ д) $\begin{cases}4x+3y=-15,\\5x+3y=-3;\end{cases}$ е) $\begin{cases}2x-5y=1,\\4x-5y=7;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}x+5y=3,\\x+4y=2;\end{cases}$ з) $\begin{cases}2y-3x=6,\\y-3x=9;\end{cases}$ и) $\begin{cases}4x+3y=-4,\\6x+5y=-7;\end{cases}$

й) $\begin{cases}4x-5y=-22,\\3x+2y=18;\end{cases}$ к) $\begin{cases}7x=9y,\\5x+3y=66;\end{cases}$ л) $\begin{cases}5x+6y=0,\\3x+4y=4.\end{cases}$

**4.** Каждое уравнение системы представьте в виде $ax + by = c$ и решите способом сложения:

а) $\begin{cases}x+5y-7=0,\\x-3y=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-3y-4=0,\\5x+3y+1=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}36x+33y+3=0,\\12x-13y+25=0.\end{cases}$

**5.** График уравнения $y = kx + b$, проходит через нижеследующие точки:
а) A(5; 5) и B(–2; –2); б) M(8; –1) и B(–4; 17);
в) K(4; 1) и B(3; –5); г) C(–19; 31) и B(1; –9).
Напишите уравнения этих прямых.

**6.** График уравнения $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках (–2; 0) и (0; 6). Ученик утверждает, что уравнение прямой выглядит, как $y = 3x - 6$ . Прав ли он, по-вашему?

**7.** График линейной функции пересекает ось OX в точке с абсциссой 6, ось OY – в точке с ординатой – 2. Напишите уравнение этой прямой.

**8.** Напишите уравнение каждой прямой на основе графиков, данных на рис. 1.

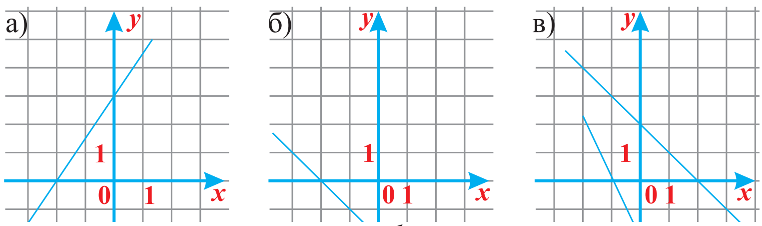



*рис. 1*

**9.** Упростите систему уравнений и решите способом сложения:

а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + \frac{x-y}{4} = 11, \\ 3y - \frac{x+y}{3} = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x - \frac{x-y}{5} = 11, \\ 2y - \frac{x+y}{3} = 11; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}y = 4, \\ 6x + 5y = 150; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{1}{3}\upsilon - \frac{1}{8}u = 3, \\ 7u + 9\upsilon = -2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, \\ 2x + 3y = -12; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 4a - 5b - 10 = 0, \\ \frac{a}{5} - \frac{b}{3} + \frac{1}{3} = 0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \frac{5x}{6} - y = -\frac{5}{6}, \\ \frac{2x}{3} + 3y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

**10.** Упростите уравнения, найдя произведение двучленов, и найдите корень системы способом сложения:

а) $\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1), \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+4)(6-y) = (x+2)(9-y), \\ (2x-1)(12-5y) = 2(5x-1)(2-y). \end{cases}$

# 5.11. Решение задач построением системы линейных уравнений с двумя переменными

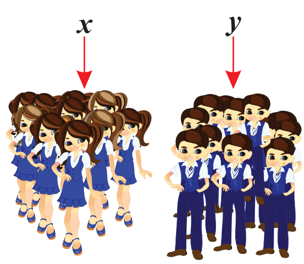
Вы уже знаете, что задачи повседневной жизни можно решить, построив математические выражения, уравнения. Решение задач, носящих практический характер, можно осуществить построением линейных уравнений с двумя переменными. Для построения системы уравнений, соответствующей содержанию задачи, следует придерживаться следующей последовательности:

1. Определив неизвестные в условии задачи, обозначить их буквами. Постройте уравнения, соответствующие условию.
2. Полученная система уравнений решается любым способом.
3. Проверяется, отвечает ли требованиям задачи полученный результат.

## Образец

**1)** В понедельник на тренировку из учащихся 7 класса не пришла 1 девочка и 5 мальчиков и количество девочек на тренировке превышало количество мальчиков в 2 раза. В среду на тренировке не участвовали 1 мальчик и 9 девочек. В этот раз количество мальчиков превышало количество девочек в 1,5 раза. В пятницу же все пришли на тренировку. Сколько детей 7 класса было на тренировке в пятницу?

*Решение:* Количество девочек 7 класса обозначим $x$, мальчиков $y$. Согласно условию, в понедельник число девочек было $(x – 1)$, мальчиков $(y – 5)$ и поскольку девочек было в 2 раза больше мальчиков, то можно записать: $x – 1 = 2 (y – 5)$. В четверг число девочек было $(x – 9)$, мальчиков $(y – 1)$ и мальчиков было в 1,5 раза больше девочек, поэтому будет $y – 1 = 1,5(x – 9)$.




**Система уравнения:**

$$\begin{cases} x-1=2(y-5), \\ y-1=1,5(x-9) \end{cases}$$

Упростим каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} x-1=2(y-5), \\ y-1=1,5(x-9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-9, \\ y-1,5x=-12,5 \end{cases} \text{(Умножим каждую сторону на 2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-9, \\ 2y-3x=-25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x=-34, \\ x-2y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17, \\ 17-2y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17, \\ y=13 \end{cases}$$

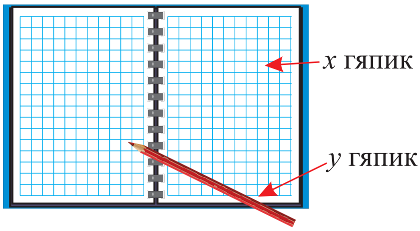
Таким образом решение системы: $x = 17$, $y = 13$, в пятницу на тренировке участвовало 17 девочек и 13 мальчиков. Следовательно, всего было $17 + 13 = 30$ учащихся.

**Ответ:** 30 учащихся.

## Образец

**2)** Три тетради и две ручки стоят 80 гяпиков, три ручки и две тетради – 70 гяпиков. Сколько будут стоить пять ручек и 6 тетрадей?

*Решение:* Цена одной тетради и одной ручки неизвестна по условию. Их соответственно обозначим через $x$ и $y$:




Поскольку согласно условию три тетради и две ручки стоят 80 гяпиков, первое уравнение системы будет $3x + 2y = 80$. С другой стороны, три ручки и две тетради стоят 70 гяпиков, следовательно, второе уравнение будет в виде $2x + 3y = 70$.

$$\begin{cases} 3x+2y=80 & \text{(Умножим каждую сторону на 3)} \\ 2x+3y=70 & \text{(Умножим каждую сторону на -2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+6y=240, \\ -4x-6y=-140 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Сложим соответственные стороны этих уравнений:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x=100, \\ 3x+2y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20, \\ 3\cdot 20+2y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20, \\ y=10. \end{cases}$$

Решение системы: $x = 20$ и $y = 10$. Следовательно, одна тетрадь стоит 20 гяпиков, одна ручка 10 гяпиков. Тогда пять ручек и 6 тетрадей: $5 \cdot 10 + 6 \cdot 20 = 170$ (гяпиков) = 1 манат 70 гяпиков. **Ответ:** 1 манат 70 гяпиков.

## Упражнения

**1.** а) Сумма двух чисел равна 45, а разность 9. Из двух чисел одно равно половине суммы чисел 45 и 9, а второе – половине разности чисел 45 и 9. По-вашему, это возможно? Постройте согласно условию задачи систему уравнений и, решив его, обоснуйте свой ответ.

б) Найдите произведение чисел, сумма которых равна 118, а разность – 83,6. Полученные числа округлите до целого числа.

в) Найдите такие два числа, у которых разность была бы равна половине их суммы. В этом случае определите, во сколько раз большее число больше меньшего числа. Какую часть большего числа составляет меньшее число? Обоснуйте свой ответ несколькими примерами.

**2.** а) Если из 14 м ткани можно сшить 4 мужских и 2 детских пальто, а из 15 м той же ткани 2 мужских и 6 детских пальто, то сколько метров ткани необходимо для одного мужского и одного детского пальто?

б) В 5 больших и 11 маленьких коробках лежит 156 ручек. В большие коробки помещается на 12 ручек больше, чем в маленькие коробки. Сколько ручек в каждой коробке?

**3.** Два года назад брат был старше сестры в 2 раза, а восемь лет назад – в 5 раз. Сколько лет брату и сестре сейчас?

4. **Задача-сказка:** Верблюд и конь были навьючены мешками одинаковой массы в разном количестве. Конь пожаловался на тяжесть груза. А верблюд сказал: «Почему ты жалуешься? Если навьючить на меня один из твоих мешков, то мой груз будет тяжелее твоего в 2 раза. Если я тебе отдам один из своих мешков, тогда наш груз будет одинаков». Определите, сколько мешков несло каждое из животных.

5. Если Ахмед возьмёт у Эльчина 100 манатов, то у Ахмеда денег будет в два раза больше, чем у Эльчина. Если Ахмед отдаст Эльчину 10 манатов, то у Эльчина денег будет больше в 6 раз, чем у Ахмеда. Сколько денег у каждого мальчика?

6. Каждый день 8 лошадям и 15 коровам даётся 162 кг корма. Известно, что корм, который даётся 5 лошадям, больше корма, который даётся 7 коровам, на 3 кг. Определите, сколько килограмм корма съедает каждая лошадь и каждая корова за день.

7. В двух баках 140 *л* воды. После использования из первого бака 26 *л*, а из второго бака – 60 *л* воды, в первом баке осталось воды в 2 раза больше, чем во втором. Сколько литров воды в каждом баке было первоначально?

8. Составьте задачи на основе приведённых систем уравнений и решите их разными способами.

а) $\begin{cases} 3x+2y=66, \\ 2x+2y=46; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=55, \\ x+\dfrac{1}{2}y=44. \end{cases}$

9. На левую чашу весов, находящихся в равновесии, положено 9 одинаковых слитков золота, а на правую чашу – 11 одинаковых слитков серебра. Если поменять местами один слиток золота с одним слитком серебра, то левая чаша станет легче на 13 г. Сколько граммов весит один слиток золота и один слиток серебра?

10. Первый рабочий работал 15 дней, второй – 14 дней и обоим за работу заплатили всего 234 маната. Известно, что сумма денег, полученных за 4 дня работы первого рабочего больше суммы денег, полученных за 3 дня работы второго рабочего на 22 маната. Определите сумму денег, полученных каждым рабочим за 1 день.

11. В одном бидоне на 5 *л* молока больше, чем в другом. Если перелить из первого бидона во второй 8 *л* молока, тогда во втором бидоне молока будет в два раза больше, чем в первом бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне?

12. На сколько следует уменьшить число 100, чтобы при делении полученной разности на 5 и 7 в остатке получилось число 1, и неполное частное, полученное при первом делении, было бы на 4 единицы больше неполного частного, полученного при втором делении?
   а) Что удобнее принять за неизвестное в приведённой задаче?
   б) Решите, составив систему уравнений.
   в) Проверьте верность вашего ответа.

## 5.12. Сумма внутренних углов треугольника

### Деятельность

1. Из вершины B произвольного треугольника ABC проведите прямую DM, параллельную стороне AC (рис. 1).
2. Какими являются углы ABD и BAC? Каким свойством обладают эти углы?
3. Что вы можете сказать о ∠MBC и ∠ACB? Одинакова ли их градусная мера? Почему?
4. Каким углом является ∠DBM? Суммой каких углов можно представить ∠DBM? Сколько градусов составляет сумма ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB?

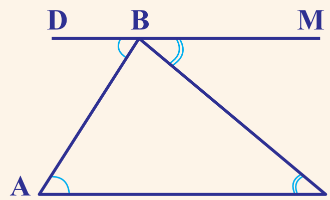


*рис. 1*

### Теорема. Сумма внутренних углов треугольника

***Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.***

**Условие теоремы:** В ΔABC ∠A, ∠B, ∠C – внутренние углы.

**Утверждение теоремы:** ∠A + ∠B + ∠C = 180°.

*Докажите самостоятельно.* Докажите на основе равенства внутренних накрест лежащих углов и величины развернутого угла.

### Упражнения

**1.** Может ли быть у треугольника: а) два острых угла; б) два прямых угла; в) два тупых угла; г) один тупой и один прямой углы? Почему? Обоснуйте свой ответ.

**2.** а) Назовите вид углов у прямоугольного треугольника. Что вы можете сказать о сумме двух углов, не являющихся прямыми, в прямоугольном треугольнике? Какое из предложений верно: эта сумма 1) больше 90°; 2) меньше 90°; 3) равна 90°.

б) Чему равна градусная мера углов равностороннего треугольника?

**3.** В тетради в клетку начертите треугольник, как на рисунке 2. Измерьте градусную меру его углов с помощью транспортира. Сколько градусов составляет сумма градусных мер этих углов?

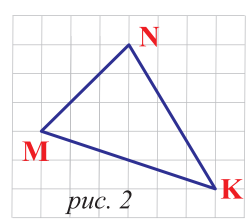


*рис. 2*

**4.** Какой рисунок изображен правильно? Почему?

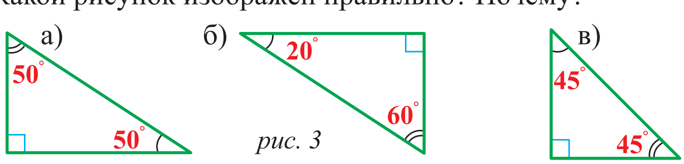


*рис. 3*

**5.** Определите градусную меру внутренних углов данного на рисунке 4 (а, б, в) треугольника ABD. Здесь DK || AB

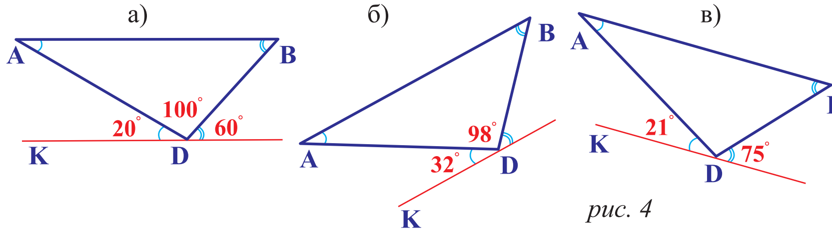



*рис. 4*

**6.** Даны два внутренних угла треугольника. Найдите градусную меру третьего угла.

а) 65° и 43°; б) 90° и 29°; в) 5° и 55°; г) 145° и 12°.

**7.** Могут ли приведённые углы быть углами треугольника? Почему? Объясните свой ответ.

а) 21°, 35° и 103°; б) 56°, 90° и 24°; в) 72°, 15° и 55°.

**8.** По приведённым на рисунке 5 треугольникам найдите $x$.

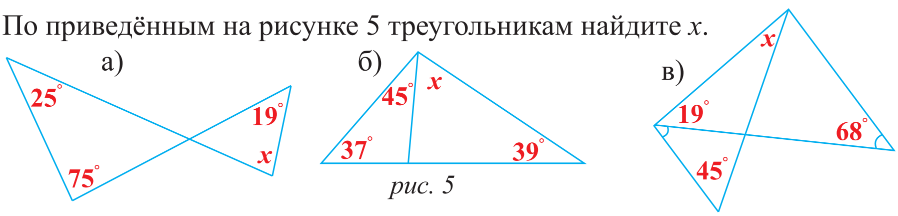



*рис. 5*

**9.** По данным в таблице найдите углы ΔABC.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∠A | 30° | 54° | $x$ | $b$ | $3m$ |
| ∠B | $n$ | $a$ | $x + 72°$ | $b + 72°$ | $2m$ |
| ∠C | $n + 20°$ | $a – 40°$ | $2x$ | $2b$ | 50° |

**10.** а) Высота треугольника делит угол, из которого она проведена, на два угла в 30° и 42°. Определите градусную меру углов этого треугольника.

б) При условии, что один из углов равнобедренного треугольника равен: 1) 68°; 2) 136°; 3) 100°, найдите градусную меру других углов.

**11.** Один из углов треугольника равен 60°. Чему будет равна градусная мера острого угла, образованного между биссектрисами двух других углов?

**12.** Угол между биссектрисами углов B и C треугольника ABC равен 118°. Определите градусную меру угла A.

**13.** В треугольнике ABC ∠A = 70° и ∠C = 60°. Биссектриса BD делит треугольник ABC на два треугольника – ABD и BCD. Найдите углы этих треугольников.

**14.** В треугольнике ABC ∠B = 110°, ∠C = 50° и AD – высота. Докажите, что ∠CAD = 2∠BAD.

## 5.13. Прямоугольный треугольник

Если один из углов треугольника является прямым, то такой треугольник называется **прямоугольным треугольником**. Стороны, образующие прямой угол прямоугольного треугольника, называются **катетами**, а сторона, противоположная прямому углу – **гипотенузой** (рис. 1).

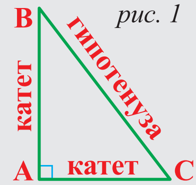


*рис. 1*

### Деятельность

1. Вспомните признак СУС равенства треугольников. Как можно выразить этот признак для прямоугольных треугольников?
2. Можно ли утверждать о равенстве треугольников, если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника? Почему?
3. Вспомните признак УСУ равенства треугольников. Постарайтесь выразить этот признак для прямоугольных треугольников.
4. Можно ли утверждать о равенстве прямоугольных треугольников, если катет и прилегающий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равен катету и прилегающему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника? Почему? Обоснуйте свой ответ.
5. Равны ли прямоугольные треугольники, если гипотенуза и прилегающий к ней острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и прилегающему к ней острому углу другого прямоугольного треугольника? Что можно сказать о втором остром угле этих треугольников? Вспомнив определение конгруэнтных треугольников, обоснуйте свой ответ.

### Теорема Признак конгруэнтности прямоугольных треугольников

***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники конгруэнтны.***

**Условие теоремы:** $\Delta ABC$ и $\Delta\ MNK$ – прямоугольные треугольники (рис. 2). $AB \cong MK$ и $AC \cong MN$.

**Утверждение теоремы:** $\Delta ABC \cong \Delta MNK$.

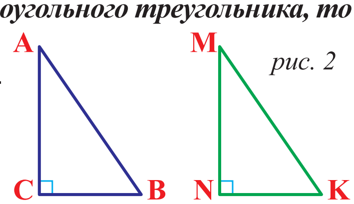


*рис. 2*

*Докажите самостоятельно.*

Расположите треугольники ABC и MNK так, чтобы стороны AC и MN наложились друг на друга. Докажите, что полученный треугольник KAB равнобедренный (рис. 3).

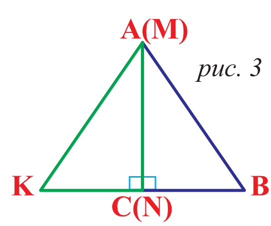


*рис. 3*

## Теорема Свойство катета, лежащего напротив угла в 30° в прямоугольном треугольнике

***Катет, лежащий напротив угла в 30° в прямоугольном треугольнике, равен половине гипотенузы.***

**Условие теоремы:** $\Delta ABC$ – прямоугольный треугольник (рис. 4). $\angle A = 90°$ и $\angle B = 30°$.

**Утверждение теоремы:** $AC = \frac{1}{2}BC$.

**Доказательство теоремы:** Поскольку в $\Delta ABC$ $\angle A = 90°$ и $\angle B = 30°$, то $\angle C = 60°$. Начертим на одной и той же прямой отрезок $AD \cong AC$ (рис. 5). Тогда $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (по двум равным соответствующим катетам этих треугольников). Тогда $\angle C = \angle D = \angle CBD = 60°$, т.е. $\Delta CBD$ – равносторонний. Следовательно, так как $AC = \frac{1}{2}CD$ и $CD = BC$, то $AC = \frac{1}{2}BC$.

**Теорема доказана.**

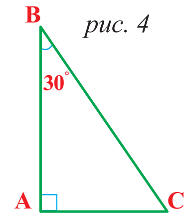


*рис. 4*

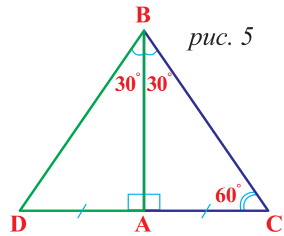


*рис. 5*

## Упражнения

**1.** а) Один из углов прямоугольного треугольника 28°. Определите, чему равна градусная мера другого острого угла этого треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике один острый угол больше другого на 16°. Найдите его острые углы.

в) Разность острых углов прямоугольного треугольника 24°. Найдите его острые углы.

**2.** Укажите из приведённых треугольников конгруэнтные треугольники (рис. 6). Объясните, почему эти треугольники являются или не являются конгруэнтными.

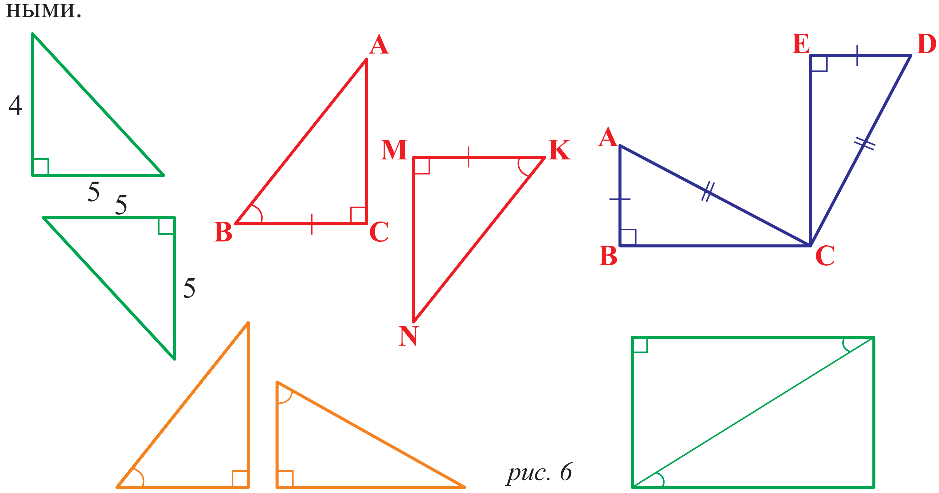


*рис. 6*

**3.** Напишите предложение, полученное в результате перестановки условия и утверждения теоремы о свойстве катета, лежащего напротив угла 30° в прямоугольном треугольнике. Докажите верность этого предложения.

**4.** Известно, что ABC – прямоугольный треугольник и $\angle BAC = \angle ABK$. Докажите, что отрезок BK является медианой $\Delta ABC$ (рис. 7).

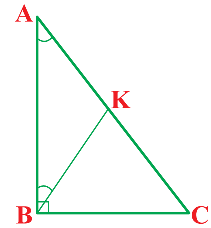


*рис. 7*

**5.** Точки A и B расположены по разные стороны от прямой CD на одинаковом расстоянии от нее. Известно, что $AC \perp CD$ и $BD \perp CD$. Если известно, что расстояние между точками B и C равно: а) 7 мм; б) 12 см; в) 4,89 дм, определите длину отрезка AD и медианы CK треугольника ACD.

**6.** AB и CD, являясь отрезками одинаковой длины, расположены по одну сторону от прямой, содержащей отрезок BD, и перпендикулярны ему. Если известно, что расстояние между точками A и D равно: а) 0,15 м; б) 34 см; в) 8,5 дм, определите длину отрезка BC.

**7.** В равнобедренном треугольнике ABC точка M – середина основания AC. Отрезки $MF \perp BC$, $ME \perp AB$ построены так что точки F и E пренадлежат BC и AB соответственно. Докажите, что MF = ME.

**8.** Докажите равенство высот, проведённых к боковым сторонам в равнобедренном треугольнике.

**9.** Докажите, что произвольная точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от сторон угла.

**10.** а) Если длина катета, лежащего напротив угла 30° в прямоугольном треугольнике, равна 17 мм, найдите гипотенузу этого треугольника.
б) Если гипотенуза прямоугольного треугольника равна 56 см, а один из углов 60°, то какой из катетов можно найти? Определите его.
в) длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 24 см, а гипотенуза 48 см. определите градусную меру углов этого треугольника.

**11.** Градусная мера одного из внешних углов прямоугольного треугольника равна 120°. Разность между гипотенузой и меньшим катетом этого треугольника составляет 15 см. Определите длину гипотенузы треугольника.

**12.** Градусная мера угла между боковыми сторонами равнобедренного треугольника 120°. Найдите расстояние от вершины до основания, если длина боковой стороны равна 44 мм.

**13.** В $\Delta ABC$ медиана AM равна BM (рис. 8). Докажите, что $\angle BAC = \angle B + \angle C$.

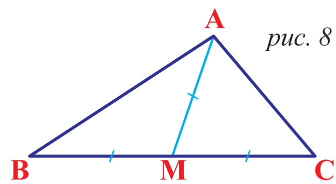


*рис. 8*

## 5.14. Внешний угол треугольника и его свойство

### Деятельность

1. Начертите угол BCD, смежный углу ACB произвольного треугольника ABC.
2. Как называются углы ∠ACB и ∠BCD? Чему равна сумма этих углов (рис. 1)?
3. Если ∠ACB = 60°, чему будет равен ∠BCD? Как вы это определили?
4. Определите, чему будет равна градусная мера ∠A + ∠B согласно внутренним углам треугольника.
5. Какую связь вы выявили между ∠A + ∠B и ∠BCD?

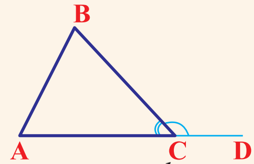


*рис. 1*

Угол, являющийся смежным к внутреннему углу треугольника, называется внешним углом треугольника при той же вершине. При каждой вершине треугольника есть два внешних угла (рис. 2).

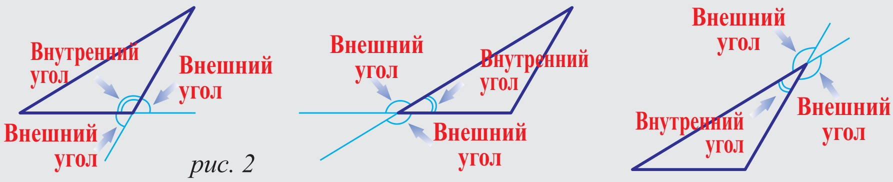


*рис. 2*

### Теорема — Свойство внешнего угла треугольника

***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов треугольника.***

**Условие теоремы:** В ΔABC ∠A, ∠B, ∠ACB внутренние, ∠BCD – внешний углы.

**Утверждение теоремы:** ∠BCD = ∠A + ∠B (рис. 3).

**Доказательство теоремы:** Согласно теореме о сумме внутренних углов треугольника ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180°. С другой стороны, поскольку углы ∠ 3 и ∠4 смежные, то ∠3 + ∠4 = 180° и ∠3 = 180° – ∠4. Таким образом, ∠1 + ∠2 + 180° – ∠4 = 180° и ∠1 + ∠2 = ∠4.

То есть: ∠BCD = ∠A + ∠B. **Теорема доказана.**

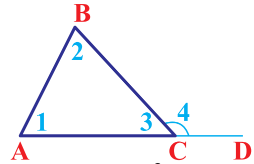


*рис. 3*

### Образец

Внешний угол треугольника ∠BCD = 110°, один из внутренних углов не смежных с ним ∠A = 42° (рис. 3). Найдите другие углы треугольника.

*Решение:* Согласно теореме ∠BCD = ∠A + ∠B.

Тогда ∠B = ∠BCD – ∠A = 110°– 42° = 68°. Согласно свойству смежных углов: ∠C = 180° – 110° = 70°. Следовательно, углы треугольника равны 42°, 68°, 70°.

**Ответ:** ∠B = 68°, ∠C= 70°.

## Упражнения

**1.** Начертите треугольник ABC. Изобразите при каждой его вершине внешний угол. Покажите, сумме каких внутренних углов равен каждый внешний угол.

**2.** На рисунке 4 изображён ΔABC. При вершине B внешним углом по мнению Гюльнар, является ∠ABD, по мнению Али – ∠CBE, по мнению Юсифа – ∠ABK. По-вашему, кто из них верно изобразил внешний угол при вершине B? Что вы можете сказать о ∠ABD и ∠CBE?

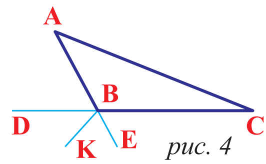


*рис. 4*

**3.** Если в треугольнике MNK в вершине M внутренний угол будет равен: а) 57°; б) 43°; в) 124°, то чему будет равен внешний угол?

**4.** Определите представленные знаком «?» углы на основе данных треугольников на рисунке 5.

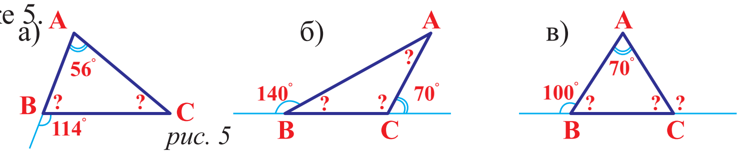


*рис. 5*

**5.** Внешний угол треугольника равен 80°. Отношение этого внешнего угла к одному из несмежных с ним углов треугольника 5:3. Определите углы треугольника.

**6.** Угол BCD – внешний угол ΔABC. Заполните таблицу.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∠A | 35° | | 10° | |
| ∠B | 45° | 67° | | 89° |
| ∠C | | 33° | 143° | |
| ∠BCD | | | | 112° |

**7.** Из вершины B треугольника ABC проведена высота BH и биссектриса BT. Определите градусную меру ∠HBT и ∠BTC, если:
а) ∠A = 80°, ∠C = 56°; б) ∠A = 60°, ∠C = 40°; в) ∠A = 50°, ∠C = 70°.

**8.** Найдите внутренние углы равнобедренного треугольника, если один из внешних углов будет равен: а) 70°; б) 136°.

**9.** Известно, что в треугольнике ABC ∠A = 32°, ∠C = 58°. Из вершин треугольника ABC к сторонам проведены параллельные прямые. Определите внутренние и внешние углы треугольников, образованных этими прямыми.

**10.** Сабир утверждает, что сумма внутренних углов треугольника в 4 раза меньше суммы всех внешних углов этого треугольника (при одной вершине берётся по 2 внешних угла). Прав ли он?

**11.** Может ли биссектриса любого угла треугольника быть параллельной биссектрисе его внешнего угла? Обоснуйте свой ответ.

# 5.15. Соотношения между сторонами и углами треугольника

## Деятельность

1. Начертите равнобедренный треугольник ABC: AB = AC.
2. Какой угол лежит напротив стороны AB? А какой угол лежит напротив стороны AC?
3. Что вы можете сказать о градусной мере ∠B и ∠C?
4. Объясните утверждение для равнобедренного треугольника: «В треугольнике напротив равных сторон лежат равные углы».
5. Начертите треугольник с разными сторонами. Измерив длину сторон этого треугольника линейкой, а градусную меру углов – транспортиром, запишите их порядке возрастания. Какой результат вы получили? Объясните свой ответ.

## Теорема Соотношения между сторонами и углами треугольника

***В треугольнике: 1) напротив большей стороны лежит больший угол;***
***2) напротив большего угла лежит большая сторона.***

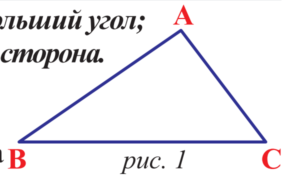


*рис. 1*

**Условие теоремы:** 1) В ΔABC AB > AC (рис. 1).
**Утверждение теоремы:** ∠ACB > ∠ABC.
**Доказательство теоремы:** На стороне AB треугольника отметим точку D так, чтобы AD = AC (рис. 2). Полученный треугольник ADC – равнобедренный, следовательно, ∠1 = ∠2. Точка D располагается между точками A и B. Следовательно, луч CD – внутренний луч угла ACB. Тогда ∠ACB > ∠1. ∠2– внешний угол треугольника BCD, следовательно, ∠2 > ∠ABC .

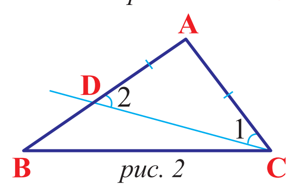


*рис. 2*

Таким образом, получим ∠ACB > ∠1= ∠2 > ∠ABC. Отсюда ∠ACB > ∠ABC.
**Первая часть теоремы доказана.**
Докажем вторую часть теоремы:
**Условие теоремы:** 2) В ΔABC ∠ACB > ∠ABC.
**Утверждение теоремы:** AB > AC (рис. 1).
**Доказательство теоремы:** Предположим обратное: допустим, что AB = AC. Тогда треугольник ABC – равнобедренный и ∠ACB = ∠ABC. А это противоречит условию теоремы. Следовательно, AB не может быть равно AC.
Теперь предположим, что AB < AC. Согласно первому условию теоремы, напротив большей стороны треугольника лежит больший угол. То есть из того, чтобы AB < AC, следует ∠ACB < ∠ABC. А это противоречит второму условию теоремы. Следовательно, AB > AC.
**Вторая часть теоремы доказана.**
**Итог:** Треугольник, у которого два угла равны, является равнобедренным (почему?).

## Упражнения

**1.** Покажите в приведённых на рисунке 3 треугольниках угол, лежащий напротив каждой стороны, и сторону, лежащую напротив каждого угла.

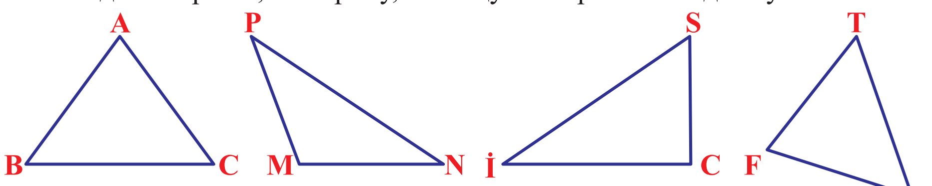



*рис. 3*

**2.** Стороны треугольника ABC обозначены латинскими буквами, а углы – греческими буквами α (альфа), β (бета) и γ (гамма) так, как на рисунке 4. Напишите угол, лежащий напротив каждой стороны, и сторону, лежащую напротив каждого угла.

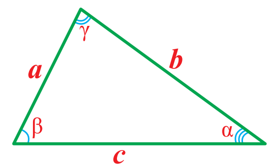



*рис. 4*

**3.** Если а) AB > AC > BC; б) MN = MK < NK, то скажите о соотношениях между углами и сторонами треугольника ABC и MNK, определите их вид.

**4.** а) Если MN < MK < NK, то сравните углы треугольника MNK.

б) Если в треугольнике ABC AB = 9 см, AC = 14 см, BC = 8 см, расставьте его углы по возрастанию.

**5.** Какая сторона наибольшая в прямоугольном треугольнике? Если один из острых углов 34°, определите наименьшую сторону этого треугольника.

**6.** Лейла и Фарид начертили равнобедренный треугольник ABC с углом 70°. Лейла утверждает, что в этом треугольнике сторона BC больше сторон AB и AC, Фарид же утверждает, что стороны AB и BC имеют равные длины и больше стороны AC. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ.

**7.** Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке M, сторону AC – в точке N. Определите вид треугольника MAN.

**8.** Докажите, что сторона BD (рис. 5) а) больше; в) меньше боковой стороны треугольника ABC. Обоснуйте свой ответ.

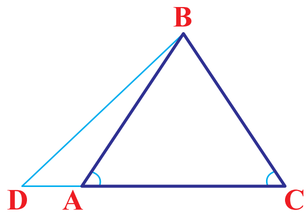



*рис. 5 a*

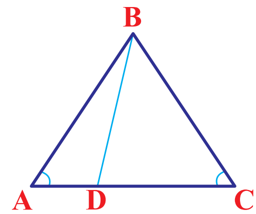



*рис. 5 b*

## 5.16. Неравенство треугольника

**Деятельность** — **Линейка, палочки**

1. Начертите произвольный треугольник ABC. Запишите длину его сторон, измерив их линейкой.
2. Сравните нижеприведённое:
   а) AB + AC и BC; б) AB + BC и AC; в) AC + BC и AB.
3. Какой результат вы получили? Выскажите свои мысли.
4. Возьмите палочки длиной 6 см, 4 см, 3 см и 2 см. положите на стол палочку длиной 6 см. Используя другие две палочки, постарайтесь построить треугольник. В каком случае треугольник получился? Почему?

**Теорема** — **Неравенство треугольника**

***Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон, но больше их разности.***

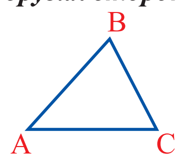


*рис. 1*

**Условие теоремы:** ABC – треугольник (рис. 1).
**Утверждение теоремы:** AB < AC + BC и AB > BC – AC.
**Доказательство теоремы:** Отложим отрезок CD, равный стороне CB, на луче, противоположном лучу CA (рисунок 2). Поскольку треугольник BCD – равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$.
$\angle ABD > \angle 1$ и $\angle ABD > \angle 2$.
Из неравенства $\angle ABD > \angle 2$ получается, что
AB < AD и из-за того, что AD = AC + CD = AC + BC следует AB < AC + BC

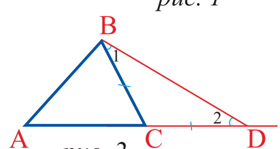


*рис. 2*

**Итог:** В ΔABC AB < AC + BC, AC < AB + BC и BC < AC + AB. Из последнего следует AB > BC – AC.
**Теорема доказана.**

**Образец**

Можно ли построить треугольник со сторонами: а) 6 см, 12 см, 5 см; б) 3,5 см, 5,4 см, 7 см; в) 3 см, 8 см, 5 см?

*Решение:* Проверим во всех трёх случаях соблюдение/несоблюдение неравенства треугольника: из этих отрезков треугольник получится в том случае, если сумма двух меньших отрезков будет больше третьего отрезка:

а) 6 + 5 < 12, поскольку в первом случае сумма двух меньших отрезков меньше длины третьего отрезка, эти отрезки не могут быть сторонами какого-либо треугольника.

б) Поскольку 3,5 + 5,4 > 7, эти отрезки могут быть сторонами треугольника.

в) Поскольку 3 + 5 = 8, эти отрезки не могут быть сторонами треугольника.

**Примечание.** Чтобы проверить соблюдение неравенства треугольника, достаточно проверить то, что сумма двух меньших сторон больше наибольшей третьей стороны.

## Упражнения

**1.** В ячейку таблицы, указывающую длину третьей стороны, запишите такое число, чтобы треугольник ABC: а) можно было построить; б) невозможно было построить.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AB | 56 мм | | $1\frac{3}{4}$ см | 400 см |
| AC | 38 мм | 1,6 дм | | 5,9 м |
| BC | | 15 см | $6\frac{3}{4}$ см | |

**2.** Начертите: а) прямоугольный треугольник; б) тупоугольный треугольник и в) остроугольный треугольник с разными сторонами. Сравните разность длин двух сторон этих треугольников с длиной третьей стороны. Какой результат вы получили? Этот результат изложите в виде неравенства.

**3.** Можно ли построить треугольник, у которого длины сторон были бы равны нижеприведённым частям градусной меры развёрнутого угла (единица длины – сантиметр)?

а) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$; в) $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$.

Если возможно, то определите вид этого треугольника.

**4.** Если две стороны равнобедренного треугольника будут равны: а) 7 см и 15 см; б) 6 дм и 30 см; в) 120 мм и 3 см 2 мм, определите его периметр.

**5.** Периметр треугольника – 145 см. Может ли одна из его сторон быть длиной 8 дм 3 см? Почему? Обоснуйте свой ответ.

**6.** $a$, $b$ и $c$ – стороны треугольника. $a$ = 3,17 см, $b$ = 0,75 см, $c$ – натуральное число. Определите периметр треугольника.

**7.** На рисунке 3 дан четырёхугольник ABCD. Докажите, что длина отрезка AC меньше половины периметра четырёхугольника ABCD (рис. 3).

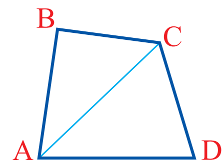


*рис. 3*

**8.** Стороны $a$ и $b$ треугольника отвечают условию $8 < a < 12$, $10 < b < 15$. Между какими числами будет располагаться длина третьей стороны?

**9.** Стороны $a$, $b$ и $c$ треугольника отвечают условию $3{,}1 < a < 7{,}4$; $8{,}2 < b < 13$, $11 < c < 17{,}5$. Какому наибольшему натуральному числу может быть равен периметр этого треугольника?

**10.** Известно, что AB = 3 см, AC = 14 см, DB = 5 см и DC = 6 см. докажите, что точки A, B, C, D расположены на одной прямой.

# 5.17. Методы сбора информации

**Деятельность** | **Опрос, наблюдение, эксперимент**

Внимательно исследуйте представленную справа анкету. Какого рода информацию поставил себе целью собрать тот, кто составлял эту анкету? Как можно улучшить качество и обслуживание, используя результаты этой анкеты? Какие бы еще вопросы вы добавили в эту анкету? Делая дополнения, обсудите их со своими товарищами.

**Опросная анкета**

За сколько дней доходит до вас заказ, сделанный вами в магазине? ______________________

На какую сумму вы планируете приобрести товары для дома в течение следующего года? ____________

Удовлетворяет ли вас обслуживание в магазине?
Отлично □ Хорошо □ Средне □ Плохо □ Очень плохо □

Удовлетворяют ли вас приобретенные в магазине товары?
Отлично □ Хорошо □ Средне □ Плохо □ Очень плохо □

Хотели бы вы приобрести что-либо в этом магазине в течение следующего года?
Отлично □ Хорошо □ Средне □ Плохо □ Очень плохо □

Статистика, будучи одним из разделов математики, изучает пути сбора, обработки и анализа информации. Статистика обеспечивает приведение информации в вид, соответствующий использованию для принятия решений. Принятие решений опирается на многолетний опыт и практику. Важным фактором принятия верных решений является сбор необходимой информации. Информация собирается из различных источников. Ознакомимся с ними:

**1. Информация, распространяемая организациями или отдельными лицами**. В качестве примера такой информации можно привести информацию, предоставленную Государственным Статистическим Комитетом, газетами, журналами, радио и телевидением.

**2. Эксперимент.** Проводимые эксперименты являются одним из основных источников сбора информации. Например, испытывая на практике стиральные порошки, можно определить, какой из них является наиболее эффективным.

**3. Опрос** или **интервью**. В этом случае собирают различные мнения людей, затем эти данные кодируются, приводятся в форму таблицы и подготавливаются для дальнейшего анализа. Опрос может проводиться как в устной, так и в письменной форме. С целью получения определённой информации вопросы во время опроса составляются таким образом, чтобы ответы на эти вопросы послужили основой для получения необходимого результата. Собеседование – это опрос, проводимый тет-а-тет или посредством телефона.

**4. Наблюдение**. При этом наблюдают за состоянием объекта в естественных условиях и оценивают его. Этот метод состоит в созерцании объекта в течение определенного времени. Цель, с которой проводится наблюдение, обусловливает правильный вывод из его результатов. Наблюдение проводится посредством органов чувств.

## Упражнения

**1.** В анкете задается вопрос о доходах. Иногда этот вопрос формулируется в виде: «Сколько составляет ваш ежегодный доход?», а иногда – в виде: «Отметьте интервал, соответствующий вашему доходу».
а) Какую форму вы предпочтете, если будете составлять анкету самостоятельно?
б) Какая из этих форм даст вам более точные сведения? Объясните свой ответ.

**2.** Приведите информацию, полученную вами в течение последних 2-х дней из программы «Новости» по радио и телевидению. Скажите о результате, полученном вами из какой-либо информации.

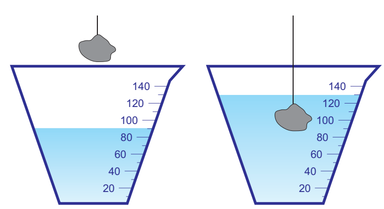
**3.** Директор сети магазинов, проводя опрос в столице, хочет узнать, какое количество времени проводят в маркете в течение месяца работающие женщины, совершая покупки.
а) Определите источник информации, которую хочет получить директор.
б) Составьте анкету таким образом, чтобы получить необходимую информацию.

**4.** Веточку с несколькими листочками положили в посуду с цветной водой. Через несколько дней стало видно, что отростки листочков окрасились. Разрезав отросток сперва в ширину, затем в длину, увидели, что цветная вода окрасила лишь ствольную часть. Кожица и сердцевина окрашены не были. Что показывает этот опыт? Посредством какой части ствола поступает впитываемая из земли вода и минеральные соли в листья, цветы и фрукты? Проведите опыт и понаблюдайте за результатом.

**5.** Соберите материал об исторических личностях (Джаваншире, Бабеке, Юсифе Абу Садже, Шамсаддине Эльденизе, Ибрагиме Халилуллахе, Гара Юсифе, Узун Гасане), проанализируйте их общие и отличительны черты.

**6.** Определяя массу и цену продуктов, используемых вашей семьей в течение недели, подготовьте информацию об определении потребностей семьи в соответствии с бюджетом. Объясните, каким способом вы будете осуществлять сбор этой информации.

**7.** Объём любого тела, не имеющего линейных размеров, можно измерить с помощью мензурки (мерного цилиндра). Для этого тело погружается в жидкость определённого объёма. При этом объём тела равен объёму вытолкнутой погружённым телом жидкости. Результаты двух проведённых опытов записаны в таблице. Какую информацию вы можете отсюда получить? Каков объём тела на рисунке?

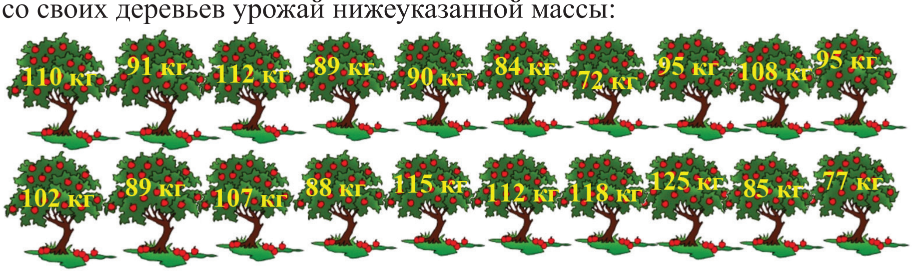



| № опыта | Название тела | Первоначальный объём жидкости, см$^3$ | Объём жидкости после погружения в неё тела, см$^3$ | Объём тела, см$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Шарик | 70 | 73,5 | ? |
| 2 | Камень | 65 | 71,02 | ? |

## 5.18. Презентация информации. Диаграмма, гистограмма, график

### Упражнения

**1.** Самед живёт в Губе и в его фруктовом саду 20 яблонь. Осенью Самед собрал со своих деревьев урожай нижеуказанной массы:




Согласно образцу дополните таблицу и ответьте на вопросы.

***Таблица 1***

| Масса (кг) | Количество яблонь с массой урожая в указанном промежутке | Какой процент составляют эти яблони от общего количества всех яблонь? |
|---|---|---|
| 70–79 | 2 дерева | $\frac{2}{20}=0{,}1=10\%$ |
| 80–89 | | |
| 90–99 | | |
| 100–109 | | |
| 110–119 | | |
| 120–129 | | |

1) Сколько деревьев принесли урожай а) меньше 100 кг; б) меньше 120 кг?

2) Сколько процентов составляют яблони, масса урожая которых меньше 90 кг, от всего количества яблонь?

Опираясь на результаты третьей графы таблицы, составьте гистограмму.

**2.** В таблице 2 дано время работы рабочих.

***Таблица 2***

| Время (в минутах) | Количество рабочих |
|---|---|
| 0–59 | 2 |
| 60–119 | 3 |
| 120–179 | 7 |
| 180–239 | 28 |
| 240–299 | 25 |
| 300–360 | 11 |

а) Сколько рабочих работало менее 2-х часов?

б) Сколько рабочих работало более 5-ти часов?

в) Постройте график на основе таблицы. Для этого начертите прямоугольную систему координат с осью абсцисс, отражающей время, и осью ординат, отражающей количество рабочих, и последовательно соедините полученные точки кривой линией. Выскажите свои мысли на основе этого графика.

**3.** По дороге в школу, учащиеся VII класса пользуются разными видами транспорта. Их число распределено так, как показано в таблице 3. Согласно этой таблице, ответьте на вопросы и изобразите данные второго столбца в виде столбчатой диаграммы, а данные третьего столбца – в виде графика.

***Таблица 3***

| Вид транспорта | Число учащихся, пользующихся этим видом транспорта | Отношение к общему числу |
|---|---|---|
| Автобус | 23 | 0,50 |
| Легковой автомобиль | 6 | 0,13 |
| Поезд | 1 | 0,02 |
| Пеший | 10 | 0,22 |
| Метро | 1 | 0,02 |
| Велосипед | 5 | 0,11 |
| Всего | 46 | 1,00 |

а) Сколько процентов составляют учащиеся, пользующиеся только автобусом и легковым автомобилем, от общего числа?

б) Сколько процентов составляют учащиеся, пользующиеся поездом и метро, от числа учащихся, пользующихся автобусом?

**4. Ситуационная задача: Автомобиль года.**

Журнал, посвящённый автомобилям проводит оценку новых автомашин пользуясь рейтинг-системой. Автомобилю набравшему наибольшей бал присваивается титул «Автомобиль года». Рейтинг оцененных 5 новых автомобилей приводится в таблице.

***Таблица 4***

| Автомобиль | Обеспечение безопасности (T) | Экономность горючего (У) | Внешний вид (G) | Комфорт салона (R) | Рейтинг автомобиля |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 3 | 1 | 2 | 3 | |
| II | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| III | 3 | 1 | 3 | 2 | |
| IV | 1 | 3 | 3 | 3 | |
| V | 3 | 2 | 3 | 2 | |

Здесь 3 балла означает отлично, 2 балла – хорошо, 1 бал – удовлетворительно. Для оценки автомобиля журнал применяет формулу $Q = 3T + Y + G + R$.

***1 вопрос:*** Вычислите рейтинг каждого автомобиля, запишите результаты в последнем столбце и определите «Автомобиль года».

***2 вопрос:*** Производитель I авто не согласен с оценкой рейтинга его автомобиля. Какой бы формулой вы воспользовались, чтобы I автомобиль получил наивысший рейтинг: $Q = \_\_\_ \cdot T + \_\_\_ \cdot Y + \_\_\_ \cdot G + \_\_\_ \cdot R$

**5.** ***Внутренний валовый продукт (ВВП)*** *– это общая стоимость конечных продуктов и услуг, производимых в течение определённого времени в рамках границ одного государства с целью экспорта, для внутреннего пользования и резерва. ВВП на душу населения принимается как один из основных показателей уровня жизни людей, проживающих в государстве.*

На рисунке 1 дан график ВВП Азербайджанской Республики с 1992 по 2008 годы. Какие сведения можно получить из этого графика? Ответьте на вопросы, объясните, каким образом вы получили результат.


*рис. 1*

а) Каков был ВВП в 2007 году?

б) На сколько отличается ВВП 2002-го года от ВВП 1992-го года?

в) На сколько ВВП 2006-го года больше ВВП 1995-го года?

**6.** На рисунке 2 дан график изменения температуры воздуха в течение дня.

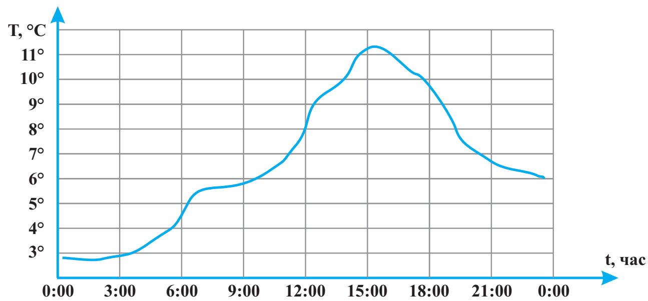



*рис. 2*

Выясните, какой была в градусах Цельсия самая высокая и самая низкая температура в течение дня.

**7.** На основе баллов, набранных 50-ю студентами во время экзамена, стало известно, все они набрали свыше 450-ти баллов. Для построения таблицы этой информации выбрали следующие интервалы: [450, 500), [500, 550), …, [650, 700]. Если баллы 12 студентов находятся в интервале [450, 500), баллы 16 студентов – в интервале [500, 550), 10 студентов – в интервале [550, 600), 8 студентов – в интервале [600, 650), то

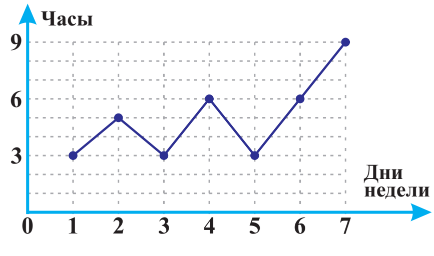
а) Сколько процентов студентов набрали менее 500 баллов?

б) Баллы скольких студентов располагаются в интервале [500, 550)?

в) Сколько процентов студентов набрали менее 550 баллов?

г) Сколько процентов студентов набрали менее 700 баллов?

**8.** Время, потраченное учеником на занятия в течение недели, дано в виде линейной диаграммы. Какую часть составляет время, потраченное им на занятия в четные дни, от времени, потраченного им на занятия в течение всей недели?



**Построение круговой диаграммы:**

*Подготовительный этап:*

1. Найдите сумму данных.
2. Определите, какую часть суммы составляет каждое число, входящее в сумму.
3. Определите центральный угол, соответствующий каждой части (для этого 360° умножьте на число, обозначающее часть).

*Этап построения:*

1. Начертите круг произвольного радиуса.
2. Постройте центральные углы (с помощью транспортира).
3. Окрасьте разными цветами секторы, соответствующие центральным углам.
4. Дополнительно отметьте, чему соответствует каждый цвет

## Образец

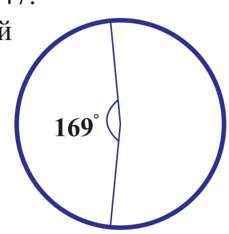
В таблице дано число жителей городов и сёл Азербайджана на 2011 год:

| Городское население (чел.) | Сельское население (чел.) |
|---|---|
| 4 млн 990 тыс. | 4 млн 316 тыс. |

***Подготовительный этап:***

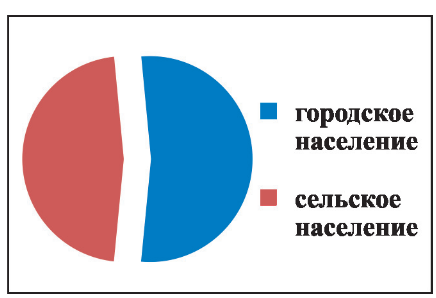
1. Количество населения Азербайджана (сумма городского и сельского населения) составляет 9 млн 306 тыс.2.
2. Городское население: 4 млн. 990 тыс : 9 млн. 306 тыс ≈ 0,53;
   Сельское население: 4 млн. 316 тыс : 9 млн. 306 тыс ≈ 0,47.
3. Определим центральный угол, соответствующий каждой части:

$$360 \cdot 0{,}53 \approx 191° \text{ и } 360 \cdot 0{,}47 \approx 169°$$




***Этап построения:***

1. Начертите круг с произвольным радиусом.
2. Постройте центральные углы в 191° и 169°.
3. Закрасьте каждую часть.

**9.** Изобразите площадь континентов Земли в виде круговой диаграммы. (Вычисления проведите на калькуляторе.)

| Название материка | Площадь материка (млн км$^2$) | Часть | Процент (%) | Центральный угол (в градусах) |
|---|---|---|---|---|
| Европа | 11,5 | $11,5 : 150 \approx 0,07$ | $0,07 \cdot 100 = 7$ | $360 \cdot 0,07 \approx 28$ |
| Азия | 43,4 | $43,4 : 150 \approx 0,29$ | $0,29 \cdot 100 = 29$ | $360 \cdot 0,29 \approx 104$ |
| Африка | 30,3 | | | |
| Америка | 42 | | | |
| Австралия | 8,7 | | | |
| Антарктида | 14,1 | | | |
| Всего | 150 | 1,00 | 100 | 360 |

**10.** Исследование, проведенное среди 150 человек выявило общие ошибки, чаще всего допускаемые кандидатами при прохождении собеседования с целью трудоустройства. Результаты выглядели следующим образом:

| Причина | Процент (%) |
|---|---|
| Ничего не знает о фирме | 46 |
| Не готов говорить о своих карьерных планах | 22 |
| Нет делового настроя | 18 |
| Не хватает зрительного контакта | 5 |
| Не владеет грамотной речью | 3 |
| Другое | 6 |

а) Постройте столбчатую и круговую диаграмму, график.

б) Какая диаграмма лучше всего отражает эту информацию? Что вы можете сказать о графике?

**11.** Проведен опрос об использовании антивирусной программы на компьютерах в различных офисах. В приведенной ниже таблице данные опроса показаны в виде процентов:

| Использование антивирусной программы в офисах | Процент (%) |
|---|---|
| Некоторые компьютеры снабжены этой программой | 12 |
| Все компьютеры снабжены этой программой | 59 |
| Предусматривается в следующие 12 месяцев | 20 |
| В антивирусной программе нет необходимости | 9 |

а) Постройте столбчатую и круговую диаграмму.

б) Какая диаграмма более полно отражает эту информацию?

## 5.19. Прогнозирование

**Прогноз** – это предположение о будущем состоянии объекта исследования. **Прогнозирование** – это процесс обработки прогноза на основе научных методов. Если даже невозможно утверждать, что прогнозируемое событие осуществится на 100%, прогнозирование занимает важное место в деятельности человека. На основе прогнозирования разрабатываются программы (планы) на разные сроки.

### Упражнения

**1.** В нижеследующей таблице показано количество людей, ездивших в Турцию из некоторых стран мира в 2011–2013 годах. Изобразите данные таблицы в виде столбчатой диаграммы.

| **Страны** \ **годы** | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|
| Япония | 150000 | 150000 | 200000 |
| Азербайджан | 460000 | 420000 | 490000 |
| США | 680000 | 650000 | 640000 |

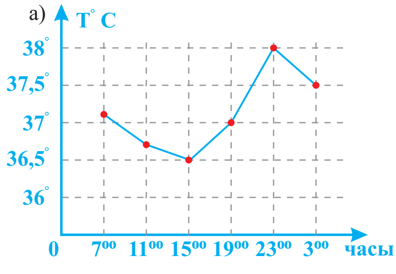
Какие мысли можно высказать и какие прогнозы сделать на основе этой диаграммы?

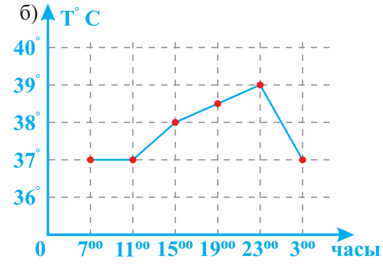
**2.** В таблице показана продажа автомобилей 2-мя фирмами в течение 3-х месячных интервалов на протяжении 1-го года. На основе таблицы составьте линейную диаграмму.

| **Месяцы** \ **Фирма** | I фирма | II фирма |
|---|---|---|
| 1-3 | 12 | 7 |
| 4-6 | 10 | 10 |
| 7-9 | 6 | 10 |
| 10-12 | 13 | 13 |

Какие мысли можно высказать и какие прогнозы сделать на основе этой диаграммы?

**3.** Ниже приведены графики температуры тела Фатмы (а) и Севиль (б) в течение дня. На основе графиков выясните, какая температура была у этих больных в одно и то же время суток и выскажите возможные прогнозы на следующие часы.

а)



б)


# 5.20. Число благоприятных исходов для относительно сложных исходов

Для анализа имеющихся для осуществления какого-либо благоприятного исхода условий применяют разные способы. Применяя эти способы, невозможно упустить какой-либо вариант. Например: при анализе благоприятных исходов для записи числа, состоящего из нескольких цифр, используется **способ составления таблиц**.

Образец

**1)** Запишите все двузначные числа, в которых присутствуют цифры 3, 7 и 9.

*Решение:* Чтобы записать требуемые двузначные числа, необходимо составить таблицу:

| **Первая цифра** | **Вторая цифра** | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 7 | 9 |
| 3 | 33 | 37 | 39 |
| 7 | 73 | 77 | 79 |
| 9 | 93 | 97 | 99 |

Как видно из таблицы, число возможных исходов: $n = 3 \cdot 3 = 9$.

Образец

**2)** У Сеймура 3 пары брюк и 5 рубашек. Сколькими способами он может одеться?

*Решение:* Сеймур каждую пару брюк может одеть с 5 рубашками. На основе нижеприведённой таблицы определим число всех вероятных сочетаний:

| **Одежда** | **1 рубашка** | **2 рубашка** | **3 рубашка** | **4 рубашка** | **5 рубашка** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1 пара брюк** | I-I | I-II | I-III | I-IV | I-V |
| **2 пара брюк** | II-I | II-II | II-III | II-IV | II-V |
| **3 пара брюк** | III-I | III-II | III-III | III-IV | III-V |

Как видно из таблицы, число возможных исходов: $n = 3 \cdot 5 = 15$.

Для выполнения таких заданий нет необходимости всегда составлять таблицы. Для этого можно использовать «правило умножения».

Образец

**3)** Напишите двузначный код, состоящий из букв A, B, C, D и E.

*Решение:* Первой буквой кода может быть любая из этих букв: $n = 5$. Второй буквой тоже может быть любая из этих букв, следовательно: $m = 5$. Тогда по способу умножения, код, состоящий из этих букв, можно записать $n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25$ способами.

Если требуется, чтобы буквы не повторялись, то число этих сочетаний будет $5 \cdot 4 = 20$.

## Упражнения

**1.** Используя способ составления таблицы, выпишите все двузначные числа, образованные из данных цифр, найдите их количество:
а) 1, 4, 5; б) 2, 0, 7, 6; в) 0, 5, 7, 9.

**2.** Орхан и Сархан близнецы. На их день рождения Самир хочет каждому брату подарить по мячу разных цветов. В магазине есть мячи только трёх цветов: белые, чёрные и пёстрые. Сколько возможных вариантов может быть при покупке Самиром двух мячей для братьев?

**3.** В расписании уроков для 7а класса на понедельник первым уроком должны были включить физику или математику, а вторым уроком – азербайджанский язык или литературу. Сколько вариантов возможно для такого составления расписания первого и второго уроков?

**4.** Чтобы от города A дойти до города B, следует дойти до речки и перейти на другой её берег. До речки можно дойти пешком, либо доехать на автобусе, велосипеде, автомобиле. Речку же можно перейти, переправившись на лодке, катере или вплавь. Сколько существует способов дойти от города A до города B?

**5.** Чтобы сварить компот из двух видов фруктов, сколько возможных исходов может использовать мама из 7 видов фруктов?

**6.** В коробке 8 мелков разных цветов. Из коробки взяли по одному мелку вначале Рена, затем Сеймур. Определите, сколько возможных исходов существует для выбора этих мелков.

**7.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, и 6 образованы двузначные числа. Определите, сколько ситуаций возможны в данном случае, если в записи чисел цифры: а) будут повторяться, б) не будут повторяться. Найдите вероятность осуществления события для каждого случая.

**8.** а) Энвер, Сахиб, Джейхун и Эльгиз играли в шахматы. Если известно, что каждый игрок сыграл с другим по одной партии, то сколько партий было сыграно?
б) После игры Энвер, Сахиб, Джейхун и Эльгиз подарили друг другу фотокарточки. Сколько всего фотокарточек друзья подарили друг другу?

**9.** В меню представлен список горячих и холодных блюд. Сколько существует возможных исходов для выбора блюд на обед (при условии выбора одного горячего и одного холодного блюда)?

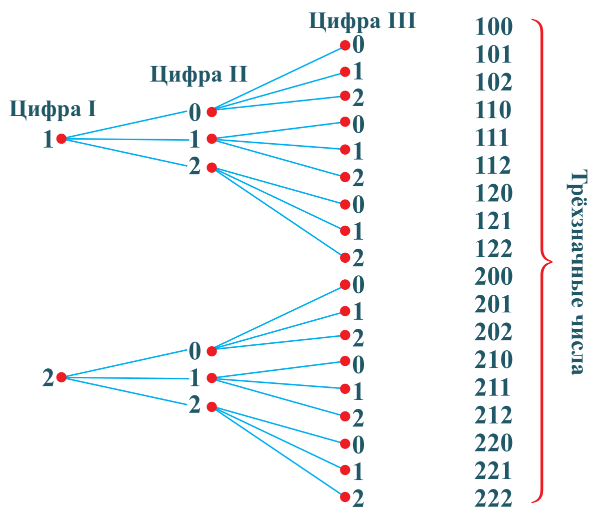

Число возможных исходов можно легко определить с помощью графов. **Граф** – это геометрическая фигура, состоящая из точек (вершин) и соединяющих эти точки отрезков (рёбер). В вершинах располагаются элементы, данные в условии задачи, рёбра же указывают на отношения между этими элементами.

## Образец

Запишите все трёхзначные числа, состоящие из цифр 0, 1 и 2.

*Решение:* Первой цифрой трёхзначного числа может быть либо цифра 1, либо 2. Второй и третьей цифрой может быть любая цифра из трёх. Тогда граф будет выглядеть так, как он показан справа.

Из графа ясно видно, что из цифр 0, 1 и 2 можно образовать 18 возможных сочетаний.




**10.** Встретились пятеро друзей и пожали друг другу руки. Изобразив граф, определите сколько рукопожатий было совершено.

**11.** После деловой встречи, каждый из бизнесменов раздал остальным свои визитки. Определите количество визиток, если во встрече участвовало: а) 3 человека; б) 4 человека; в) 5 человек.

**12.** Известно, что в меню кафе есть два вида первых блюд: борщ и суп; три вида горячих блюд: рыба, плов и курица; два вида напитков: компот и чай. Сколько возможных сочетаний можно выбрать на ужин из трёх ассортиментов (выбрав одно первое блюдо, одно горячее блюдо и один напиток)?

**13.** Гюлай забыла вторую и пятую цифры пятизначного номера телефона, но помнила, что эти цифры четные. Каково наибольшее число возможных сочетаний для определения забытых цифр номера телефона? Каково наибольшее число возможных сочетаний забытых цифр номера телефона, если она не вспомнила бы, что они четные?

**14.** Сколько разных трёхзначных чисел можно записать из цифр: а) 1, 2, 4; б) 0, 2, 5, 8?

1) при употреблении каждой цифры единожды;

2) при повторном употреблении цифр.

# 5.21. Вероятность события

## Деятельность

**1.** Бросьте игральную кость. Не смотря на кость, сможете ли вы определить, какое число выпадет? Охарактеризуйте нижеприведённые события:

а) Возможно ли, что выпадет «6»?

б) Что вы можете сказать о событии: выпадет «1» или «4»? Одинакова ли возможность этих событий?

в) А какова возможность выпадения «0»?

**2.** Сколько возможных событий может произойти при одном бросании игральной кости? Сколько возможностей существует для выпадения «5»?

**3.** Определите отношение числа возможностей выпадения «5» к числу всех возможных вариантов этого события. О чём говорит эта дробь? Объясняя свой ответ, обоснуйте его.

Результатом любого проводимого эксперимента является **элементарное событие**. Например: подбрасывание монеты – эксперимент, а выпадение какой-либо из ее сторон – элементарное событие.

Обычно о каком-то присходящем событии говорят, что «это событие более возможно» или «это событие менее возможно» или «эти события одинаково возможные». Но такая информация слишком недостаточна для сравнения возможностей этих событий. Поэтому возникла необходимость выразить возможность события в числах с помощью понятия вероятности события.

В математике вероятность события обозначается буквой P (первая буква английского слова «*probability*»): Вероятность события A обозначается P(A) (или записывается, как $P_{\text{название события или обозначение}}$, например: $P_{\text{дождь}}$).

Отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов эксперимента называется **вероятностью** этого события.

$$P_{\text{вероятность события}} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число всех возможных исходов}}$$

Обозначим число благоприятных исходов для осуществления данного события A через $n$(A), число всех равновозможных исходов – $n$: Тогда $P(A) = \dfrac{n(A)}{n}$.

Вероятность достоверного (обязательного) события равна 1: $P_{\text{случайное}} = \dfrac{n}{n} = 1$.

Вероятность невозможного события равна 0: $P_{\text{невозможное}} = \dfrac{0}{n} = 0$.

## Образец

Найдите вероятность выпадения лицевой или оборотной стороны монеты при однократном подбрасывании монетки номиналом 20 гяпик.

*Решение:* При подбрасывании монетки номиналом 20 гяпик выпадение лицевой или оборотной стороны монеты (в данном случае – стороны монеты с изображением карты или с изображением числового номинала) – достоверное событие. Поскольку выпадение лицевой или оборотной стороны – равновозможные события, то: $P_{\text{лицевой}} = P_{\text{оборотной}} = \frac{1}{2}$.

## Образец

Найдите вероятность выпадения 4 при бросании игральной кости 1 раз.
*Решение:* При бросании игральной кости элементарным событием может быть один из случаев выпадения чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Все эти случаи равновозможные и они не могут произойти одновременно, следовательно, вероятность достоверного события, равная единице (1), делится между ними поровну. Таким образом, вероятность осуществления любого из этих события равна $\frac{1}{6}$.

$P_{\text{выпадение } 4} = \frac{1}{6}$.

## Упражнения

**1.** Определив возможность или невозможность наступления осуществления данного события, найдите его вероятность:
а) получение оценки «отлично» всеми учащимися в классе по очередному малому суммативному оцениванию по математике;
б) замены всех уроков экскурсией;
в) последний сезон года – зима.
Приведите примеры возможных и невозможных событий.

**2.** Найдите вероятность выпадения чётного числа при бросании игральной кости 1 раз.

**3.** Определите вероятность выпадения 1 при бросании игральной кости 3 раза.

**4.** В тарелке 5 шекербура, 7 пахлава и 4 кята. Самир случайным образом взял одну из сладостей. Какова вероятность выбора им пахлавы? А вероятность выбора кяты?

**5.** 5 чашек бабушки украшены красными узорами, 12 – зелёными. Бабушка в одну из чашек налила чаю. Определите вероятность того, что это окажется чашка, украшенная узором зелёного цвета.

**6.** Анар задумал двузначное число. Определите вероятность нижеследующих событий:
а) окончание числа цифрой 3;
б) наличие одинаковых цифр в числе;
в) равенство суммы цифр числу 5;

г) деление числа на 6;
д) окончание числа цифрой 7;
е) разность цифры в разряде десяток с цифрой в разряде единиц составляет 2.

**7.** При игре в нарды бросают две игральные кости (зары) и выпадающие числа складывают. Игрок передвигает шашки в соответствии с выпавшими очками. Чтобы не оказаться в положении марса, Рахиб нуждается в сумме в 10 очков. По-вашему, какова вероятность выпадения суммы в 10 очков? А какова будет вероятность выпадения 6-6?

**8.** Из первых 100 натуральных чисел выберите любое число. Определите для этого числа вероятность события:
а) число кратно 10;
б) число кратно 5;
в) при делении числа на 12 в остатке получится 5;
г) сумма цифр числа будет равна 7.

**9. Практическая работа.** Вместе с товарищем по парте проведите эксперимент, бросив 2 игральные кости.
а) Каждый из вас пусть бросит игральные кости 36 раз. После каждого бросания, каждый запишет полученный результат так, как показано в примере.

| № испытания | Первый учащийся | Второй учащийся |
|---|---|---|
| 1 | 3 – 6 | 2 – 1 |
| 2 | | |
| 3 | | |
| ... | | |
| 36 | | |

б) Каждый учащийся находит отношение числа одинаковых пар к числу проводимых испытаний:

$$\frac{\textit{число одинаковых пар}}{36} \quad (*)$$

(например, если у второго учащегося пара 2-1 выпадет 10 раз, то $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$).
Выскажите мнение о нижеприведённом:

- Сравните для каждой пары результат дроби (*) с результатом, полученным вашим товарищем по парте;
- Сравните полученный результат с дробью $\frac{1}{6}$. Если вы получили результат, отличный от $\frac{1}{6}$, можете ли вы объяснить причину этого?
- Найдите для каждой пары отношение суммы полученных результатов к числу всех испытаний (например, если в классе 12 учащихся, то отношение числа выпадения у каждой пары 2-1 к произведению 12·36). Сравните этот результат с $\frac{1}{6}$.

## 5.22. Сумма вероятностей

События, которые не могут произойти одновременно, называются несовместимыми событиями. Вероятность суммы несовместимых событий A и B равна сумме вероятности события A и вероятности события B:

$$\mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B)}$$

### Образец

Найдите вероятность выпадения 5 или 2 при бросании игральной кости 1 раз.
*Решение:* Известно, что при бросании кости 1 раз может выпасть 6 равновозможных очков. Нас интересует возможность выпадения 2 или 5. Обозначим случай выпадения 2 буквой A, случай выпадения 5 буквой B. Тогда $P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$. Следовательно, $P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

### Упражнения

**1.** При бросании игральной кости один раз определите вероятность следующих событий:
а) выпадения числа больше 2;
б) выпадения числа меньше 5;
в) выпадения нечётного числа.

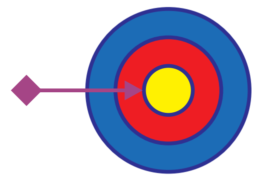
**2.** Вычисляя вероятность выпадения оборотной стороны монеты (т.е. стороны монеты с изображением числового номинала) хотя бы у одной из 2-х монет при одновременном подбрасывании, Фаик рассуждал следующим образом: «Для выпадения оборотной стороны монеты хотя бы у одной из монеток есть две возможности: или у первой монетки выпадет оборотная сторона, или у второй монетки. Вероятность выпадения оборотной стороны как у первой монетки, так и у второй $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Следовательно, выпадение оборотной стороны хотя бы у одной монетки – достоверное событие».
а) В чём совершил ошибку Фаик, обосновывая свои мысли?
б) Как, правильно должен рассуждать Фаик? Какова вероятность выпадения оборотной стороны у одной из монеток в данном испытании?

**3.** Известно, что из 200 лотерейных билетов два из билетов имеют выигрыш номиналом в 100 манатов, 5 билетов – 50 манатов, 7 билетов – 20 манатов. Для купленного Эльсеваром билета определите:
а) вероятность выигрыша номиналом в 100 манатов;
б) вероятность выигрыша номиналом в 50 или 20 манатов;
в) вероятность выигрыша билета;
г) вероятность проигрыша билета.

**4.** В мешке 10 красных, 5 зелёных, 25 жёлтых и 20 белых шариков. Найдите вероятность того, что случайно извлеченный из мешка шарик окажется цветным.

**5.** Стрелок прицелился в мишень, разделённую на три части. Вероятность попадания стрелы в первую часть – 0,35, в вторую часть – 0,45. Определите вероятность попадания с первого раза стрелой пущенной стрелком, в первую или вторую части мишени.

**6.** **Практическая работа.** Начертите данную ниже таблицу на бумаге форматом А3 (или доске) и вывесите на письменной доске. Каждый учащийся класса пусть проведёт эксперимент, подкинув монетку в 20 гяпик 10 раз. Дополните таблицу, записав в столбце, полученные результаты так, как показано в примере:



| **Учащийся** | **I** | **II** | **III** | **IV** | **V** | **VI** | **VII** | **VIII** | **IX** | **X** | **Всего** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Выпадение лицевой стороны** | 4 | | | | | | | | | | |
| **Выпадение оборотной стороны** | 6 | | | | | | | | | | |
| **Вероятность результата, полученного каждым учащимся** | | | | | | | | | | | |
| **Вероятность выпадения лицевой стороны** | $\frac{2}{5}$ | | | | | | | | | | |
| **Вероятность выпадения оборотной стороны** | $\frac{3}{5}$ | | | | | | | | | | |

Опираясь на таблицу, исследуйте следующие вопросы:

а) Сравните выпадение лицевой стороны монеты у каждого учащегося с числом $\frac{1}{2}$. Объясните, почему полученные результаты отличны от $\frac{1}{2}$.

б) Собирая результаты, полученные учащимися во время эксперимента, определите вероятность выпадения лицевой стороны и вероятность выпадения оборотной стороны. Вместе с этими вероятностями исследуйте вероятности, полученные каждым учащимся. Какое из них ближе к $\frac{1}{2}$?

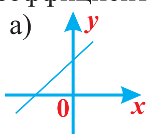
в) Если вероятность выпадения оборотной стороны при бросании монетки равна $\frac{1}{2}$, то значит ли это, что из 10 экспериментов в 5-ти выпадет оборотная сторона? Обоснуйте свой ответ.

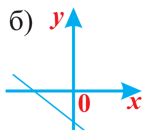
## Проверьте себя

**1.** При каком значении $x$ значение функции $y(x) = 3 - 4x^2$ будет равно $-13$?

**2.** Постройте график функции $y = 3x - 4$.

**3.** На основе представленного графика функции $y = kx + b$ определите знак коэффициента $k$:

а) 


б) 


**4.** График функции $y = kx + 3$ проходит через точку: а) A(2;5); б) $M\left(\frac{1}{2};\ -3\right)$. Найдите значение $k$.

**5.** График функции $y = kx$ проходит через точку $B\left(-\frac{3}{4};\ 5\right)$. Определите значение $k$ и постройте график полученной функции.

**6.** Укажите, какие из графиков приведённых функций параллельны или пересекаются:

$y = 3x - 7$; $y = \frac{1}{2} + 3x$; $y = \frac{-7+2x}{4}$;

$y = \frac{5+3x}{2}$; $y = 7x - 4$; $y = \frac{3x-35}{5}$;

$y = \frac{-6+14x}{2}$; $y = \frac{3}{8} + 7x$.

**7.** а) Преобразуйте в Фаренгейт: 55°C, 12°C, 93°C, 61°C.

б) Преобразуйте в Цельсий: 125°F, 42°F, 35°F, 112°F.

**8.** График уравнения $5x - 6y = 7$ проходит через точку $A(-a;\ 3a)$. Определите значение $x$ и $y$.

**9.** Приведённую систему уравнений решите графическим способом:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x = y - 3, \\ 3y = 5x - 2. \end{cases}$

**10.** При каком значении $a$ у системы уравнений $\begin{cases} ax + 3y = 0,5 \\ 2x - 4y = 0,25 \end{cases}$ а) нет корня; б) есть только один корень; в) есть бесконечное множество корней?

**11.** Внешний угол треугольника равен 120°. Отношение несмежных ему внутренних углов 10:14. Определите углы треугольника.

**12.** Систему уравнений решите способом подстановки и сложения:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = -14, \\ -7x - 4y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - 8x = 22, \\ 9y - 4x = -30. \end{cases}$

**13.** Если в треугольнике ABC AB = 7 см, AC = 90 мм, BC = 0,036 м, напишите названия углов в порядке уменьшения их градусной меры.

**14.** Сколькими способами может учитель распределить циркуль, линейку и транспортир между двумя учениками?

**15.** Ниже приведена таблица передвижения туристов, находившихся в пути 5 дней. Составьте график в соответствии с таблицей.

| день | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| км | 10 | 20 | 30 | 35 | 32 |

**16.** В двух корзинах 25 кг яблок. Если из первой корзины возьмут 3,5 кг яблок, то во второй корзине яблок окажется на 5 кг больше, чем в первой корзине. Сколько килограмм яблок в каждой корзине было изначально?

**17.** Учащийся задумал произвольное двузначное число, состоящее из одинаковых цифр. Найдите вероятность того, что это число нечётное.

## Задачи на исследование

**1.** Из сосуда, содержащего 100 л сока слили 10 л и долили 10 л воды. Тщательно смешав полученный раствор, снова слили 10 л и взамен долили 10 л воды. Эту операцию повторили несколько раз. Можно ли таким образом получить раствор в сосуде с содержанием в нём 72,9 л сока.

**2.** а) При каком наибольшем натуральном $n$ число 10! Будет кратно $n^n$? Здесь $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

б) При каком наименьшем натуральном $n$ число 10! не будет кратно $n^n$?

**3.** Дроби с числителем 1 называются аликвотными. Например: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$ и т. д.

а) Сколькими различными способами можно представить с точностью до перестановки слагаемых каждую из дробей $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{25}$ в виде суммы двух аликвотных дробей с разными знаменателями?

б) Определите способ представления аликвотной дроби с точностью до перестановки слагаемых в виде суммы двух аликвотных дробей. Рассмотрите 2 случая: 1) знаменатель дроби – простое число; 2) знаменатель дроби – составное число.

в) Найдите все натуральные числа $n$ и $m$, где m нечётное, $n$ – чётное, для которых выполняется равенство $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$.

**4.** Учитель хочет, чтобы «для совместного выполнения заданий» ученики составили несколько задач. В условии задачи должно учитываться: «Первая бригада выполняет задание за $a$ дней, вторая бригада выполнит это же задание за $b$ дней. За сколько дней они выполнят это задание, если будут работать вместе?» Вместе с тем, учитель желает, чтобы ответ задачи во всех случаях был «24 дня». При условии $a > b$ сколько различных вариантов задач можно составить?

**5. Ситуационная задача:**

а) Два друга играют в шашки. Через некоторое время в игре возникает ситуация, когда на доске число чёрных свободных клеток оказалось в 3 раза больше числа клеток занятых шашками, а у одного из мальчиков шашек оказалось на 2 штуки больше, чем у другого. Сколько шашек осталось на доске у каждого мальчика?

б) Работая в одиночку 4 дня девушка каждый день ткала 3 аршина материи. Пришедшая ей на помощь мать ткала в день 5 аршин материи. Они остановили работу, когда длина каждой сотканной ими материи оказалось одинаковой. Сколько аршин материи они соткали вместе?

в) Мать раздала орешки всем детям поровну. Четверо из них съели каждый по 12 орешков. В результате у этих четырёх детей вместе осталось столько же орешков, сколько мать дала каждому ребёнку. Сколько орешков раздала мать каждому ребёнку?

**6**. Покупатель зашёл в маркет за покупками, имея при себе 10 манат. Если бы у него денег было больше на четверть той суммы, которая осталась после покупок, то у него стало бы 75 гяпиков. Сколько же денег осталось у покупателя?

**7**. Первый из трёх братьев вложил $a$ манат в банк при условии $p$% годового прироста, второй – $2a$ манат при условии $\frac{p}{2}$% годового прироста, третий – $\frac{a}{2}$ манат при условии $2p$% годового прироста. Покажите, что через год братья получат одинаковую прибыль.

**8**. Предприниматель приобрёл 200 акций известной фирмы по цене 100 манат за штуку. После повышения цены одной акции на $p$% он продал половину своих акций. После очередного роста цены 1-й акции на $q$% он продал опять половину акций. Определите прибыль предпринимателя от продажи акций.

**9**. **Древняя задача.** Садовник поручил своим трём сыновьям продать 100 лимонов за одну и ту же цену. По возвращении домой первый сын передал отцу 1 манат 80 гяпик и оставшиеся 4 лимона, второй передал 1 манат 60 гяпик и оставшиеся 3 лимона, третий – 1 манат 20 гяпик и 1 лимон. Сколько лимонов передал садовник каждому сыну?

**10**. а) Задумано двузначное (натуральное) число. Если к нему слева или справа приписывать 2, то полученные трёхзначные числа будут равны. Найдите задуманное число.

б) Задумано пятизначное натуральное число. Если к нему приписать справа 2, полученное число разделить на число, которое получится, если приписать слева к задуманному числу 2, то в частном получится 3. Найдите задуманное число.

**11. Ситуационная задача: *Бытовые отходы.***

Изучая проблемы охраны окружающей среды от загрязнений, ученик составил таблицу о сроках разложения некоторых бытовых отходов:

| Вид отхода | Срок разложения |
|---|---|
| Кожура банана | 1–3 года |
| Кожура апельсина | 1–3 года |
| Коробки из картона | 0,5 лет |
| Жевательная резинка | 20-25 лет |
| Газеты | Несколько дней |
| Пластиковая посуда | Свыше 100 лет |

**1.** Ученик решил данные таблицы преобразовать в столбчатую диаграмму. Как по-вашему, насколько целесообразно представление этих данных в виде столбчатой диаграммы. Объясните своё мнение.

**2.** А какую диаграмму предпочли бы вы?

# Ответы

## ГЛАВА I

*Урок 1.1.* **№1**. а), б), в) неверно, б), г), е) верно; **№4.** а) $-2$, б) $-5$, в) 0; **№6.** а) $-15{,}5$, б) 1, в) $-\frac{7}{44}$, г) $-2{,}48$, ж) $-14$, и) $-5{,}4$, й) $-7\frac{6}{7}$; **№7.** а) 4,05, б) – 2,7, в) 1,855; **№8.** а) 49, б) $\frac{3}{4}$, в) 3,86, г) 2, д) $-30$; **№9.** а) $-0{,}5$, б) 14,73.
*Урок 1.2.* **№2.** A(–0,5), B(4), C (1,9), D (5,8), M (–3,6) N (–5), K (–2,1); **№4.** а) 5,5, б) 1,5, в) 12,2; **№5.** а) 0,64 или –6,44, б) –2,45 или 11,15; **№6.** Неверно; **№7.** $8\frac{5}{6}$; **№8.** K(–11,41); **№12.** а) Точки A и B располагаются по одну сторону от точки O, б) точки M и N располагаются по разные стороны от точки O; **№13.** A(14) или A(–14), B(3,5) или B(–3,5), 10,5 или 17,5.
*Урок1.3*. **№1.** $\frac{3}{16}=0{,}1875$, $\frac{84}{200}=0{,}42$, $\frac{7}{12}=0{,}58(3)$, $\frac{11}{21}=0{,}(523809)$, $\frac{10}{75}=0{,}1(3)$, $\frac{465}{555}=0{,}(837)$; **№2.** а){0,(7); 5,333...; 32,(56); 6,98(3); 0,(345); 11,43(12); 2,0(7)}; б){0,(7); 5,333...; 32,(56); 0,(345)}; в){6,98(3); 11,43(12); 2,0(7)}; **№5.** 1,7(3), 3,58(3), 4,(09), 2,(41); **№8.** 0,25; 0,4; 3,5; 0,5; 2,2; **№9.** а) 50 км, б) 73 км, в) 14,(285714); 55,(6); г) 18 км.
*Урок 1.4.* **№2.** $\frac{13}{30}$; **№3.** а) $\frac{2}{9}$; $1\frac{1}{3}$; $3\frac{6}{11}$; $21\frac{23}{99}$; $\frac{673}{999}$; $7\frac{256}{999}$; $16\frac{2}{999}$; $\frac{1}{9999}$; $5\frac{1}{99}$; б) $\frac{2}{15}$; $1\frac{23}{90}$; $7\frac{2}{45}$; $2\frac{107}{450}$; $10\frac{8}{55}$; $\frac{1279}{4950}$; $16\frac{497}{990}$; $\frac{1}{9000}$; **№4.** а) $10\frac{2}{3}$; б) $2\frac{5}{9}$; в) $15\frac{53}{99}$; г) 118; д) $3\frac{1}{6}$; е) $-2\frac{355}{999}$; **№6.** а) $\frac{2}{165}$; б) $16\frac{1}{14}$; в) 140; г) $13\frac{19}{27}$; **№7.** $104\frac{4}{27}$; **№9.** а) 8 месяц, б) 10000 г, в) $287\frac{1}{3}$; **№10.** а) $8\frac{m}{9}$, б) $\frac{\overline{nmk}-n}{990}$; **№11.** $\frac{a}{9}$; $7\frac{9b+a}{90}$; **№13.** а) 12, б) $-\frac{53}{99}$, в) 5, г) 11.
*Урок 1.5.* **№2.** $-3{,}(5)$; $-3\frac{1}{32}$; $\frac{-15}{7}$; $\frac{-2}{5}$; $\frac{-4}{15}$; $\frac{2}{25}$; 0,3; $\frac{20}{7}$; **№3.** $\frac{9}{4}$; $\frac{5}{24}$; 0,07; $\frac{-1}{12}$; $\frac{-5}{9}$; $\frac{-4}{3}$; $-2{,}(6)$; $-7\frac{1}{2}$; **№4.** а) (–5;–4), б) (–1; 0), в) (4; 5), г) (–92; –91) д) (–1; 0), е) (9;10); **№8.** б) $\frac{1}{3}n>3n$; в) $|0{,}5\,m|<|m|$; **№9.** б) $b-a>b+a$; в) $|b+a|<|b-a|$; **№10.** а) нельзя, б) первое число меньше второго; **№ 13.** 1. а) 21,6; б) 26,1; в) 41,4; 2. а) 27,8, б) $11\frac{166}{225}$; в) $3\frac{4}{45}$; **№14.** $\frac{6}{35}<\frac{9}{10}$.
*Урок 1.6.* **№ 5.** а) $|x|\le 4$, б) $-1\le x\le 1$, в) $-20\le x\le -1$, г) $x\ge 2$, д) $x\le -9$, е) $|x|<-3$; **№ 7.** а) –9 и 9, б) –7 и 7, в) –27 и 27, г) –1 и 9.
*Урок 1.7.* **№2.** а) 16,335, б) –8,246, в) –3,56, г) –27,99, д) –1,95, з) –0,004, и) 60; **№3.** а) $-2\frac{2}{3}$; б) –2, в) $-2\frac{5}{7}$; г) 0,09, е) –21, ж) –2000, и) –1,7, k) 5, л) –9100; **№4.** г) нет смысла, д) нет смысла, е) есть смысл; **№5.** а) $2\frac{24}{25}$; б) $1\frac{11}{25}$; в) $-2\frac{104}{313}$; **№7.** а) 4,8; б) 0,8; в) $1\frac{5}{19}$; г) $-\frac{3}{74}$; д) $11\frac{5}{8}$; **№9.** а) 2; б) 3; в) 6, г) 32. **№10.** а) 9; б) $\frac{5}{6}$
*Урок 1.8.* **№3.** а){1; 8}, б) {8; $a$}, г) {$a$; $b$; $u$; $j$; $f$; 2; 5; 8; 10}, е) {8}, и) {$u$; 10}; **№5.** 83; **№6.** а) 18, б) 14, в) 7; **№7.** 5; **№8.** 30; **№10.** 17; **№11.** 6; **№12.** а) 32, б) 21, в) 10.
*Урок 1.11.* **№2.** 17,4 см; **№3.** 69 см; **№4.** 94 см.
*Урок 1.12.* **№6.** а) 30°, б) 4,9 см, в) 90° ; **№8.** AM – высота, AP – медиана, AK – биссектриса.
*Урок 1.13*. **№7.** 1,7 см, 0,9 см, 2,6 см.

## ГЛАВА II

*Урок 2.1.* **№4.** г) $\frac{81}{256}$, д) $\frac{1024}{243}$, ж) $\frac{196}{81}$, к) $-\frac{729}{64}$, л) $\frac{4}{9}$; **№6.** а) 69,9, б) –0,3, в) 116,5; г) 5,8, д) 21,9, е) 2982,5, ж) –1,2, з) 4154,9; **№8.** Последняя цифра числа $2^{18}$ – 4; последняя цифра числа $3^{25}$ – 3; последняя цифра числа $4^{89}$ – 4; последняя цифра числа $5^{100}$ – 5; последняя цифра числа $10^{99}$ – 0;

последняя цифра числа $8^{54}-4$; **№10.** б) $-\frac{63}{256}$; **№14.** а) $0^n$; $0{,}6^n$; $(-1{,}7)^n$; $(-5)^n$; $7^n$; **№15.** а) чётное, б) нечётное, в) чётное, г) нечётное, д) чётное или нечётное, е) чётное или нечётное; **№17.** г) $(-0{,}(1))^5$; $(-0{,}(1))^7$; $(-0{,}(1))^2$.

***Урок 2.2.*** **№3.** а) 1024, б) $10^{10}$; в) 59049; г) $\frac{1024}{59049}$; **№6.** а) $2^8$; б) $2^7$; в) $2^{10}$; г) $2^8$; д) $2^{14}$; е) $2^{13}$; **№7.** б) $3^7$; е) $3^{10}$; **№8.** а) 3, б) 6; в) 3; г) 5; д) 3; **№9.** а)$5^{2n-2}$; б)$17^{2m}$; в) $6^4$.

***Урок 2.3.*** **№3.** а) 27, б) 1000; в) –8; г) $\frac{1}{343}$; **№6.** а) $\frac{361}{49}$; в) 0,49 ; г) 27; д) 2; ж)$5^9$; з) 1; и) 0,7; **№8.** а) $c^6$; б) $c^7$; в) $c^{10}$; е) $c^{25}$; **№10.** 1) 105,12; 2) –16; 3) $\frac{164}{125}$; **№12.** а) $x^4$; в) $\frac{1}{k^5}$; д) 2; **№13.** а) 7; б) $a$; в) $11^3$; г) $3^{19}$; д) $4^7$; е) $m^3$.

***Урок 2.4.*** **№7.** а) $3^8 < 27^3$; в) $25^3 = 125^2$; **№9.** а) 2; б) 81; в)13.

***Урок 2.5.*** **№2.** Ответ Фарида; **№3.** ж) $-0{,}125b^3d^3$; **№5.** Площадь квадрата увеличится во столько раз, на сколько раз увеличивается квадрат числа стороны; объём куба увеличивается во столько раз, на сколько раз увеличивается куб числа ребра; **№7.** б) $\left(\frac{7}{8}am\right)^{12}$; г) $(-3b^2k^3)^3$; ж) $(4a)^3$; и) $\left(\frac{5}{8}x^8y^6\right)^2$.

***Урок 2.6.*** **№2.** а)$14a^4b^5c^2$; б) $-15x^3y^5$; **№3.** д) $-0{,}36m^3n$; **№4.** е) $-0{,}1b^4n^7$; **№6.** б) $\left(\frac{5}{2}a^9b^3\right)^2$ в) $\left(-\frac{1}{5}mnk^2\right)^3$; е) $(0{,}2p^3k^7)^3$; **№11.** а) $4a^4b^3c^2$; б) $-0{,}5bc^5k^5$; в) $1{,}5x^4y$; е) $3x^4y^5$; **№12.** 1) $2ab$; 2) $6xy$; 3) $11\frac{2}{3}bc$; **№13.** а) $4a^4bc$ б) $219{,}8x^5$; в) $\frac{729}{64}m^{18}$.

***Урок 2.7.*** **№6.** а) 0,47; б) –1167; в) 600; г) 0; **№7.** в) 63; г) –28; е) 34,1; ё) –468; ж) 300; з) 1,12; л) 240100; **№8.** а) 4; б) 1968; в) 1993; г) 1995.

***Урок 2.8.*** **№1.** а) 1; б) 1; г) $a^{80}$; **№2.** а) $3^7$; б) 1; в) $5^5$; г) 4096; **№3.** а) $1{,}2\cdot 2^n$; б) $\frac{5}{6}$; в) $1\frac{2}{3}$; г) $\frac{k}{m}$; **№4.** а) 0; б) $\frac{7}{9}$; **№5.** б) $a^{n-1}$; в) $a^{n+3}$; г) $a^3$; е) $a^{2n+5}$; **№6.** а) $1\frac{1}{49}$; б) $-\frac{4}{9}$; **№7.** Последней цифрой числа должна быть 0; 1 или 5.

***Урок 2.9.*** **№2.** 750 ман.; **№3.** а) 12,5 %; б) 6200 ман. и 8680 ман.; **№4.** 1) 14%; 2) 2000 ман.; 3) 3 года; 4) 15050 ман.; а) 3420 ман.; б) 7535,5 ман.; в) 3600 ман.; **№5.** 30000 ман.; **№7.** 4800 ман.13,3%; **№8.** а) 8 года; б) 16 года; **№9.** а) 4 месяцев; б) 6 месяцев; в) 12 месяцев; г) 18 месяцев.

***Урок 2.10.*** **№1.** 847 ман.; **№ 2.** 60500 ман.; **№ 3.** 51200 ман.; **№4.** а) 3037,5 ман. и 3345 ман.; б) 6305,645 ман. и 14815,44 ман.; в) 5200 ман. və 5290 ман.; **№7.** а) 5312,5 ман.; б) 5781,25 ман. **№8.** $1{,}15^5 \approx 2$.

***Урок 2.11.*** **№3.** а) $\Delta ABC \cong \Delta FED$, б) $\Delta CBA \cong \Delta DEF$, в) $\Delta BAC \cong \Delta CDB$; **№6.** $\Delta ABC \cong \Delta MNP$, $\Delta ADC \cong \Delta MKP$.

***Урок 2.12.*** **№3.** $AB \cong KL \cong DE$, $AC \cong KM \cong DF$, $BC \cong LM \cong EF$, $\angle A \cong \angle K \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle L \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle M \cong \angle F$. **№13.** б) 33,6 м²; в) 560

***Урок 2.13.*** **№12.** а) 73°24′; 66°12′; 125°6′; 41°55′48″; 12°30′;б) 12,6°; ≈ 44,3°; ≈ 54,1°; ≈ 136°. **№13.** а) 29°24′1″; в) 201°38′3″;г) 16°59′50″; д) 74°12′17″; е) 44°15′15″; ж) 47°12′; з) 50°29′; и) 20°55′. **№14.** 119°19′.

***Урок 2.14.*** **№11.** а) 55°, 55°, 70°; б) 44°, 44°, 92°; в) 32°, 74°, 74°; **№13.** 12 см; **№17.** 58°, 61°, 61° или 64°, 58°, 58°.

***Урок 2.16.*** **№13.** 25°, 3 см.

## ГЛАВА III

***Урок 3.1.*** **№2.** а) $3a^3+2a^2+3a+5$; **№4.** б) $-3x^4+9x^2+x$; г) $6a^3+3a^2-a-42$; **№5.** а) $3a^2+12b$; б) $12a^3-9a^2-2b$; г) $3a^2+b$; **№6.** а)$21p^3-p^2$ свободный член 0, степень 3; в) $8x^6-2x^5-6x^3$, свободный член 0, степень 6; г) $14ab^2-0{,}2b^3-1$, свободный член –1, степень 3; **№7.** а) 7, б) 3, в) 1; г) 3; д) 5; е) 2; **№8.** а) $a^2-3a+4{,}23$; б) нет, $100x-x^2$; да, $x^3+2x-12$.

***Урок 3.2.*** **№1.** $5x^3-12x-7$, свойство перестановки сложения; **№2.** а) $5x-6$; б) $3x^2+7x-1$; в) $3x^3+6x-3$; г) $2a^3+5a^2-27$; **№3.** а)$12a-b$; б) $-2a^2+16a-1$; г) $0{,}27x^2-0{,}06y^2$; **№4.** а) $a^2$; б) $-a^2+6ab-9b^2$; **№5.** $5(n+2)$, делится на 5; $4n+6$, не делится на 4.

***Урок 3.3.*** **№1.** Многочлены а) $6a^3-4a+3$ и б) $-6a^3+4a-3$ обратны друг другу;
**№2.** а) $(6x^2+4x+5)-(2x^2+2x+4) = 4x^2+2x+1$; б) $(2x^3+3x^2+x-3)-(x^3+2x^2) = x^3+x^2+x-3$.
**№3.** а) $4m+2$; б) 2; в) $2a^3+2a+2$; **№4.** б) $6x^3+6x^2-8x-4$; **№5.** г) 473,46 ман., 538,2 ман., 938,34 ман., 333,06 ман.; **№6.** $(x^2-4)$ см²; **№8.** а) $-12y^2-16y+10$, степень 2; б) $-8x^2+5x-10$, степень 2; г) $-10x^5+13x^3-13x^2-7$ степень 5, **№10.** а) $5a-b-11c$; б) $8x^3+2x-4x$ ; г) $1{,}4a^3-3b^3+2$; **№11.** а) $-1\frac{3}{4}b^3-5\frac{3}{5}b$; б) $\frac{1}{4}b^3+10\frac{4}{5}b$; в) $2\frac{1}{4}b^3+2\frac{2}{5}b$; г) $1\frac{3}{4}b^3+5\frac{3}{5}b$.

*Урок 3.4.* **№1.** а) $x\cdot(x+4) = x^2+4x$; б) $2x\cdot(x+3) = 2x^2+6x$; в) $x(2x+5) =2x^2+5x$; **№2.** а) $2x^2+8x$; б) $3x^2+x$; в) $3x^2+6x$; **№3.** е) $-20c^7-4c^5$, степень 7, свободный член 0; з) $40x^8 +30x^7-50x^5$, степень 8, свободный член 0; и) $7n^5+11n^4-n^2$; к) $8a^3b^4+10a^2b^4-4{,}2a^2b^2$, степень 7, свободный член 0; м) $3{,}3x^2y^3+6x^3y^5-1{,}5x^3y^3+6{,}9x^2y^6$, степень 8, свободный член 0; **№4.** $3a^2b+6ab^2+3abc$; **№5.** 156 см$^2$ и 624 м$^2$; **№6.** а) $10x^5+6x^4-10x^3-6x^2$; б) $14a^8b+42a^6b^2+35a^4b+21a^3b^2$; **№7.** к) $-2a^3y^7+ a^4by^5+a^5y^5$; **№8.** а) 7; е) 24; **№9.** а) 0,5; б) –2; в) 1,6; г) –2; **№10.** 8 см, 16 см, 20 см.

*Урок 3.5.* **№1.** а) $(2x+2)(x+1) = 2x^2+4x+2$; б) $(x+2)(x+2) = x^2+4x+4$; в) $(3x+2)(x+1) = 3x^2+5x+2$; г) $(2x+1)(x+3) = 2x^2+7x+3$; **№2.** а) $(x+3)(x+3) = x^2+6x+9$; б) $(x+4)(x+1) = x^2+5x+4$; в) $(2x+1)(x+3) = 2x^2+7x+3$; д) $(2x+3)(x+4)=2x^2+11x+12$; **№ 4.** $x^2+70x+1200$; **№ 5.** $(2x+1)(x+2) = (x+2)(2x+1)$, Переместительное свойство умножения; **№ 6.** а) $x^3-x-6$; г) $30x^4-61x^2y^2+30y^4$; ж) $p+pq-q-q^2$; **№ 7.** д) $\frac{3}{4}a^2b+2\frac{1}{2}ab^2-12b^3+\frac{1}{2}a+3b$; **№ 9.** а) $a+9$; б) $a-9$; в) $-\frac{a+2}{2}$; г) $4-a$;

*Урок 3.6.* **№ 2.** а) $(a+b)(a+c)$; б) $(2a+b)(a+d)$; **№ 4.** а) $(a+6)(b+x)$; б) $(n-k)(m-x)$; в) $(x+y)(a-2d)$; г) $(1-x)(1+b)$; **№ 5.** а) $(x+1)(x^2+1)$; б) $(a-b)(a-8)$; в) $(y^2-1)(y^3-1)$; г) $(a+b)(b-5)$; д) $(a+2)(a^3-1)$; е) $(x+y)(7-x)$; ж) $(b^2-3)(b^4-2)$; з) $(m+n)(k-n)$; **№ 7.** $(x+1)(x+5)$; **№ 8.** а) $(a-1)(a-4)$; б) $(a-8)(a+2)$; в) $(x+y)(x+8y)$; г) $(a+b)(a+6b)$; д) $(y-x)(y-8x)$: е) $(m-n)(m-4n)$; **№ 9.** Каждая группировка верна, $(m+n)(2a-3b) = (2a-3b)(m+n)$; **№ 10.** а) 91; б) –0,625; в) –30,8; г) –0,33; **№ 11.** а) 15600; б) 12500; в) 550; г) 28; **№ 12.** Один из множителей должен быть «0»; **№ 13.** а) $x_1 = 8$, $x_2 = -2$; б) $y_1 = 12$, $y_2=-1$; в) $a = -4$, $a_2 =1$; д) $x_1= 4$, $x_2= -7$; е) $x_1= 2$, $x_2= -0{,}2$; **№ 14.** а) $-35b^2$, $3a^2$, $7b$; б) $10xy^2$, $2x$,$7y$; в) $3n^3$, $6m^3$, $n^3$, $4m$, 3; г) 15, $2y$, $3{,}18y^4$, 5.

*Урок 3.7.* **№6.** 8 см.

*Урок 3.11.* **№ 4.** $(a-m)(b-m) = ab - am -bm + m^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $(a-b)(a-b) = a^2-2ab + b^2$, $n-m =-(m-n)$; **№ 6.** а) $+7a$; б) +1; в) $+ m$; г) +5; **№ 7.** а) 25; б) 78; в) 16.

*Урок 3.12.* **№1** а) 0,13; б) –2; в) $1\frac{2}{3}$; г) –1; д) 2; е) 4; ж) $\frac{2}{11}$; з) 7; и) 13; **№2.** а) 2,4; б) –12; в) 3; г) $\frac{1}{2}$; д) 0,5; е) 1; **№3.** а) –2; б) 0; в) 1,75; г) 0,8; **№4.** а) $-5\frac{6}{7}$; б) 7,5; в) 15; г) 24; **№5.** а) 41; б) 13; в) 0; г) –153; д) 6; е) 1,1; **№6.** а) 10; б) 8; в) 1,6; г) 7; **№7.** **а)** 5,–5; б) $\varnothing$; в) 3,3 и 2,7; г) $-5\frac{2}{3}$; д) 6 и –6; е) 28 и –12; ж) $\varnothing$; з) 3 и –3; **№8.** а) 2,3 и 0,5; б) 7; в) $\varnothing$; г) –1 и 3; д) $7\frac{7}{8}$ и $6\frac{1}{8}$; е) 1 и $-\frac{5}{7}$;

*Урок 3.13.* **№3.** 12,4 и 12,6.

*Урок 3.14.* **№1.** 0,345 и 0,0431; **№2.** 2% и 0,0204; **№7.** 0,049.

## ГЛАВА IV

*Урок 4.1.* **№4.** а) $b$, $a$, $a$; б) 10, 100; в) $a$, 25, $10a$; г) 140; **№5.** а) $25y^2 - 30xy + 9x^2$; б) $0{,}09a^2-2{,}4ax + 16x^2$; в) $100c^2 + 2bc + 0{,}01b^2$; г) $49p^2 - 14pk +k^2$; д) $144 + 192k + 64k^2$; е) $x^2 - 2xy + 9y^2$; ж) $0{,}36 + 2{,}4x + 4x^2$; з) $16a^2+8ab+b^2$; и) $144a^2 - 7{,}2ac+0{,}09c^2$; k) $0{,}04m^2 + 2mn + 25n^2$; **№6.** а) 10201; б) 9801; в) 3721; г) 39601; д) 998001; е) 494209; ж) 98,01; з) 104,04; и) 93025; й) 1002001; к) 358801; л) 99,6004; **№9.** а) $x^4 + 20x^2 + 100$; $x^4 - 20x^2 + 100$; б) $49 - 14y^3 + y^6$; $49 + 14y^3 + y^6$; в) $-8ab^4$; **№10.** а) $x^4-6x^3+9x^2$; б) $c^4-1{,}4c^5+0{,}49c^6$; в) $\frac{9}{4}a^{10}+24a^7+64a^4$; г) $\frac{1}{4}x^6+6x^4+36x^2$; д) $4y^6-2y^5+0{,}25y^4$; е) $\frac{9}{16}x^6+x^3+\frac{4}{9}$; **№12.** а) $144m^2-24m$; б) $154x-49x^2$; в) $14a$; г) $4a^2+36b^2$; д) $18ab-81$; е) $-18a^2-162$; **№13.** а) $2x^2 + 3x + 9$; б) $-5b+14$; в) $4a^2$; г) $-21b-4$; **№14.** а) 1,7; б) 2,2; в) $\frac{5}{12}$; г) 3,125; д) 1; **№17.** а) $a^3+3a^2+3a+1$; б) $a^3-6a^2+12a-8$; в) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$; г) $8a^3- 36a^2+54a-27$.

*Урок 4.2.* **№1.** а) $x^2-6x+9$; б) $4x^2-4x+1$; в) $x^2+6x+9$; г) $x^2-6x+9$; д) $x^2+5x+6$; е) $2x^2-7x+6$; **№4.** а) $(9a+b)^2$; б) $(10xy-1)^2$; в) $(7x+2y)^2$; г) $(5a-7b)^2$; д) $(3c+4d)^2$; е) $(4-a^2b^2)^2$; **№5.** а) $16a^2$; б) $x^2$; в) $2bc$; г) $5ab$; д) $81a^2$; е) $16y^2$; **№6.** $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$; **№7.** а) $-15ab$ вместо $-30ab$ ; б) $-6xy$ вместо $-3xy$ ; в) $-\frac{1}{15}xc$; вместо $-\frac{2}{15}xy$ **№8.** а) $7y$, $25x^2$, $49y^2$; б) $10b$, $81a^2$, $18ab$; в) $-3n$, $9n^2$, $100a^2$; г) $-5m$,$8n$, $64n^2$; **№9.** а) НМЗ: 5; б) НМЗ: 4; в) НБЗ : –1; г) НМЗ: 5; д) НМЗ: 2; е) НМЗ: 4; **№10.** а) 676; б) 2116; в) 400; г) 256; д) 12544; е) –5184.

***Урок 4.3.*** **№ 3.** а) $x^2-y^2$; б) $a^2-9$; в) $p^2-q^2$; г) $n^2-9m^2$; д) $16y^2-49$; е) $\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}y^2$; ж) $64c^2-81d^2$; з) $100x^2-\frac{81}{49}$; **№4.** а) $4a^2-1$; б) $a^2-4$; в) $4m^2-9$; **№5.** а) $x^4-49$; б) $a^8-b^6$; в) $c^{10}-k^{14}$; г) $81x^2-b^4$; д) $0,49a^6-b^2$; е) $25c^{16}-9k^2$; ж) $100p^4-0,09q^4$; з) $1,96a^{10}-0,01b^8$; **№8.** а) 9999; б) 1591; в) 2496; г) 39999; д) 0,75; е) 3,75; ж) 288,91; и) 899,96; й) 489999; к) 9991; л) 89975; **№9.** а) $x^2-y^2$; б) $-x^2-2xy-y^2$; в) $b^2-2ab+a^2$; г) $-x^2+2xy-y^2$; д) $c^2-b^2$; **№10.** а) $a^2-25x^2y^2$; б) $4a^4b^2-9$; д) $81x^2-289a^6$; г) $100y^2-0,04x^2$; е) $1,21y^2-0,09$; ж) $49-36x^2$; з) $\frac{1}{9}-4y^2$; и) $16-\frac{1}{9}b^2$; й) $\frac{64}{49}-16a^2$; **№12.** НМЗ: –0,09; а) НМЗ: –0,04; б) НМЗ: –225; в) НБЗ: 1,44; **№13.** а) $(2x-3)(2x+3)$; б) $(x-3)(x+3)$; в) $(2x+2)(2x-2)$; **№15.** а) $(6a-b)(6a+b)$; б) $(4m-3n)(4m+3n)$; в) $(k-ab)(k+ab)$; г) $(5n-x)(5n+x)$; д) $(8x-11y)(8x+11y)$; е) $(2ab-1)(2ab+1)$; ж) $(9a-7)(9a+7)$; з) $(12b-7m)(12b+7m)$; и) $(p-ab)(p+ab)$; й) $(0,1n-3m)(0,1n+3m)$; к) $(0,3x-0,7y)(0,3+0,7y)$; л) $(ax-1,1m^2)(ax+1,1m^2)$; **№16.** а) 1160; б) 251; в) 0,788; г) –2280; д) 8,33; е) $13\frac{1}{3}$; **№17.** а) $\frac{3}{4}$; б) 0,2; в) $\frac{4}{7}$; г) $4\frac{3}{8}$; **№18.** а) $x^2-225$; б) $-1-8a^2$; в) $b^2+9$; г) $75x^2+16$; д) $x^2+1$; е) $5x^2+0,25$; **№19.** а) $a^4-b^4$; б) $16x^4-y^4$; в) $m^{12}-b^4$; г) $a^4-1$; **№20.** а) верно; **№21.** а) –12; 8; б) –4; 4; в) –0,5; 0,5; г) $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$; д) $-2\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$; е) $-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$; и) –1,5; 1,5; к) $-\frac{9}{7}$, $\frac{9}{7}$; **№24.** а) $2a^2-40a+12$; б) $1-8b$; в) $8x^2$; г) $242a^2-66ab$; **№25.** а) $(x-1)(x+7)$; б) $8(2a-3)(a+1)$; в) $4(7-x)(2+x)$; г) $-(1+4y)(1+10y)$; д) $4(2x-1)(5x+1)$; е) $a\cdot(a+22)$; ж) $4ab$; з) $4mn$; и) $-40x$; й) $4(c-2x)(3c+x)$.

***Урок 4.4.*** **№4.** а) 42875; б) 1771,561; в) 140608; г) 79507; д) 8012,006001; **№ 5.** а) 1,03 (а.п. 0,000301); б) 1,12 (а.п. 0,004864); в) 0,97 (а.п. 0,000299); г) 1,3 (а.п. 0,031); д) 0,988 (а.п. 0,000047936); **№ 6.** а) X = $ab$, Y = $a^3b^3$; б) X = $2a$; в) X = $2a^3$; г) X = $3a$, Y = $27a^3$; д) X = $ab^4$, Y= $a^3b^{12}$; **№7.** а) $x^6-3x^4y^4++3x^2y^8-y^{12}$; б) $-a^{15}-3a^{10}b^7-3a^5b^{14}-b^{21}$; в) $27x^6-189x^4y^2+441x^2y^4-343y^6$; г) $-64m^{12}-48m^8n^5-12m^4n^{10}-n^{15}$; д) $\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{3}a^2b^8+2ab^{16}+b^{24}$; ж) $a^3b^9-\frac{9}{4}a^2b^6+\frac{27}{16}ab^3-\frac{27}{64}$; з) $-\frac{1}{125}m^3-\frac{9}{50}m^2n-\frac{27}{20}mn^2-\frac{27}{8}n^3$; **№8.** 110; **№10.** а) $6a^2b+2b^3$; б) $-54m^2n-2n^3$; в) $x^3+y^3$; г) $-a^3-b^3$; д) $a^3-b^3$; е) $3mn^2-3m^2n$; **№11.** б) 1001; в) 674336; **№12.** а) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{8}x+\frac{189}{64}$; б) $\frac{18}{49}x^3-\frac{435}{196}x^2+\frac{615}{112}x-\frac{91}{64}$; в) $42x^3+48x^2y+84xy^2-49y^3$; г) $\frac{7}{72}x^3+3\frac{1}{4}x^2+13\frac{1}{3}x+20\frac{31}{108}$; **№13.** а) $27a^3b^6+27a^5b^6+9a^7b^6+a^9b^6$; б) $m^{12}n^{15}-9m^9n^{11}+27m^6n^7-27m^3n^3$; в) $\frac{8}{125}x^{12}y^9+\frac{6}{25}x^9y^{13}+\frac{3}{10}x^6y^{17}+\frac{1}{8}x^3y^{21}$; г) $343a^3b^3c^9-441a^4b^3c^7+189a^3b^3c^5-27a^6b^3c^3$; д) $0,001x^{18}y^6c^{30}-0,006x^{12}y^4c^{20}+0,012x^6y^2c^{10}-0,008$; е) $a^3b^{15}c^{12}+3,6a^3b^{11}c^{13}+4,32a^3b^7c^6+1,728a^3b^3c^3$.

***Урок 4.5.*** **№3.** а) $8p^3+27$; б) $27n^3+m^6$; в) $1+64b^3$; г) $27a^3+d^{24}$; д) $125m^3n^3+1$; **№4.** а) $-a^3-b^3$; б) $-a^3-b^3$; в) $a^3+b^3$; г) $-a^3-b^3$; **№5.** а) $x^9+y^{15}$; б) $27d^6+8c^3$; в) $125+y^{18}$; г) $27r^{12}+64s^{15}$; **№6.** а) 144; б) 3600; в) –1599; г) –2496; **№7.** а) $3y$; б) $2d^3$; **№8.** а) 2; б) $-4\frac{2}{3}$; в) 4; г) 2; **№9.** а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$; б) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; в) $(2a+1)(4a^2-2a+1)$; г) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$; д) $\left(\frac{1}{4}a+0,2\right)\left(\frac{1}{16}a^2-0,05a+0,04\right)$; е) $(4m+3n)(16m^2-12mn+9n^2)$; ж) $-(ab+b^2)(a^2b^2-ab^3+b^4)$; з) $(5+k^2)(25-5k^2+^4)$; и) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{5}y\right)\left(\frac{1}{19}x^2-\frac{4}{15}xy+\frac{16}{25}y^2\right)$; й) $(pqr+5p^3)(p^2q^2r^2-5p^4qr+25p^6)$; к) $(0,3+4a)(0,09-1,2a+16a^2)$; л) $(7+x^4)(49-7x^4+x^8)$; **№10.** $7\cdot17(75^2-75\cdot44+44^2)$; б) $103\cdot(215^2-215\cdot94+94^2)$; **№12.** б) 903<904; **№13.** а) 58,5; б) –56; **№14.** а) A = $3y$, B = $4x^2-6xy$, D = $3y$, C = $2x$; б) A = $n^2$, B = $9m^2+3mn^2$, C = $n^4$, D = $27m^3$; **№15.** а) 103,3; б) –37; в) 37; **№16.** а) $(2x+1)(x^2+x+1)$; б) $a(a^2-3ab+3b^2)$; в) $(x-y)(3x^2+y^2)$; д) $(y+1)(y^2-7y+19)$; е) $(4m+n)(7m^2-mn+n^2)$; **№17.** а) $10^6$; б) 512; в) 1000; г) –0,000064; **№18.** 7, остатка не будет.

***Урок 4.6.*** **№2.** а) $b^3-1$; б) $64m^3-27n^6$; в) $27-d^3$; г) $0,512x^{18}-0,216y^{21}$; д) $125k^3-343p^3$; е) $\frac{1}{8}x^9-\frac{1}{27}y^{12}$;

**№3.** а) 43; б) –35; **№4.** а) A = $5y$; B = $20xy + 16x^2$; C = $125y^3$; D = $64x^3$; б) A = $2c^4$; D = $5p$; B = $25p^2 + 10pc^4$; C = $4c^8$; **№5.** а) $(a–4)(a^2+4a+16)$; б) $(3c–10)(9c^2+30c+100)$; в) $(3p–2k)(9p^2+6pk+4k^2)$; г) $(1–5a^2)(1+5a^{2+}25a^4)$; д) $(6–0{,}1q)(36+0{,}6q+0{,}01q^2)$; е) $(4y^2–x^3)(16y^{4+}4x^3y^{2+}x^6)$; ж) $(7a^4–b^3)(49a^{8+}7a^4b^{3+}b^6)$; з) $(ab^2c^3–d^2)(a^2b^4c^{6+}ab^2c^3d^2+d^4)$; **№7.** а) 22500; б) 4029; **№8.** а) $(a+3)(a^2+18a+93)$; б) $(9b+2)(81b^2+117b+49)$; в) $–2c^6(2c+3)(31c^2–42c+36)$; г) $2y(12x^2+y^2)$; д) $10y(48x^2+25y^2)$; е) $(x^2y^3–4x)(x^4y^6+4x^3y^3+16x^2)$; **№9.** а) 2197; б) 389,017; в) $-857\frac{3}{8}$; г) 39,304; **№ 12.** 333.

***Урок 4.7.*** **№1.** а) $x^4(4+x)$; б) $(b–c)(a+2)$; в) $(3m–4n)(3m+4n)$; г) $(5a–3b)^2$; **№2.** $(a–x)(a^3+ax^2+a^2x+x^3–ax)$; **№3.** а) $5b(a^2–b)$; б) $7a(b–c)(b+c)$; в) $2c(a^4–8b^4)$; г) $cd(2c–3d)(2c+3d)$; д) $–n(64m^2+27)$; е) $9m(n^6–13)$; ж) $6x^2(y–2z)(y+2z)$; з) $2y(x^2–8)$; и) $7q(p–q)(p+q)(p^2+pq+q^2)(p^2–pq+q^2)$; **№4.** а) $3y(x+y)^2$; б) $(a–b–c)(a–b+c)$; в) $(a–b)(a+b–1)$; г) $5(a–b)^2$; д) $(x+y+z)(x+y–z)$; е) $(c+d)(1+c–d)$; ж) $7x(y+2)^2$; з) $(3–m+2n)(3+m–2n)$; и) $(x–y)^2(x+y)$; й) $2z(1^2–t)^2$; к) $(2p^2–5q^2–6)(2p^2–5q+6)$; л) $(m+n)^2(m–n)$; **№5.** а) 0 и 4; б) 0, ±3; в) 0, ±1; г) 0, –8; д) 0, ±5; е) 5, ±3; ж) 0; 11; з) 0; 1; и) –3, ±2; **№6.** а) –6; б) 21; в) 810; г) –638; д) –2800; е) 9513; **№7.** а) 13420; в) 30; г) 146,25; д) 2,205; **№8.** а) 230; б) 360; в) 860; г) 180; д) $\frac{10}{37}$; е) $-\frac{1}{51}$; з) $-\frac{1}{5}$; **№9.** а) $(x+1)^2$; **№10.** $3(a–1)(a+3)$; **№11.** а) $(a–1)(a+5)$; б) $(b–9)(b–1)$; в) $2(x–2)(x+10)$; г) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$; д) $(y–4)(y+1{,}5)$; е) $(a-3)\left(a-\frac{1}{2}\right)$.

***Урок 4.8.*** **№7.** 180°; **№8.** 540°; **№9.** 264°.

***Урок 4.9.*** **№2.** а) MN||CD; б) MN и CD не параллельны; г) MN и CD параллельны; **№3.** а) можно; б) можно; в) нельзя; **№4.** $a||b$, $b$ и $c$ не параллельны, $a$ и $c$ не параллельны; **№6.** CK||AB;

***Урок 4.10.*** **№5.** а) 50°; б) 172°, 8°; в) 112°; г) 30°, 150°; **№6.** 75° и 105°; **№9.** а) 53°; б) 109°; в) 79°; г) 70°; д) 69°, 54°, 57°; **№ 10.** 88°, 92°; **№11.** 1) 105° и 75°; 2) 52° и 128°; 3) 75° и 105°; **№12.** AB||$a$; **№13.** AC||BD; **№15.** 1) 50°; 2) 70°.

***Урок 4.11.*** **№5.** а) 45°; б) 118°; б) 28° и 152°; **№6.** а) 150° и 30°; б) 10800.

***Урок 4.12.*** **№3.** а) 56° или 124°; б) 40° и 140°; в) 135° и 45°; г) в I случае 48° и 48°; во II случае 104° и 76°; **№5.** а) 66°; б) 92°; в) 78° и 102$^0$.

## ГЛАВА V

***Урок 5.1.*** **№2.** а) –16; –8; 0; 8; 16; г) –12; –2; 8; 18; 28; **№3.** б) – 9; 103; $-1\frac{1}{4}$; **№4.** а) $y = x+1$; б) $y = x^2$; **№5.** а) $2\frac{1}{3}$; $-7\frac{2}{3}$; $1\frac{11}{15}$; б) $-\frac{1}{2}$; 3,1; –1,85; **№6.** а) верно; б) верно; в) неверно; г) неверно; **№9.** е) (4;1); (0; 1); (–1;0) относится; (2;0); (0;–1) не относится.

***Урок 5.2.*** **№5.** в) (0;3) и (–1,5;0); графики будут отличатся размерами; **№6.** M, N, A, B на графике; C не на графике; **№7.** на A, C; B, не на B, D; **№9.** а) острый угол, $y = x+2$; б) $y = –2$; 0$^0$; в) $y = –x+1$; тупой угол; **№10.** 20 см; **№11.** 6 кв.ед.; **№12.** а) верно; б) $k < 0$, верно; в) верно; г) верно; **№13.** а) $k = –1$; б) $k = 0$; **№14.** а) $b = –33$; б) $b = 2$; **№15.** а) тупой угол; б) острый угол; (12; 6); **№16.** а) 4 кв.ед.; б) 3 кв.ед.; в) 4,5 кв.ед.; **№17.** 84,5 кв.ед.;

***Урок 5.3.*** **№5.** а) $k = 2{,}4$; острый угол; б) $k = -\frac{1}{8}$; тупой угол; **№ 6.** а) $y = –2x$; б) $y = x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; **№7.** $x = 0$; $y = 0$; **№9.** а) $y = 5x$; б) $y = –0{,}5x$; **№11.** а) $k < 0$; b > 0; б) $k < 0$; b < 0; в) $k > 0$; b > 0; г) $k > 0$; b < 0;

***Урок 5.4.*** **№2.** а) накладываются друг на друга; б) параллельны; в) накладываются друг на друга; г) пересекаются; **№3.** а) верно; б) не верно; в) не верно; **№6.** а) (4; 13); б) (–4,5; –1,5); в) $\left(1\frac{2}{3};\ -2\frac{1}{3}\right)$; г) (1,25; 8,75).

***Урок 5.5.*** **№1.** а) 120 км, 190 км; б) 160 км; в) 4 час, 2 час; г) 40 км/час; 80 км/час; д) 1 час, 30 минуты; е) 50 км/час, 60 км/час; **№3.** а) 5 час; б) 350 км, 150 км; в) 500 км; г) 70 км/час, 30 км/час; **№5.** 2 час; 2 час 40 минуты; 2 час 24 минуты.

***Урок 5.6.*** **№3.** а) 140°F; б) 59°F; в) 122°F; г) 185°F; д) 86°F; е) 132°F; ж) 145,4°F; ж) 41°F; и) 127,4°F; й) 116,6°F; к) 251,6°F; л) 64,4°F **№4.** а) 5°C; б) 43°C; в) 15°C; г) 65°C; д) 115°C; е) 90°C; ё) 35°; ж) 40°C; з) 26°C; й) 1°C; к) 30°C; л) 37°C; **№5.** 57,2°F; 18°C; 68°F; 24°C; 60,8°F; 17°C; **№6.** 68°F; 86°F; **№7.** 20°C; 23°C.

***Урок 5.7.*** **№4.** (3; –10), (–3; 12), (2; 1) не решение; (1; 2), (0,1; 11) решение. **№6.** оба правы;

**№7.** а) $u = 1\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\upsilon$; $\upsilon = -2$; б) $\upsilon = 4 - 3u$; $\upsilon = -2$; **№8.** а) $y = 3{,}5 - 2x$; г) $y = 7 + 4\frac{2}{3}x$; **№10.** $a = 3$, $y = -3{,}5$; **№12.** а) (–1; 2); б) (5; 1); **№15.** а) 2.

***Урок 5.8.*** **№4.** а) не решение; б) решение; **№6.** а) (1; 2); б) (– 2; 1); в) $\varnothing$; **№8.** а) (1; 4); б) (1; –3); в) (3; 6); г) (3; 9); **№9.** а) (3; 2); б) (1; –1); в) (3; 1); г) (3; 1); **№10.** а) (3; 2); б) (–2; 2); в) (0; 2); г) (1; –1,5); **№16.** а) 1,5; б) $-6\frac{6}{7}$; в) –10; г) $2\frac{2}{3}$; **№17.** а) –6; б) 0,1; в) 24; г) 0,625; **№18.** а) $b \neq -48$; б) $b \neq \frac{7}{32}$; в) $b \neq -10$; г) $b \neq 4{,}5$; **№19.** а) $a = -\frac{3}{7}$; $b \neq -\frac{4}{7}$;; б) $a = -\frac{3}{7}$; $b = \frac{4}{7}$; в) $a \neq -\frac{3}{7}$; **№20.** а) при $m = -0{,}5$ не имеет корня; б) при $m = 0{,}5$ имеет бесконечное множество корней; в) при $m \neq \pm 0{,}5$ имеет только один корень.

***Урок 5.9.*** **№2.** а) $\begin{cases} x + 3y = 6, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2 = 2y + 4, \\ y + 3 = x + 3 \end{cases}$ **№3.** а) (5; 3); б) (0,8; –1,1); в) (4; 3); г) $\left(-\frac{1}{3};\ -5\frac{2}{3}\right)$ д) (0,25; 1); е) $\left(\frac{8}{7};\ -\frac{8}{7}\right)$; **№4.** а) (2; 1); б) (–73;–30); в) $\left(1\frac{2}{21};\ \frac{52}{63}\right)$; г) (1; 6); д) $\left(-\frac{19}{14};\ -\frac{45}{14}\right)$; е) (7; –4,5); **№5.** а) (1; 2); в) (–2; –2); г) (–17; 5); **№6.** а) (10; 6); б) (4,4; 2,4); в) $\left(-1\frac{9}{29};\ -3\frac{18}{29}\right)$; г) (3; 4); д) (5; –3); е) (2; –15); **№7.** а) (18; 6); б) (15; 12); в) (2; 5); г) (5; 4); **№8.** а) (5; –2); б) $\left(3\frac{1}{11};\ 1\frac{9}{11}\right)$; в) $\left(8\frac{1}{2};\ \frac{5}{14}\right)$; г) $\left(-\frac{23}{27};\ \frac{1}{27}\right)$; д) (1; 1); е) (1; –1); **№9.** $m = -0{,}25$; $\left(2\frac{2}{3};\ 0\right)$.

***Урок 5.10.*** **№2.** а) (5; 6); б) (1; 2); в) (2; –4); **№3.** а) (5; 1); б) (1; –0,5); в) (3; 4); г) (–1; 6); д) (12; –21); е) (3; 1); ж) (–2; 1); з) (–4; –3); и) (0,5; –2); й) (2; 6); к) (9; 7); л) (–12; 10); **№4.** а) (2; 1); б) $0{,}5; -1\frac{1}{6}$ в) (–1; 1); **№5.** а) $y = x$; б) $y = -1{,}5x + 11$; в) $y = 6x - 23$; г) $y = -2x - 7$; **№7.** $y = \frac{1}{3}x - 2$; **№9.** а) (8; 9); б) (4; 4); в) (5; 1); г) (2; 7); д) (15; 12); е) (–8; 6); ж) (12; –12); з) (15; 10); и) ( –1; 0); **№10.** а) (3; 1); б) (7; 5); в) (2; 0).

***Урок 5.11.*** **№1.** б) ≈1734; **№2.** 1,6 м, 2,7 м; **№3.** 10 лет, 18 лет; **№4.** 5 мешки, 7 мешки; **№5.** 40 ман., 170 ман.; **№6.** 6 кг, 9 кг; **№7.** 62 л, 78 л; **№8.** а) (20; 3); б) (33; 22); **№9.** 35,75 г, 29,25 г; **№10.** 6 ман., 10 ман.; **№11.** 19 л, 14 л; **№12.** 29.

***Урок 5.12.*** **№1.** а) может; б) не может; в) не может; г) не может; **№2.** а) не может; б) не может; в) может; **№5.** а) 20°, 60°, 100°; б) 32°, 50°, 98°; в) 21°, 75°, 84°; **№6.** а) 72°; б) 61°; в) 120°; г) 23°; **№8.** а) 81°; б) 59°; 48°; **№10.** а) 48°, 72°, 60°; б) 1) 56°, 56°, 68° или 68°, 68°, 44°; 2) 22°, 22°,136°; 3) 40°, 40°, 100°; **№11.** 60°; **№12.** 56°; **№13.** 70°, 25°, 85°; 60°, 25°, 95°;

***Урок 5.13.*** **№1.** б) 37°, 53°; в) 33°, 57°; **№10.** а) 34 мм; б) 28 см; в) 30°, 60°, 90°; **№11.** 30 см; **№12.** 22 мм.

***Урок 5.14.*** **№5.** а) 48°, 32°, 100°; **№6.** а) 100°, 80°; б) 147°, 80°; в) 27°, 37°; г) 23°, 68°; **№7.** а) 12°, 102°; б) 10°, 100°; в) 10°, 80°; **№8.** а) 35°, 35°, 110°; б) 44°, 68°, 68° или 44°, 44°, 92°; **№9.** 90°, 32°, 58° и 90°, 148°, 122°; **№11.** не может.

***Урок 5.15.*** **№3.** а) $\angle C < \angle B < \angle A$, разносторонний; б) $\angle K = \angle N < \angle M$, равнобедренный; **№4.** а) $\angle K < \angle N < \angle M$; б) $\angle A < \angle C < \angle B$; **№6.** Оба правы. **№8.** равнобедренный.

***Урок 5.16.*** **№3.** а) не может, б) не может, в) может; **№4.** в) 27 см 2 мм; **№6.** 6,92 см; **№8.** $7 < c < 18$; **№9.** 37.

***Урок 5.20.*** **№1.** а) 9; б) 12; в)12; **№2.** 6; **№3.** 4; **№4.** 12; **№5.** 21; **№6.** 56; **№7.** а) 36, $\frac{2}{5}$; б) 30, $\frac{1}{3}$; **№8.** а) 6; б) 12; **№9.** 9; **№10.** 20; **№11.** а) 6; б) 12; в) 20; **№12.** 12; **№13.** 16, 100; **№14.** а) 27; 6; б) 48; 12.

***Урок 5.21.*** **№ 1.** а) невозможно; б) невозможно; б) наверно; **№2.** $\frac{1}{2}$; **№3.** $\frac{1}{6}$; **№4.** $P_{\text{пахлава}} = \frac{7}{16}$; $P_{\text{кята}} = \frac{1}{4}$; **№5.** $\frac{12}{17}$; **№6.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{1}{6}$; **№7.** $P = \frac{1}{36}$; **№8.** а) 0,1; б) 0,2; в) 0,08; г) 0,08.

***Урок 5.22.*** **№1.** а) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; **№3.** а) 0,01; б) 0,06; в) 0,07; г) 0,93; **№4.** $\frac{2}{3}$; **№5.** 0,8.

## Использованная литература


***На азербайджанском языке***

1. "Riyaziyyat" test toplusu/M.H.Yaqubov, Ə.F.Quliyev, N.L.Əliyev və s./TQDK, 2015

***На турецком языке***

2. "Algebra 1" – Sürat incorporation company/Ali Çavdar, Ayhan Çaputlu, Coşkun Arslan, Emrah Ayhan, Kasım Yalçınkaya – İstanbul, Türkiyə, 1999
3. "Functions" / Cem Giray-Zambak, 2008
4. "Matematik" 7 sinif ilkoğretim dərs kitabı/Srpil Çiçek Aygün, Nurhayt Aynur, .../Dogan Ofset, İstanbul, 2010
5. "Pre-Algebra – 1", "Pre-Algebra 2"/ A.Gafur Taşkin, Mustafa Kırıçı, Murat Kol-Zambak, 2008
6. "Pre-Geometry" / A.Gafur Taşkin, Mustafa Kırıçı, Murat Kol-Zambak, 2007

***На русском языке***

7. «Алгебра» 7 класс, учебник для общеобразовательных учреждений – 5-е изд./ Г.К.Муравин, К.С.Муравин, О.В.Муравина. М.: Дрофа, 2004
8. «Алгебра» 7 класс, учебник для общеобразовательных учреждений – 5-е изд./ Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков, С.Б.Суворова. М: Просвещение, 2013
9. «Алгебра» 7 класс, учебник для общеобразовательных учреждений – 3-е изд./ А.Г.Мордкович, Н.П.Николаев. М.: Мнемозина, 2011
10. «Теория вероятностей» Примеры и задачи: учебное пособие – 8-е изд.//А.А.Гусак, Е.А.Бричикова. Минск: ТетраСистемс, 2013

***На украинском языке***

11. «Геометрія» 7 класс, Під руч.для 7 кл. загальноосвім.навч.закл./М.İ.Бурда, Н.А.Тарасенкова. К.: Видавничий дім «Освіма», 2011

***На английском языке***

12. "Algebra 1" an integrated approach – published by National Textbook Company/Peter McBride – Lincolnwood (Chicago) – 1998
13. "Algebra 2" an integrated approach – published by National Textbook Company/Peter McBride – Lincolnwood (Chicago) – 1998
14. "Mathematics connections" / Dr.Robert B.Ashlock, Dr.Mary M.Hatfield, Dr. Howard L. Hausher, Mr.John H.Stoeckinger – 1996. USA
15. "Mathematics" Applications and connections/William Collins, Linda Dritsas, Patricia Frey-Mason …/ The McGraw-Hill Companies. 1998

***Интернет-ресурсы***

*http://www.skoool.edu.az/maths59.htm*
*http://portal.edu.az/index.php?r=eresource/view&id=4&lang=az*
*http://www.shagird.info*
*http://www.shagird.az*
*http://edustudio.ru/*
*http://1000zadach.info/*
*mat-ege.ru*
*http://math4school.ru/video_o_matematike.html*
*http://matematika.ucoz.com*
*http://interneturok.ru*
*http://free-math.ru*
*http://4-8class-math-forum.ru*
*http://www.ege-trener.ru*
*http://www.uztest.ru*
*http://www.math.ru*
*http://problems.ru*
*http://urokimatematiki.ru*
*http://www.ixl.com/math/grade-7*
*http://www.math.com/*
*http://interactivesites.weebly.com/math.html*
*http://www.mathsisfun.com*

## Buraxılış məlumatı

**RİYAZİYYAT 7**

*Ümumtəhsil məktəblərinin 7-ci sinfi üçün*
*Riyaziyyat fənni üzrə*

**DƏRSLİK**

*(Rus dilində)*

**Tərtibçi heyət:**

| | |
|---|---|
| Müəllif | **İsmayılova Sevda Camal qızı** |
| Tərcümə edən və ixtisas redaktoru | **Sahib Abdurahimov** |
| Buraxılışa məsul | **Sevil İsmayılova** |
| Baş redaktor | **Ülkər Məmmədova** |
| Üz qabığının dizaynı | **Elşən Qurbanov** |
| Səhifələyici-dizayner | **Aytən Alışova** |
| Redaktor | **Sevda Aşurbəyova** |
| Texniki redaktor | **Fəridə Səmədova** |
| Texniki direktor | **Xəqani Fərzalıyev** |
| Nəşriyyat direktoru | **Eldar Əliyev** |

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi:*
*2018-137*





Hesab-nəşriyyat həcmi. Fiziki çap vərəqi 14. Formatı 70x100 $^{1}/_{16}$.
Səhifə sayı 224. Ofset kağızı. Jurnal qarnituru. Ofset çapı.
Tiraj 10684. Pulsuz. Bakı – 2018.

**“Şərq-Qərb” ASC**
**AZ1123, Bakı, Aşıq Ələsgər küç., 17.**

Pulsuz

## Əziz məktəbli!

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir.

O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sənin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!